9.5 Approximation en moyenne quadratique

9.5.1 Inégalité de Bessel

Soit $f \in \mathcal{C}_M(T)$, c'est à dire une fonction périodique de période 2π et continue par morceaux

On considère $S_N(f)(x) = \sum_{k=-N}^{N} C_k(f) e^{ikx} = \sum_{k=-N}^{N} \langle f/e_k\rangle e^{ikx}$

1. Parmi tous les polynômes trigonométriques $Q_N \in \mathrm{T}_N[x]$, $S_N(f)$ est celui qui réalise l'écart minimal avec f au sens de la norme des moindres carrés, c'est à dire,
$$\|f - S_N(f)\|_2 \leqslant \|f - Q_N\|_2$$
2. On a, en fait, $\|f - S_N(f)\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t - \sum_{k=-N}^{N} |c_k(f)|^2$
3. Et donc $\sum_{k=-N}^{N} |c_k(f)|_2^2 \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t$ Cette dernière inégalité est l'inégalité de Bessel

Démonstration

Cette démonstration utilise l'outil géométrique

1. Soit $Q_N \in \mathrm{T}_N[x]$. Alors, $f - Q_N = f - S_N(f) + S_N(f) - Q_N$
Comme $S_N(f) - Q_N \in \mathrm{T}_N[x]$ et que, d'après 9.3.7, $S_N(f)$ est la projection orthogonale de f sur $\mathrm{T}_N[x]$, $S_N(f) - f$ est orthogonal à tout élément de $\mathrm{T}_N[x]$, nous avons, en particulier $\langle S_N(f) - f / S_N(f) - Q_N\rangle = 0$.
On peut donc appliquer le théorème de Pythagorre :
$$\|f - Q_N\|_2^2 = \|f - S_N(f)\|_2^2 + \|S_N(f) - Q_N\|_2^2$$
Donc,
$$\|f - Q_N\|_2^2 \geqslant \|f - S_N(f)\|_2^2 \iff \|f - S_N(f)\|_2 \leqslant \|f - Q_N\|_2$$
Et ceci est vrai pour tout $Q_N \in \mathrm{T}_N[x]$
2. En prenant, comme cas particuler pour Q_N le polynôme nul, nous retrouvons ce que nous avons établi en 9.3.7 :
$$\|f\|_2^2 = \|f - S_N(f)\|_2^2 + \|S_N(f)\|_2^2 \tag{9.1}$$
Ce qui montre que $\|S_N(f)\|_2^2 \leqslant \|f\|_2^2$, c'est à dire $\|S_N(f)\|_2 \leqslant \|f\|_2$, ce qui est le lot de toutes les projections orthogonales
Or, $\|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x$ d'une part, et d'autre part, $\|S_N(f)\|_2^2 = \langle S_N(f)/S_N(f)\rangle$.
D'après 9.3.7, nous avons $\|S_N(f)\|_2^2 = \sum_{k=-N}^{N} |C_k(f)|^2 = \sum_{k=-N}^{N} |\langle f/e_k\rangle|^2$
D'après l'équation 9.1, nous déduisons d'une part :
$$\boxed{\|f - S_N(f)\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \,dt - \sum_{k=-N}^{N} |c_k(f)|^2}$$
Et, d'autre part,
$$\boxed{\sum_{k=-N}^{N} |c_k(f)|^2 \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t}$$

Remarque 19 :

En posant $S_N = \sum_{k=-N}^{N} |c_k(f)|^2$, alors, d'après 9.5.1, la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ est une suite à termes positifs, croissante et majorée par $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t$. Elle est donc convergente.

9.5.2 Proposition

Soit $f \in \mathcal{C}_M(T)$, c'est à dire une fonction périodique de période 2π et continue par morceaux
Alors la série de Fourier de f converge vers f en moyenne quadratique, c'est-à-dire $\lim_{N\to+\infty} \|f - S_N(f)\|_2 = 0$

Démonstration

Soient $f \in \mathcal{C}_M(T)$ et $\varepsilon > 0$.
D'après le corollaire 9.4.5, il existe un polynôme trigonométrique $P \in \mathrm{T}[x]$ tel que $\|P - f\|_2 \leqslant \varepsilon$.
Soit $p = \deg P$, alors, pour tout $N \geqslant p$, $\mathrm{T}_p[x] \subset \mathrm{T}_N[x]$ et donc $P \in \mathrm{T}_N[x]$.
D'après 9.5.1, nous avons, pour tout $P \in \mathrm{T}_N[x]$, $\|f - S_N(f)\|_2 \leqslant \|f - P\|_2 \leqslant \varepsilon$
Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que si $N \geqslant p$, alors $\|f - S_N(f)\|_2 \leqslant \varepsilon$
Ce que nous voulions, c'est à dire $\lim_{N\to+\infty} \|f - S_N(f)\|_2 = 0$

9.5.3 Corollaire : Egalité de Parseval

Soit $f \in \mathcal{C}_M(T)$. Alors, la série numérique $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k(f)|^2$ est convergente, et, nous avons :

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k(f)|^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\langle f/e_k\rangle|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \, dt = \|f\|^2$$

Démonstration

1. Nous avons déjà posé en remarque que si $S_N = \sum_{k=-N}^{N} |c_k(f)|^2$, alors, d'après 9.5.1, la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ étant une suite à termes positifs, croissante et majorée par $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t$ est donc convergente.
2. D'autre part, d'après 9.5.1, nous avons $\|f - S_N(f)\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t - \sum_{k=-N}^{N} |c_k(f)|^2$.

   Comme, d'après 9.5.2, nous avons $\lim_{n\to+\infty} \|f - S_N(f)\|_2^2 = 0$, c'est à dire

   $$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t - \sum_{k=-N}^{N} |c_k(f)|^2 \right) = 0$$

   Autrement dit $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=-N}^{N} |c_k(f)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t$, ou, ce qui est équivalent

   $$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k(f)|^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\langle f/e_k\rangle|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \, dt = \|f\|^2$$

Ce que nous voulions

9.5.4 Corollaire

Soit $f \in \mathcal{C}_M(T)$. Alors les coefficients de Fourier de f tendent vers 0. Plus précisément :

$$\lim_{n \to +\infty} c_n(f) = 0 \text{ et } \lim_{n \to -\infty} c_n(f) = 0$$

Démonstration

Nous venons de démontrer que $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k(f)|^2 = \|f\|^2$, c'est à dire que les séries numériques $\sum_{k=0}^{+\infty} |c_k(f)|^2$ et $\sum_{k=0}^{+\infty} |c_{-k}(f)|^2$ sont convergentes.
La conclusion vient de la théorie des séries numériques.

Exercice 5 :

Démontrer que si 2 fonctions u et v continues ont les mêmes coefficients de Fourier sont égales.