9.4 Le théorème de Féjer

9.4.1 Lemme préparatoire : le noyau de Dirichlet

On appelle noyau de Dirichlet l'expression $D_N(x) = \sum_{k=-N}^{N} e^{ikx}$

Nous avons :

1. $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_N(t)\,\mathrm{d}t = 1$
2. Le noyau de Dirichlet est périodique de période 2π et pair
3. $D_n(x) = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{x}{2}} = \frac{\sin(2n+1)\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$

Démonstration

1. Il est facile de démontrer que $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_N(t)\,\mathrm{d}t = 1$, puisque, si $k \neq 0$, $\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt}\,\mathrm{d}t = 0$ et si $k=0$, $\int_{-\pi}^{\pi} e^{i0t}\,\mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}t = 2\pi$, et donc :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_N(t)\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{k=-N}^{N} e^{ikt}\right)\mathrm{d}t = \sum_{k=-N}^{N}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt}\,\mathrm{d}t\right)\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}t + \sum_{k=1}^{N}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt}\,\mathrm{d}t\right) = 1\end{aligned}$$

2. Que $D_N(x) = \sum_{k=-N}^{N} e^{ikx}$ soit périodique de période 2π et pair est évident

3. Nous allons démontrer que $D_n(x) = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{x}{2}} = \frac{\sin(2n+1)\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$

   On peut écrire différemment le noyau de Dirichlet :

$$D_n(x) = 1 + \sum_{k=1}^{n}\left(e^{ikx}+e^{-ikx}\right) = 1 + \sum_{k=1}^{n}\left(e^{ix}\right)^k + \sum_{k=1}^{n}\left(e^{-ix}\right)^k$$

   (a) Nous allons tout d'abord calculer $\sum_{k=1}^{n}\left(e^{ix}\right)^k$, pour $x \neq 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

   En utilisant la somme des termes d'une suite géométrique, toujours pour $x \neq 2k\pi$, nous avons : $\sum_{k=1}^{n}\left(e^{ix}\right)^k = \frac{e^{ix}-e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}}$

   En multipliant numérateur et dénominateur par $e^{-i\frac{x}{2}}$, nous obtenons :

$$\frac{e^{ix}-e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}} = \frac{e^{-i\frac{x}{2}}\left(e^{ix}-e^{i(n+1)x}\right)}{e^{-i\frac{x}{2}}\left(1-e^{ix}\right)} = \frac{e^{i\frac{x}{2}}-e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)x}}{e^{-i\frac{x}{2}}-e^{i\frac{x}{2}}}$$

   (b) La simplification de $\sum_{k=1}^{n}\left(e^{-ix}\right)^k$ est la même, et nous obtenons :

$$\sum_{k=1}^{n}\left(e^{-ix}\right)^k = \frac{e^{-i\frac{x}{2}}-e^{-i\left(n+\frac{1}{2}\right)x}}{e^{i\frac{x}{2}}-e^{-i\frac{x}{2}}}$$

(c) Nous faisons maintenant la somme $\sum_{k=1}^{n}\left(e^{ix}\right)^k+\sum_{k=1}^{n}\left(e^{-ix}\right)^k$. Donc,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\left(e^{ix}\right)^k+\sum_{k=1}^{n}\left(e^{-ix}\right)^k &= \frac{e^{i\frac{x}{2}}-e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)x}}{e^{-i\frac{x}{2}}-e^{i\frac{x}{2}}}+\frac{e^{-i\frac{x}{2}}-e^{-i\left(n+\frac{1}{2}\right)x}}{e^{i\frac{x}{2}}-e^{-i\frac{x}{2}}}\\
&= \frac{e^{i\frac{x}{2}}-e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)x}}{e^{-i\frac{x}{2}}-e^{i\frac{x}{2}}}-\frac{e^{-i\frac{x}{2}}-e^{-i\left(n+\frac{1}{2}\right)x}}{e^{-i\frac{x}{2}}-e^{i\frac{x}{2}}}\\
&= \frac{\left(e^{i\frac{x}{2}}-e^{-i\frac{x}{2}}\right)+\left(e^{-ix\left(n+\frac{1}{2}\right)}-e^{ix\left(n+\frac{1}{2}\right)}\right)}{e^{-i\frac{x}{2}}-e^{i\frac{x}{2}}}\\
&= \frac{2i\sin\frac{x}{2}-2i\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{-2i\sin\frac{x}{2}}\\
&= -1+\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{x}{2}}
\end{aligned}$$

D'où, $D_n(x)=1-1+\dfrac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{x}{2}}=\dfrac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{x}{2}}=\dfrac{\sin\left(2n+1\right)\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$

Remarque 15 :

De l'identité $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}D_N(t)\,\mathrm{d}t=1$, nous pouvons conclure que $\displaystyle\int_0^{2\pi}\dfrac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x=2\pi$

9.4.2 Lemme préparatoire : le noyau de Féjèr

Nous définissons donc K_n, le noyau de Féjèr, en posant pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $x\in[-\pi;\pi]$:

$$K_N(x)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}D_k(x)$$

Nous avons :

1. K_N est paire et périodique de période 2π
2. Nous avons $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}K_N(t)\,\mathrm{d}t=1$
3. Pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, $K_N(x)=\dfrac{1}{N}\left(\dfrac{\sin\left(N\frac{x}{2}\right)}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2$ et donc, $K_N(x)\geqslant 0$

Démonstration

1. Que K_N soit paire et périodique de période 2π vient de la définition même de K_N, puisque K_N est combinaison linéaire de noyaux de Dirichlet D_k pairs et périodique et de période 2π
2. Démontrons que $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}K_N(t)\,\mathrm{d}t=1$

   Pour le démontrer, il suffit de retraduire l'expression proposée :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}K_N(t)\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}D_k(t)\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}D_k(t)\,\mathrm{d}t\right)\\
&= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}1=1
\end{aligned}$$

3. Démontrons que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, $K_N(x) = \dfrac{1}{N}\left(\dfrac{\sin\left(N\frac{x}{2}\right)}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2$

Pour le démontrer, nous allons utiliser le classique et fastidieux calcul avec les nombres complexes imaginaires.

Pour faire plus simple, nous allons calculer $NK_N(x)$.

Nous avons $NK_N(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} D_k(x) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\sin(2k+1)\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} = \frac{1}{\sin\frac{x}{2}} \sum_{k=0}^{N-1} \sin\left((2k+1)\frac{x}{2}\right)$

Et nous avons $\sin\left((2k+1)\dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{e^{i(2k+1)\frac{x}{2}} - e^{-i(2k+1)\frac{x}{2}}}{2i}$.

Et donc

$$\begin{aligned}
NK_N(x)\sin\tfrac{x}{2} &= \sum_{k=0}^{N-1}\left(\frac{e^{i(2k+1)\frac{x}{2}} - e^{-i(2k+1)\frac{x}{2}}}{2i}\right) \\
&= \frac{1}{2i}\sum_{k=0}^{N-1}\left(e^{i(2k+1)\frac{x}{2}} - e^{-i(2k+1)\frac{x}{2}}\right) \\
&= \frac{1}{2i}\left(\sum_{k=0}^{N-1} e^{i(2k+1)\frac{x}{2}} - \sum_{k=0}^{N-1} e^{-i(2k+1)\frac{x}{2}}\right)
\end{aligned}$$

Nous avons : $e^{i(2k+1)\frac{x}{2}} = e^{kix+\frac{ix}{2}} = e^{\frac{ix}{2}} \times e^{kix} = e^{\frac{ix}{2}} \times \left(e^{ix}\right)^k$

Et donc :

$$\sum_{k=0}^{N-1} e^{i(2k+1)\frac{x}{2}} = e^{\frac{ix}{2}} \sum_{k=0}^{N-1}\left(e^{ix}\right)^k = e^{\frac{ix}{2}}\left(\frac{1-e^{iNx}}{1-e^{ix}}\right)$$

De la même manière :

$$\sum_{k=0}^{N-1} e^{-i(2k+1)\frac{x}{2}} = e^{\frac{-ix}{2}} \sum_{k=0}^{N-1}\left(e^{-ix}\right)^k = e^{\frac{-ix}{2}}\left(\frac{1-e^{-iNx}}{1-e^{-ix}}\right)$$

Et donc

$$\begin{aligned}
2iNK_N(x)\sin\tfrac{x}{2} &= e^{\frac{ix}{2}}\left(\frac{1-e^{iNx}}{1-e^{ix}}\right) - e^{\frac{-ix}{2}}\left(\frac{1-e^{-iNx}}{1-e^{-ix}}\right) \\
&= \frac{e^{\frac{ix}{2}}\left(1-e^{-ix}\right)\left(1-e^{iNx}\right) - e^{\frac{-ix}{2}}\left(1-e^{ix}\right)\left(1-e^{-iNx}\right)}{\left(1-e^{ix}\right)\left(1-e^{-ix}\right)} \\
&= \frac{\left(e^{\frac{ix}{2}} - e^{\frac{-ix}{2}}\right)\left(1-e^{iNx}\right) - \left(e^{\frac{-ix}{2}} - e^{\frac{ix}{2}}\right)\left(1-e^{-iNx}\right)}{2\left(1-\cos x\right)} \\
&= \frac{\left(e^{\frac{ix}{2}} - e^{\frac{-ix}{2}}\right)\left[\left(1-e^{iNx}\right) + \left(1-e^{-iNx}\right)\right]}{2\left(1-\cos x\right)} \\
&= \frac{2i\sin\frac{x}{2}\left[2-2\cos Nx\right]}{2\left(1-\cos x\right)}
\end{aligned}$$

Et donc $2iNK_N(x)\sin\frac{x}{2} = \dfrac{2i\sin\frac{x}{2}\left[2-2\cos Nx\right]}{2\left(1-\cos x\right)} \iff NK_N(x) = \dfrac{(1-1\cos Nx)}{(1-\cos x)}$ En utilisant la formule trigonométrique $1-\cos 2u = 2\sin^2 u$, nous avons alors :

$$NK_N(x) = \frac{\left(2\sin^2\left(N\frac{x}{2}\right)\right)}{\left(2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)} = \left(\frac{\sin\left(N\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right)^2$$

Et, nous avons donc bien $K_N(x) = \dfrac{1}{N}\left(\dfrac{\sin\left(N\frac{x}{2}\right)}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2$

Remarque 16 :

Comme tout à l'heure, des identités $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} K_N(t)\ \mathrm{d}t = 1$ et $K_N(x) = \dfrac{1}{N}\left(\dfrac{\sin\left(N\frac{x}{2}\right)}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2$, nous pouvons déduire que :

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\sin\left(N\frac{x}{2}\right)}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2 \mathrm{d}x = 2\pi N$$

9.4.3 Théorème de Féjèr

Soit $f \in \mathcal{C}(T)$, c'est à dire f continue, périodique et de prériode 2π

On considère la somme partielle de rang N de sa série de Fourier $S_N(f)(x) = \displaystyle\sum_{k=-N}^{N} c_k(f)\, e^{ikx}$

Alors, si nous posons $\sigma_n(f) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} S_k(f)$, la suite de fonctions $(\sigma_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f, c'est à dire : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\sup_{x\in[0;2\pi]}|\sigma_n(f)(x) - f(x)|\right) = 0 \Longleftrightarrow \lim_{n\to+\infty}\|\sigma_n(f) - f\|_\infty = 0$

Démonstration

Cette démonstration va se faire en plusieurs étapes, et pour la faciliter, en utilisant la périodicité de f, nous alons travailler sur $[-\pi; +\pi]$

1. Ecrivons différemment $S_N(f)(x)$

   $\Rightarrow$ Tout d'abord :

$$c_k(f)\, e^{ikx} = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-ikt}\ \mathrm{d}t\right) e^{ikx} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{ik(x-t)}\ \mathrm{d}t$$

   $\Rightarrow$ Donc, et par linéarité de l'intégrale :

$$\begin{aligned} S_N(f)(x) &= \sum_{k=-N}^{N} c_k(f)\, e^{ikx} = \sum_{k=-N}^{N}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{ik(x-t)}\ \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi}{}_{-\pi}^{\pi} f(t)\left(\sum_{k=-N}^{N} e^{ik(x-t)}\right)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, D_N(x-t)\ \mathrm{d}t \end{aligned}$$

   Où $D_N(x) = \displaystyle\sum_{k=-N}^{N} e^{ikx}$ est le noyau de Dirichlet

2. Nous allons, maintenant, étudier $\sigma_n(f)$ en utilisant le noyau de Féjèr

   $\rightarrow$ Nous avons $\sigma_N(f)(x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\, K_N(t)\ \mathrm{d}t$ où K_N est le noyau de Féjèr

   Comme tout à l'heure, nous allons ré-écrire l'expression demandée :

$$\begin{aligned} \sigma_N(f)(x) = &\ \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} S_k(f)(x) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, D_k(x-t)\ \mathrm{d}t \\ = &\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left(\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} D_k(x-t)\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, K_N(x-t)\ \mathrm{d}t \end{aligned}$$

   Nous venons de montrer que $\sigma_N(f)(x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, K_N(x-t)\ \mathrm{d}t$.

En faisant le changement de variables $u = x - t \iff t = x - u$ et donc $\mathrm{d}t = -\,\mathrm{d}u$, nous avons :

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,K_N(x-t)\;\mathrm{d}t &= -\int_{x+\pi}^{x-\pi} f(x-u)\,K_N(u)\;\mathrm{d}u\\ &= \int_{x-\pi}^{x+\pi} f(x-u)\,K_N(u)\;\mathrm{d}u\\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x-u)\,K_N(u)\;\mathrm{d}u \text{ puisque } f \text{ et } K_N \text{ sont périodiques}\end{aligned}$$

Donc $\sigma_N(f)(x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,K_N(x-t)\;\mathrm{d}t = \dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\,K_N(t)\;\mathrm{d}t$

3. Nous allons montrer la convergence uniforme de la suite $(\sigma_N(f))_{N\in\mathbb{N}}$

   Soit donc $\varepsilon > 0$

   $\Rightarrow$ f étant continue sur l'intervalle $[-\pi;\pi]$, y est uniformément continue.
   Il existe donc $\eta > 0$ tel que, pour tout $x \in [-\pi;\pi]$ et tout $y \in [-\pi;\pi]$, si $|x-y| < \eta$ alors $|f(x) - f(y)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$

   $\Rightarrow$ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons :

$$\begin{aligned}|f(x) - \sigma_N(f)(x)| &= \left|f(x)\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_N(t)\;\mathrm{d}t\right) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\,K_N(t)\;\mathrm{d}t\right|\\ &= \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x) - f(x-t))\,K_N(t)\;\mathrm{d}t\right|\\ &\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x) - f(x-t)|\,K_N(t)\;\mathrm{d}t\\ &\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{\{|t|<\eta\}}|f(x) - f(x-t)|\,K_N(t)\;\mathrm{d}t +\\ &\qquad \frac{1}{2\pi}\int_{\{\eta\leqslant|t|<\pi\}}|f(x) - f(x-t)|\,K_N(t)\;\mathrm{d}t\end{aligned}$$

   ▷ Regardons, maintenant $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{\{|t|<\eta\}}|f(x) - f(x-t)|\,K_N(t)\;\mathrm{d}t$

   Dans l'ensemble $\{|t| < \eta\}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons $\{|x-(x-t)| = |t| < \eta\}$ et donc $|f(x) - f(x-t)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$

   Ainsi :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{\{|t|<\eta\}}|f(x) - f(x-t)|\,K_N(t)\;\mathrm{d}t &\leqslant \frac{\varepsilon}{2}\times\frac{1}{2\pi}\int_{\{|t|<\eta\}}K_N(t)\;\mathrm{d}t\\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2}\times\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}K_N(t)\;\mathrm{d}t = \frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

   puisque $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi}K_N(t)\;\mathrm{d}t = 1$

   ▷ Maintenant, posons nos regards sur $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{\{\eta\leqslant|t|<\pi\}}|f(x) - f(x-t)|\,K_N(t)\;\mathrm{d}t$

   ⋆ Posons $M = \sup\limits_{x\in[-\pi;+\pi]}|f(x)|$[1], nous avons $|f(x) - f(x-t)| \leqslant 2M$, et donc :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\{\eta\leqslant|t|<\pi\}}|f(x) - f(x-t)|\,K_N(t)\;\mathrm{d}t \leqslant \frac{M}{\pi}\int_{\{\eta\leqslant|t|<\pi\}}K_N(t)\;\mathrm{d}t$$

   ⋆ Nous avons démontré que $K_N(t) = \dfrac{1}{N}\left(\dfrac{\sin\left(N\frac{t}{2}\right)}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2$.

1. On écrit souvent, aussi, $M = \|f\|_\infty$

Comme $\eta \leqslant |t| < \pi$, alors $\dfrac{\eta}{2} \leqslant \left|\dfrac{t}{2}\right| < \dfrac{\pi}{2}$, c'est à dire $\dfrac{-\pi}{2} < t \leqslant \dfrac{-\eta}{2}$ ou $\dfrac{\eta}{2} \leqslant \dfrac{t}{2} < \dfrac{\pi}{2}$, c'est à dire, à chaque fois :

$$\left|\sin \frac{t}{2}\right| \geqslant \sin \frac{\eta}{2} \Longleftrightarrow \sin^2 \frac{t}{2} \geqslant \sin^2 \frac{\eta}{2} \Longleftrightarrow \frac{1}{\sin^2 \frac{t}{2}} \leqslant \frac{1}{\sin^2 \frac{\eta}{2}}$$

Et donc $K_N(t) = \dfrac{1}{N}\left(\dfrac{\sin\left(N\frac{t}{2}\right)}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2 \leqslant \dfrac{1}{N\sin^2\frac{\eta}{2}}$

⋆ Nous avons donc :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{\{\eta\leqslant|t|<\pi\}} |f(x) - f(x-t)|\, K_N(t)\,\mathrm{d}t &\leqslant \frac{M}{\pi} \times \frac{1}{N\sin^2\frac{\eta}{2}}\int_{\{\eta\leqslant|t|<\pi\}} \mathrm{d}t \\ &\leqslant \frac{M}{N\pi\sin^2\frac{\eta}{2}}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}t = \frac{2M}{N\sin^2\frac{\eta}{2}}\end{aligned}$$

⇒ En synthèse, nous avons $|f(x) - \sigma_N(f)(x)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{2M}{N\sin^2\frac{\eta}{2}}$, et cette inégalité ne dépend pas de $x \in \mathbb{R}$

Comme $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \frac{2M}{N\sin^2\frac{\eta}{2}} = 0$, il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que si $N \geqslant N_\varepsilon$, alors $0 \leqslant \dfrac{2M}{N\sin^2\frac{\eta}{2}} \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Et donc, pour ce même $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, si $N \geqslant N_\varepsilon$, alors $|f(x) - \sigma_N(f)(x)| \leqslant \varepsilon$

La convergence de la suite $(\sigma_N(f))_{N\in\mathbb{N}}$ vers f est donc uniforme

Remarque 17 :

1. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, $S_N(f)$ est un polynôme trigonométrique ($S_N(f) \in \mathrm{T}[x]$), et donc comme $\mathrm{T}[x]$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel , $\sigma_n(f)$ est aussi un polynôme trigonométrique de $\mathrm{T}[x]$, comme combinaison linéaire de polynômes trigonométriques.
   On dit donc que toute fonction $f \in \mathcal{C}(T)$ *(fonction continue 2π-périodique)* est limite uniforme d'une suite de polynômes trigonométriques.
2. Ce qui veut dire que, pour tout $\varepsilon > 0$ et pour toute fonction $f \in \mathcal{C}(T)$, il existe un polynôme trigonométique $P \in \mathrm{T}[x]$ tel que $\|f - P\|_\infty < \varepsilon$
3. Le théorème de Féjèr est parfois appelé **version « trigonométrique » du théorème d'approximation de Weierstrass**
4. Il faut remarquer l'importance de la continuité de f dans le compact $[-\pi; +\pi]$ puisque nous avons utilisé le théorème de Heine.
5. Qu'en est-il des fonctions continues par morceaux, c'est à dire $f \in \mathcal{C}_M(T)$? En fait, la réponse est simple : les polynômes trigonométriques étant continus *(et même indéfiniment continuement dérivables)* on ne peut bien sûr avoir convergence uniforme vers f que là où f est continue et donc, il existe des fonctions $f \in \mathcal{C}_M(T)$ qui ne peuvent être limites uniformes de polynômes trigonométriques.
6. Tout se passe donc au sens des moindres carrés

9.4.4 Théorème

Soit $g \in \mathcal{C}_M(T)$. Alors, il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions de $\mathcal{C}(T)$ *(C'est à dire telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ $f_n \in \mathcal{C}(T)$)* telles que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \|f_n - g\|_2 = 0$

Démonstration

→ Soit $g \in \mathcal{C}_M(T)$.
Il existe alors $a_1, a_2, \ldots, a_N$ N points de discontinuité de g sur l'intervalle $[0; 2\pi]$

→ On construit alors, pour $n \in \mathbb{N}^*$ la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, par :
$f_n : [0;2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$ et telle que, pour tout $x \in [0;2\pi] \setminus \left(\bigcup_{k=2}^{N} \left[a_k - \frac{1}{n}; a_k + \frac{1}{n}\right]\right)$, $f_n(x) = g(x)$, et f_n est affine sur chaque intervalle $\left[a_k - \frac{1}{n}; a_k + \frac{1}{n}\right]$, c'est à dire que si $x \in \left[a_k - \frac{1}{n}; a_k + \frac{1}{n}\right]$, alors

$$f_n(x) = g\left(a_k - \frac{1}{n}\right) + \frac{n}{2}\left(g\left(a_k + \frac{1}{n}\right) - g\left(a_k - \frac{1}{n}\right)\right)\left(x - \left(a_k - \frac{1}{n}\right)\right)$$

f_n est continue sur $[0;2\pi]$, par construction

→ Nous avons $\|f_n - g\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f_n(t) - g(t)|^2 \, \mathrm{d}t$, et par construction des f_n, nous avons :

$$\|f_n - g\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\left(\sum_{k=1}^{N}\int_{a_k-\frac{1}{n}}^{a_k+\frac{1}{n}} |f_n(t) - g(t)|^2 \, \mathrm{d}t\right)$$

→ Regardons ce qui se passe au point de discontinuité a_k, ou plutôt, sur l'intervalle $\left[a_k - \frac{1}{n}; a_k - \frac{1}{n}\right]$:

$$\begin{aligned} |f_n(t) - g(t)| = & \left|g\left(a_k - \frac{1}{n}\right) + \frac{n}{2}\left(g\left(a_k + \frac{1}{n}\right) - g\left(a_k - \frac{1}{n}\right)\right)\left(t - \left(a_k - \frac{1}{n}\right)\right) - g(t)\right| \\ \leqslant & \left|g\left(a_k - \frac{1}{n}\right) - g(t)\right| + \frac{n}{2}\left|g\left(a_k + \frac{1}{n}\right) - g\left(a_k - \frac{1}{n}\right)\right| \times \left|t - \left(a_k - \frac{1}{n}\right)\right| \end{aligned}$$

Appelons $M = \sup_{x\in[0;2\pi]} |g(x)|$, alors :

⋆ $\left|g\left(a_k - \frac{1}{n}\right) - g(t)\right| \leqslant 2M$, tout comme $\left|g\left(a_k + \frac{1}{n}\right) - g\left(a_k - \frac{1}{n}\right)\right| \leqslant 2M$

⋆ Nous avons aussi, en considérant la longueur de l'intervalle $\left[a_k - \frac{1}{n}; a_k + \frac{1}{n}\right]$,

$$\left|t - \left(a_k - \frac{1}{n}\right)\right| \leqslant \left|a_k + \frac{1}{n} - \left(a_k - \frac{1}{n}\right)\right| = \frac{2}{n}$$

Ce qui fait que :

$$\frac{n}{2}\left|g\left(a_k + \frac{1}{n}\right) - g\left(a_k - \frac{1}{n}\right)\right| \times \left|t - \left(a_k - \frac{1}{n}\right)\right| \leqslant \frac{n}{2} \times 2M \times \frac{2}{n} = 2M$$

Et donc, en synthèse :

$$|f_n(t) - g(t)| \leqslant 4M \Longleftrightarrow |f_n(t) - g(t)|^2 \leqslant 16M^2$$

D'où :

$$\int_{a_k-\frac{1}{n}}^{a_k+\frac{1}{n}} |f_n(t) - g(t)|^2 \, \mathrm{d}t \leqslant \int_{a_k-\frac{1}{n}}^{a_k+\frac{1}{n}} 16M^2 \, \mathrm{d}t = 16M^2 \times \frac{2}{n}$$

Et donc, $\|f_n - g\|_2^2 \leqslant \frac{1}{2\pi}\left(\sum_{k=1}^{N} 16M^2 \times \frac{2}{n}\right) = \frac{16M^2N}{n\pi}$

Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{16M^2N}{n\pi} = 0$, nous avons aussi $\lim_{n\to+\infty} \|f_n - g\|_2^2 = 0$.
Ce que nous voulions : nous avons trouvé une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions de $\mathcal{C}(T)$ telles que $\lim_{n\to+\infty} \|f_n - g\|_2 = 0$

Remarque 18 :

Il est donc possible de dire que, pour toute fonction $g \in \mathcal{C}_M(T)$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction continue $f \in \mathcal{C}(T)$ telle que $\|f - g\|_2 \leqslant \varepsilon$: il suffira de choisir une fonction f_n telle que $\frac{16M^2N}{n\pi} < \varepsilon^2$

9.4.5 Corollaire

Pour toute fonction $g \in \mathcal{C}_M(T)$ et pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un polynôme trigonométrique $P \in \mathrm{T}[x]$ tel que $\|P - g\|_2 \leqslant \varepsilon$

Démonstration

Soit $g \in \mathcal{C}_M(T)$ et $\varepsilon > 0$
Il existe $f \in \mathcal{C}(T)$ tel que $\|f - g\|_2 \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$
Il existe un polynôme trigonométique $P \in \mathrm{T}[x]$ tel que $\|f - P\|_\infty < \dfrac{\varepsilon}{2}$.
D'après 9.3.3, nous avons $\|f - P\|_2 \leqslant \|f - P\|_\infty < \dfrac{\varepsilon}{2}$.
Donc :

$$\|P - g\|_2 \leqslant \|P - f\|_2 + \|f - g\|_2 \leqslant \|f - P\|_\infty + \|f - g\|_2 \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Ce que nous voulions