9.3 Les Séries de Fourier

9.3.1 Les espaces de fonctions

Pour poursuivre notre étude, nous devons préciser des espaces de fonctions avec lesquels nous allons travailler.

1. Nous notons $\mathcal{C}(T)$ l'espace des **fonctions continues** sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{C}$ et qui sont 2π-périodiques.
2. Nous notons $\mathcal{C}^k(T)$ le sous-espace de $\mathcal{C}(T)$ des fonctions k **fois continuement dérivables** sur le tore T et qui sont 2π-périodiques.
3. Nous notons $\mathcal{C}_M(T)$ les fonctions continues par morceaux, c'est à-dire les fonctions 2π-périodiques qui ont un nombre fini $a_1, \cdots, a_s$ de discontinuités sur une période $[0; 2\pi]$ et qui sont prolongeables en une fonction continue sur chaque intervalle de $[0; 2\pi]$ déterminé par le partage $a_1, \cdots, a_s$. C'est à dire qu'en chaque point de discontinuité a_k une telle fonction admet une limite à droite et une limite à gauche.
4. Nous notons $\mathcal{C}^1_M(T)$ les fonctions 2π-périodiques. continues par morceaux et dérivables par morceaux. Ce sont les fonctions f continues par morceaux et qui de plus réalisent les conditions suivantes :

   L'intervalle $[0; 2\pi]$ peut être décomposé en un nombre fini d'intervalles $[a_i, a_{i+1}]$ tels que dans chaque intervalle ouvert $]a_i, a_{i+1}[$ la fonction f soit continue, dérivable, de dérivée f' continue par morceaux et telle que $\displaystyle\int_{a_i}^{a_{i+1}} |f'(t)|\, dt$ existe *(éventuellement comme intégrale impropre)*

Remarque 10 :

Nous avons $\mathcal{C}(T) \subset \mathcal{C}_M(T)$ et $\mathcal{C}^1(T) \subset \mathcal{C}^1_M(T)$

9.3.2 Définition de coefficients de Fourier

Soit $f \in \mathcal{C}_M(T)$, c'est à dire une fonction périodique, et de période 2π continue par morceaux dans $[0, 2\pi]$ et à valeurs complexes.
On appelle coefficients de Fourier d'ordre k, le nombre :

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\, e^{-ikt}\, dt$$

Remarque 11 :

1. En prolongeant la définition de $\langle f/g\rangle$ donnée précédemment en 9.2.4 pour les polynômes trigonométriques, aux fonctions de $\mathcal{C}_M(T)$

$$\langle f/g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\, \overline{g(x)}\, dx$$

   nous pouvons écrire $c_k(f) = \langle f/e_k\rangle$
2. Le produit $\langle f/g\rangle$ n'est pas, dans $\mathcal{C}_M(T)$, un produit scalaire puisqu'il n'est pas défini positif, puisque si

$$\|f\|_2 = \sqrt{\langle f/f\rangle} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2\, dt}$$

   On peut avoir $\|f\|_2 = 0$ sans que $f = \mathcal{O}$

   Par exemple, soit $f : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par :

$$\begin{cases} f : [0, 2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \quad x & \longmapsto & f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in [0 : \pi[\cup]\pi; 2\pi[\\ 5 \text{ si } x = \pi \end{cases} \end{cases}$$

Nous avons $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}|f(t)|^2\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}|f(t)|^2\,\mathrm{d}t+\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{\pi}^{2\pi}|f(t)|^2\,\mathrm{d}t = 0$ alors que $f \neq \mathcal{O}$
$\|f\|_2$ n 'est pas une norme sur $\mathcal{C}_M(T)$ mais simplement une semi-norme .

3. Il y a plusieurs façons d'avoir une vraie norme.
   Par exemple en travaillant non pas sur $\mathcal{C}_M(T)$, mais sur $\widetilde{\mathcal{C}_M(T)}$ constitué des « **fonctions régulières** » de $\mathcal{C}_M(T)$, c'est à dire celles qui, en tout point $x\in[0,2\pi]$, vérifient
   $$\widetilde{f}(x)=\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2} \text{ où } f\left(x^+\right)=\lim_{\substack{t\to x\\ t>x}} f(t) \text{ et } f\left(x^-\right)=\lim_{\substack{t\to x\\ t<x}} f(t)$$
   Si f est continue, alors $\widetilde{f}=f$, sinon, nous avons ce qu'on appelle des discontinuités de première espèce qui sont, dans un intervalle borné, toujours en nombre fini ; pour les visualiser, reportez vous à la figure 9.2

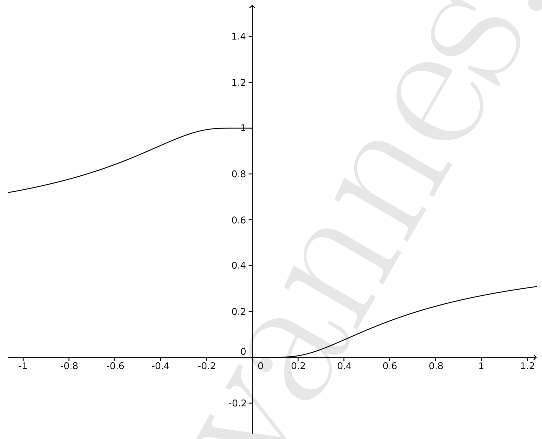

FIGURE 9.2 – Exemple de discontinuité de première espèce. $f(0^+)=0$ et $f(0^-)=+1$

   Les fonctions continues de $\mathcal{C}(T)$ sont donc bien des éléments de $\widetilde{\mathcal{C}_M(T)}$, c'est à dire $\mathcal{C}(T)\subset\widetilde{\mathcal{C}_M(T)}$
4. Nous pouvons continuer sans inconvénient à travailler avec une semi-norme. C'est ce que nous ferons pour le moment.
5. Nous allons donc écire, et nous y reviendrons souvent :
   $$\boxed{c_k(f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,e^{-ikt}\,\mathrm{d}t=\langle f/e_k\rangle}$$
6. Soit, pour tout $n\in\mathbb{Z}$ l'application c_n définie par :
   $$\left\{\begin{array}{rcl} c_n:\mathcal{C}_M(T) & \longrightarrow & \mathbb{C}\\ f & \longmapsto & c_n(f)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\,e^{-int}\,\mathrm{d}t\end{array}\right.$$
   → c_n est une application linéaire. Pour le démontrer, il suffit d'utiliser les propriétés du calcul intégral.
   → D'autre part, c_n est continu :
   $$|c_n(f-g)|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(t)-g(t)|\,\mathrm{d}t\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\|f-g\|_\infty\,\mathrm{d}t=\|f-g\|_\infty$$

9.3.3 Proposition

Soit $f\in\mathcal{C}_M(T)$. Alors $\|f\|_2\leqslant\|f\|_\infty$

Démonstration

C'est une démonstration qui ne pose pas de difficultés
Nous avons $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0;2\pi]} |f(x)|$, donc :

$$\|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \|f\|_\infty^2 \,\mathrm{d}t = \|f\|_\infty^2$$

D'où, nous avons bien $\|f\|_2 \leqslant \|f\|_\infty$

Exercice 1 :

Soit $f \in \mathcal{C}^1(T)$.
Démontrer que les coefficients de Fourier de f' vérifient, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f') = inc_n(f)$

9.3.4 Proposition

Les coefficients de Fourier d'une fonction $f \in \mathcal{C}_M(T)$ sont bornés.

Démonstration

Comme $f \in \mathcal{C}_M(T)$, f est continue par morceaux sur $[0;2\pi]$, donc bornée sur $[0;2\pi]$.
Supposons que, pour tout $x \in [0;2\pi]$, nous ayions $|f(x)| \leqslant \Lambda$, alors :

$$\begin{aligned} |c_k(f)| = {} & \frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi} f(t)\,e^{-ikt}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|\left|e^{-ikt}\right| \mathrm{d}t \\ \leqslant {} & \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)| \,\mathrm{d}t \leqslant \frac{\Lambda \times 2\pi}{2\pi} = \Lambda \end{aligned}$$

Exercice 2 :

Voici un exercice classique du calcul intégral.
Soit $f \in \mathcal{C}_M(T)$, une fonction périodique de période T, intégrable sur tout intervalle borné. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_x^{x+T} f(t)\,\mathrm{d}t$, ne dépend pas de x

Remarque 12 :

Une fois cet exercice résolu, nous pourrons, par exemple, écrire que :

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,e^{-ikt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,e^{-ikt}\,\mathrm{d}t$$

Ce qui peut nous simplifier des calculs, surtout lorsque f est paire ou impaire.

9.3.5 Proposition

Soit $f \in \mathcal{C}_M(T)$

1. Si f est paire, alors, pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f) = c_{-n}(f)$
2. Si f est impaire, alors, pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f) = -c_{-n}(f)$
3. Si f est à valeurs réelles, alors $c_{-n}(f) = \overline{c_n(f)}$

Démonstration

1. Les deux premiers items ont une démonstration semblable, liées à la périodicité de f et de e_k. En référence à l'exercice précédent, nous avons :
$$\int_0^{2\pi} f(t)\, e^{-ikt}\, \mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-ikt}\, \mathrm{d}t$$
   (a) Supposons f paire, alors, en faisant le changement de variable $t = -u$, et donc $\mathrm{d}t = -\mathrm{d}u$, nous avons
$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-ikt}\, \mathrm{d}t = -\int_{\pi}^{-\pi} f(-u)\, e^{-ik(-u)}\, \mathrm{d}u$$
   En utilisant la parité de f, nous avons :
$$-\int_{\pi}^{-\pi} f(-u)\, e^{-ik(-u)}\, \mathrm{d}u = \int_{-\pi}^{\pi} f(u)\, e^{ik(u)}\, \mathrm{d}u$$
   Ainsi :
$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\, e^{-ikt}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-ikt}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\, e^{ik(u)}\, \mathrm{d}u = c_{-k}(f)$$
   (b) De même, si f est impaire, avec le même changement de variable $t = -u$, nous obtenons :
$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-ikt}\, \mathrm{d}t = -\int_{\pi}^{-\pi} f(-u)\, e^{-ik(-u)}\, \mathrm{d}u = -\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\, e^{ik(u)}\, \mathrm{d}u$$
   Et donc $c_k(f) = -c_{-k}(f)$
2. Supposons, maintenant, f à valeurs réelles. Alors,
$$\overline{c_k(f)} = \overline{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\, e^{-ikt}\, \mathrm{d}t} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{f(t)\, e^{-ikt}}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\, e^{ikt}\, \mathrm{d}t = c_{-k}(f)$$

9.3.6 Définition de série de Fourier d'une fonction f

Soit $f \in \mathcal{C}_M(T)$, une fonction périodique, de période 2π, continue par morceaux dans $[0, 2\pi]$ et à valeurs complexes.

1. On appelle série de Fourier de la fonction f la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)\, e^{inx}$
2. L'expression $S_N(f)(x) = \displaystyle\sum_{k=-N}^{N} c_k(f)\, e^{ikx}$ est la somme partielle de rang N de la série de Fourier de f.
3. Nous avons $S_N(f) = \displaystyle\sum_{k=-N}^{N} \langle f/e_k\rangle\, e_k \Longleftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}) \left(S_N(f)(x) = \sum_{k=-N}^{N} \langle f/e_k\rangle\right) e^{inx}$

Remarque 13 :

1. Remarquons que $S_N(f)(x) = \displaystyle\sum_{k=-N}^{N} c_k(f)\, e^{ikx}$, la somme partielle de rang N de la série de Fourier de f est un polynôme trigonométrique de $\mathrm{T}_N[x]$
2. C'est une question importante que de savoir si la série $\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(f)\, e^{ikx}$ converge et si oui, converge-t-elle vers la fonction f, et dans quel sens converge-t-elle ? On dit que ce polynôme converge si $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} S_N(f)(x) = \lim_{N\to+\infty}\sum_{k=-N}^{N} c_k(f)\, e^{ikx}$ existe.

Rappelons que cette définition de la convergence est propre aux polynômes trigonométriques. Dans la définition 9.3.6 ci-dessus, il y a symétrie

9.3.7 Proposition

Soit $f \in \mathcal{C}_M(T)$. Alors, $S_N(f)$ est la projection orthogonale de $f \in \mathcal{C}_M(T)$ sur l'espace des polynômes trigonométriques $\mathrm{T}_N[x]$

Démonstration

En effet, soit $f \in \mathcal{C}_M(T)$.

1. Démontrons que S_N est une projection, c'est à dire que $S_N[S_N(f)] = S_N(f)$, c'est à dire que $S_N \circ S_n = S_N$

$$\begin{aligned} S_N[S_N(f)] &= \sum_{k=-N}^{N} \langle S_N(f)/e_k\rangle e_k = \sum_{k=-N}^{N} \left\langle \sum_{j=-N}^{N} \langle f/e_j\rangle e_j / e_k \right\rangle e_k \\ &= \sum_{k=-N}^{N} \left(\sum_{j=-N}^{N} \langle f/e_j\rangle \langle e_j/e_k\rangle \right) e_k \\ &= \sum_{k=-N}^{N} \langle f/e_k\rangle e_k = S_N(f) \end{aligned}$$

S_N est bien une projection.

2. Nous allons, maintenant, démontrer que cette projection est orthogonale, c'est à dire $\langle f - S_N(f)/S_N(f)\rangle = 0$.

Nous pouvons écrire $f = (f - S_N(f)) + S_N(f)$ et nous avons :

$$\langle f - S_N(f)/S_N(f)\rangle = \langle f/S_N(f)\rangle - \langle S_N(f)/S_N(f)\rangle$$

Or :

$\rightarrow$ $\langle S_N(f)/S_N(f)\rangle = \|S_N(f)\|_2^2 = \displaystyle\sum_{k=-N}^{+N} |c_k(f)|^2$

$\rightarrow$ $\langle f/S_N(f)\rangle = \left\langle f/\displaystyle\sum_{k=-N}^{N} \langle f/e_k\rangle e_k \right\rangle = \displaystyle\sum_{k=-N}^{N} \overline{\langle f/e_k\rangle} \langle f/e_k\rangle = \sum_{k=-N}^{N} \overline{c_k(f)} c_k(f) = \sum_{k=-N}^{N} |c_k(f)|^2$

$\rightarrow$ Et donc $\langle f - S_N(f)/S_N(f)\rangle = \displaystyle\sum_{k=-N}^{+N} |c_k(f)|^2 - \sum_{k=-N}^{+N} |c_k(f)|^2 = 0$ et donc les fonctions f et $f - S_N(f)$ sont donc orthogonales.

$S_N(f)$ est donc bien la projection orthogonale de $f \in \mathcal{C}_M(T)$ sur l'espace des polynômes trigonométriques $\mathrm{T}_N[x]$

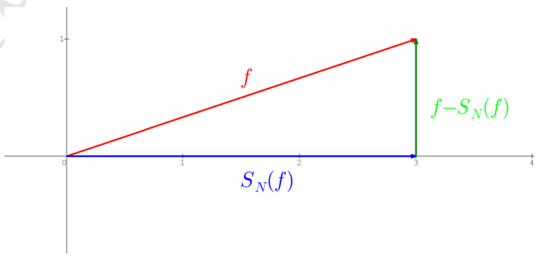

FIGURE 9.3 – Une visualisation de la projection orthogonale de f

S_N est donc bien une projection orthogonale.

Remarque 14 :

1. L'étude de la convergence se fera donc pour divers modes de convergence. Etude de convergence, veut dire **approximation de fonctions**
   Qu'est ce que **l'approximation de fonctions** ?
   Qu'est ce que cela veut dire qu'une fonction est proche d'une autre ? ? Il y a en fait, plusieurs modes pour dire qu'une fonction est proche d'une autre.
   (a) **Par la valeur absolue**
   $$d_\infty(f,g) = \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)| = \|f-g\|_\infty$$
   C'est la distance rencontrée quand on a vu la convergence uniforme ; on dit souvent que c'est **la norme de la convergence uniforme**
   Une fonction est donc proche d'une autre si $d_\infty(f,g) = \|f-g\|_\infty$ est aussi petit que possible.
   (b) **Par l'intégrale**
   On peut dire que 2 fonctions sont proches l'une de l'autre si la différence entre leurs intégrales n'est pas trop importante. On écrit alors :
   $$d_1(f,g) = \int_a^b |f(t) - g(t)|\,\mathrm{d}t = \|f-g\|_1$$
   (c) **Au sens des moindres carrés**
   Dans $\mathcal{C}_M(T)$, l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $[0;2\pi]$, à valeurs dans $\mathbb{C}$, on choisit comme norme sur $\mathcal{C}_M(T)$, pour de très bonnes raisons, entre autre, parce qu'elle dérive d'une forme de produit scalaire *(nous avons vu que cela n'en était pas réellement un)* :
   $$\langle f/g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x$$
   D'où la norme :
   $$\|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2\,\mathrm{d}t$$
   dont on déduit la distance
   $$d_2(f,g) = \|f-g\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)-g(t)|^2\,\mathrm{d}t}$$
   Nous commencerons par la convergence en moyenne quadratique *(ou au sens des moindres carrés)* qui se trouve être la plus adaptée aux séries de Fourier.
2. Dans la partie sur les polynômes trigonométriques, nous avons mis en évidence une base orthonormée qui nous a permis une étude commode. Il s'agit maintenant de passer au cas d'une famille orthonormée infinie, qui ne sera pas une base au sens algébrique du terme, mais une base en un sens topologique.
   Autrement dit nous allons essayer d'adapter l'aspect « géométrie euclidienne » au cas d'un nombre infini de coordonnées.
   Pour cela nous avons tout d'abord besoin de résultats d'approximation. Nous allons les énoncer et les démontrer brièvement afin de pouvoir mettre en place rapidement la théorie que nous avons en vue. Nous reviendrons plus tard plus en détail sur cet aspect.

Exemple 15 :

Exemples de calculs de coefficients de Fourier et de séries de Fourier

1. Considérons la fonction constante $f(x) = \lambda$. Alors :
   $$c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \lambda e^{-ikt}\,\mathrm{d}t = \frac{\lambda}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ikt}\,\mathrm{d}t = \begin{cases} \lambda \text{ si } k=0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$
   Ainsi, si f est constante, la série de Fourier de f est f elle-même.

2. Soit $f \in \mathcal{C}_M(T)$ telle que :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} f : [-\pi;+\pi[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \left\{ \begin{array}{l} 0 \text{ si } x = -\pi \\ t \text{ si } x \in]-\pi;+\pi[\end{array} \right. \end{array} \right.$$

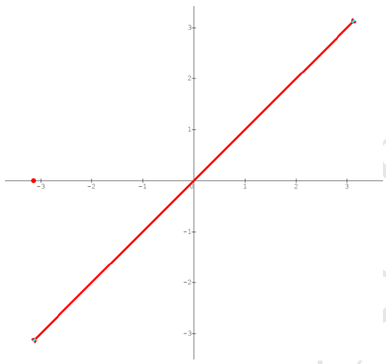

FIGURE 9.4 – Le graphe de f

Calculons, maintenant, les coefficients de Fourier.

— $c_k(f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\, e^{-ikt}\,\mathrm{d}t$

$\rightarrow$ Si $k=0$, alors $c_0(f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} t\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{2\pi}\left[\dfrac{t^2}{2}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0.$

Donc, $c_0(f) = 0$

$\rightarrow$ Si $k \neq 0$, alors, nous avons $c_k(f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} te^{-ikt}\,\mathrm{d}t$. Pour calculer cette intégrale, nous allons faire une intégration par parties.

$$\left[\begin{array}{ll} u = t & u' = 1 \\ v' = e^{-ikt} & v = \dfrac{-1}{ik} e^{-ikt} \end{array} \right]$$

D'où :

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} te^{-ikt}\,\mathrm{d}t = & \left[\frac{-t}{ik} e^{-ikt}\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{ik}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt}\,\mathrm{d}t \\ = & -\left(\frac{\pi e^{-ik\pi} - (-\pi)\, e^{ik\pi}}{ik}\right) + \frac{1}{ik}\left[\frac{e^{-ikt}}{-ik}\right]_{-\pi}^{\pi} \\ = & -\left(\frac{2\pi(-1)^k}{ik}\right) = \frac{2\pi(-1)^{k+1}}{ik} \end{aligned}$$

D'où $c_k(f) = \dfrac{1}{2\pi} \times \dfrac{2\pi(-1)^{k+1}}{ik} = \dfrac{(-1)^{k+1}}{ik}$

$\rightarrow$ La somme partielle de rang N de la série de Fourier de f est donnée par :

$$\begin{aligned} S_N(f)(x) = & \sum_{k=1}^{N} c_k(f)\, e^{ikx} + c_{-k}(f)\, e^{-ikx} = \sum_{k=1}^{N} \frac{(-1)^{k+1}}{ik} e^{ikx} + \frac{(-1)^{-k+1}}{-ik} e^{-ikx} \\ = & \sum_{k=1}^{N} \frac{(-1)^{k+1}}{ik}\left(e^{ikx} - e^{-ikx}\right) = \sum_{k=1}^{N} \frac{(-1)^{k+1}}{ik} 2i \sin kx \\ = & \sum_{k=1}^{N} \frac{2(-1)^{k+1} \sin kx}{k} \end{aligned}$$

3. **Fonction en dents de scie**

Soit f, définie sur $\mathbb{R}$, périodique et de période 2π, définie sur $[-\pi, +\pi]$ par $f(x) = |x|$.
Lorsque nous avons une telle définition, il est intéressant de faire le graphe de f, et de tenter d'exprimer f en fonction de x, dans des intervalles plus exotiques du type $[+\pi, +3\pi]$

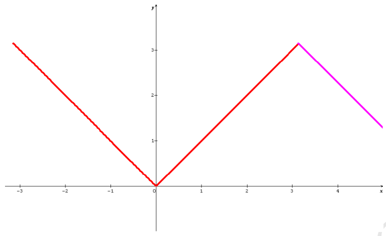

FIGURE 9.5 – Graphe de la fonction étudiée

(a) On calcule alors $c_k(f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-ikt}\,\mathrm{d}t$, et, ici,

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |t|\, e^{-ikt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\left\{\int_{-\pi}^{0} -te^{-ikt}\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{\pi} te^{-ikt}\,\mathrm{d}t\right\}$$

En faisant le changement de variables $u = -t$, et donc $\mathrm{d}t = -\,\mathrm{d}u$ dans la première intégrale, nous avons :

$$\int_{-\pi}^{0} -te^{-ikt}\,\mathrm{d}t = -\int_{\pi}^{0} ue^{iku}\,\mathrm{d}u = \int_{0}^{\pi} ue^{iku}\,\mathrm{d}u$$

Et donc :

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\left\{\int_{0}^{\pi} ue^{iku}\,\mathrm{d}u + \int_{0}^{\pi} te^{-ikt}\,\mathrm{d}t\right\} = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} t\left(e^{ikt} + e^{-ikt}\right)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} t\cos kt\,\mathrm{d}t$$

Intégrons par parties l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{\pi} t\cos kt\,\mathrm{d}t$

$$\begin{bmatrix} u = t & u' = 1 \\ v' = \cos kt & v = \dfrac{1}{k}\sin kt \end{bmatrix}$$

Donc :

$$\int_{0}^{\pi} t\cos kt\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t}{k}\sin kt\right]_{0}^{\pi} - \frac{1}{k}\int_{0}^{\pi} \sin kt\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{k}\int_{0}^{\pi} \sin kt\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{k}\left[\frac{-\cos kt}{k}\right]_{0}^{\pi} = \frac{1}{k^2}\left((-1)^k - 1\right)$$

Nous obtenons $c_k(f) = \dfrac{1}{\pi k^2}\left((-1)^k - 1\right)$, et on peut remarquer que $c_k(f) = c_{-k}(f)$, d'où nous avons les sommes partielles d'ordre N

$$\begin{aligned} S_N(f)(x) = &\quad c_0(f) + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^2}\left((-1)^k - 1\right)\left(e^{ikx} + e^{-ikx}\right) \\ = &\quad c_0(f) + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^2}\left((-1)^k - 1\right)\cos kx \end{aligned}$$

Comme $\left((-1)^k - 1\right) = 0$ si k est pair et $\left((-1)^k - 1\right) = -2$ si k est impair, nous avons :

$$S_N(f)(x) = c_0(f) - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{N} \frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}$$

(b) Il nous reste maintenant à calculer $C_0(f)$; or,

$$C_0(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |t| \, \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$$

Et donc, la série de Fourier de f est :

$$\boxed{\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k\geqslant 0} \frac{\cos((2k+1)x)}{(2k+1)^2}}$$

(c) Dans la figure 9.6 ci-après, nous avons superposé les graphes de $|x|$, de $S_1(f)(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{\cos 3x}{9}\right)$ et de $S_2(f)(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{\cos 3x}{9} + \frac{\cos 5x}{25}\right)$

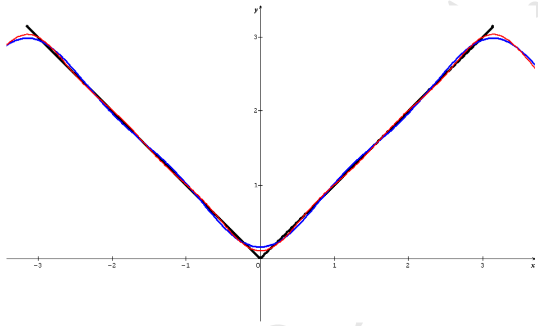

FIGURE 9.6 – Approximation de $|x|$ par les polynômes trigonométriques $S_1(f)(x)$ et $S_2(f)(x)$

4. **Fonction créneau**
La fonction créneau est la fonction périodique et de période 2π définie par :

$$f(x) = \begin{cases} -1 \text{ si } -\pi < x < 0 \\ +1 \text{ si } 0 < x < \pi \end{cases}$$

Pour le graphe, voir la figure 9.7

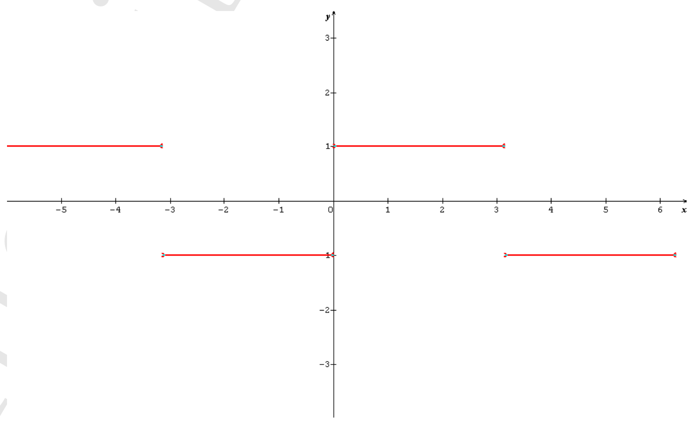

FIGURE 9.7 – Graphe de la fonction créneau

(a) Nous allons calculer les coefficients de Fourier $C_k(f)$

i. Pour $k = 0$, $C_0(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} -1 \, \mathrm{d}x + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{+\pi} \mathrm{d}x = 0$

ii. Pour $k \neq 0$

$$\begin{aligned} C_k(f) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\, e^{-ikx}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} -1e^{-ikx}\,dx + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{+\pi} e^{-ikx}\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Regardons l'intégrale $\displaystyle\int_{-\pi}^{0} -1e^{-ikx}\,\mathrm{d}x$; en faisant le changement de variables $u = -x$, nous obtenons $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = -1$, et donc

$$\int_{-\pi}^{0} -1e^{-ikx}\,\mathrm{d}x = \int_{\pi}^{0} e^{iku}\,\mathrm{d}u = -\int_{0}^{\pi} e^{iku}\,\mathrm{d}u$$

D'où, $C_k(f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{0}^{+\pi} e^{-ikx}\,\mathrm{d}x - \dfrac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} e^{ikx}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} e^{-iku} - e^{iku}\,\mathrm{d}u = \dfrac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} -2i\sin kx\,\mathrm{d}x$

Nous avons $\displaystyle\int_{0}^{\pi} -2i\sin kx\,\mathrm{d}x = 2i\left[\frac{\cos kx}{k}\right]_0^{\pi} = 2i\left(\frac{(-1)^k - 1}{k}\right)$ de telle sorte que :

$$C_k(f) = \begin{cases} 0 \text{ si } k \text{ est pair} \\ \dfrac{-4i}{2\pi k} = \dfrac{-2i}{\pi k} \text{ si } k \text{ est impair} \end{cases}$$

(b) Nous allons, maintenant, calculer la somme partielle de rang N de la série de Fourier de f. Ce polynôme trigonométrique est défini par :

$$S_N(f)(x) = \sum_{k=-N}^{N} C_k(f)\, e^{ikx} = C_0(f) + \sum_{k=1}^{N}\left(C_k(f)\, e^{ikx} + C_{-k}(f)\, e^{-ikx}\right)$$

Nous avons, d'après le point précédent, $C_0(f) = 0$ et $C_{2k}(f) = 0$, nous avons alors :

$$S_{2N+1}(f)(x) = \sum_{k=0}^{N}\left(C_{2k+1}(f)\, e^{i(2k+1)x} + C_{-(2k+1)}(f)\, e^{-i(2k+1)x}\right)$$

Or, $C_{2k+1}(f) = \dfrac{-2i}{\pi(2k+1)}$ et $C_{-(2k+1)}(f) = \dfrac{-2i}{-\pi(2k+1)} = \dfrac{2i}{\pi(2k+1)} = -C_{2k+1}$

D'où nous obtenons :

$$\begin{aligned} S_{2N+1}(f)(x) &= \sum_{k=1}^{N} C_{2k+1}(f)\left(e^{i(2k+1)x} - e^{-i(2k+1)x}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{N} C_{2k+1}(f)\, 2i\sin(2k+1)x \\ &= \sum_{k=0}^{N} \frac{-2i}{\pi(2k+1)} 2i\sin(2k+1)x \\ &= \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{N}\frac{\sin(2k+1)x}{2k+1} \end{aligned}$$

Sur la figure 9.8ci-après, nous avons tracé $S_3(f)(x)$, $S_5(f)(x)$, $S_7(f)(x)$ et $S_9(f)(x)$

Exercice 3 :

Soit f périodique et de période 2π dont les coefficients de Fourier sont notés $c_n(f)$. Quels sont les coefficients de Fourier de la fonction translatée $g(t) = f(t - t_0)$?

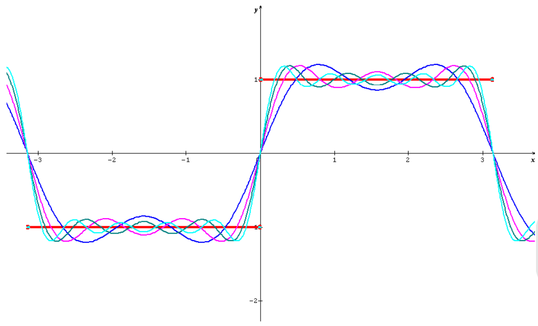

FIGURE 9.8 – Polynômes trigonométriques approchant la fonction créneau

Exercice 4 :

Nous avons travaillé le développement en série de Fourier de fonctions périodiques et de période 2π. Qu'en est-il des fonctions qui sont périodiques, mais d'une période différente de 2π ?
Soit donc f une fonction périodique, de période T et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

1. Soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction définie par $g(x) = f\left(\dfrac{T}{2\pi}x\right)$. Montrer que :
   (a) La fonction g est continue par morceaux
   (b) La fonction g est périodique et de période 2π
2. On appelle $C_n(g)$ le coefficient de Fourier de g d'ordre n. Démontrer que nous avons :

$$C_n(g) = C_n^1(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(u)\, e^{-in\frac{2\pi u}{T}}\, \mathrm{d}u$$