9.7 Exercices

9.7.1 Applications directes du cours

Voilà une liste d'exercices qui ne pose pas de difficultés théoriques. La difficulté réside dans les calculs longs, fastidieux et qui demandent un immense soin.

Exercice 6 :

1. Soit f une fonction continue périodique et de période 2π. On suppose f de classe $\mathcal{C}^k$. Montrer que $(c_n(f))$ est un $o\left(\dfrac{1}{n^k}\right)$

2. **Etude d'une réciproque** Soit $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite de nombres complexes tels que $c_n \in o\left(\dfrac{1}{n^k}\right)$ pour tout entier positif $k \in \mathbb{N}$. On considère la série : $S(x) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$

   (a) Montrer que la série S converge normalement sur $\mathbb{R}$, que sa somme est de classe $\mathcal{C}^\infty$

   (b) Pourquoi est-il possible d'énoncer le résultat suivant :

   > Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue et 2π-périodique. f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ si et seulement si, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $c_n(f) \in O\left(\dfrac{1}{n^k}\right)$

Exercice 7 :

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ 2π-périodique, dérivable, telle qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ vérifiant, pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$f'(t) = f(t+\lambda)$$

1. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, nous avons $\left(in - e^{in\lambda}\right) c_n(f) = 0$
2. En déduire pour quelles valeurs de λ, on peut effectivement trouver une telle fonction f non identiquement nulle.

Exercice 8 :

1. Soit f une fonction numérique de période 2π telle que : $f(x) = x^2$ si $|x| \leqslant \pi$

   (a) Calculer la série de Fourier de f

   (b) En déduire :

   i. $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2}$

   ii. $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{p^2}$

   iii. $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$

   iv. $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^4}$

   v. $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^4}$

2. Soit g la fonction périodique et de période 2π , définie pour $x \in [0; 2\pi[$ par $g(x) = x^2$

   (a) Déterminer la série de Fourier de g

   (b) Calculer $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2}$, puis $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^4}$

Exercice 9 :

Soit f une fonction numérique de période 2π telle que :

$$f(x) = \begin{cases} \pi - x \text{ si } x \in [0; \pi[\\ \pi + x \text{ si } x \in [-\pi; 0[\end{cases}$$

1. Calculer la série de Fourier de f
2. Retrouver $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$

Exercice 10 :

Montrer que, pour $x \in [0; \pi[$, on a, à la fois :

$$x(\pi - x) = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos 2nx}{n^2} \text{ et } x(\pi - x) = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)^3}$$

Pour le démontrer, inspirez vous des graphes de la figure 9.11 :

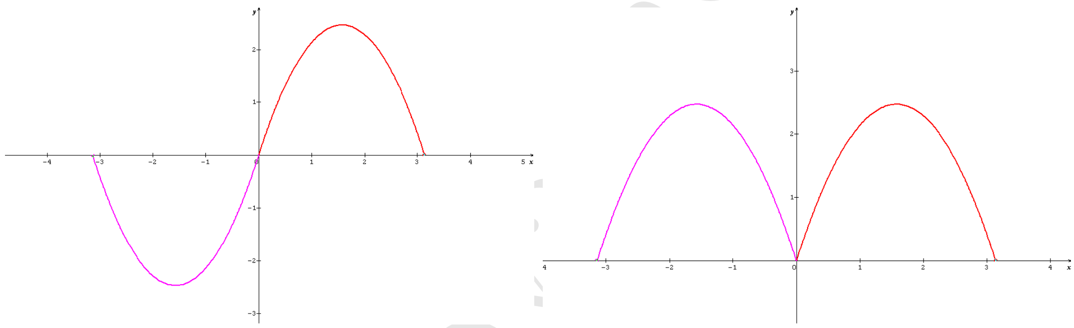

FIGURE 9.11 – Graphes possibles

Exercice 11 :

1. Soit $a > 0$. Développer en série entière la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x + e^a}$
2. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $a > 0$, nous avons :

$$\frac{1}{\cos x + \cosh a} = \frac{1}{\sinh a} \left(\frac{e^a}{e^{ix} + e^a} - \frac{e^{-a}}{e^{ix} + e^{-a}} \right)$$

3. En déduire le développement en série de Fourier de la fonction g définie par $g(x) = \dfrac{1}{\cos x + \cosh a}$ avec $a > 0$

Exercice 12 :

Soit $p \notin \mathbb{Z}$.
Soit f une fonction numérique de période 2π définie par $f(x) = \cos px$ si $|x| \leqslant \pi$

1. Développer f en série de Fourier
2. En déduire que : $\cot p\pi = \dfrac{1}{p\pi} + \dfrac{2p}{\pi} \displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{p^2 - n^2}$

Exercice 13 :

Soit f une fonction continue 2π-périodique telle que, pour chaque $N \in \mathbb{N}$, on ait $\sup_{x\in[0;2\pi]} S_N(f)(x) = \|S_N(f)\|_\infty \leqslant 1$. Montrer que $\sup_{x\in[0;2\pi]} f(x) = \|f\|_\infty \leqslant 1$

9.7.2 Exercices moins proches du cours

Exercice 14 :

On désigne par $\mathbb{U}$ le cercle unité, c'est à dire $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \text{ tels que } |z| = 1\}$.
On rappelle que $(\mathbb{U}, \times)$ est un sous-groupe commutatif de $(\mathbb{C}, \times)$ et qu'un endomorphisme de groupe $\varphi : \mathbb{U} \longrightarrow \mathbb{U}$ est tel que pour tout $z \in \mathbb{U}$ et tout $z_1 \in \mathbb{U}$, $\varphi(zz_1) = \varphi(z) \times \varphi(z_1)$.
Rechercher tous les <u>endomorphismes continus</u> de $\mathbb{U}$

Exercice 15 :

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ 2π-périodique.
On suppose qu'il existe $\alpha > 0$ et $C > 0$ tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y \in \mathbb{R}$ $|f(x) - f(y)| \leqslant C|x-y|^\alpha$

1. Pour $a \in \mathbb{R}$ exprimer $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t+a)\, e^{-int}\, \mathrm{d}t$ en fonction de $c_n(f)$
2. En déduire l'existence d'un réel $M > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$ $|c_n(f)| \leqslant \dfrac{M}{n^\alpha}$.

Exercice 16 :

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique de classe $\mathcal{C}^1$ et telle que $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\, \mathrm{d}t = 0$.
Nous avons le lien entre les coefficients de Fourier $c_n(f)$ et $c_n(f')$: $c_n(f') = inc_n(f)$

1. Démontrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$ $|f(t)| \leqslant \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \frac{1}{|n|} |c_n(f')|$
2. En déduire l'inégalité $\|f\|_\infty^2 \leqslant \dfrac{\pi}{6} \displaystyle\int_0^{2\pi} |f'(t)|^2\, \mathrm{d}t$
3. **Inégalité de Wirtinger**
   Démontrer que $\displaystyle\int_0^{2\pi} |f(t)|^2\, \mathrm{d}t \leqslant \int_0^{2\pi} |f'(t)|^2\, \mathrm{d}t$.

9.7.3 Série de Fourier d'une fonction de période T

Nous avons travaillé, dans le cours, le développement en série de Fourier de fonctions périodiques et de période 2π. Qu'en est-il des fonctions qui sont périodiques, mais d'une période différente de 2π ?
Soit donc f une fonction périodique, de période T et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.
L'objet des exercices qui suivent est de construire une série trigonométrique qui converge vers f.

Exercice 17 :

1. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction définie par $g(x) = f\left(\dfrac{T}{2\pi}x\right)$. Montrer que :
   (a) La fonction g est périodique et de période 2π
   (b) La fonction g est continue par morceaux
2. On appelle $C_n(g)$ le coefficient de Fourier de g d'ordre n. Démontrer que nous avons :

$$C_n(g) = C_n^1(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(u)\, e^{-in\frac{2\pi u}{T}}\, \mathrm{d}u$$

3. On suppose que, cette fois-ci, f est de classe $\mathcal{C}^1$. Démontrer que, pour tout $x \in [0;T]$, nous avons le développement :

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n^1(f)\, e^{in\frac{2\pi u}{T}}$$

C'est le développement de f en série de Fourier

4. Démontrez que nous avons aussi $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left|C_n^1(f)\right|^2 = \frac{1}{T}\int_0^T |f(u)|^2\, du$

C'est l'égalité de Parseval

Exercice 18 :

Cet exercice s'inscrit dans la suite du précédent.

1. Calculer le développement en série de Fourier des fonctions suivantes :
   (a) f est périodique et de période 2, et $f(t) = |t|$ si $|t| < 1$
   (b) f est périodique et de période $a > 0$, et $f(t) = \dfrac{t}{a}$ si $0 \leqslant t < a$
2. Ecrire l'égalité de Parseval pour chacune des fonctions ci-dessus

9.7.4 Problème

DANS CETTE SECTION, JE PRÉSENTE UN PROBLÈME DE CONCOURS QUI « PARLE AUTOUR DES SÉRIES DE FOURIER ». NOUS Y TROUVONS PARFOIS *(Et c'est bien normal pour un problème de concours !)* DES QUESTIONS QUI SONT DES QUESTIONS DE COURS. JE NE LES TRAITERAI PAS. J'AI ESSAYÉ DE TROUVER UN PROBLÈME QUI APPORTE UN PLUS AUX NOTIONS VUES DANS LE COURS

Exercice 19 :

Soit $\mathcal{C}^\infty(T)$ l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ et 2π-périodique.

Pour tout $f \in \mathcal{C}^\infty(T)$, et tout $p \in \mathbb{Z}$, on posera $c_p(f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\, e^{-ipt}\, \mathrm{d}t$.

On désignera par $\|f\|_\infty$ la borne supérieure de $|f(t)|$ quand t décrit $\mathbb{R}$, c'est à dire :

$$\|f\|_\infty = \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t)| = \sup_{t\in[0;2\pi]} |f(t)|$$

Enfin, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on désignera par E_k, l'ensemble des éléments $f \in \mathcal{C}^\infty(T)$ ayant la propriété suivante :

> Il existe $M > 0$ et $A > 0$ *(pouvant l'un et l'autre dépendre de f)* tels que *(avec la convention usuelle $f^{(0)} = f$)* on ait, pour tout $n \in \mathbb{N}$
>
> $$\left\|f^{(n)}\right\|_\infty \leqslant M\,(n!)^k A^n$$

On se propose, dans ce problème, d'étudier quelques propriétés de E_k, et notamment de caractériser par leurs coefficients de Fourier les éléments de E_k

Partie 1 : Généralités sur E_k et étude particulière de E_0

1. (a) Montrer que, pour tout $f \in \mathcal{C}^\infty(T)$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}$ est bornée.
   (b) Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(T)$; calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $p \in \mathbb{Z}$, $c_p\left(f^{(n)}\right)$, coefficient de Fourier d'indice p de f fonction de $c_p(f)$, de n et de p.
   (c) Établir, pour $p \neq 0$, l'inégalité $|c_p(f)| \leqslant \dfrac{\left\|f^{(n)}\right\|_\infty}{|p|^n}$
2. Montrer que, pour tout $f \in \mathcal{C}^\infty(T)$ et tout $n \in \mathbb{N}$: $\displaystyle\lim_{|p|\to+\infty} |p|^n\, |c_p(f)| = 0$

3. Soit $(c_p)_{p\in\mathbb{Z}}$ une suite de nombres complexes telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{|p|\to+\infty} |p|^k c_p = 0$
   (a) Montrer que les séries de fonctions $\sum\limits_{p=0}^{+\infty} c_p e^{ipt}$ et $\sum\limits_{p=1}^{+\infty} c_{-p} e^{-ipt}$ où $t \in \mathbb{R}$, sont normalement convergentes dans $\mathbb{R}$.
   (b) Si l'on pose :$f(t) = \sum\limits_{p=0}^{+\infty} c_p e^{ipt} + \sum\limits_{p=1}^{+\infty} c_{-p} e^{-ipt}$, montrer que $f \in \mathcal{C}^\infty(T)$
   (c) Montrer que $c_p = c_p(f)$
4. Etablir que, si f et g sont deux éléments de E_k, et μ une constante complexe, alors μf ,$f+g$ fg et f' sont éléments de E_k,
5. Soit $f \in E_0$.
   (a) Déduire de la question 1 que $c_p(f)$ est nul sauf pour un nombre fini de valeurs de p
   (b) Soit q un entier strictement positif; on définit f par $f(t) = \sum\limits_{p=-q}^{q} c_p e^{ipt}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, les c_p étant des constantes complexes et l'un au moins des deux nombres c_q et c_{-q} étant non nul. Montrer qu'il existe $M > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left\|f^{(n)}\right\|_\infty \leqslant Mq^n$ et que, si M' et A sont deux constantes positives satisfaisant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, à l'inégalité :$\left\|f^{(n)}\right\|_\infty \leqslant M'A^n$, alors $A \geqslant q$
6. Soit q un entier strictement positif; on définit g_1 par : $g_1(\theta) = \cos^q \theta$
   Établir la meilleure inégalité possible du type suivant :

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ nous avons } \left\|g_1^{(n)}\right\|_\infty \leqslant M_1 (n!)^k A_1^n$$

   (*c'est-à-dire trouver le plus petit A_1, possible et, pour cet A_1 trouver le plus petit M_1 possible).*

Partie 2 *(intermède ludique et reposant)* : étude de fonctions et de majorations

1. Soient $a > 1$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Etudier les variations de la fonction f_n ainsi définie :

$$\begin{cases} f_n : \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \quad\quad x & \longmapsto & f_n(x) = x^n a^{-x} \end{cases}$$

   Donner explicitement le maximum de cette fonction.
2. (a) Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $u_n = \dfrac{1}{n!} \times \left(\dfrac{n}{e}\right)^n$
   (b) En déduire l'inégalité $n! \geqslant e\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$
3. On pose, pour tout $x > 0$, $\Phi(x) = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} (n! x^{-n})$
   (a) Donner une expression explicite de $\Phi(x)$ lorsque $x \in]s, s+1]$, où $s \in \mathbb{N}$.
   (b) Etudier la continuité de Φ ; représenter graphiquement la restriction de Φ à l'intervalle $]0,4]$.
   (c) Etablir l'existence d'une constante β telle que, pour tout $x > 0$: $\Phi(x) \leqslant \beta e^{\frac{-x}{2}}$

Partie 3 : Etude du cas particulier des « fonctions rationnelles trigonométriques »

1. Soit $a \in \mathbb{C}$, tel que $|a| > 1$. On pose, pour tout $t \in \mathbb{R}$: $h_a(t) = \sum\limits_{p=1}^{+\infty} a^{-p} e^{ipt}$
   (a) Donner une expression explicite de $h_a(t)$.
   (b) Etablir que $h_a \in \mathcal{C}^\infty(T)$; donner, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le développement en série de Fourier de $h_a^{(n)}$
   (c) Etablir l'inégalité, valable pour n et p entiers, $n \geqslant 0$ et $p > 0$: $p^n \times |a|^{-\frac{p}{2}} \leqslant \left(\dfrac{2}{\ln|a|}\right)^n \times n!$

(d) En déduire que $h_a \in E_1$

2. Soit $b \in \mathbb{C}$, avec $|b| \neq 1$.

   (a) Donner les coefficients de Fourier de la fonction ψ_b, définie par $\psi_b(t) = \dfrac{1}{b - e^{it}}$

   (b) En déduire que $\psi_b \in E_1$

Partie 4 : Caractérisation des éléments de E_k par leurs coefficients de Fourier

1. Soit k un entier strictement positif, et soit $f \in E_k$; par définition des éléments de E_k, il existe alors $M > 0$ et $A > 0$ tels pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\left\| f^{(n)} \right\|_\infty \leqslant M (n!)^k A^n$$

   (a) Etablir que, pour tout entier relatif $p \neq 0$, nous avons l'inégalité $c_p(f) \leqslant M (n!)^k \left(\dfrac{A}{|p|} \right)^n$

   (b) A l'aide de la fonction Φ définie pour tout $x > 0$ par $\Phi(x) = \inf\limits_{n \in \mathbb{N}} (n! x^{-n})$, montrer l'existence de deux constantes strictement positives, B et λ telles que, pour tout $p \in \mathbb{Z}$:

$$|c_p(f)| \leqslant B \exp\left(-\lambda |p|^{\frac{1}{k}} \right)$$

2. Inversement soit C une application de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{C}$, ainsi définie :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} C : \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ p & \longmapsto & C(p) = c_p \end{array} \right.$$

   pour laquelle il existe deux constantes $B > 0$ et $\lambda > 0$ strictement positives telles que, pour tout $p \in \mathbb{Z}$, nous ayions

$$|c_p| \leqslant B \exp\left(-\lambda |p|^{\frac{1}{k}} \right)$$

   (a) Etablir qu'il existe un élément $f \in \mathcal{C}^\infty(T)$ tel que, pour tout $p \in \mathbb{Z}$ $c_p = c_p(f)$

   (b) Déduire de la partie 2 l'inégalité, valable pour tout couple $(n, p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ d'entiers strictement positifs :

$$p^n \exp\left(-\frac{\lambda}{2} p^{\frac{1}{k}} \right) \leqslant (n!)^k \left(\frac{2k}{\lambda} \right)^{nk}$$

   (c) En déduire une majoration de $\left\| f^{(n)} \right\|_\infty$ et montrer que $f \in E_k$