9.2 Les polynômes trigonométriques

9.2.1 Définition

Soit $N \in \mathbb{N}$

On appelle polynôme trigonométrique de degré N, une expression P_N de la forme

$$P_N(x) = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ikx}$$

Où les c_k sont des nombres complexes ($c_k \in \mathbb{C}$)

Remarque 5 :

1. Nous avons $P_0(x) = c_0 e^{i0x} = c_0$. Les constantes peuvent donc aussi être considérées comme des polynômes trigonométriques
2. Un polynôme trigonométrique peut aussi s'écrire : $P_N(x) = c_0 + \sum_{k=1}^{N} \left(c_k e^{ikx} + c_{-k} e^{-ikx}\right)$
3. On peut avoir $c_k = c_{-k}$, et alors $P_N(x) = c_0 + \sum_{k=1}^{N} c_k \left(e^{ikx} + e^{-ikx}\right) = c_0 + 2\sum_{k=1}^{N} c_k \cos kx$
4. De même, il est tout autant possible d'avoir $c_k = -c_{-k}$ et alors
$$P_N(x) = c_0 + \sum_{k=1}^{N} c_k \left(e^{ikx} - e^{-ikx}\right) = c_0 + 2i \sum_{k=1}^{N} c_k \sin kx$$
5. En utilisant les fonctions trigonométriques, nous pouvons écrire :
$$\begin{aligned} P_N(x) = & \ c_0 + \sum_{k=1}^{N} c_k (\cos kx + i \sin kx) + \sum_{k=1}^{N} c_{-k} (\cos kx - i \sin kx) \\ = & \ c_0 + \sum_{k=1}^{N} (c_k + c_{-k}) \cos kx + \sum_{k=1}^{N} i (c_k - c_{-k}) \sin kx \end{aligned}$$
Et, si nous posons, $a_0 = 2c_0$, $a_k = c_k + c_{-k}$, $b_k = i(c_k - c_{-k})$, c'est à dire $c_0 = \frac{a_0}{2}$, $c_k = \frac{a_k - ib_k}{2}$, $c_{-k} = \frac{a_k + ib_k}{2}$, nous avons :
$$P_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} a_k \cos kx + \sum_{k=1}^{N} ib_k \sin kx$$
6. Si les termes $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ sont réels, alors $c_{-k} = \overline{c_k}$ et $a_k = 2\,\mathrm{Re}(c_k)$ et $b_k = -2\,\mathrm{Im}(c_k)$. A ce moment là, nous avons :
$$P_N(x) = c_0 + \sum_{k=1}^{N} \left(c_k e^{ikx} + \overline{c_k} e^{-ikx}\right)$$
7. Les polynômes trigonométriques, considérés comme des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, sont des fonctions indéfiniment dérivables et périodiques de période 2π. Nous pourrons les étudier sur un intervalle de longueur 2π

9.2.2 Théorème

1. $\mathrm{T}[x]$ est l'ensemble des polynômes trigonométriques. Alors $\mathrm{T}[x]$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel
2. $\mathrm{T}_N[x]$ est l'ensemble des polynômes trigonométriques de degré inférieur ou égal à N
Alors, $\mathrm{T}_N[x]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{T}[x]$ de dimension $2N+1$
La base canonique est donnée par $\mathcal{B} = \{e_k \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \text{ et } -N \leqslant k \leqslant N\}$ où e_k est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e_k(x) = e^{ikx}$

Démonstration

1. Tous les éléments de $\mathrm{T}[x]$ sont des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ indéfiniment dérivables et périodiques de période 2π.
Appelons $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$, l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ indéfiniment dérivables. $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel . Nous allons montrer que $\mathrm{T}[x]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$.
   - Il est évident que $\mathrm{T}[x] \subset \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$ et que $\mathrm{T}[x] \neq \emptyset$

     En effet, la fonction nulle $\mathcal{O}$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ $\mathcal{O}(x) = 0$ est un élément de $\mathrm{T}[x]$
   - Soient $P \in \mathrm{T}[x]$,$Q \in \mathrm{T}[x]$, $\lambda \in \mathbb{C}$ et $\mu \in \mathbb{C}$. Alors :

$$(\lambda P + \mu Q)(x) = \lambda P(x) + \mu Q(x) = \lambda \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ikx} + \mu \sum_{k=-N_1}^{N_1} d_k e^{ikx}$$

     En supposant $N \geqslant N_1$, nous avons $(\lambda P + \mu Q)(x) = \lambda \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ikx} + \mu \sum_{k=-N}^{N} d_k e^{ikx}$ avec $d_k = 0$ pour $-N \leqslant k \leqslant -N_1 - 1$ et $N_1 \leqslant k \leqslant N$ Ainsi, $(\lambda P + \mu Q)(x) = \lambda \sum_{k=-N}^{N} (\lambda c_k + \mu d_k) e^{ikx}$

     Nous avons bien $\lambda P + \mu Q \in \mathrm{T}[x]$

   $\mathrm{T}[x]$ est bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$
2. $\mathrm{T}_N[x]$ est clairement un sous-espace vectoriel de $\mathrm{T}[x]$ de famille génératrice $\{e_k \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \text{ et } -N \leqslant k \leqslant N\}$.
En fait, nous avons $\mathrm{T}_N[x] = \mathrm{Vect}(\{e_k \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \text{ et } -N \leqslant k \leqslant N\})$; d'après le cours sur les $\mathbb{K}$-espaces vectoriels , $\mathrm{T}_N[x]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{T}[x]$
Il faut, maintenant, montrer que c'est une famille libre.

   Soient donc $(\lambda_k)_{-N \leqslant k \leqslant N}$, $2N+1$ nombres complexes tels que $\sum_{k=-N}^{N} \lambda_k e_k = \mathcal{O}$. Il faut démontrer que, pour tout $k \in \mathbb{Z}$ tels que $-N \leqslant k \leqslant N$, $\lambda_k = 0$.

   L'écriture $\sum_{k=-N}^{N} \lambda_k e_k = \mathcal{O}$ signifie que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sum_{k=-N}^{N} \lambda_k e_k(x) = 0 \Longleftrightarrow \sum_{k=-N}^{N} \lambda_k e^{ikx} = 0$
   Soit $p \in \mathbb{Z}$ avec $-N \leqslant p \leqslant N$ alors :

$$\int_0^{2\pi} \left(\sum_{k=-N}^{N} \lambda_k e^{ikx} \right) e^{-ipx} \, \mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \sum_{k=-N}^{N} \lambda_k e^{i(k-p)x} \, \mathrm{d}x = \sum_{k=-N}^{N} \lambda_k \int_0^{2\pi} e^{i(k-p)x} \, \mathrm{d}x = 0$$

   Or, si $k \neq p$

$$\int_0^{2\pi} e^{i(k-p)x} \, \mathrm{d}x = \left[\frac{e^{i(k-p)x}}{i(k-p)} \right]_0^{2\pi} = \frac{e^{2i(k-p)\pi} - 1}{i(k-p)} = 0$$

   Et si $k = p$, alors $\int_0^{2\pi} e^{i(k-p)x} \, \mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}x = 2\pi$.

   De telle sorte que $\sum_{k=-N}^{N} \lambda_k \int_0^{2\pi} e^{i(k-p)x} \, \mathrm{d}x = \lambda_p \times 2\pi = 0$ et donc $\lambda_p = 0$

Nous venons de montrer que, pour tout $p \in \mathbb{Z}$ avec $-N \leqslant p \leqslant N$ alors $\lambda_p = 0$. La famille génératrice $\{e_k$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et $-N \leqslant k \leqslant N\}$ est aussi une famille libre ; c'est donc une base de $\mathrm{T}_N[x]$, et nous concluons tout de suite que $\dim \mathrm{T}_N[x] = 2N+1$

Remarque 6 :

Nous avons $\mathrm{T}_N[x] \subset \mathrm{T}_{N+1}[x]$, et plus généralement, si $N \leqslant P$, $\mathrm{T}_N[x] \subset \mathrm{T}_P[x]$.
On démontre aussi, et facilement, que $\mathrm{T}[x] = \bigcup\limits_{N \geqslant 0} \mathrm{T}_N[x]$

9.2.3 Définition

On dit que ce polynôme converge si $\lim\limits_{N \to +\infty} P_N(X) = \lim\limits_{N \to +\infty} \sum\limits_{k=-N}^{N} c_k e^{ikx}$ existe.

Remarque 7 :

Attention !
La définition 9.2.3 de la convergence est propre aux polynômes trigonométriques. Ce n'est pas la définition la plus communément admise :

1. On dit qu'une série $\sum\limits_{n \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$ converge si $\lim\limits_{\substack{N_1 \to +\infty \\ N_2 \to -\infty}} \sum\limits_{k=N_2}^{N_1} c_k e^{ikx}$ existe
2. De manière générale, si $(u_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, on dit que la série $\sum\limits_{n \in \mathbb{Z}} u_n$ est convergente, si et seulement si les séries $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} u_n$ et $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} u_{-n}$ sont convergentes, et on pose alors :
$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n = \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n + \sum_{n \in \mathbb{N}} u_{-n}$$
3. En fait, nous avons l'implication :
$$\lim_{\substack{N_1 \to +\infty \\ N_2 \to -\infty}} \sum_{k=N_2}^{N_1} c_k e^{ikx} \text{ existe} \implies \lim_{N \to +\infty} \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ikx} \text{ existe}$$
4. Dans la définition 9.2.3 ci-dessus, il y a symétrie.

9.2.4 Définition et théorème

1. Dans $\mathrm{T}[x]$, nous définissons l'application φ par :
$$\begin{cases} \varphi : \mathrm{T}[x] \times \mathrm{T}[x] & \longrightarrow \quad \mathbb{C} \\ \qquad (f,g) & \longmapsto \quad \varphi[(f,g)] = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\, \overline{g(x)}\, \mathrm{d}x \end{cases}$$
Alors :
   (a) φ est un produit scalaire sur $\mathrm{T}[x]$
   (b) Nous noterons désormais $\varphi[(f,g)] = \langle f/g \rangle$ et la norme issue du produit scalaire $\|f\|_2 = \sqrt{\langle f/f \rangle}$
2. φ restreinte à $\mathrm{T}_N[x]$ est aussi un produit scalaire, et, pour ce produit scalaire, la famille $\mathcal{B} = \{e_k$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et $-N \leqslant k \leqslant N\}$ est une base orthonormée de $\mathrm{T}_N[x]$

Démonstration

1. Montrer que φ est un produit scalaire, ne pose pas de difficultés. Il suffira d'utiliser les propriétés de l'intégrale.
   (a) **Propriété de linéarité**
   → Soient $f \in \mathrm{T}[x]$, $f_1 \in \mathrm{T}[x]$ et $g \in \mathrm{T}[x]$, alors :
   $$\begin{aligned}\varphi[(f+f_1,g)] &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(f(x)+f_1(x))\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_1(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x\\ &= \varphi[(f,g)]+\varphi[(f_1,g)]\end{aligned}$$
   → On démontrerait, de la même manière, que, pour tout $f \in \mathrm{T}[x]$, $g \in \mathrm{T}[x]$ et $g_1 \in \mathrm{T}[x]$ nous avons $\varphi[(f,g+g_1)] = \varphi[(f,g)]+\varphi[(f,g_1)]$
   → Idem pour démontrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $\varphi[(\lambda f,g)] = \lambda\varphi[(f,g)]$ et $\varphi[(f,\lambda g)] = \overline{\lambda}\varphi[(f,g)]$
   (b) **Utilisation du conjugué**
   Nous avons, et de manière très classique :
   $$\overline{\varphi[(f,g)]} = \overline{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\overline{f(x)\overline{g(x)}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\overline{f(x)}g(x)\ \mathrm{d}x = \varphi[(g,f)]$$
   (c) Bien entendu, que pour tout $f \in \mathrm{T}[x]$, non nulle, f étant continue,
   $$\varphi[(f,f)] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\overline{f(x)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(x)|^2\ \mathrm{d}x > 0$$
   (d) D'autre part,
   → Si $f=\mathcal{O}$, il est évident que $\varphi[(f,f)]=0$
   → Réciproquement, supposons $\varphi[(f,f)] = 0$; alors, $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(x)|^2\ \mathrm{d}x = 0$. f étant une fonction continue, $|f|^2$ est aussi continue ; elle est en plus positive. Donc, des théorème d'intégration, $|f|^2$ est nulle et aussi f
   Nous avons donc $\varphi[(f,f)] = 0 \Longleftrightarrow f = \mathcal{O}$

   φ est donc bien un produit scalaire.
2. **La base $\mathcal{B} = \{e_k$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et $-N \leqslant k \leqslant N\}$ est orthonormée**
   Très simple !!
   D'après des calculs déjà réalisés, si $k \neq p$:
   $$\begin{aligned}\langle e_k/e_p\rangle &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e_k(x)\overline{e_p(x)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e_k(x)\overline{e_p(x)}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{ikx}e^{-ipx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(k-p)x}\,\mathrm{d}x = 0\end{aligned}$$
   Et si $k=p$, alors $\displaystyle\langle e_k/e_k\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}x = 1$
   La base $\mathcal{B} = \{e_k$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et $-N \leqslant k \leqslant N\}$ est bien orthonormée

Remarque 8 :

1. Le fait que les vecteurs $\mathcal{B} = \{e_k$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et $-N \leqslant k \leqslant N\}$ forme une famille orthonormée montre que cette famille $\mathcal{B}$ est indépendante.
2. Le fait que la base $\mathcal{B} = \{e_k$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et $-N \leqslant k \leqslant N\}$ soit orthonormée a des conséquences intéressantes

9.2.5 Coefficients de Fourier

Soit $f \in \mathrm{T}_N[x]$, alors $f(x) = \displaystyle\sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ikx}$. Alors :

1. Pour tout n tel que $-N \leqslant n \leqslant N$, $c_n = \langle f / e_n \rangle$

   Autrement dit : $c_n = \langle f / e_n \rangle = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} \, \mathrm{d}x$
2. c_n est le coefficient de Fourier d'ordre n de f

Démonstration

La démonstration est évidente et laissée au lecteur

Remarque 9 :

1. Souvent, pour bien préciser que le coefficient de Fourier d'ordre n dépend de f, on le note $c_n(f)$
2. Pour $f \in \mathrm{T}_N[x]$, nous pouvons écrire $f = \displaystyle\sum_{k=-N}^{N} \langle f / e_k \rangle e_k$

9.2.6 Théorème

Soit $f \in \mathrm{T}_N[x]$, avec $f(x) = \displaystyle\sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ikx}$ alors $\|f\|_2^2 = \displaystyle\sum_{k=-N}^{N} |c_k|^2$

Démonstration

Comme la base $\mathcal{B} = \{e_k \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \text{ et } -N \leqslant k \leqslant N\}$ est orthonormée, nous pouvons utiliser le théorème de Pythagorre.
Il est aussi possible de calculer directement et cela ne doit poser aucune difficulté