9.6 Convergence ponctuelle des séries de Fourier

Introduction

On a vu que toute fonction continue périodique peut être approchée uniformément par des polynômes trigonométriques.
On a vu aussi que, dans le cas de la convergence en moyenne quadratique, ce sont les sommes partielles de la série de Fourier associée qui donnent les meilleures approximations.
On peut donc se demander si pour la convergence uniforme ou la convergence simple il en est de même, mais la réponse est négative.
Même plus, il existe des fonctions continues périodiques pour lesquelles en certains points la série de Fourier ne converge pas.
Nous allons voir toutefois que sous certaines hypothèses on peut donner des résultats sur la convergence.

9.6.1 Le lemme de Lebesgue

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction intégrable sur l'intervalle compact $[a\,,b]$
Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose

$$I(\lambda) = \int_a^b f(t)\, e^{i\lambda t}\, dt$$

Alors, $\lim\limits_{|\lambda| \to +\infty} I(\lambda) = 0$

Démonstration

C'est un résultat déjà démontré dans le chapitre du calcul intégral de L_1

9.6.2 Théorème de convergence simple de DIRICHLET

Soit $f \in \mathcal{C}^1_M(T)$, c'est à dire $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, périodique et de période 2π, continue par morceaux, et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux dans sur $\mathbb{R}$

Alors, $S_N(x) = \sum\limits_{k=-N}^{N} C_k(f)\, e^{ikx}$ converge simplement, pour tout $x \in \mathbb{R}$ vers $\widetilde{f}(x) = \dfrac{1}{2}\left\{f(x^+) + f(x^-)\right\}$

C'est à dire que, partout où f est continue, $S_N(x) = \sum\limits_{k=-N}^{N} C_k(f)\, e^{ikx}$ converge simplement, pour tout $x \in \mathbb{R}$ vers $\widetilde{f}(x) = f(x)$

Démonstration

1. Nous allons rappeler les notations déjà établies :
   - ⋆ Pour $f \in \mathcal{C}^1_M(T)$, on pose $C_n(f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-int}\,\mathrm{d}t$; $C_n(f)$ est le coefficient de Fourier de f d'ordre n
   - ⋆ $S_N(f)(x) = \sum\limits_{n=-N}^{+N} C_n(f)\, e^{inx}$ est le polynôme trigonométrique d'ordre N, attaché à f.
2. Nous allons donc étudier $\lim\limits_{N \to +\infty} S_N(f)$

   Nous avons $C_n(f)\, e^{inx} = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{in(x-t)}\,\mathrm{d}t$, et

$$S_N(f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left(\sum_{n=-N}^{+N} e^{in(x-t)}\right)\mathrm{d}t$$

3. Posons $\varphi_N(u) = \dfrac{1}{2\pi}\left(\sum_{n=-N}^{+N} e^{inu}\right)$.

   Nous avons donc : $S_N(f)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\varphi_N(x-t)\ dt$

   En fait, $\varphi_N(u) = \dfrac{1}{2\pi}D_N(u)$ où D_N est le noyau de Dirichlet. φ_N est donc aussi continue et périodique de période 2π et paire.

   D'après 9.4.1, nous avons : $\varphi_N(u) = \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{\sin(2N+1)\frac{u}{2}}{\sin\frac{u}{2}}$.

4. Nous allons écrire $S_N(f)(x)$ de deux façons différentes.

   (a) Comme nous l'avons déjà fait en 9.4.3 nous commençons par faire le changement de variables $u = x - t$, d'où $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -1$ c'est à dire $\mathrm{d}t = -\mathrm{d}u$.

   D'où

$$\begin{aligned} S_N(f)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\varphi_N(x-t)\ \mathrm{d}t &= -\int_{x+\pi}^{x-\pi} f(x-u)\varphi_N(u)\ \mathrm{d}u \\ &= \int_{x-\pi}^{x+\pi} f(x-u)\varphi_N(u)\ \mathrm{d}u \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x-u)\varphi_N(u)\ \mathrm{d}u \end{aligned}$$

   Car f et φ_N sont périodiques et de période 2π.

   Donc, $S_N(f)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-u)\varphi_N(u)\ dt$

   (b) On refait un changement de variable $u = -x + t$ d'où $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 1$ c'est à dire $\mathrm{d}u = \mathrm{d}t$, d'où

$$S_N(f)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\varphi_N(x-t)\ \mathrm{d}t = \int_{-x-\pi}^{-x+\pi} f(x+u)\varphi_N(-u)\ \mathrm{d}t$$

   Or, φ_N est paire, et donc :

$$\int_{-x-\pi}^{-x+\pi} f(x+u)\varphi_N(-u)\ \mathrm{d}t = \int_{-x-\pi}^{-x+\pi} f(x+u)\varphi_N(u)\ \mathrm{d}t$$

   D'autre part :

$$\int_{-x-\pi}^{-x+\pi} f(x+u)\varphi_N(u)\ \mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+u)\varphi_N(u)\ \mathrm{d}t$$

   Car f et φ_N sont périodiques et de période 2π.

   Donc, $S_N(f)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+u)\varphi_N(u)\ dt$

   Nous avons donc :

$$2S_N(f)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-u)\varphi_N(u)\ \mathrm{d}u + \int_{-\pi}^{\pi} f(x+u)\varphi_N(u)\ \mathrm{d}u$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$2S_N(f)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} (f(x-u) + f(x+u))\varphi_N(u)\ \mathrm{d}u$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$S_N(f)(x) = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (f(x-u) + f(x+u))\varphi_N(u)\ \mathrm{d}u$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$S_N(f)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{f(x-u) + f(x+u)}{2}\right)\varphi_N(u)\ \mathrm{d}u$$

5. Soit $Un : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, qui à tout $x \in \mathbb{R}$ fait correspondre $Un\,(x) = 1$
   Alors, $S_N\,(Un)\,(x) = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} Un\,(x+u)\,\varphi_N\,(u)\ du = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_N\,(u)\ du$
   Or, de l'identité $\varphi_N\,(u) = \dfrac{1}{2\pi}\left(\displaystyle\sum_{n=-N}^{+N} e^{inu}\right)$, nous tirons :
   $$S_N\,(Un)\,(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_N\,(u)\ \mathrm{d}u = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi}\left(\sum_{n=-N}^{+N} e^{inu}\right)\mathrm{d}u = \sum_{n=-N}^{+N} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{inu}\,\mathrm{d}u$$
   Or, pour $n \neq 0$, nous avons $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^{inu}du = \left[\frac{e^{inu}}{in}\right]_{-\pi}^{+\pi} = \frac{(-1)^n - (-1)^n}{in} = 0$, et, pour $n = 0$, $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} du = 1$.
   D'où $S_N\,(Un)\,(x) = Un\,(x) = 1$
6. On appelle $\widetilde{f}\,(x) = \dfrac{f\,(x^+) + f\,(x^-)}{2}$, c'est à dire que, partout où f est continue, alors $\widetilde{f} = f$
   Il nous faut donc évaluer $S_N\,(f)\,(x) - \widetilde{f}\,(x)$ et démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} S_N\,(f)\,(x) - \widetilde{f}\,(x) = 0$
   (a) Tout d'abord, d'après les calculs précédents, $\widetilde{f}\,(x) = \widetilde{f}\,(x) \times S_N\,(Un)\,(x)$.
   Donc :
   $$\widetilde{f}\,(x) = \widetilde{f}\,(x)\,S_N\,(Un)\,(x) = \widetilde{f}\,(x)\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_N\,(u)\ \mathrm{d}u = \int_{-\pi}^{\pi}\widetilde{f}\,(x)\,\varphi_N\,(u)\ \mathrm{d}u$$
   Donc $S_N\,(f)\,(x) - \widetilde{f}\,(x) = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{f\,(x-u) + f\,(x+u)}{2} - \widetilde{f}\,(x)\right)\varphi_N\,(u)\ du$
   (b) La fonction $\psi\,(u) = \left(\dfrac{f\,(x-u) + f\,(x+u)}{2} - \widetilde{f}\,(x)\right)\varphi_N\,(u)$ est une fonction paire ; donc :
   $$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{f\,(x-u) + f\,(x+u)}{2} - \widetilde{f}\,(x)\right)\varphi_N\,(u)\ \mathrm{d}u =&\ 2\int_0^{\pi}\left(\frac{f\,(x-u) + f\,(x+u)}{2} - \widetilde{f}\,(x)\right)\varphi_N\,(u)\ \mathrm{d}u \\ =&\ \int_0^{\pi}\left(f\,(x-u) + f\,(x+u) - 2\widetilde{f}\,(x)\right)\varphi_N\,(u)\ \mathrm{d}u\end{aligned}$$
   (c) Nous avons vu, d'après 9.4.1 que $\varphi_N\,(u) = \dfrac{1}{2\pi}D_N\,(u)$ où $D_N\,(u)$ est le noyau de Dirichlet d'ordre N. Et donc,
   $$\begin{aligned}S_N\,(f)\,(x) - \widetilde{f}\,(x) =&\ \int_0^{\pi}\left(f\,(x-u) + f\,(x+u) - 2\widetilde{f}\,(x)\right)\frac{\sin\,(2N+1)\,\frac{u}{2}}{2\pi\sin\frac{u}{2}}\ du \\ =&\ \int_0^{\pi} g\,(u)\sin\left((2N+1)\,\tfrac{u}{2}\right)\ du\end{aligned}$$
   Où $g\,(u) = \dfrac{(f\,(x-u) + f\,(x+u)) - 2\widetilde{f}\,(x)}{2\pi\sin\frac{u}{2}}$
   (d) Nous allons montrer que g peut se prolonger par continuité en 0.
   Nous avons, en fait,
   $$\begin{aligned}g\,(u) =&\ \frac{(f\,(x-u) + f\,(x+u)) - f\,(x^+) - f\,(x^-)}{2\pi\sin\frac{u}{2}} \\ =&\ \frac{f\,(x-u) - f\,(x^-)}{2\pi\sin\frac{u}{2}} + \frac{f\,(x+u) - f\,(x^+)}{2\pi\sin\frac{u}{2}}\end{aligned}$$

→ Regardons l'expression $\dfrac{f(x+u)-f(x^+)}{2\pi\sin\frac{u}{2}}$

Nous avons $\dfrac{f(x+u)-f(x^+)}{2\pi\sin\frac{u}{2}} = \dfrac{1}{\pi}\left[\dfrac{\frac{u}{2}}{\sin\frac{u}{2}}\left(\dfrac{f(x+u)-f(x^+)}{u}\right)\right]$

⋆ Nous avons $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\frac{u}{2}}{\sin\frac{u}{2}} = 1$

⋆ f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, donc $\lim\limits_{\substack{u\to 0\\u>0}}\dfrac{f(x+u)-f(x^+)}{u} = f'_d(x)$

⋆ Donc $\lim\limits_{\substack{u\to 0\\u>0}}\dfrac{1}{\pi}\left[\dfrac{\frac{u}{2}}{\sin\frac{u}{2}}\left(\dfrac{f(x+u)-f(x^+)}{u}\right)\right] = \dfrac{f'_d(x)}{\pi}$

→ Regardons maintenant $\dfrac{f(x-u)-f(x^-)}{2\pi\sin\frac{u}{2}}$

⋆ La décomposition est semblable, et, en fait, il faut regarder de plus près $\dfrac{f(x-u)-f(x^-)}{u}$

⋆ Or, $\lim\limits_{\substack{u\to 0\\u>0}}\dfrac{f(x-u)-f(x^-)}{-u} = f'_g(x)$

⋆ Donc $\lim\limits_{\substack{u\to 0\\u>0}}\dfrac{f(x-u)-f(x^-)}{2\pi\sin\frac{u}{2}} = \dfrac{-f'_g(x)}{\pi}$

Nous avons donc $\lim\limits_{u\to 0} g(u) = \dfrac{f'_d(x)-f'_g(x)}{\pi}$

g peut donc être prolongée par continuité en 0

7. g est donc continue par morceaux sur $[0;\pi]$. D'après le lemme de Lebesgue 9.6.1, nous avons :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi} g(u)\sin\left((2N+1)\frac{u}{2}\right)\,\mathrm{d}u = 0$$

C'est à dire $\lim\limits_{n\to+\infty} S_N(f)(x) - \widetilde{f}(x) = 0$

Nous avons donc la convergence simple de $S_N(f)$ vers $\widetilde{f}$

Ce que nous voulions.

9.6.3 Corollaire

Soit $f \in \mathcal{C}^1_M(T)$, c'est à dire que f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[0, 2\pi]$, alors, la convergence de la série de Fourier vers f est normale.

Démonstration

Pour montrer que la convergence est normale, il faut montrer que le coefficient $\left|C_k(f)\,e^{ikx}\right|$ est majoré par le terme général d'une série numérique convergente.

1. Par une intégration par parties, on montre que $C_k(f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\,e^{-ikt}dt = \dfrac{C_k(f')}{ik}$

   Cette question a déjà été résolue en exercice pour les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. Elle s'adapte très facilement aux fonctions de classe C^1 par morceaux.

   Soient $0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_p = 2\pi$ les points de discontinuité de f, tels que f soit de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $]a_j; a_{j+1}[$.

   Alors, $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\,e^{-ikt}\,\mathrm{d}t = \sum_{j=0}^{p-1}\int_{a_j}^{a_{j+1}} f(t)\,e^{-ikt}\,\mathrm{d}t$

   Regardons, maintenant, l'intégrale sur l'intervalle $]a_j; a_{j+1}[$ sur lequel il est possible de faire une intégration par parties On pose :

$$\begin{bmatrix} u = f & u' = f' \\ v' = e^{-ikt} & v = \dfrac{e^{-ikt}}{-ik} \end{bmatrix}$$

Donc :

$$\begin{aligned}\int_{a_j}^{a_{j+1}} f(t)\, e^{-ikt}\,\mathrm{d}t &= \left[f(t)\,\frac{e^{-ikt}}{-ik}\right]_{a_j}^{a_{j+1}} - \int_{a_j}^{a_{j+1}} f'(t)\,\frac{e^{-ikt}}{-ik}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{ik}\left(f(a_{j+1})\,e^{-ika_{j+1}} - f(a_j)\,e^{-ika_j}\right) + \frac{1}{ik}\int_{a_j}^{a_{j+1}} f'(t)\,e^{-ikt}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} f(t)\,e^{-ikt}\,\mathrm{d}t &= \sum_{j=0}^{p-1}\int_{a_j}^{a_{j+1}} f(t)\,e^{-ikt}\,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{j=0}^{p-1}\frac{1}{ik}\left(f(a_{j+1})\,e^{-ika_{j+1}} - f(a_j)\,e^{-ika_j}\right) + \sum_{j=0}^{p-1}\frac{1}{ik}\int_{a_j}^{a_{j+1}} f'(t)\,e^{-ikt}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{ik}\sum_{j=0}^{p-1}\left(f(a_{j+1})\,e^{-ika_{j+1}} - f(a_j)\,e^{-ika_j}\right) + \frac{1}{ik}\sum_{j=0}^{p-1}\int_{a_j}^{a_{j+1}} f'(t)\,e^{-ikt}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{ik}\left(f(2\pi)\,e^{-2ik\pi} - f(0)\,e^0\right) + \int_0^{2\pi} f'(t)\,e^{-ikt}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Comme f est 2π-périodique, c'est à dire que $f(2\pi) = f(0)$, que $e^{-2ik\pi} = e^0 = 1$, nous avons :

$$\int_0^{2\pi} f(t)\,e^{-ikt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{ik}\int_0^{2\pi} f'(t)\,e^{-ikt}\,\mathrm{d}t$$

Et donc, $C_k(f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\,e^{-ikt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\times\frac{1}{ik}\int_0^{2\pi} f'(t)\,e^{-ikt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{ik}C_k(f')$

Ce que nous voulions

On peut faire remarquer, et c'est un résultat remarquable, que :

$$C_k(f) = \frac{C_k(f')}{ik} \Longleftrightarrow C_k(f') = ikC_k(f)$$

2. Dire que f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, c'est dire que $f' \in \mathcal{C}_M(T)$, et donc, d'après l'égalité de Parseval, $\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|C_k(f')|^2$ est une série numérique convergente, et nous avons :

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|C_k(f')|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f'(t)|^2\,\mathrm{d}t$$

3. On utilise ici, une inégalité très intéressante, presque courante, issue des identités remarquables, vraie pour tout x_inR et tout $y \in \mathbb{R}$:

$$|xy| \leqslant \frac{x^2+y^2}{2}$$

De cette inégalité, on tire que $|C_k(f)| = \left|kC_k(f)\times\dfrac{1}{k}\right| \leqslant \dfrac{1}{2}\left(|kC_k(f)|^2 + \dfrac{1}{k^2}\right)$

4. Or, $|kC_k(f)| = |C_k(f')|$; donc, de l'inégalité précédente, $|C_k(f)| \leqslant \dfrac{1}{2}\left(|C_k(f')|^2 + \dfrac{1}{k^2}\right)$.

→ D'après le point précédent, $\displaystyle\sum_{-\infty}^{+\infty}|C_k(f')|^2$ est une série convergente.

→ $\displaystyle\sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{+\infty}\frac{1}{k^2}$ est une série convergente

Ce qui montre que le terme $\left|C_k(f)\,e^{ikx}\right|$ est majoré par le terme général d'une série numérique convergente ; la convergence de $\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty}C_k(f)\,e^{ikx}$ est donc normale sur $\mathbb{R}$.

Remarque 20 :

1. La convergence normale permet d'utiliser les résultats sur la convergence uniforme des séries *(dérivation, intégration en particulier)*
2. On obtient ainsi des résultats sur la régularité des coefficients de Fourier d'une fonction :
   ⇒ Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, comme $ikC_k(f) = C_k(f')$, de la convergence de $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k(f')|^2$, nous avons, $\lim_{k\to\pm\infty} |kC_k(f)|^2 = \lim_{k\to\pm\infty} |C_k(f')|^2 = 0$, c'est à dire $\lim_{k\to\pm\infty} kC_k(f) = 0$, autrement dit, $C_k(f)$ est négligeable devant $\frac{1}{k}$, ce qui se traduit par : $C_k(f) \in o\left(\frac{1}{k}\right)$.
   → Plus généralement, et par récurrence, on montre que si f est de classe $\mathcal{C}^p$, alors, $\lim_{k\to\pm\infty} k^p C_k(f) = 0$, autrement dit, $C_k(f) \in o\left(\frac{1}{k^p}\right)$

9.6.4 Des exemples de développement en série de Fourier

En fait, ces développement ont déjà été faits en 9.3.7, page 421

1. **<u>Fonction en dents de scie</u>**
   Soit f, définie sur $\mathbb{R}$, périodique et de période 2π, définie sur $[-\pi, +\pi]$ par $f(x) = |x|$.
   Page 422, nous avons montré le graphe et calculé sa série de Fourier. Et donc, la série de Fourier de f est :
   $$\boxed{S_f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k\geqslant 0}\frac{\cos((2k+1)x)}{(2k+1)^2}}$$
   (a) f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, d'après le théorème de Dirichlet, il y a convergence de cette série
   (b) On en déduit, en prenant des valeurs particulières de x, que, par exemple pour $x = 0$,
   $$f(0) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k\geqslant 0}\frac{\cos((2k+1)0)}{(2k+1)^2} = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k\geqslant 0}\frac{1}{(2k+1)^2} = 0$$
   D'où, puisque $f(0) = 0$, $\sum_{k\geqslant 0}\frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$
   (c) En allant plus loin, nous avons :
   $$\sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{k^2} = \sum_{k\geqslant 0}\frac{1}{(2k+1)^2} + \sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{(2k)^2} = \sum_{k\geqslant 0}\frac{1}{(2k+1)^2} + \frac{1}{4}\sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{k^2}$$
   On en déduit que $\frac{3}{4}\sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{k^2} = \sum_{k\geqslant 0}\frac{1}{(2k+1)^2}$
   D'où $\sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{k^2} = \frac{4\pi^2}{3\times 8} = \frac{\pi^2}{6}$; on démontre ainsi un résultat souvent annoncé :
   $$\boxed{\sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}}$$
2. **<u>Fonction créneau</u>**
   La fonction créneau est la fonction périodique et de période 2π définie par :
   $$f(x) = \begin{cases} -1 \text{ si} -\pi < x < 0 \\ +1 \text{ si} 0 < x < \pi \end{cases}$$

C'est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Nous continuons ce que nous avons vu page424
Nous avons calculé le polynôme trigonométrique qui, par le théorème de Dirichlet 9.6.2, converge simplement vers f. Ce polynôme est défini par :

$$S_{2N+1}(f)(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{N} \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}$$

Nous avons toujours $\lim\limits_{N \to +\infty} S_{2N+1}(f)(x) = \widetilde{f}(x)$.

Voir figure 9.9

(a) Pour $x = \frac{\pi}{2}$ qui est un point de continuité, nous avons

$$1 = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\sin(2k+1)\frac{\pi}{2}}{2k+1} \Longleftrightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$$

(b) Au contraire, pour $x = 0$, nous avons un point de discontinuité, et $\widetilde{f}(0) = 0$, et on a bien, pour tout $N \in \mathbb{N}$, $S_{2N+1}(f)(0) = 0$

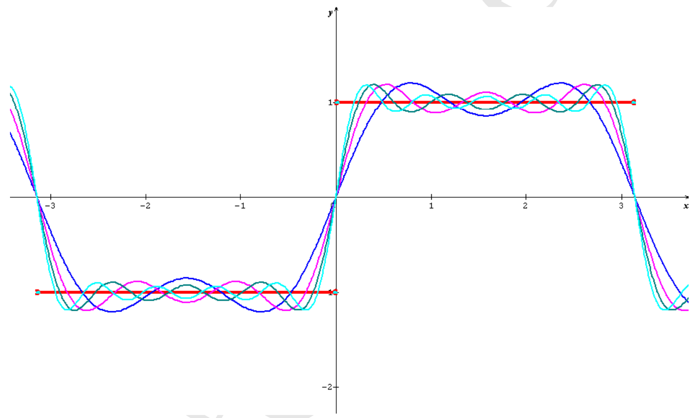

FIGURE 9.9 – Polynômes trigonométriques approchant la fonction créneau

3. <u>**Phénomène de Gibbs** *(Souriez !!)*</u>
Un agrandissement de la courbe au voisinage du point d'abscisse 0 et d'ordonnée 1 *(voir figure 9.10)* montre que le polynôme $S_{2N+1}(f)(x)$ s'écarte notablement du segment $[-1; +1]$ au voisinage de 0 :

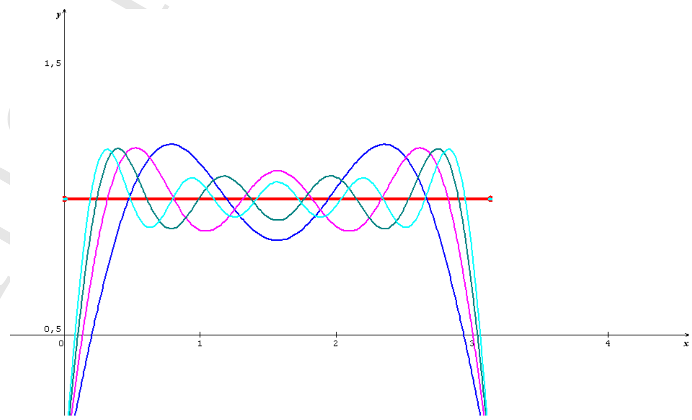

FIGURE 9.10 – Agrandissement sur l'intervalle $[0; \pi]$: illustration du phénomène de Gibbs

$\Rightarrow$ Pour étudier ce qui se passe, nous allons étudier la dérivée de $S_{2N+1}(f)$ et considérer le premier maximum de $S_{2N+1}(f)$ sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right]$

Les calculs montrent donc que $[S_{2N+1}(f)]'(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{N}\cos(2k+1)x$, ce qui peut aussi s'écrire par :

$$\begin{aligned}
\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{N}\cos(2k+1)x &= \frac{2}{\pi}\left(\sum_{k=0}^{N} e^{i(2k+1)x} + e^{-i(2k+1)x}\right)\\
&= \frac{2}{\pi}\left(\sum_{k=0}^{N} e^{i(2k+1)x} + \sum_{k=0}^{N} e^{-i(2k+1)x}\right)\\
&= \frac{2}{\pi}\left(e^{ix}\sum_{k=0}^{N}\left(e^{2ix}\right)^k + e^{-ix}\sum_{k=0}^{N}\left(e^{-2ix}\right)^k\right)\\
&= \frac{2}{\pi}\left(\frac{e^{ix}\left(1-e^{2i(N+1)x}\right)}{1-e^{2ix}} + \frac{e^{-ix}\left(1-e^{-2i(N+1)x}\right)}{1-e^{-2ix}}\right)\\
&= \frac{2}{\pi}\left(\frac{1-e^{2i(N+1)x}}{e^{ix}-e^{-ix}} + \frac{1-e^{-2i(N+1)x}}{e^{ix}-e^{-ix}}\right)\\
&= \frac{2}{\pi}\left(\frac{e^{2i(N+1)x}-e^{-2i(N+1)x}}{e^{ix}-e^{-ix}}\right)\\
&= \frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin 2(N+1)x}{\sin x}\right)
\end{aligned}$$

Nous avons donc $[S_{2N+1}(f)]'(x) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin 2(N+1)x}{\sin x}\right)$.

$\Rightarrow$ Sur l'intervalle $\left]0; \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin x$ est toujours positif, le signe de $\frac{\sin 2(N+1)x}{\sin x}$ ne dépendra que du numérateur. Nous avons donc :

$$0 < 2(N+1)x < \pi \Longleftrightarrow 0 < x < \frac{\pi}{2(N+1)}$$

Le premier maximum est donc donné par : $[S_{2N+1}(f)]\left(\frac{\pi}{2(N+1)}\right)$.

$\Rightarrow$ Or, comme $[S_{2N+1}(f)](0) = 0$, nous avons :

$$\begin{aligned}
[S_{2N+1}(f)]\left(\frac{\pi}{2(N+1)}\right) &= [S_{2N+1}(f)]\left(\frac{\pi}{2(N+1)}\right) - [S_{2N+1}(f)](0)\\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2(N+1)}} [S_{2N+1}(f)]'(x)\,dx\\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2(N+1)}} \frac{\sin 2(N+1)x}{\sin x}dx
\end{aligned}$$

Nous avons donc $[S_{2N+1}(f)]\left(\frac{\pi}{2(N+1)}\right) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2(N+1)}} \frac{\sin 2(N+1)x}{\sin x}dx$

$\Rightarrow$ Faisons, dans l'intégrale, le changement de variable $u = 2(N+1)x$; alors, $x = \frac{u}{2(N+1)}$ et $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 2(N+1) \Longleftrightarrow \frac{\mathrm{d}u}{2(N+1)} = \mathrm{d}x$. Alors :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2(N+1)}} \frac{\sin 2(N+1)x}{\sin x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{\sin\left(\frac{u}{2(N+1)}\right)}\frac{\mathrm{d}u}{2(N+1)}$$

C'est à dire que $[S_{2N+1}(f)]\left(\frac{\pi}{2(N+1)}\right) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin u}{2(N+1)\sin\left(\frac{u}{2(N+1)}\right)}\,\mathrm{d}u$

$\Rightarrow$ Appelons maintent $\Phi_N(u) = \dfrac{\sin u}{2(N+1)\sin\left(\frac{u}{2(N+1)}\right)}$.

Ré-écrivons $\Phi_N(u) = \dfrac{\sin u \times u}{2(N+1)\,u\sin\left(\frac{u}{2(N+1)}\right)} = \dfrac{\sin u}{u} \times \dfrac{\frac{u}{2(N+1)}}{\sin\left(\frac{u}{2(N+1)}\right)}$

En utilisant les limites remarquables, nous avons :

$\to$ Une première fois, $\lim\limits_{u\to 0} \Phi_N(u) = \lim\limits_{u\to 0} \dfrac{\sin u}{u} \times \dfrac{\frac{u}{2(N+1)}}{\sin\left(\frac{u}{2(N+1)}\right)} = 1$, ce qui nous permet de prolonger Φ_N par continuité en 0, en posant $\Phi_N(0) = 1$, ce qui montre que $\displaystyle\int_0^{\pi} \Phi_N(u)\,du$ est une intégrale bien définie

$\to$ Et une seconde fois, $\lim\limits_{N\to+\infty} \dfrac{\frac{u}{2(N+1)}}{\sin\left(\frac{u}{2(N+1)}\right)} = 1$, de telle sorte que la suite de fonctions $(\Phi_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $\dfrac{\sin u}{u}$

$\Rightarrow$ Montrons maintenant que la suite de fonctions $(\Phi_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $\dfrac{\sin u}{u}$ sur l'intervalle $[0;\pi]$

Pour le démontrer, nous aurons besoin des inégalités suivantes démontrées en L_0 et L_1 :

- Pour tout $x \in \left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$, nous avons $\dfrac{2x}{\pi} \leqslant \sin x$
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons $|\sin x - x| \leqslant \dfrac{|x|^3}{6}$

Nous avons, pour tout $t \in [0;\pi]$:

$$\begin{aligned}
\left|\Phi_N(t) - \frac{\sin t}{t}\right| &= \left|\frac{\sin t}{t} \times \frac{\frac{t}{2(N+1)}}{\sin\left(\frac{t}{2(N+1)}\right)} - \frac{\sin t}{t}\right| \\
&= \left|\frac{\sin t}{t}\right| \left|\frac{\frac{t}{2(N+1)}}{\sin\left(\frac{t}{2(N+1)}\right)} - 1\right| \\
&= \left|\frac{\sin t}{t}\right| \left|\frac{\frac{t}{2(N+1)} - \sin\left(\frac{t}{2(N+1)}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2(N+1)}\right)}\right|
\end{aligned}$$

Comme, pour tout $t \in \mathbb{R}$, nous avons $\left|\dfrac{\sin t}{t}\right| \leqslant 1$, nous pouvons écrire :

$$\left|\Phi_N(t) - \frac{\sin t}{t}\right| \leqslant \left|\frac{\frac{t}{2(N+1)} - \sin\left(\frac{t}{2(N+1)}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2(N+1)}\right)}\right|$$

$\Rightarrow$ Nous allons, maintenant, étudier la quantité $\left|\dfrac{\frac{t}{2(N+1)} - \sin\left(\frac{t}{2(N+1)}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2(N+1)}\right)}\right|$

$\star$ Tout d'abord, pour tout $t \in [0;\pi]$, nous avons :

$$\left|\frac{t}{2(N+1)} - \sin\left(\frac{t}{2(N+1)}\right)\right| \leqslant \frac{1}{6}\left(\frac{t}{2(N+1)}\right)^3 = \frac{t^3}{48(N+1)^3}$$

$\star$ D'autre part, comme $0 \leqslant t \leqslant \pi$, alors $0 \leqslant \dfrac{t}{2(N+1)} \leqslant \dfrac{\pi}{2(N+1)} \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, d'où nous tirons :

$$\sin\left(\frac{t}{2(N+1)}\right) \geqslant \frac{2t}{2(N+1)\pi} = \frac{t}{(N+1)\pi}$$

Et donc, si $t \in [0;\pi]$ alors $\dfrac{1}{\sin\left(\frac{t}{2(N+1)}\right)} \leqslant \dfrac{(N+1)\pi}{t}$

$\star$ Et donc :

$$\left|\Phi_N(t) - \frac{\sin t}{t}\right| \leqslant \frac{(N+1)\pi}{t} \times \frac{t^3}{48(N+1)^3} = \frac{\pi t^2}{48(N+1)^2} \leqslant \frac{\pi^3}{48(N+1)^2}$$

Pour tout $t \in [0;\pi]$, nous avons $\left|\Phi_N(t) - \dfrac{\sin t}{t}\right| \leqslant \dfrac{\pi^3}{48(N+1)^2}$; la majoration est uniforme et comme $\lim\limits_{N\to+\infty} \dfrac{\pi^3}{48(N+1)^2} = 0$, nous déduisons que la suite de fonctions $(\Phi_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $\dfrac{\sin t}{t}$ sur l'intervalle $[0;\pi]$

$\Rightarrow$ Nous pouvons donc écrire :

$$\lim_{N\to+\infty} [S_{2N+1}(f)]\left(\frac{\pi}{2(N+1)}\right) = \frac{2}{\pi}\lim_{N\to+\infty}\int_0^\pi \Phi_N(u)\,\mathrm{d}u = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \lim_{N\to+\infty}\Phi_N(u)\,\mathrm{d}u = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u$$

Ce qui sous entend que le premier maximum de $S_{2N+1}(f)$ tend vers un nombre fixe qui est $\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u$ et non pas 1

$\Rightarrow$ Tentons de donner une évaluation de $\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u$.

Nous partons de la série entière définissant $\sin u$: $\sin u = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{u^{2n+1}}{(2n+1)!}$

Et donc, pour $u \neq 0$, nous avons $\dfrac{\sin u}{u} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{u^{2n}}{(2n+1)!}$

Nous avons vu, dans le chapitre sur les séries entières que la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{u^{2n}}{(2n+1)!}$ converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}$, donc, en particulier sur l'intervalle $[0;\pi]$.
Nous avons donc :

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u &= \int_0^\pi \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n+1)!}\,\mathrm{d}u = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^\pi (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n+1)!}\,\mathrm{d}u \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\pi^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}\end{aligned}$$

La série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\pi^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}$ est une série alternée et nous avons toujours

$$S_{2n-1} \leqslant \int_0^\pi \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u \leqslant S_{2n}$$

Nous avons, par exemple :

$$\sum_{n=0}^{5} (-1)^n \frac{\pi^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!} \leqslant \int_0^\pi \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u \leqslant \sum_{n=0}^{6} (-1)^n \frac{\pi^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}$$

C'est à dire, après calculs :

$$1,85190 \leqslant \int_0^\pi \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u \leqslant 1,851938 \iff 1,17895 \leqslant \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u \leqslant 1,17898$$

Et donc $\lim\limits_{N\to+\infty} [S_{2N+1}(f)]\left(\dfrac{\pi}{2(N+1)}\right) \simeq 1,1789$