9.8 Correction des exercices

9.8.1 Exercices du cours

Exercice 1 :

Soit $f \in \mathcal{C}^1(T)$. Démontrer que les coefficients de Fourier de f' vérifient, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f') = inc_n(f)$

Nous avons, par définition, $c_n(f') = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f'(t)\, e^{-int}\,\mathrm{d}t$.
Nous allons faire une intégration par parties :

$$\left\{\begin{array}{ll} u' = f'(t) & u = f(t) \\ v = e^{-int} & v' = -ine^{-int} \end{array}\right\}$$

D'où

$$c_n(f') = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f'(t)\, e^{-int}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\left(\left[f(t)\, e^{-int}\right]_0^{2\pi} + in\int_0^{2\pi} f(t)\, e^{-int}\,\mathrm{d}t\right)$$

Comme la fonction $f(t)$ est périodique et de période 2π, nous avons

$$\left[f(t)\, e^{-int}\right]_0^{2\pi} = f(2\pi)\, e^{-2in\pi} - f(0) = f(2\pi) - f(0) = 0$$

Et donc, $c_n(f') = \dfrac{1}{2\pi} \times in\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\, e^{-int}\,\mathrm{d}t = in\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\, e^{-int}\,\mathrm{d}t = inc_n(f)$
Ce que nous voulions

Exercice 2 :

Soit $f \in \mathcal{C}_M(T)$, une fonction périodique de période T, intégrable sur tout intervalle borné. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_x^{x+T} f(t)\,\mathrm{d}t$, ne dépend pas de x

C'est un exercice classique de L_1 !!
Par la relation de Chasles :

$$\int_x^{x+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_x^0 f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t + \int_T^{x+T} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Nous faisons, dans l'intégrale $\displaystyle\int_T^{x+T} f(t)\,\mathrm{d}t$, le changement de variables $u = t - T$. Alors, $\mathrm{d}t = \mathrm{d}u$ et

$$\int_T^{x+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x f(u+T)\,\mathrm{d}u$$

De la périodicité de f, nous avons $f(u+T) = f(u)$ et donc :

$$\int_T^{x+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x f(u+T)\,\mathrm{d}u = \int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u$$

Et donc :

$$\begin{aligned} \int_x^{x+T} f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_x^0 f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t + \int_T^{x+T} f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_x^0 f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u \\ &= \int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Ce qui montre bien que $\displaystyle\int_x^{x+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t$ qui est une intégrale qui ne dépend pas de x.

Exercice 3 :

Soit f périodique et de période 2π dont les coefficients de Fourier sont notés $c_n(f)$. Quels sont les coefficients de Fourier de la fonction translatée $g(t) = f(t - t_0)$?

▷ Tout d'abord on vérifie, sans difficulté que g est aussi périodique et de période 2π :

$$g(t + 2\pi) = f(t - t_0 + 2\pi) = f(t - t_0) = g(t)$$

▷ Maintenant, calculons les $c_n(g)$, les coefficients de Fourier de g :

$$c_n(g) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(t)\, e^{-ikt}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t - t_0)\, e^{-ikt}\, \mathrm{d}t$$

On fait le changement de variable classique $u = t - t_0$, alors $\mathrm{d}u = \mathrm{d}t$ et, alors :

$$\begin{aligned}
c_n(g) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t - t_0)\, e^{-ikt}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-t_0}^{2\pi - t_0} f(u)\, e^{-ik(u+t_0)}\, \mathrm{d}u \\
&= \frac{e^{-ikt_0}}{2\pi}\int_{-t_0}^{2\pi - t_0} f(u)\, e^{-iku}\, \mathrm{d}u = \frac{e^{-ikt_0}}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(u)\, e^{-iku}\, \mathrm{d}u \\
&= e^{-ikt_0} c_n(f)
\end{aligned}$$

Exercice 5 :

Démontrer que si 2 fonctions u et v continues ont les mêmes coefficients de Fourier sont égales.

1. **Très généralement**, nous avons $c_n(u) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} u(t)\, e^{-int}\, \mathrm{d}t$ et $c_n(v) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} v(t)\, e^{-int}\, \mathrm{d}t$, d'où nous tirons :

$$c_n(u) - c_n(v) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(t)\, e^{-int}\, \mathrm{d}t - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(t)\, e^{-int}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (u - v)(t)\, e^{-int}\, \mathrm{d}t = c_n(u - v)$$

   Nous avons donc $c_n(u - v) = c_n(u) - c_n(v)$

2. D'autre part, comme $c_n(u) = c_n(v)$, nous avons $c_n(u - v) = 0$ et en utilisant l'identité de Parseval, nous avons :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(u - v)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |(u - v)(t)|^2\, \mathrm{d}t$$

   C'est à dire $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} |(u - v)(t)|^2\, \mathrm{d}t = 0$ et donc, comme u et v sont continues, nous avons $|(u - v)(t)|^2 = 0$, c'est à dire $(u - v) = 0 \Longleftrightarrow u = v$

9.8.2 Applications directes du cours

Exercice 6 :

1. *Soit f une fonction continue périodique et de période 2π. On suppose f de classe $\mathcal{C}^k$. Montrer que $(c_n(f))$ est un $o\left(\dfrac{1}{n^k}\right)$*

   Question pas très difficile en soi

   → Nous avons déjà montré en exercice que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f') = inc_n(f)$

   → Par une récurrence simple, on montre que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $c_n\left(f^{(k)}\right) = (in)^k c_n(f)$, et donc $\left|c_n\left(f^{(k)}\right)\right| = n^k |c_n(f)|$

   → En appliquant 9.5.4 à $c_n\left(f^{(k)}\right)$, nous avons :

$$\lim_{n\to+\infty} c_n\left(f^{(k)}\right) = 0 \Longleftrightarrow \lim_{n\to+\infty} n^k |c_n(f)| = \lim_{n\to+\infty} \frac{|c_n(f)|}{\frac{1}{n^k}} = 0$$

   Et nous avons bien $(c_n(f)) \in o\left(\dfrac{1}{n^k}\right)$

2. **Etude d'une réciproque**

Soit $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite de nombres complexes tels que $c_n \in o\left(\dfrac{1}{|n|^k}\right)$ pour tout entier positif $k \in \mathbb{N}$.

On considère la série : $S(x) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$

Montrer que la série S converge normalement sur $\mathbb{R}$, que sa somme est de classe $\mathcal{C}^\infty$

⇒ Que $c_n \in o\left(\dfrac{1}{|n|^k}\right)$ veut dire que $\displaystyle\lim_{n\to\pm\infty} \frac{|c_n|}{\frac{1}{|n|^k}} = 0 \Longleftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \left|c_n n^k\right| = 0$

Donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $M_k > 0$, il existe $N_k \in \mathbb{N}$ tel que si $|n| \geqslant N_k$, alors $\left|c_n n^k\right| \leqslant M_k$ Ceci est vrai, en particulier pour $k = 0$ et $k = 2$. Donc, pour $|n| \geqslant \max\{N_0, N_2\}$, nous avons $|c_n| \leqslant M_0$ et $|c_n| n^2 \leqslant M_2$, et en additionnant, nous avons, si $|n| \geqslant \max\{N_0, N_2\}$, $|c_n|\left(1+n^2\right) \leqslant M_0 + M_2 \Longleftrightarrow |c_n| \leqslant \dfrac{M_0+M_2}{1+n^2}$

Nous avons, en particulier, pour tout $|n| \geqslant \max\{N_0, N_2\}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $\left|c_n e^{inx}\right| \leqslant \dfrac{M_0+M_2}{1+n^2}$

Le nombre réel $\dfrac{M_0+M_2}{1+n^2}$ est le terme général d'une série numérique convergente et donc la série S converge normalement, donc uniformément sur $\mathbb{R}$. S est donc continue sur $\mathbb{R}$

⇒ Les dérivées successives de S sont du type $S^{(k)}(x) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (in)^k c_n e^{inx}$.

Comme tout à l'heure, il existe une constante $M > 0$ et un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N$, $\left|(in)^k c_n\right| \leqslant \dfrac{M}{n^2+1}$ Donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la série $S^{(k)}$ converge normalement, et S est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$

Exercice 7 :

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ 2π-périodique, dérivable, telle qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ vérifiant, pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$f'(t) = f(t+\lambda)$$

1. *Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, nous avons $\left(in - e^{in\lambda}\right) c_n(f) = 0$*

Voilà une question qui ne pose aucune difficulté.

→ Tout d'abord, nous avons $c_n(f') = inc_n(f)$

→ Ensuite :

$$c_n(f') = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f'(t)\, e^{-int}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t+\lambda)\, e^{-int}\,\mathrm{d}t$$

En faisant le changement de variable des plus classiques $u = t + \lambda$, nous avons :

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} f(t+\lambda)\, e^{-int}\,\mathrm{d}t &= \int_{-\lambda}^{2\pi-\lambda} f(u)\, e^{-in(u-\lambda)}\,\mathrm{d}u \\ &= e^{in\lambda}\int_{-\lambda}^{2\pi-\lambda} f(u)\, e^{-in(u-\lambda)}\,\mathrm{d}u \\ &= e^{in\lambda}\int_0^{2\pi-} f(u)\, e^{-inu}\,\mathrm{d}u\end{aligned}$$

De telle sorte donc que $c_n(f') = e^{in\lambda} \times \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(u)\, e^{-inu}\,\mathrm{d}u = e^{in\lambda} c_n(f)$

→ Nous avons donc $c_n(f') = inc_n(f) = e^{in\lambda} c_n(f)$, et donc :

$$inc_n(f) = e^{in\lambda} c_n(f) \Longleftrightarrow inc_n(f) - e^{in\lambda} c_n(f) = 0 \Longleftrightarrow \left(in - e^{in\lambda}\right) c_n(f) = 0$$

2. *En déduire pour quelles valeurs de λ, on peut effectivement trouver une telle fonction f non identiquement nulle.*

   Si f est une solution de l'équation différentielle $f'(t) = f(t+\lambda)$, alors f est dérivable et la relation $f'(t) = f(t+\lambda)$ entraîne que f est de classe $\mathcal{C}^1$. D'après le théorème de Dirichlet, f est donc somme de sa série de Fourier et donc $f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n(f)\, e^{inx}$

   S'il existe une solution à l'équation différentielle $f'(t) = f(t+\lambda)$ non identiquement nulle, il existe $n_0 \in \mathbb{Z}$ tel que $c_{n_0}(f) \neq 0$.
   L'identité $\left(in_0 - e^{in_0\lambda}\right) c_{n_0}(f) = 0$ implique donc que $in_0 - e^{in_0\lambda} = 0 \iff in_0 = e^{in_0\lambda}$.
   En passant aux modules, nous avons $n_0 = \pm 1$ et donc
   $\rightarrow$ Si $n_0 = 1$ alors $e^{i\lambda} = i$ et donc $\lambda = \dfrac{\pi}{2}$
   $\rightarrow$ Si $n_0 = -1$ alors $e^{-i\lambda} = -i$ et donc $\lambda = \dfrac{\pi}{2}$
   La valeur de λ, pour laquelle on peut effectivement trouver une telle fonction f non identiquement nulle est $\lambda = \dfrac{\pi}{2}$ et, à ce moment, $f(x) = ae^{-ix} + be^{ix}$.

   Réciproquement, nous vérifions sans difficulté que si $f(x) = ae^{-ix} + be^{ix}$, alors $f'(t) = f\left(t + \dfrac{\pi}{2}\right)$

Exercice 8 :

1. *Soit f une fonction numérique de période 2π telle que : $f(x) = x^2$ si $|x| \leqslant \pi$ Calculer les coefficients de Fourier de f*

   (a) *Calculer la série de Fourier de f*

   Tout d'abord, commençons par faire le graphe de f *(Figure 9.12)*

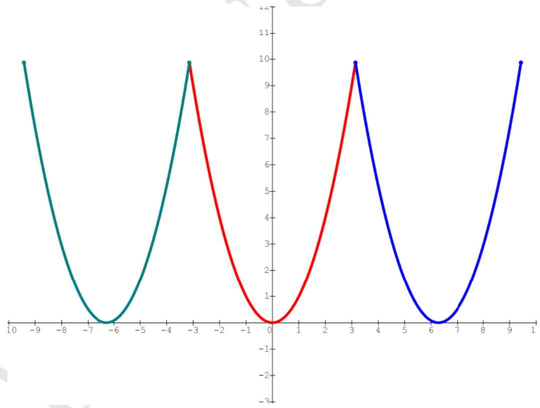

FIGURE 9.12 – Graphe de $f(x) = x^2$ sur $[-\pi; \pi]$

- Dans le cas présent, nous avons, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $C_k(f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} t^2 e^{-ikt}\,\mathrm{d}t$

  $\rightarrow$ Ensuite, on remarque que $C_0(f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} t^2\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{2\pi}\left[\dfrac{t^3}{3}\right]_{-\pi}^{\pi} = \dfrac{\pi^2}{3}$

  $\rightarrow$ Calculons maintenant, pour $k \in \mathbb{Z}$ et $k \neq 0$, $c_k(f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} t^2 e^{-ikt}\,\mathrm{d}t$

  Le calcul de $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} t^2 e^{-ikt}\,\mathrm{d}t$ va se faire en 2 intégrations par parties successives.

  ◇ Pour la première :

$$\begin{bmatrix} u = t^2 & u' = 2t \\ v' = e^{-ikt} & v = \dfrac{-e^{-ikt}}{ik} \end{bmatrix}$$

D'où :

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} t^2 e^{-ikt}\,\mathrm{d}t &= \left[\frac{-t^2 e^{-ikt}}{ik}\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{2}{ik}\int_{-\pi}^{\pi} te^{-ikt}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{-\pi^2 (-1)^k + (-\pi)^2 (-1)^k}{ik} + \frac{2}{ik}\int_{-\pi}^{\pi} te^{-ikt}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{2}{ik}\int_{-\pi}^{\pi} te^{-ikt}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

◇ Calculons, maintenant, $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} te^{-ikt}\,\mathrm{d}t$ par parties

$$\begin{bmatrix} u = t & u' = 1 \\ v' = e^{-ikt} & v = \dfrac{-e^{-ikt}}{ik}\end{bmatrix}$$

Et donc :

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} te^{-ikt}\,\mathrm{d}t &= \left[\frac{-te^{-ikt}}{ik}\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{ik}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{-\pi (-1)^k + (-\pi)(-1)^k}{ik} + \frac{1}{ik}\left[\frac{e^{-ikt}}{-ik}\right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{-2\pi (-1)^k}{ik} + \frac{1}{ik} \times \frac{e^{ik\pi} - e^{-ik\pi}}{-ik} \\ &= \frac{-2\pi (-1)^k}{ik}\end{aligned}$$

◇ D'où, en remontant, $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} t^2 e^{-ikt}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{ik} \times \frac{-2\pi (-1)^k}{ik} = \frac{4\pi (-1)^k}{k^2}$

Et donc,

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{4\pi (-1)^k}{k^2}\right) = \frac{2 \times (-1)^k}{k^2}$$

- Calculons, maintenant, la série de Fourier de f
  On remarque que $c_k(f) = c_{-k}(f)$ et donc

$$\begin{aligned}S_f(x) &= \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{+\infty} c_k(f)\left(e^{ikx} + e^{-ikx}\right) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2 \times (-1)^k}{k^2} \times 2\cos kx \\ &= \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4(-1)^k \cos kx}{k^2}\end{aligned}$$

La série de Fourier est donc $S_f(x) = \dfrac{\pi^2}{3} + \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4(-1)^k \cos kx}{k^2}$

(b) *En déduire :*

i. $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2}$

Nous pouvons remarquer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-\pi;\pi]$ et que nous pouvons appliquer le théorème de Dirichlet

En $x = \pi$, nous avons $f(\pi) = \pi^2$ et $S_f(\pi) = f(\pi) = \pi^2$ et donc :

$$\frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4(-1)^k \cos k\pi}{k^2} = \pi^2$$

Mais, ce n'est pas fini ! !
Nous avons $\cos k\pi = (-1)^k$ et donc $(-1)^k \cos k\pi = (-1)^k \times (-1)^k = 1$. D'où :

$$\frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4(-1)^k \cos k\pi}{k^2} = \pi^2 \iff \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4}{k^2} = \pi^2$$
$$\iff$$
$$4\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = -\frac{\pi^2}{3} + \pi^2 = \frac{-2\pi^2}{3} \iff \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Nous retrouvons le résultat classique : $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} = \frac{\pi^2}{6}$

ii. $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{p^2}$

Nous appliquons le théorème de Dirichlet
En $x = 0$, nous avons $f(0) = 0^2 = 0$ et $S_f(0) = f(0) = 0$ et donc :

$$\frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4(-1)^k \cos k \times 0}{k^2} = 0 \iff \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} = 0$$

D'où, $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} = \frac{-\pi^2}{12}$

iii. $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$

Y-a-t-il une véritable difficulté à cette question ? Il suffit de remarquer que :

$$\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} = \underbrace{\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p)^2}}_{\text{Somme des termes de rang pair}} + \underbrace{\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}}_{\text{Somme des termes de rang impair}}$$

Et donc $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} = \frac{1}{4}\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$, c'est à dire que nous avons $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{3}{4}\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2}$

Et donc, $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{3}{4} \times \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{8}$

iv. $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^4}$

L'égalité de Parseval nous donne $\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k(f)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \, dt$

Dans notre cas, nous avons $\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k(f)|^2 = |c_0(f)|^2 + 2\sum_{k=1}^{+\infty} |c_k(f)|^2$, puisque $c_k(f) = c_{-k}(f)$.

C'est à dire $\displaystyle\frac{\pi^4}{9} + 2\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4}{k^4} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^4 \, \mathrm{d}t$. Or

$$\int_{-\pi}^{\pi} t^4 \, \mathrm{d}t = \left[\frac{t^5}{5}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{\pi^5 - (-\pi)^5}{5} = \frac{2\pi^5}{5}$$

Et donc, $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t = \dfrac{\pi^4}{5}$.
En synthèse,

$$\frac{\pi^4}{9} + 2\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4}{k^4} = \frac{\pi^4}{5} \iff 8\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{4\pi^4}{45} \iff \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

v. $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^4}$

Nous allons recommencer ce que nous avons fait dans une précédente question.

$$\begin{aligned}\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^4} &= \underbrace{\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p)^4}}_{\text{Somme des termes de rang pair}} + \underbrace{\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^4}}_{\text{Somme des termes de rang impair}} \\ &= \frac{1}{16}\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^4} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^4}\end{aligned}$$

Et donc $\displaystyle\frac{15}{16}\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^4} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^4} \iff \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^4} = \frac{15}{16} \times \frac{\pi^4}{90} = \frac{\pi^4}{96}$

2. *Soit g la fonction périodique et de période 2π , définie pour $x \in [0; 2\pi[$ par $g(x) = x^2$*

Comme, tout à l'heure, faisons le graphe de g :

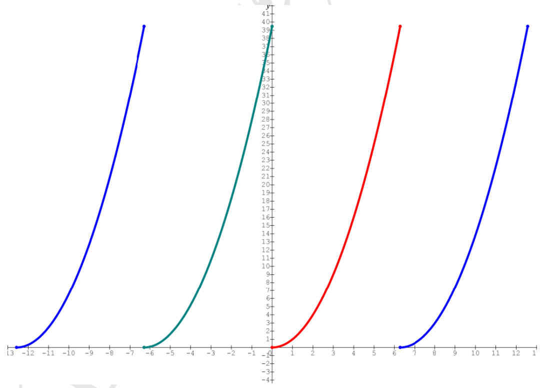

Figure 9.13 – Graphe de $g(x) = x^2$ sur $[0; 2\pi]$

Alors que nous pourrions penser le contraire, il est parfaitement clair que nous avons $f \neq g$.
De plus, g n'est pas une fonction paire, puisque, par exemple, $g(2) = 4$ et $g(-2) = (-2+2\pi)^2$; nous avons donc $g(2) \neq g(-2)$

(a) *Déterminer la série de Fourier de g*

- Nous avons, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $C_k(f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} t^2 e^{-ikt} \, \mathrm{d}t$

→ Ensuite, on remarque que $C_0(f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} t^2 \, \mathrm{d}t = \dfrac{1}{2\pi}\left[\dfrac{t^3}{3}\right]_0^{2\pi} = \dfrac{4\pi^2}{3}$

→ Calculons maintenant, pour $k \in \mathbb{Z}$ et $k \neq 0$, $c_k(f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} t^2 e^{-ikt} \, \mathrm{d}t$

Le calcul de $\displaystyle\int_0^{2\pi} t^2 e^{-ikt} \, \mathrm{d}t$ va se faire en 2 intégrations par parties successives.

◇ Pour la première :

$$\begin{bmatrix} u = t^2 & u' = 2t \\ v' = e^{-ikt} & v = \dfrac{-e^{-ikt}}{ik} \end{bmatrix}$$

D'où :

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} t^2 e^{-ikt}\,\mathrm{d}t &= \left[\frac{-t^2 e^{-ikt}}{ik}\right]_0^{2\pi} + \frac{2}{ik}\int_0^{2\pi} t e^{-ikt}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{-4\pi^2}{ik} + \frac{2}{ik}\int_0^{2\pi} t e^{-ikt}\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

◇ Calculons, maintenant, $\displaystyle\int_0^{2\pi} t e^{-ikt}\,\mathrm{d}t$ par parties

$$\begin{bmatrix} u = t & u' = 1 \\ v' = e^{-ikt} & v = \dfrac{-e^{-ikt}}{ik} \end{bmatrix}$$

Et donc :

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} t e^{-ikt}\,\mathrm{d}t &= \left[\frac{-t e^{-ikt}}{ik}\right]_0^{2\pi} + \frac{1}{ik}\int_0^{2\pi} e^{-ikt}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{-2\pi}{ik} + \frac{1}{ik}\left[\frac{e^{-ikt}}{-ik}\right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{-2\pi}{ik} \end{aligned}$$

◇ D'où, en remontant, $\displaystyle\int_0^{2\pi} t^2 e^{-ikt}\,\mathrm{d}t = \frac{-4\pi^2}{ik} + \frac{2}{ik}\times\frac{-2\pi}{ik} = \frac{4\pi}{k^2} - \frac{4\pi^2}{ik} = 4\pi\left(\frac{1}{k^2} + \frac{i\pi}{k}\right)$

Et donc, pour $k \neq 0$

$$c_k(g) = \frac{1}{2\pi}\left(4\pi\left(\frac{1}{k^2} + \frac{i\pi}{k}\right)\right) = \frac{2}{k^2} + \frac{2i\pi}{k}$$

Remarquons que $\overline{c_{-k}(g)} = c_k(g)$

- Calculons, maintenant, la série de Fourier de g

Si $S_g(x)$ est la série de Fourier de g, nous avons :

$$S_g(x) = \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(c_k(g)\,e^{ikx} + c_{-k}(g)\,e^{-ikx}\right)$$

Regardons de plus près $c_k(g)\,e^{ikx} + c_{-k}(g)\,e^{-ikx}$ pour $k \geqslant 1$

▷ Nous allons utiliser une première méthode en utilisant une méthode de calcul brutal ; nous allons développer :

$$\begin{aligned} c_k(g)\,e^{ikx} + c_{-k}(g)\,e^{-ikx} &= \left(\frac{2}{k^2} + \frac{2i\pi}{k}\right)(\cos kx + i\sin kx) + \left(\frac{2}{k^2} - \frac{2i\pi}{k}\right)(\cos kx - i\sin kx) \\ &= \frac{2}{k^2}\cos kx + i\frac{2}{k^2}\sin kx + \frac{2i\pi}{k}\cos kx - \frac{2\pi}{k}\sin kx + \dots \\ &\qquad \frac{2}{k^2}\cos kx - i\frac{2}{k^2}\sin kx - \frac{2i\pi}{k}\cos kx - \frac{2\pi}{k}\sin kx \\ &= \frac{4}{k^2}\cos kx - \frac{4\pi}{k}\sin kx \end{aligned}$$

▷ La seconde méthode consiste à utiliser le fait que $\overline{c_{-k}(g)} = c_k(g)$. Nous avons, à ce moment là :

$$c_k(g)\,e^{ikx} + c_{-k}(g)\,e^{-ikx} = c_k(g)\,e^{ikx} + \overline{c_k(g)\,e^{ikx}} = 2\,\mathrm{Re}\left(c_k(g)\,e^{ikx}\right)$$

Et en faisant le calcul de $\left(\dfrac{2}{k^2} + \dfrac{2i\pi}{k}\right)(\cos kx + i\sin kx)$, on trouve facilement que $2\,\mathrm{Re}\left(c_k(g)\,e^{ikx}\right) = \dfrac{4}{k^2}\cos kx - \dfrac{4\pi}{k}\sin kx$

Ainsi, la série de Fourier de g est donnée par

$$S_g(x) = \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4}{k^2}\cos kx - \frac{4\pi}{k}\sin kx$$

(b) *Calculer* $\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2}$*, puis* $\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^4}$

→ Calculons $\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2}$

f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, et donc, d'après le théorème de Dirichlet, pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$S_g(x) = \widetilde{g}(x) = \frac{g(x^+) + g(x^-)}{2}$$

Donc, $S_g(0) = \widetilde{g}(0) = \frac{g(0^+) + g(0^-)}{2} = \frac{1}{2}\left(0 + 4\pi^2\right) = 2\pi^2$.
Ainsi,

$$S_g(0) = 2\pi^2 = \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4}{k^2}\cos k0 - \frac{4\pi}{k}\sin k0 = \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4}{k^2}$$

D'où $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4}{k^2} = 2\pi^2 - \frac{4\pi^2}{3} = \frac{2\pi^2}{3} \Longleftrightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{2\pi^2}{12} = \frac{\pi^2}{6}$

→ Calculons maintenant $\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^4}$

L'identité de Parseval nous donne : $\left(\frac{4\pi^2}{3}\right)^2 + \sum_{k=1}^{+\infty} |c_k(g)|^2 + |c_{-k}(g)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |g(x)|^2 \, dx$,

c'est à dire, en utilisant $\overline{c_{-k}(g)} = c_k(g)$, nous avons :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |g(x)|^2 \, dx = \frac{16\pi^4}{9} + 2\sum_{k=1}^{+\infty} |c_k(g)|^2$$

⋆ Nous avons $|c_k(g)|^2 = \left|\frac{2}{k^2} + i\frac{2\pi}{k}\right|^2 = \frac{4}{k^4} + \frac{4\pi^2}{k^2}$

⋆ De même, nous avons :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |g(x)|^2 \, dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x^4 \, dx = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \times \frac{32\pi^5}{5} = \frac{16\pi^4}{5}$$

Donc :

$$\frac{16\pi^4}{5} = \frac{16\pi^4}{9} + 2\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{4}{k^4} + \frac{4\pi^2}{k^2}\right)$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$8\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{16\pi^4}{5} - \frac{16\pi^4}{9} - 8\pi^2\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$8\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{16\pi^4}{5} - \frac{16\pi^4}{9} - 8\pi^2 \times \frac{\pi^2}{6}$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

OUF !!

Exercice 9 :

Soit f une fonction numérique de période 2π telle que :

$$f(x) = \begin{cases} \pi - x \text{ si } x \in [0;\pi[\\ \pi + x \text{ si } x \in [-\pi;0[\end{cases}$$

1. *Calculer la série de Fourier de f*

   Nous n'allons pas déroger à la règle qui consiste à en faire le graphe *(Figure 9.14)* :

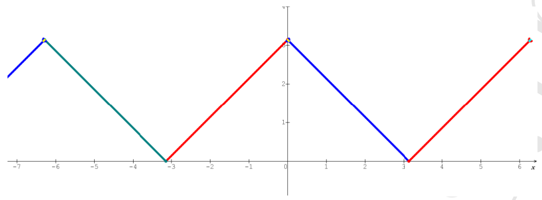

FIGURE 9.14 – Graphe de f

⇒ Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, nous avons $c_k(f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-ikx}\,\mathrm{d}x$.

Remarquons que f est une fonction paire de $\mathcal{C}^1_M(T)$; nous allons utiliser cette parité.

▷ Tout d'abord, $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-ikx}\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{0} f(x)\, e^{-ikx}\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\pi} f(x)\, e^{-ikx}\,\mathrm{d}x$

▷ Regardons l'intégrale $\displaystyle\int_{-\pi}^{0} f(x)\, e^{-ikx}\,\mathrm{d}x$ et faisons y le changement de variables $u = -x$; alors $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = -1 \iff \mathrm{d}x = -\,\mathrm{d}u$ et donc :

$$\int_{-\pi}^{0} f(x)\, e^{-ikx}\,\mathrm{d}x = \int_{\pi}^{0} f(-u)\, e^{iku}\,(-\,\mathrm{d}u) = \int_{0}^{\pi} f(u)\, e^{iku}\,\mathrm{d}u$$

▷ Ainsi :

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-ikx}\,\mathrm{d}x &= \int_{-\pi}^{0} f(x)\, e^{-ikx}\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\pi} f(x)\, e^{-ikx}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{0}^{\pi} f(u)\, e^{iku}\,\mathrm{d}u + \int_{0}^{\pi} f(x)\, e^{-ikx}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{0}^{\pi} f(x)\left(e^{iku} + e^{-ikx}\right)\,\mathrm{d}x \\
&= 2\int_{0}^{\pi} f(x)\cos kx\,\mathrm{d}x \\
&= 2\int_{0}^{\pi} (\pi - x)\cos kx\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Ansi, $c_k(f) = \dfrac{1}{2\pi} \times 2\displaystyle\int_{0}^{\pi} (\pi - x)\cos kx\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} (\pi - x)\cos kx\,\mathrm{d}x$

⇒ Pour $k = 0$, nous avons $c_0(f) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{0}^{\pi} (\pi - x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{\pi} \times \dfrac{\pi^2}{2} = \dfrac{\pi}{2}$

⇒ Pour $k \neq 0$, nous allons calculer $\displaystyle\int_{0}^{\pi} (\pi - x)\cos kx\,\mathrm{d}x$ par parties.

Nous avons :

$$\begin{bmatrix} u = \pi - x & u' = -1 \\ v' = \cos kx & v = \dfrac{1}{k}\sin kx \end{bmatrix}$$

D'où :

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}(\pi-x)\cos kx\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{\pi}{k}\sin kx\right]_0^{\pi}+\frac{1}{k}\int_0^{\pi}\sin kx\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{k}\left[\frac{-\cos kx}{k}\right]_0^{\pi}\\ &= \frac{1}{k^2}\left[-\cos kx\right]_0^{\pi}\\ &= \frac{1}{k^2}\left(1-(-1)^k\right)\end{aligned}$$

Donc, $c_k(f)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}(\pi-x)\cos kx\,\mathrm{d}x=\dfrac{\left(1-(-1)^k\right)}{\pi k^2}$

Remarquons que nous avons $c_k(f)=c_{-k}(f)$ et donc la série de Fourier de f est donnée par :

$$S_f(x)=\frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{+\infty}c_k(f)\left(e^{ikx}+e^{-ikx}\right)=\frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{+\infty}2c_k(f)\cos kx$$

Remarquons tout de suite que :

$c_{2k}(f)=\dfrac{\left(1-(-1)^{2k}\right)}{\pi(2k)^2}=0$ et que $c_{2k+1}(f)=\dfrac{\left(1-(-1)^{2k+1}\right)}{\pi(2k+1)^2}=\dfrac{2}{\pi(2k+1)^2}$

Et donc $S_f(x)=\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\dfrac{1}{(2k+1)^2}\cos(2k+1)x$

2. *Retrouver* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}$

On peut donc, sans problème, appliquer le théorème de Dirichlet.

Nous avons : $S_f(0)=\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\dfrac{1}{(2k+1)^2}$, c'est à dire $\pi=\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\dfrac{1}{(2k+1)^2}$.

D'où nous obtenons $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}=\frac{\pi}{2}\times\frac{\pi}{4}=\frac{\pi^2}{8}$

Exercice 10 :

Montrer que, pour $x\in[0;\pi[$, on a, à la fois :

$$x(\pi-x)=\frac{\pi^2}{6}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos 2nx}{n^2}\quad \textit{et}\quad x(\pi-x)=\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)^3}$$

Pour le démontrer, inspirez vous des graphes de la figure 9.15 :

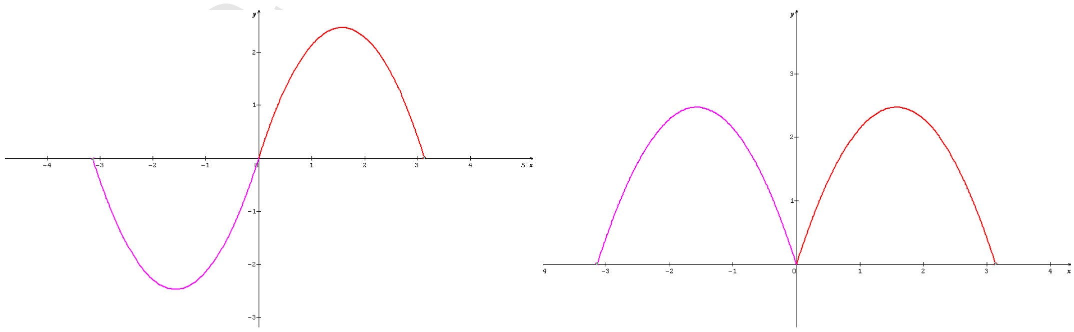

FIGURE 9.15 – Graphes possibles

C'est une question très surprenante : une même fonction qui s'exprime de 2 façons différentes sur le même intervalle $[0;\pi[$.
Pour résoudre cette question, nous allons étudier 2 fonctions f et g, périodiques et de période 2π qui ont la même expression sur l'intervalle $[0;\pi[$

1. **Soit f une fonction impaire, périodique et de période 2π définie sur** $[0;\pi[$ **par** $f(x) = x(\pi - x)$

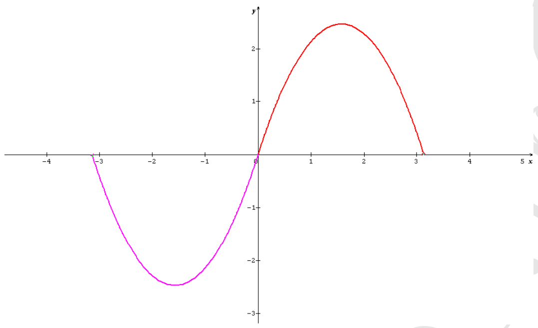

FIGURE 9.16 – Graphe de f

$\Rightarrow$ Comme toujours, nous avons pour tout $k \in \mathbb{Z}$, nous avons $c_k(f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-ikx}\,\mathrm{d}x$

Tout d'abord, $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-ikx}\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{0} f(x)\, e^{-ikx}\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\pi} f(x)\, e^{-ikx}\,\mathrm{d}x$

Regardons l'intégrale $\displaystyle\int_{-\pi}^{0} f(x)\, e^{-ikx}\,\mathrm{d}x$ et faisons y le changement de variables $u = -x$; alors $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = -1 \Longleftrightarrow \mathrm{d}x = -\,\mathrm{d}u$ et donc :

$$\int_{-\pi}^{0} f(x)\, e^{-ikx}\,\mathrm{d}x = \int_{\pi}^{0} f(-u)\, e^{iku}\,(-\,\mathrm{d}u) = -\int_{0}^{\pi} f(u)\, e^{iku}\,\mathrm{d}u$$

Donc,

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-ikx}\,\mathrm{d}x &= -\int_{0}^{\pi} f(u)\, e^{iku}\,\mathrm{d}u + \int_{0}^{\pi} f(x)\, e^{-ikx}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{0}^{\pi} f(x)\left(e^{-ikx} - e^{ikx}\right)\mathrm{d}x \\ &= -2i\int_{0}^{\pi} f(x)\sin kx\,\mathrm{d}x \\ &= -2i\int_{0}^{\pi} x(\pi - x)\sin kx\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Ainsi $c_k(f) = \dfrac{1}{2\pi} \times -2i\displaystyle\int_{0}^{\pi} x(\pi - x)\sin kx\,\mathrm{d}x = \dfrac{-i}{\pi}\int_{0}^{\pi} x(\pi - x)\sin kx\,\mathrm{d}x$

$\Rightarrow$ D'ores et déjà, nous avons $c_0(f) = 0$

$\Rightarrow$ Soit $k \in \mathbb{Z}$ et $k \neq 0$. Nous allons calculer $\displaystyle\int_{0}^{\pi} x(\pi - x)\sin kx\,\mathrm{d}x$ par une double intégration par parties.

$\star$ Nous avons, pour la première intégration par parties :

$$\begin{bmatrix} u = x(\pi - x) & u' = \pi - 2x \\ v' = \sin kx & v = \dfrac{-1}{k}\cos kx \end{bmatrix}$$

D'où :

$$\begin{aligned}\int_{0}^{\pi} x(\pi - x)\sin kx\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{x(x-\pi)}{k}\cos kx\right]_0^{\pi} + \frac{1}{k}\int_{0}^{\pi}(\pi - 2x)\cos kx\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{k}\int_{0}^{\pi}(\pi - 2x)\cos kx\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$\star$ Nous intégrons, maintenant $\displaystyle\int_0^{\pi} (\pi - 2x)\cos kx \,\mathrm{d}x$ par parties. Ainsi :

$$\begin{bmatrix} u = \pi - 2x & u' = -2 \\ v' = \cos kx & v = \dfrac{1}{k}\sin kx \end{bmatrix}$$

D'où

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} (\pi - 2x)\cos kx\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{\pi - 2x}{k}\sin kx\right]_0^{\pi} + \frac{2}{k}\int_0^{\pi}\sin kx\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{k}\int_0^{\pi}\sin kx\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{k}\left[\frac{-\cos kx}{k}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{k^2}\left(-(-1)^k + 1\right) \\ &= \frac{2\left((-1)^{k+1}+1\right)}{k^2}\end{aligned}$$

$\star$ En remontant, nous obtenons $c_k(f) = \dfrac{-2i}{\pi k^3}\left(1 + (-1)^{k+1}\right)$

$\Rightarrow$ Comparons $c_k(f)$ et $c_{-k}(f)$

$$c_{-k}(f) = \frac{-2i}{\pi(-k)^3}\left(1 + (-1)^{-k+1}\right) = \frac{-2i}{-\pi k^3}\left(1 + (-1)^{k+1}\right) = \frac{2i}{\pi k^3}\left(1 + (-1)^{k+1}\right) = -c_k(f)$$

$\Rightarrow$ Alors, la série de Fourier de f est donnée par :

$$S_f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k(f)\left(e^{ikx} - e^{-ikx}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k(f)(2i\sin kx) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\left(1+(-1)^{k+1}\right)}{k^3}\sin kx$$

Remarquons que si k est pair, alors $1 + (-1)^{k+1} = 0$ et si k est impair, $1 + (-1)^{k+1} = 2$. Nous en concluons donc :

$$S_f(x) = \frac{8}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\sin(2k+1)x}{(2k+1)^3}$$

D'après le théorème de Dirichlet, nous avons, pour tout $x \in [-\pi;\pi[$ et en particulier lorsque $x \in [0;\pi[$

$$f(x) = x(\pi - x) = \frac{8}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\sin(2k+1)x}{(2k+1)^3}$$

2. **Soit g une fonction paire, périodique et de période 2π définie sur $[0;\pi[$ par $g(x) = x(\pi - x)$**

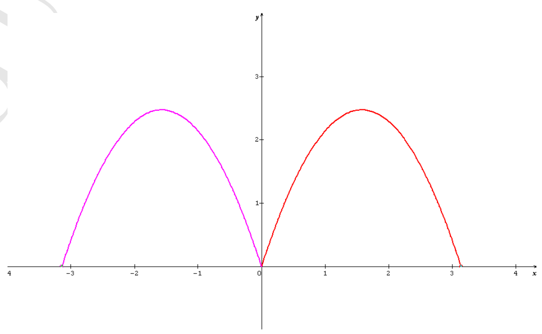

FIGURE 9.17 – Graphe de g

$\Rightarrow$ Comme tout à l'heure, nous avons pour tout $k \in \mathbb{Z}$, nous avons $c_k(g) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} g(x) e^{-ikx} \, \mathrm{d}x$

De même, $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} g(x) e^{-ikx} \, \mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{0} g(x) e^{-ikx} \, \mathrm{d}x + \int_{0}^{\pi} g(x) e^{-ikx} \, \mathrm{d}x$

Regardons l'intégrale $\displaystyle\int_{-\pi}^{0} g(x) e^{-ikx} \, \mathrm{d}x$ et faisons y le changement de variables $u = -x$; alors $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = -1 \iff \mathrm{d}x = -\,\mathrm{d}u$ et donc :

$$\int_{-\pi}^{0} g(x) e^{-ikx} \, \mathrm{d}x = \int_{\pi}^{0} g(-u) e^{iku} (-\,\mathrm{d}u) = \int_{0}^{\pi} g(u) e^{iku} \, \mathrm{d}u$$

Donc,

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} g(x) e^{-ikx} \, \mathrm{d}x &= \int_{0}^{\pi} g(u) e^{iku} \, \mathrm{d}u + \int_{0}^{\pi} g(x) e^{-ikx} \, \mathrm{d}x \\
&= \int_{0}^{\pi} g(x) \left(e^{-ikx} + e^{ikx}\right) \mathrm{d}x \\
&= 2 \int_{0}^{\pi} g(x) \cos kx \, \mathrm{d}x \\
&= 2 \int_{0}^{\pi} x(\pi - x) \cos kx \, \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Ainsi $c_k(g) = \dfrac{1}{2\pi} \times 2 \displaystyle\int_{0}^{\pi} x(\pi - x) \cos kx \, \mathrm{d}x = \dfrac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} x(\pi - x) \cos kx \, \mathrm{d}x$

$\Rightarrow$ Calculons $c_0(g)$

$$c_0(g) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} x(\pi - x) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\pi x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi^3}{2} - \frac{\pi^3}{3}\right) = \frac{\pi^2}{6}$$

$\Rightarrow$ Soit $k \in \mathbb{Z}$ et $k \neq 0$. Nous allons calculer $\displaystyle\int_{0}^{\pi} x(\pi - x) \cos kx \, \mathrm{d}x$ par une double intégration par parties.

$\star$ Nous avons, pour la première intégration par parties :

$$\left[\begin{array}{ll} u = x(\pi - x) & u' = \pi - 2x \\ v' = \cos kx & v = \dfrac{1}{k} \sin kx \end{array}\right]$$

D'où :

$$\begin{aligned}
\int_{0}^{\pi} x(\pi - x) \cos kx \, \mathrm{d}x &= \left[\frac{x(x - \pi)}{k} \sin kx\right]_0^{\pi} - \frac{1}{k} \int_{0}^{\pi} (\pi - 2x) \sin kx \, \mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{k} \int_{0}^{\pi} (\pi - 2x) \sin kx \, \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

$\star$ Nous intégrons, maintenant $\displaystyle\int_{0}^{\pi} (\pi - 2x) \sin kx \, \mathrm{d}x$ par parties. Ainsi :

$$\left[\begin{array}{ll} u = \pi - 2x & u' = -2 \\ v' = \sin kx & v = \dfrac{-1}{k} \cos kx \end{array}\right]$$

D'où

$$\begin{aligned}
\int_{0}^{\pi} (\pi - 2x) \sin kx \, \mathrm{d}x &= \left[\frac{2x - \pi}{k} \cos kx\right]_0^{\pi} - \frac{2}{k} \int_{0}^{\pi} \cos kx \, \mathrm{d}x \\
&= \left(\frac{(-1)^k \pi + \pi}{k}\right) - \frac{2}{k} \left[\frac{\sin kx}{k}\right]_0^{\pi} \\
&= \frac{\pi}{k} \left(1 + (-1)^k\right)
\end{aligned}$$

⋆ En remontant, nous obtenons $c_k(g) = \dfrac{-1}{k^2}\left(1+(-1)^k\right)$

⇒ Comparons $c_k(g)$ et $c_{-k}(g)$

$$c_{-k}(g) = \frac{-1}{(-k)^2}\left(1+(-1)^{-k}\right) = \frac{-1}{k^2}\left(1+(-1)^k\right) = c_k(g)$$

⇒ Alors, la série de Fourier de g est donnée par :

$$S_g(x) = \frac{\pi^2}{6}+\sum_{k=1}^{+\infty} c_k(g)\left(e^{ikx}+e^{-ikx}\right) = \frac{\pi^2}{6}+\sum_{k=1}^{+\infty} c_k(g)(2\cos kx) = \frac{\pi^2}{6}-2\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\left(1+(-1)^k\right)}{k^2}\cos kx$$

Remarquons que si k est pair, alors $1+(-1)^k = 2$ et si k est impair, $1+(-1)^k = 0$. Nous en concluons donc :

$$S_f(x) = \frac{\pi^2}{6} - 2\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{2}{(2k)^2}\cos 2k = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\cos 2k}{k^2}$$

D'après le théorème de Dirichlet, nous avons, pour tout $x \in [-\pi;\pi[$,et en particulier lorsque $x \in [0;\pi[$

$$f(x) = x(\pi - x) = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\cos 2k}{k^2}$$

Ce que nous voulions

Exercice 11 :

1. *Soit $a > 0$. Développer en série entière la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x+e^a}$*

   C'est une question classique de série entière. Nous avons :

$$f(x) = \frac{1}{x+e^a} = \frac{1}{e^a(e^{-a}x+1)} = e^{-a}\left(\frac{1}{1+e^{-a}x}\right)$$

   Pour $|e^{-a}x| < 1 \iff |x| < e^a$, nous avons $\dfrac{1}{1+e^{-a}x} = \sum_{n\geqslant 0}\left(-e^{-a}x\right)^n = \sum_{n\geqslant 0}(-1)^n e^{-na}x^n$

   Et donc, pour $|x| < e^a$, nous avons $f(x) = e^{-a}\left(\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n e^{-na}x^n\right) = \sum_{n\geqslant 0}(-1)^n e^{-(n+1)a}x^n$

2. *Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $a > 0$, nous avons :*

$$\frac{1}{\cos x + \cosh a} = \frac{1}{\sinh a}\left(\frac{e^a}{e^{ix}+e^a} - \frac{e^{-a}}{e^{ix}+e^{-a}}\right)$$

   Question qui ne pose aucune difficulté : il faut savoir calculer ! !

   Tout d'abord, rappelons que $\cos x = \dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$, $\cosh a = \dfrac{e^a+e^{-a}}{2}$ et $\sinh a = \dfrac{e^a-e^{-a}}{2}$.

   Et donc :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sinh a}\left(\frac{e^a}{e^{ix}+e^a} - \frac{e^{-a}}{e^{ix}+e^{-a}}\right) &= \frac{2}{e^a-e^{-a}}\left(\frac{e^ae^{ix}+1-e^{-a}e^{ix}-1}{(e^{ix}+e^a)(e^{ix}+e^{-a})}\right) \\
&= \frac{2}{e^a-e^{-a}}\left(\frac{(e^a-e^{-a})e^{ix}}{e^{2ix}+e^{-a}e^{ix}+e^{ix}e^a+1}\right) \\
&= \frac{2e^{ix}}{e^{2ix}+e^{-a}e^{ix}+e^{ix}e^a+1} = \frac{2}{e^{ix}+e^{-a}+e^a+e^{-ix}} \\
&= \frac{2}{2\cos x+2\cosh a} = \frac{1}{\cos x+\cosh a}
\end{aligned}$$

   Aucune difficulté, donc

3. *En déduire le développement en série de Fourier de la fonction g définie par $g(x) = \dfrac{1}{\cos x + \cosh a}$ avec $a > 0$*

Nous allons utiliser l'égalité $\dfrac{1}{\cos x + \cosh a} = \dfrac{1}{\sinh a}\left(\dfrac{e^a}{e^{ix}+e^a} - \dfrac{e^{-a}}{e^{ix}+e^{-a}}\right)$

→ Tout d'abord, $\dfrac{e^a}{e^{ix}+e^a} = \dfrac{1}{e^{-a}e^{ix}+1}$. Comme $\left|e^{-a}e^{ix}\right| = e^{-a} < 1$, puisque, comme $a > 0$, $e^{-a} < 1$, nous pouvons écrire, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{e^a}{e^{ix}+e^a} = \sum_{n\geqslant 0} (-1)^n e^{-na} e^{nix}$$

→ De même, $\dfrac{e^{-a}}{e^{ix}+e^{-a}} = \dfrac{e^{-a}e^{-ix}}{1+e^{-a}e^{-ix}}$, et comme $\left|e^{-a}e^{-ix}\right| = e^{-a} < 1$ nous avons aussi :

$$\frac{1}{1+e^{-a}e^{-ix}} = \sum_{n\geqslant 0} (-1)^n e^{-na} e^{-nix}$$

Et donc :

$$\begin{aligned}
\frac{e^{-a}e^{-ix}}{1+e^{-a}e^{-ix}} &= e^{-a}e^{-ix}\left(\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n e^{-na} e^{-nix}\right)\\
&= \sum_{n\geqslant 0} (-1)^n e^{-(n+1)a} e^{-(n+1)ix}\\
&= \sum_{n\geqslant 1} (-1)^{n-1} e^{-na} e^{-nix}
\end{aligned}$$

→ D'où, maintenant :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\cos x + \cosh a} &= \frac{1}{\sinh a}\left(\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n e^{-na} e^{-nix} - \sum_{n\geqslant 1} (-1)^{n-1} e^{-na} e^{-nix}\right)\\
&= \frac{1}{\sinh a}\left(1 + \sum_{n\geqslant 1} (-1)^n e^{-na} e^{-nix} - \sum_{n\geqslant 1} (-1)^{n-1} e^{-na} e^{-nix}\right)\\
&= \frac{1}{\sinh a}\left(1 + \sum_{n\geqslant 1} \left((-1)^n e^{-na} e^{-nix} - (-1)^{n-1} e^{-na} e^{-nix}\right)\right)\\
&= \frac{1}{\sinh a}\left(1 + \sum_{n\geqslant 1} (-1)^n e^{-na} \left(e^{-nix} + e^{-nix}\right)\right)\\
&= \frac{1}{\sinh a}\left(1 + \sum_{n\geqslant 1} (-1)^n e^{-na} 2\cos nx\right)
\end{aligned}$$

En conclusion, $\dfrac{1}{\cos x + \cosh a} = \dfrac{1}{\sinh a} + \displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{2(-1)^n e^{-na}}{\sinh a} \cos nx$

La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{2(-1)^n e^{-na}}{\sinh a} \cos nx$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. En effet,

$$\left|\frac{2(-1)^n e^{-na}}{\sinh a} \cos nx\right| \leqslant \frac{2e^{-na}}{\sinh a}$$

Or, $\dfrac{2e^{-na}}{\sinh a}$ est le terme général d'une série numérique convergente. D'où la convergence normale de la série calculée.

Exercice 12 :

Soit $p \notin \mathbb{Z}$.
Soit f une fonction numérique de période 2π définie par $f(x) = \cos px$ si $|x| \leqslant \pi$

Comme d'habitude, le graphe pour nous situer visuellement

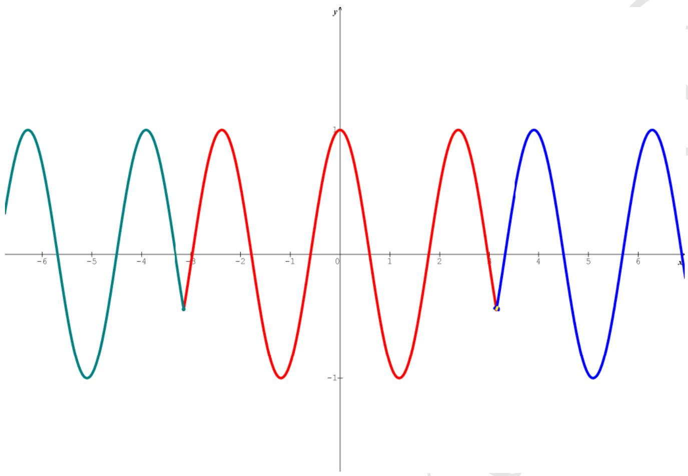

FIGURE 9.18 – Graphe de $\cos px$ avec, ici, $p = \sqrt{7}$

1. *Développer f en série de Fourier*

$\Rightarrow$ Tout d'abord, nous avons $c_n(f)$, le coefficient de Fourier d'ordre n égal à :

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-inx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (\cos px)\, e^{-inx}\,\mathrm{d}x$$

Ensuite, $\cos px = \dfrac{e^{ipx} + e^{-ipx}}{2}$ et donc

$$\begin{aligned} c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-inx}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{e^{ipx} + e^{-ipx}}{2}\right) e^{-inx}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ix(p-n)} + e^{-ix(p+n)}\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Nous allons calculer, de manière indépendante, $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^{ix(p-n)} + e^{-ix(p+n)}\,\mathrm{d}x$

$\star$ Calcul de $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ix(p+n)}\,\mathrm{d}x$

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ix(p+n)}\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{e^{-ix(p+n)}}{-i(p+n)}\right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{e^{-i\pi(p+n)} - e^{i\pi(p+n)}}{-i(p+n)} \\ &= \frac{i\left(e^{-i\pi(p+n)} - e^{i\pi(p+n)}\right)}{(p+n)} \end{aligned}$$

⋆ Calculons maintenant $\int_{-\pi}^{\pi} e^{ix(p-n)}\,\mathrm{d}x$

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ix(p-n)}\,\mathrm{d}x = & \left[\frac{e^{ix(p-n)}}{i(p-n)}\right]_{-\pi}^{\pi} \\ = & \frac{e^{i\pi(p-n)} - e^{-i\pi(p-n)}}{i(p-n)} \\ = & \frac{i\left(e^{-i\pi(p-n)} - e^{i\pi(p-n)}\right)}{(p-n)}\end{aligned}$$

⇒ Maintenant, faisons la synthèse

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ix(p-n)} + e^{-ix(p+n)}\,\mathrm{d}x = & \frac{i\left(e^{-i\pi(p+n)} - e^{i\pi(p+n)}\right)}{(p+n)} + \frac{i\left(e^{-i\pi(p-n)} - e^{i\pi(p-n)}\right)}{(p-n)} \\ = & i\left\{\frac{(p-n)\left(e^{-i\pi(p+n)} - e^{i\pi(p+n)}\right) + (p+n)\left(e^{-i\pi(p-n)} - e^{i\pi(p-n)}\right)}{(p^2-n^2)}\right\}\end{aligned}$$

Nous allons, maintenant, regarder le seul numérateur :

$$\begin{gathered}(p-n)\left(e^{-i\pi(p+n)} - e^{i\pi(p+n)}\right) + (p+n)\left(e^{-i\pi(p-n)} - e^{i\pi(p-n)}\right) \\ = \\ pe^{-i\pi(p+n)} - pe^{i\pi(p+n)} - ne^{-i\pi(p+n)} + ne^{i\pi(p+n)} + pe^{-i\pi(p-n)} - pe^{i\pi(p-n)} + ne^{-i\pi(p-n)} - ne^{i\pi(p-n)} \\ = \\ pe^{-i\pi p}\left(e^{-i\pi n} + e^{i\pi n}\right) - pe^{i\pi p}\left(e^{i\pi n} + e^{-i\pi n}\right) - ne^{-i\pi p}\left(e^{-i\pi n} - e^{i\pi n}\right) + ne^{i\pi p}\left(e^{i\pi n} - e^{-i\pi n}\right) \\ = \\ 2p(-1)^n\left(e^{-i\pi p} - e^{i\pi p}\right) \\ = \\ 2p(-1)^n(-2i\sin p\pi) = -4ip(-1)^n \sin p\pi\end{gathered}$$

De telle sorte que

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{ix(p-n)} + e^{-ix(p+n)}\,\mathrm{d}x = i\left(\frac{-4ip(-1)^n \sin p\pi}{p^2-n^2}\right) = \frac{4p(-1)^n \sin p\pi}{p^2-n^2}$$

D'où, $c_n(f) = \frac{1}{4\pi} \times \frac{4p(-1)^n \sin p\pi}{p^2-n^2} = \frac{1}{\pi} \times \frac{p(-1)^n \sin p\pi}{p^2-n^2}$

⇒ Nous pouvons remarquer que $c_0(f) = \frac{\sin p\pi}{p\pi}$ et que, si $n \neq 0$ $c_{-n}(f) = c_n(f)$, de telle sorte que la série de Fourier de f est :

$$\begin{aligned}S_f(x) = & \frac{\sin p\pi}{p\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n(f)\left(e^{inx} + e^{-inx}\right) \\ = & \frac{\sin p\pi}{p\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n(f)(2\cos nx) \\ = & \frac{\sin p\pi}{p\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\pi} \times \frac{p(-1)^n \sin p\pi}{p^2-n^2}(2\cos nx) \\ = & \frac{\sin p\pi}{p\pi} + \frac{2p\sin p\pi}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{p^2-n^2} \cos nx\end{aligned}$$

Donc, $S_f(x) = \frac{\sin p\pi}{p\pi} + \frac{2p\sin p\pi}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{p^2-n^2} \cos nx$

Comme la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, d'après le théorème de Dirichlet, nous pouvons écrire :

$$\cos px = \frac{\sin p\pi}{p\pi} + \frac{2p\sin p\pi}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{p^2-n^2} \cos nx$$

2. *En déduire que* $\cot p\pi = \dfrac{1}{p\pi} + \dfrac{2p}{\pi} \sum_{n \geqslant 1} \dfrac{1}{p^2 - n^2}$

En faisant $x = \pi$, nous avons :

$$\begin{aligned}
\cos p\pi &= \frac{\sin p\pi}{p\pi} + \frac{2p \sin p\pi}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{p^2 - n^2} \cos n\pi \\
&= \frac{\sin p\pi}{p\pi} + \frac{2p \sin p\pi}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{p^2 - n^2} (-1)^n \\
&= \frac{\sin p\pi}{p\pi} + \frac{2p \sin p\pi}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2 - n^2}
\end{aligned}$$

D'où, en divisant par $\sin p\pi$, nous obtenons :

$$\frac{\cos p\pi}{\sin p\pi} = \frac{1}{p\pi} + \frac{2p}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2 - n^2} \Longleftrightarrow \cot p\pi = \frac{1}{p\pi} + \frac{2p}{\pi} \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{p^2 - n^2}$$

On retrouve aussi ce résultat sous la forme $\pi \cot p\pi = \dfrac{1}{\pi} + \sum_{n \geqslant 1} \dfrac{2p}{p^2 - n^2}$

Exercice 13 :

Soit f une fonction continue 2π-périodique telle que, pour chaque $N \in \mathbb{N}$, on ait $\sup_{x \in [0;2\pi]} S_N(f)(x) = \|S_N(f)\|_\infty \leqslant 1$. Montrer que $\sup_{x \in [0;2\pi]} f(x) = \|f\|_\infty \leqslant 1$

Cet exercice est une véritable et basique application du cours.

Le théorème de Féjer 9.4.3 précise que la moyenne arithmétique $\sigma_n(f) = \dfrac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} S_k(f)$ converge uniformément vers f, c'est à dire $\lim_{n \to +\infty} \|\sigma_n(f) - f\|_\infty = 0$

Or, en utilisant l'inégalité triangulaire, nous avons : $\left| \|\sigma_n(f)\|_\infty - \|f\|_\infty \right| \leqslant \|\sigma_n(f) - f\|_\infty$ et donc, comme $\lim_{n \to +\infty} \|\sigma_n(f) - f\|_\infty = 0$, nous avons aussi $\lim_{n \to +\infty} \left| \|\sigma_n(f)\|_\infty - \|f\|_\infty \right| = 0$, c'est à dire

$$\lim_{n \to +\infty} \|\sigma_n(f)\|_\infty = \|f\|_\infty$$

Or, pour tout $x \in [0;2\pi]$, $|\sigma_n(f)(x)| \leqslant \dfrac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |S_k(f)(x)|$ et comme, pour chaque $x \in [0;2\pi]$, nous avons $|S_k(f)(x)| \leqslant \sup_{x \in [0;2\pi]} |S_k(f)(x)| = \|S_k(f)\|_\infty \leqslant 1$, nous avons aussi, pour tout $x \in [0;2\pi]$, $|\sigma_n(f)(x)| \leqslant \dfrac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \|S_k(f)\|_\infty \leqslant 1$

Donc, en particulier, $\sup_{x \in [0;2\pi]} |\sigma_n(f)(x)| \leqslant 1$, c'est à dire $\|\sigma_n(f)\|_\infty \leqslant 1$.

Ainsi, comme $\lim_{n \to +\infty} \|\sigma_n(f)\|_\infty = \|f\|_\infty$, nous avons aussi $\|f\|_\infty \leqslant 1$

9.8.3 Exercices moins proches du cours

Exercice 14 :

On désigne par $\mathbb{U}$ le cercle unité, c'est à dire $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \text{ tels que } |z| = 1\}$. On rappelle que $(\mathbb{U}, \times)$ est un sous-groupe commutatif de $(\mathbb{C}, \times)$ et qu'un endomorphisme de groupe $\varphi : \mathbb{U} \longrightarrow \mathbb{U}$ est tel que pour tout $z \in \mathbb{U}$ et tout $z_1 \in \mathbb{U}$, $\varphi(zz_1) = \varphi(z) \times \varphi(z_1)$.
Rechercher tous les endomorphismes continus de $\mathbb{U}$

Soit $\varphi : \mathbb{U} \longrightarrow \mathbb{U}$ un endomorphisme de groupe continu. L'objet de cette question est donc de trouver de quelle forme est φ
On considère $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie pour tout $t \in \mathbb{R}$, par $g(t) = \varphi\left(e^{it}\right)$. g est clairement continue comme composée de fonctions continues, périodique et de période 2π.
Considérons, maintenant, pour $k \in \mathbb{Z}$, le coefficient de Fourier d'ordre k de g,

$$c_k(g) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(t)\, e^{-ikt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi\left(e^{it}\right) e^{-ikt}\,\mathrm{d}t$$

De la périodicié de g, nous pouvons écrire, pour tout $a \in \mathbb{R}$ $c_k(g) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-a}^{2\pi-a} g(t)\, e^{-ikt}\,\mathrm{d}t$
En faisant la changement de variables $u = t + a$, nous avons :

$$\begin{aligned}
c_k(g) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(u-a)\, e^{-ik(u-a)}\,\mathrm{d}u = \frac{e^{ika}}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi\left(e^{i(u-a)}\right) e^{-iku}\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{e^{ika}}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi\left(e^{iu}e^{-ia}\right) e^{-iku}\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{e^{ika}}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi\left(e^{iu}\right)\varphi\left(e^{-ia}\right) e^{-iku}\,\mathrm{d}u \text{ puisque } \varphi \text{ est un morphisme} \\
&= e^{ika}\varphi\left(e^{-ia}\right)\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi\left(e^{iu}\right) e^{-iku}\,\mathrm{d}u = e^{ika}\varphi\left(e^{-ia}\right)\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(u)\, e^{-iku}\,\mathrm{d}u \\
&= e^{ika}\varphi\left(e^{-iua}\right) c_k(g)
\end{aligned}$$

Nous avons donc $c_k(g) = e^{ika}\varphi\left(e^{-ia}\right) c_k(g)$.
Comme $\left|g(u)\, e^{-iku}\right| = |g(u)| = \left|\varphi\left(e^{iu}\right)\right| = 1$ puisque $\varphi\left(e^{iu}\right) \in \mathbb{U}$, alors $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} g(u)\, e^{-iku}\,\mathrm{d}u \neq 0$ et donc, de $c_k(g) = e^{ika}\varphi\left(e^{-ia}\right) c_k(g)$, nous obtenons $e^{ika}\varphi\left(e^{-ia}\right) = 1$
Comme $\varphi\left(e^{-ia}\right) = \varphi\left(e^{ia}\right)^{-1}$, nous obtenons

$$e^{ika} = \varphi\left(e^{ia}\right) \Longleftrightarrow \varphi\left(e^{ia}\right) = \left(e^{ia}\right)^k$$

Ainsi, les seuls endomorphismes continus de $\mathbb{U}$ sont de la forme $\varphi(z) = z^k$ pour $z \in \mathbb{U}$

Exercice 15 :

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ 2π-périodique.
On suppose qu'il existe $\alpha > 0$ et $C > 0$ tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y \in \mathbb{R}$ $|f(x) - f(y)| \leqslant C\,|x-y|^\alpha$

1. *Pour $a \in \mathbb{R}$ exprimer $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t+a)\, e^{-int}\,\mathrm{d}t$ en fonction de $c_n(f)$*

   Faisons le changement de variables $u = t + a$ et donc $\mathrm{d}u = \mathrm{d}t$. Alors :

   $$\int_0^{2\pi} f(t+a)\, e^{-int}\,\mathrm{d}t = \int_a^{a+2\pi} f(u)\, e^{-in(u-a)}\,\mathrm{d}u = e^{ina}\int_a^{a+2\pi} f(u)\, e^{-inu}\,\mathrm{d}u = e^{ina}2\pi c_n(f)$$

   Nous avons donc $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t+a)\, e^{-int}\,\mathrm{d}t = e^{ina}2\pi c_n(f) \Longleftrightarrow c_n(f) = \frac{e^{-ina}}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t+a)\, e^{-int}\,\mathrm{d}t$

2. *En déduire l'existence d'un réel $M > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$ $|c_n(f)| \leqslant \dfrac{M}{n^\alpha}$.*

   Nous allons écrire

   $$\begin{aligned}
   2c_n(f) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\, e^{-int}\,\mathrm{d}t + \frac{e^{-ina}}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t+a)\, e^{-int}\,\mathrm{d}t \\
   &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(f(t) + e^{-ina} f(t+a)\right) e^{-int}\,\mathrm{d}t
   \end{aligned}$$

D'où $|2c_n(f)| \leqslant \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \left|f(t) + e^{-ina} f(t+a)\right| \,\mathrm{d}t$

En choisissant $a \in \mathbb{R}$ tel que $e^{-ina} = -1$, c'est à dire $na = \pi \iff a = \dfrac{\pi}{n}$, nous avons :

$$|c_n(f)| \leqslant \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} \left|f(t) - f\left(t + \frac{\pi}{n}\right)\right| \,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{4\pi} \times \left(\frac{\pi}{n}\right)^{\alpha}$$

En posant $M = \dfrac{\pi^{\alpha-1}}{4}$, nous avons bien $|c_n(f)| \leqslant \dfrac{M}{n^{\alpha}}$

Exercice 16 :

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique de classe $\mathcal{C}^1$ et telle que $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.
Nous avons le lien entre les coefficients de Fourier $c_n(f)$ et $c_n(f')$: $c_n(f') = inc_n(f)$

1. *Démontrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$ $|f(t)| \leqslant \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \frac{1}{|n|}|c_n(f')|$*

   f étant de classe $\mathcal{C}^1$, d'après le théorème de Dirichlet, f est somme de sa série de Fourier.
   Nous avons $c_0(f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.
   Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}$, nous avons :

   $$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} c_n(f)\, e^{int} = \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \frac{c_n(f')}{in} e^{int}$$

   En passant aux modules et en utilisant l'inégalité triangulaire :

   $$|f(t)| \leqslant \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \left|\frac{c_n(f')}{in} e^{int}\right| = \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \frac{|c_n(f')|}{|n|}$$

   Ce que nous voulions

2. *En déduire l'inégalité $\|f\|_\infty^2 \leqslant \dfrac{\pi}{6}\displaystyle\int_0^{2\pi} (f'(t))^2\,\mathrm{d}t$*

   ⇒ En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous avons :

   $$\left|\sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \frac{|c_n(f')|}{n}\right|^2 = \left|\sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \frac{1}{n}|c_n(f')|\right|^2 \leqslant \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \frac{1}{n^2}\right)\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}^*} |c_n(f')|^2\right)$$

   ⇒ C'est à dire que nous avons $|f(t)|^2 \leqslant \left(\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \frac{1}{n^2}\right)\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}^*} |c_n(f')|^2\right)$.

   Nous avons $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et donc $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(-n)^2} = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = 2 \times \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{3}$

   Autrement dit : $|f(t)|^2 \leqslant \dfrac{\pi^2}{3}\left(\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}^*} |c_n(f')|^2\right)$

   ⇒ D'après la relation de Parseval, nous avons $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}^*} |c_n(f')|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f'(t)|^2\,\mathrm{d}t$

   ⇒ Donc, pour tout $t \in \mathbb{R}$, nous avons :

   $$|f(t)|^2 \leqslant \frac{\pi^2}{3} \times \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f'(t)|^2\,\mathrm{d}t \iff |f(t)|^2 \leqslant \frac{\pi}{6}\int_0^{2\pi} |f'(t)|^2\,\mathrm{d}t$$

   Cette inégalité étant vraie pour tout $t \in \mathbb{R}$, nous avons donc :

   $$\sup_{x\in[0;2\pi]} |f(t)|^2 \leqslant \frac{\pi}{6}\int_0^{2\pi} |f'(t)|^2\,\mathrm{d}t \iff \|f\|_\infty^2 \leqslant \frac{\pi}{6}\int_0^{2\pi} |f'(t)|^2\,\mathrm{d}t$$

3. **Inégalité de Wirtinger**

Démontrer que $\displaystyle\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t \leqslant \int_0^{2\pi} |f'(t)|^2 \, \mathrm{d}t$.

On utilise l'égalité de Parseval, dans tous les sens!!

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t = \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} |c_n(f)|^2 \leqslant \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} n^2 |c_n(f)|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} |c_n(f')|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f'(t)|^2 \, \mathrm{d}t$$

Nous avons donc

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f'(t)|^2 \, \mathrm{d}t \Longleftrightarrow \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t \leqslant \int_0^{2\pi} |f'(t)|^2 \, \mathrm{d}t$$

9.8.4 Série de Fourier d'une fonction de période T

Exercice 17 :

1. *Soit* $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction définie par* $g(x) = f\left(\frac{T}{2\pi}x\right)$. *Montrer que :*

   (a) *La fonction g est périodique et de période 2π*

   C'est une question pas trop difficile.
   Soit $x \in \mathbb{R}$; alors :

   $$g(x+2\pi) = f\left(\frac{T}{2\pi}(x+2\pi)\right) = f\left(\frac{Tx}{2\pi} + T\right) = f\left(\frac{Tx}{2\pi}\right) = g(x)$$

   g est donc bien périodique et de période 2π.
   L'étude de g peut donc se faire sur l'intervalle $[0; 2\pi]$

   (b) *La fonction g est continue par morceaux*

   Soient $a_1, \cdots, a_n$ les points de discontinuité de f sur l'intervalle $[0; T]$. Il est évident que les points $\frac{a_1 T}{2\pi}, \cdots, \frac{a_n T}{2\pi}$ seront les points de discontinuité de g sur $[0; 2\pi]$
   Donc $g \in \mathcal{C}_M(T)$

2. *On appelle $C_n(g)$ le coefficient de Fourier de g d'ordre n. Démontrer que nous avons :*

   $$C_n(g) = C_n^1(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(u)\, e^{-in\frac{2\pi u}{T}} \, \mathrm{d}u$$

   Ce n'est réellement pas une question difficile :

   $$C_n(g) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(u)\, e^{-inu} \, \mathrm{d}u = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(\frac{Tu}{2\pi}\right) e^{-inu} \, \mathrm{d}u$$

   Nous faisons donc le changement de variables $t = \frac{Tu}{2\pi}$ et donc $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u} = \frac{T}{2\pi} \Longleftrightarrow \mathrm{d}u = \frac{2\pi}{T}\mathrm{d}t$
   D'où nous obtenons :

   $$C_n(g) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(\frac{Tu}{2\pi}\right) e^{-inu} \, \mathrm{d}u = \frac{1}{2\pi} \times \frac{2\pi}{T}\int_0^T f(t)\, e^{-in\frac{2\pi t}{T}} \, \mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\, e^{-\frac{2i\pi n t}{T}} \, \mathrm{d}t = C_n^1(f)$$

3. *On suppose que, cette fois-ci, f est de classe $\mathcal{C}^1$. Démontrer que, pour tout $x \in [0; T]$, nous avons le développement :*

   $$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n^1(f)\, e^{in\frac{2\pi u}{T}}$$

→ Clairement, si f est de classe $\mathcal{C}^1$ alors $g \in \mathcal{C}^1(T)$

→ Ensuite, en utilisant le théorème de Dirichlet, nous avons, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n(g)\, e^{inx} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n^1(f)\, e^{inx}$$

En particulier $g\left(\frac{2\pi x}{T}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n^1(f)\, e^{in\frac{2\pi x}{T}}$.

Comme $g\left(\frac{2\pi x}{T}\right) = f\left(\frac{T}{2\pi} \times \left(\frac{2\pi x}{T}\right)\right) = f(x)$ et donc :

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n^1(f)\, e^{in\frac{2\pi u}{T}}$$

4. *Démontrez que nous avons aussi* $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left|C_n^1(f)\right|^2 = \frac{1}{T}\int_0^T |f(u)|^2 \,\mathrm{d}u$

Nous avons l'égalité de Parseval pour g :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |C_n(g)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |g(t)|^2 \,\mathrm{d}t = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left|C_n^1(f)\right|^2$$

En faisant le changement de variables $t = \frac{2\pi}{T}x \Longleftrightarrow x = \frac{T}{2\pi}t$, nous avons $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{2\pi}{T} \Longleftrightarrow \mathrm{d}t = \frac{2\pi}{T}\,\mathrm{d}x$

Donc :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |g(t)|^2 \,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{T} \left|g\left(\frac{2\pi}{T}x\right)\right|^2 \frac{2\pi}{T}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{T}\int_0^T |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x$$

Et nous pouvons donc conclure que $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left|C_n^1(f)\right|^2 = \frac{1}{T}\int_0^T |f(u)|^2 \,\mathrm{d}u$

Exercice 18 :

Calculer le développement en série de Fourier des fonctions suivantes et écrire l'égalité de Parseval pour chacune de ces fonctions

1. *f est périodique et de période 2, et $f(t) = |t|$ si $|t| < 1$*

→ Commençons par faire un graphe *(figure 9.19)* :

→ D'après l'exercice précédent, nous avons $C_n(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(u)\, e^{-in\frac{2\pi u}{T}}\,\mathrm{d}u$, c'est à dire, ici :

$$C_n(f) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} |u|\, e^{-in\pi u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int_{-1}^{0} -ue^{-in\pi u}\,\mathrm{d}u + \frac{1}{2}\int_0^{+1} ue^{-in\pi u}\,\mathrm{d}u$$

En faisant le changement de variables $u = -t$, nous avons $\int_{-1}^{0} -ue^{-in\pi u}\,\mathrm{d}u = \int_0^1 ue^{in\pi u}\,\mathrm{d}u$, et donc :

$$C_n(f) = \frac{1}{2}\int_0^1 ue^{in\pi u}\,\mathrm{d}u + \frac{1}{2}\int_0^{+1} ue^{-in\pi u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int_0^{+1} u\left(e^{in\pi u} + e^{-in\pi u}\right)\mathrm{d}u = \int_0^{+1} u\cos(n\pi u)\,\mathrm{d}u$$

→ Calculons, maintenant $C_n(f) = \int_0^{+1} u\cos(n\pi u)\,\mathrm{d}u$

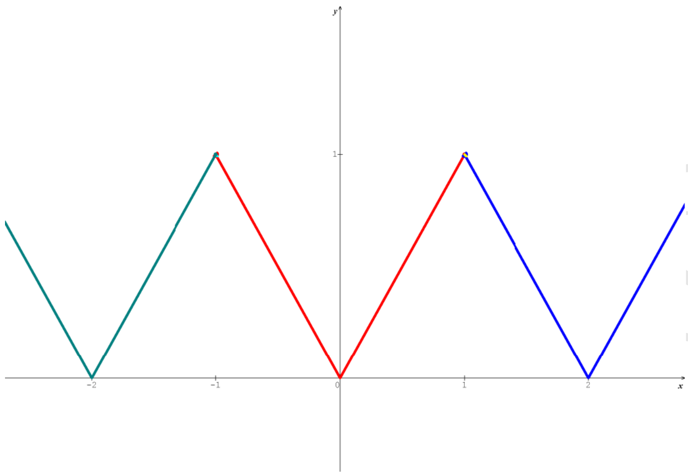

FIGURE 9.19 – Graphe de $f(t) = |t|$ où f périodique et de période 2

- ⋆ Pour $n = 0$, nous avons $C_0(f) = \int_0^{+1} u\cos(0\pi u)\,\mathrm{d}u = \int_0^{+1} u\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}$
- ⋆ Pour $n > 0$, nous pouvons remarquer que $C_n(f) = C_{-n}(f)$. Nous allons calculer $C_n(f)$ par parties.

$$\left\{\begin{array}{ll} u = u & u' = 1 \\ v' = \cos(n\pi u) & v = \dfrac{\sin(n\pi u)}{n\pi} \end{array}\right\}$$

Alors :

$$\begin{aligned} C_n(f) = \int_0^{+1} u\cos(n\pi u)\,\mathrm{d}u &= \left[u\frac{\sin(n\pi u)}{n\pi}\right]_0^1 - \int_0^{+1}\frac{\sin(n\pi u)}{n\pi}\,\mathrm{d}u \\ &= -\int_0^{+1}\frac{\sin(n\pi u)}{n\pi}\,\mathrm{d}u = -\frac{1}{n\pi}\left[\frac{-\cos(n\pi u)}{n\pi}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{n^2\pi^2}\left((-1)^n - 1\right) \end{aligned}$$

On remarque que $C_{2n}(f) = 0$ et que $C_{2n+1}(f) = \dfrac{-2}{(2n+1)^2\pi^2}$

Nous avons donc

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2} - \sum_{n\geqslant 0}\frac{2}{(2n+1)^2\pi^2}e^{i(2n+1)\pi x} - \sum_{n\geqslant 0}\frac{2}{(2n+1)^2\pi^2}e^{-i(2n+1)\pi x} \\ &= \frac{1}{2} - \sum_{n\geqslant 0}\frac{2}{(2n+1)^2\pi^2}\left(e^{i(2n+1)\pi x} + e^{-i(2n+1)\pi x}\right) \\ &= \frac{1}{2} - \sum_{n\geqslant 0}\frac{2}{(2n+1)^2\pi^2}\left(2\cos(2n+1)\pi x\right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{n\geqslant 0}\frac{\cos(2n+1)\pi x}{(2n+1)^2} \end{aligned}$$

Egalité de Parseval :

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}|t|^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}t^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4} - \frac{16}{\pi^4}\sum_{n\geqslant 0}\frac{\cos^2(2n+1)}{(2n+1)^4}$$

2. *f est périodique et de période $a > 0$, et $f(t) = \dfrac{t}{a}$ si $0 \leqslant t < a$*

⇒ Nous avons, comme pour le reste, $c_n(f) = \dfrac{1}{a}\displaystyle\int_0^a \frac{t}{a}e^{-\frac{2i\pi nt}{a}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a^2}\int_0^a te^{-\frac{2i\pi nt}{a}}\,\mathrm{d}t$

$\Rightarrow$ Pour $n = 0$, $c_0(f) = \dfrac{1}{a^2}\displaystyle\int_0^a t\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{a^2}\left[\dfrac{t^2}{2}\right]_0^a = \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow$ Si $n \neq 0$, nous calculons $c_n(f) = \dfrac{1}{a^2}\displaystyle\int_0^a te^{-\frac{2i\pi nt}{a}}\,\mathrm{d}t$ par parties.

$$\left\{\begin{array}{ll} u = t & u' = 1 \\ v' = e^{-\frac{2i\pi nt}{a}} & v = \dfrac{-a}{2i\pi n}e^{-\frac{2i\pi nt}{a}} \end{array}\right\}$$

Et donc :

$$\begin{aligned} c_n(f) = \frac{1}{a^2}\int_0^a te^{-\frac{2i\pi nt}{a}}\,\mathrm{d}t = & \left[\frac{-at}{2i\pi n}e^{-\frac{2i\pi nt}{a}}\right]_0^a + \frac{a}{2i\pi n}\int_0^a e^{-\frac{2i\pi nt}{a}}\,\mathrm{d}t \\ = & \left[\frac{-a^2}{2i\pi n}e^{-2i\pi n}\right] + \frac{a}{2i\pi n}\left[\frac{-a}{2i\pi n}e^{-\frac{2i\pi nt}{a}}\right]_0^a \\ = & \frac{-a^2}{2i\pi n} + \frac{a^2}{\pi^2 n^2}\left[e^{-\frac{2i\pi na}{a}} - 1\right] \\ = & \frac{-a^2}{2i\pi n} \end{aligned}$$

Et donc $c_n(f) = \dfrac{-a^2}{2i\pi n}$

$\Rightarrow$ Et donc,

$$\begin{aligned} f(t) = & \frac{1}{2} + \sum_{n\geqslant 1}\frac{-a^2}{2i\pi n}e^{\frac{2i\pi nt}{a}} + \sum_{n\geqslant 1}\frac{a^2}{2i\pi n}e^{\frac{-2i\pi nt}{a}} \\ = & \frac{1}{2} + \sum_{n\geqslant 1}\frac{a^2}{2i\pi n}\left(e^{\frac{-2i\pi nt}{a}} - e^{\frac{2i\pi nt}{a}}\right) \\ = & \frac{1}{2} + \frac{a^2}{2i\pi}\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}\left(2i\sin\frac{2\pi nt}{a}\right) \\ = & \frac{1}{2} + \frac{a^2}{\pi}\sum_{n\geqslant 1}\frac{\sin\frac{2\pi nt}{a}}{n} \end{aligned}$$

9.8.5 Problème

Exercice 19 :

Soit $\mathcal{C}^\infty(T)$ l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ et 2π-périodique.

Pour tout $f \in \mathcal{C}^\infty(T)$, et tout $p \in \mathbb{Z}$, on posera $c_p(f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\,e^{-ipt}\,\mathrm{d}t$.

On désignera par $\|f\|_\infty$ la borne supérieure de $|f(t)|$ quand t décrit $\mathbb{R}$, c'est à dire :

$$\|f\|_\infty = \sup_{t\in\mathbb{R}}|f(t)| = \sup_{t\in[0;2\pi]}|f(t)|$$

Enfin, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on désignera par E_k, l'ensemble des éléments $f \in \mathcal{C}^\infty(T)$ ayant la propriété suivante :

Il existe $M > 0$ et $A > 0$ (pouvant l'un et l'autre dépendre de f) *tels que* (avec la convention usuelle $f^{(0)} = f$) *on ait, pour tout $n \in \mathbb{N}$*

$$\left\|f^{(n)}\right\|_\infty \leqslant M(n!)^k A^n$$

On se propose, dans ce problème, d'étudier quelques propriétés de E_k, et notamment de caractériser par leurs coefficients de Fourier les éléments de E_k

Partie 1 : Généralités sur E_k et étude particulière de E_0

1. (a) *Montrer que, pour tout $f \in \mathcal{C}^\infty(T)$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}$ est bornée.*

   Pas grande difficulté : pour tout $n \in \mathbb{N}$ $f^{(n)}$ est continue et périodique, donc bornée

(b) *Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(T)$; calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $p \in \mathbb{Z}$, $c_p\left(f^{(n)}\right)$, coefficient de Fourier d'indice p de f fonction de $c_p(f)$, de n et de p.*

Nous avons déjà démontré que $c_p\left(f^{(n)}\right) = (ip)^n c_p(f)$

(c) *Établir, pour $p \neq 0$, l'inégalité $|c_p(f)| \leqslant \dfrac{\left\|f^{(n)}\right\|_\infty}{|p|^n}$*

Nous avons

$$\left|c_p\left(f^{(n)}\right)\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f^{(n)}(t)\,e^{-ipt}\right|\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\|f^{(n)}\right\|_\infty \mathrm{d}t = \left\|f^{(n)}\right\|_\infty$$

Donc, nous avons $|(ip)^n c_p(f)| \leqslant \left\|f^{(n)}\right\|_\infty$, c'est à dire $|p|^n |c_p(f)| \leqslant \left\|f^{(n)}\right\|_\infty$, autrement dit $|c_p(f)| \leqslant \dfrac{\left\|f^{(n)}\right\|_\infty}{|p|^n}$

2. *Montrer que, pour tout $f \in \mathcal{C}^\infty(T)$ et tout $n \in \mathbb{N}$: $\lim\limits_{|p|\to+\infty} |p|^n |c_p(f)| = 0$*

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Nous avons démontré que $|c_p(f)| \leqslant \dfrac{\left\|f^{(n+1)}\right\|_\infty}{|p|^{n+1}}$, c'est à dire que nous avons :

$$|p|^n |c_p(f)| \leqslant \frac{\left\|f^{(n+1)}\right\|_\infty}{|p|}$$

Comme $\lim\limits_{|p|\to+\infty} \dfrac{\left\|f^{(n+1)}\right\|_\infty}{|p|} = 0$, nous avons aussi $\lim\limits_{|p|\to+\infty} |p|^n |c_p(f)| = 0$

3. *Soit $(c_p)_{p\in\mathbb{Z}}$ une suite de nombres complexes telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{|p|\to+\infty} |p|^k c_p = 0$*

(a) *Montrer que les séries de fonctions $\sum\limits_{p=0}^{+\infty} c_p e^{ipt}$ et $\sum\limits_{p=1}^{+\infty} c_{-p} e^{-ipt}$ où $t \in \mathbb{R}$, sont normalement convergentes dans $\mathbb{R}$.*

Sans difficulté, bien sûr.

→ Regardons $\sum\limits_{p=0}^{+\infty} c_p e^{ipt}$

Comme, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{p\to+\infty} p^k |c_p| = 0$, en particulier $\lim\limits_{p\to+\infty} p^2 |c_p| = 0$. Il existe donc $M > 0$ tel que $p^2 |c_p| \leqslant M$, c'est à dire $|c_p| \leqslant \dfrac{M}{p^2}$.

Comme la série $\sum\limits_{p\geqslant 1} \dfrac{M}{p^2}$ est convergente, la série $\sum\limits_{p=0}^{+\infty} c_p e^{ipt}$ est normalement convergente.

→ Maintenant, l'étude de $\sum\limits_{p=1}^{+\infty} c_{-p} e^{-ipt}$ est identique puisque nous avons $\lim\limits_{|p|\to+\infty} |p|^n |c_p(f)| = 0$ et donc $|c_p| \leqslant \dfrac{M}{p^2}$ et la série $\sum\limits_{p=0}^{+\infty} c_p e^{ipt}$ est normalement convergente.

→ En synthèse, la série $\sum\limits_{p=0}^{+\infty} c_p e^{ipt} + \sum\limits_{p=1}^{+\infty} c_{-p} e^{-ipt}$ est normalement convergente.

(b) *Si l'on pose : $f(t) = \sum\limits_{p=0}^{+\infty} c_p e^{ipt} + \sum\limits_{p=1}^{+\infty} c_{-p} e^{-ipt}$, montrer que $f \in \mathcal{C}^\infty(T)$*

→ De la convergence normale de f, on déduit la convergence uniforme de f.
Pour tout $p \in \mathbb{N}$, chaque fonction $c_p e^{ipt}$ et $c_{-p} e^{-ipt}$ est continue, donc f est continue.
De plus, chaque fonction $c_p e^{ipt}$ et $c_{-p} e^{-ipt}$ est périodique et de période 2π, f est donc aussi périodique et de période 2π.

→ Chaque fonction $c_p e^{ipt}$ et $c_{-p}e^{-ipt}$ est indéfiniment dérivable et la dérivée k-ième de $c_p e^{ipt}$ et $c_{-p}e^{-ipt}$ sont respectivement $(ip)^k c_p e^{ipt}$ et $(-ip)^k c_{-p}e^{-ipt}$.
De plus,
▷ Pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{|p|\to+\infty} |p|^{k+2} c_p = 0$ et donc, il existe $\Lambda \in \mathbb{R}^{*+}$ tel que $\left|p^{k+2}c_p\right| \leqslant \Lambda$, et donc $\left|p^k c_p\right| \leqslant \dfrac{\Lambda}{p^2}$.
La série numérique $\sum\limits_{p\geqslant 1} \dfrac{\Lambda}{p^2}$ étant convergente, la série $\sum\limits_{p\geqslant 0} (ip)^k c_p e^{ipt}$ est donc normalement convergente
▷ La réponse est la même pour la série $\sum\limits_{p\geqslant 0} (-ip)^k c_{-p}e^{-ipt}$

→ Ainsi, la série $\sum\limits_{p=0}^{+\infty} (ip)^k c_p e^{ipt} + \sum\limits_{p=1}^{+\infty} (-ip)^k c_{-p}e^{-ipt}$ est normalement convergente et donc f est de classe $\mathcal{C}^\infty$, et, pour tout $k \in \mathbb{N}$ $f^{(k)}(t) = \sum\limits_{p=0}^{+\infty} (ip)^k c_p e^{ipt} + \sum\limits_{p=1}^{+\infty} (-ip)^k c_{-p}e^{-ipt}$

(c) *Montrer que $c_p = c_p(f)$*

De la convergence normale, nous pouvons permuter les signes sommes et intégrales, et nous avons donc :

$$\begin{aligned}
c_p(f) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\, e^{-ipt}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} c_n e^{int} + \sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n}e^{-int}\right) e^{-ipt}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} c_n e^{int}e^{-ipt}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n}e^{-int}e^{-ipt}\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} c_n e^{int}e^{-ipt}\,\mathrm{d}t + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} c_{-n}e^{-int}e^{-ipt}\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} c_n e^{-it(p-n)}\,\mathrm{d}t + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} c_{-n}e^{-it(n+p)}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Ainsi :
▷ Si $p \geqslant 0$ et $n \geqslant 1$, alors $\displaystyle\int_0^{2\pi} c_{-n}e^{-it(n+p)}\,\mathrm{d}t = 0$
▷ Si $p \geqslant 0$ et $n \geqslant 0$, alors $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} c_n e^{-it(p-n)}\,\mathrm{d}t = \begin{cases} 1 \text{ si } n = p \\ 0 \text{ sinon}\end{cases}$

Ainsi, si $p \geqslant 0$, alors $c_p(f) = \displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} c_p\,\mathrm{d}t = c_p$

Et
▷ Si $p \leqslant -1$ et $n \geqslant 1$, alors $\displaystyle\int_0^{2\pi} c_{-n}e^{-it(n+p)}\,\mathrm{d}t = \begin{cases} 1 \text{ si } n = -p \\ 0 \text{ sinon}\end{cases}$
▷ Si $p \leqslant -1$ et $n \geqslant 0$, alors $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} c_n e^{-it(p-n)}\,\mathrm{d}t = 0$

Ainsi, si $p \leqslant -1$, alors $c_p(f) = \displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} c_p\,\mathrm{d}t = c_p$

Donc, nous avons bien, pour tout $p \in \mathbb{Z}$ $c_p = c_p(f)$

4. *Etablir que, si f et g sont deux éléments de E_k, et μ une constante complexe, alors μf ,$f+g$ fg et f' sont éléments de E_k*

Soient $f \in E_k$ et $g \in E_k$.
Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons : $\left\|f^{(n)}\right\|_\infty \leqslant M_f\,(n!)^k A_f^n$ et $\left\|g^{(n)}\right\|_\infty \leqslant M_g\,(n!)^k A_g^n$

⇒ Soit $\mu \in \mathbb{C}$. Alors $(\mu f)^{(n)} = \mu f^{(n)}$ et donc $\left\|(\mu f)^{(n)}\right\|_\infty = \left\|\mu f^{(n)}\right\|_\infty = |\mu| \left\|f^{(n)}\right\|_\infty$
Dès lors, nous avons :

$$\left\|(\mu f)^{(n)}\right\|_\infty \leqslant |\mu| \, M_f \, (n!)^k \, A_f^n$$

Donc $\mu f \in E_k$
⇒ Montrons que $f+g \in E_k$.
Nous avons $(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$ et donc, en utilisant les propriétés des normes :

$$\left\|(f+g)^{(n)}\right\|_\infty \leqslant \left\|f^{(n)}\right\|_\infty + \left\|g^{(n)}\right\|_\infty \leqslant M_f \, (n!)^k \, A_f^n + M_g \, (n!)^k \, A_g^n$$

Posons $N = \sup(M_f, M_g)$ et $B = \sup(A_f, A_g)$. Alors, $M_f \leqslant N$ et $M_g \leqslant N$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $A_f^n \leqslant B^n$ et $A_g^n \leqslant B^n$ et donc

$$\left\|(f+g)^{(n)}\right\|_\infty \leqslant N \, (n!)^k \, B^n + N \, (n!)^k \, B^n = 2N \, (n!)^k \, B^n$$

Ainsi, $f+g \in E_k$
⇒ Montrons que $f \times g \in E_k$
D'après la formule de Leibniz, nous avons :

$$(f \times g)^{(n)} = \sum_{q=0}^{n} \mathrm{C}_n^q \, (f)^{(q)} \times (g)^{(n-q)}$$

ce qui signifie, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$(f \times g)^{(n)}(x) = \sum_{q=0}^{n} \mathrm{C}_n^q \, (f)^{(q)}(x) \times (g)^{(n-q)}(x)$$

Et, en passant aux valeurs absolues, puis à l'inégalité triangulaire, nous avons, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\left|(f \times g)^{(n)}(x)\right| \leqslant \sum_{q=0}^{n} \mathrm{C}_n^q \left|f^{(q)}(x)\right| \times \left|g^{(n-q)}(x)\right|$$

Et donc, en passant au sup, nous avons :

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left|(f \times g)^{(n)}(x)\right| \leqslant \sum_{q=0}^{n} \mathrm{C}_n^q \sup_{x \in \mathbb{R}} \left|f^{(q)}(x)\right| \times \sup_{x \in \mathbb{R}} \left|g^{(n-q)}(x)\right|$$

C'est à dire :

$$\left\|(f \times g)^{(n)}\right\|_\infty \leqslant \sum_{q=0}^{n} \mathrm{C}_n^q \left\|f^{(q)}\right\|_\infty \times \left\|g^{(n-q)}\right\|_\infty$$

⋆ Comme $f \in E_k$, nous avons $\left\|f^{(q)}\right\|_\infty \leqslant M_f \, (q!)^k \, A_f^q$
⋆ De même, comme $g \in E_k$, nous avons $\left\|g^{(n-q)}\right\|_\infty \leqslant M_g \, ((n-q)!)^k \, A_g^{n-q}$

Posons toujours $N = \sup(M_f, M_g)$ et $B = \sup(A_f, A_g)$. Alors, $M_f \leqslant N$ et $M_g \leqslant N$ et nous avons $A_f^q \leqslant B^q$ et $A_g^{n-q} \leqslant B^{n-q}$ et donc

$$\begin{aligned} \left\|f^{(q)}\right\|_\infty \times \left\|g^{(n-q)}\right\|_\infty &\leqslant \left(M_f \, (q!)^k \, A_f^q\right) \times \left(M_g \, ((n-q)!)^k \, A_g^{n-q}\right) \\ &\leqslant \left(N \, (q!)^k \, B^q\right) \times \left(N \, ((n-q)!)^k \, B^{n-q}\right) = N^2 \, (q! \, (n-q)!)^k \, B^n \end{aligned}$$

Nous avons donc $\left\|(f \times g)^{(n)}\right\|_\infty \leqslant \displaystyle\sum_{q=0}^{n} \mathrm{C}_n^q N^2 \, (q! \, (n-q)!)^k \, B^n$

Nous avons $\mathrm{C}_n^q = \dfrac{n!}{q! \, (n-q)!}$.

Comme $\mathrm{C}_n^q \geqslant 1$, nous avons $\dfrac{n!}{q! \, (n-q)!} \geqslant 1 \iff n! \geqslant q! \, (n-q)!$

Et donc :

$$\begin{aligned}\left\|(f\times g)^{(n)}\right\|_\infty &\leqslant \sum_{q=0}^{n} \mathrm{C}_n^q N^2 \left(q!\,(n-q)!\right)^k B^n \\ &\leqslant \sum_{q=0}^{n} \mathrm{C}_n^q N^2 (n!)^k B^n = N^2 (n!)^k B^n \sum_{q=0}^{n} \mathrm{C}_n^q = N^2 (n!)^k B^n 2^n = N^2 (n!)^k (2B)^n\end{aligned}$$

Ce qui termine de montrer que $f\times g\in E_k$

Cette question démontre que E_k est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel , en fait un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(T)$. Mieux, avec le fait que si $f\in E_k$ et $g\in E_k$, nous ayions $f\times g\in E_k$, E_k est une algèbre.

5. *Soit $f\in E_0$.*

(a) *Déduire de la question 1 que $c_p(f)$ est nul sauf pour un nombre fini de valeurs de p*

Dire que $c_p(f)$ est nul sauf pour un nombre fini de valeurs de p, c'est dire qu'il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $p\in\mathbb{Z}$, si $|p|\geqslant N$, alors $c_p(f)=0$

Supposons le contraire

C'est à dire que nous supposons que pour tout $N\in\mathbb{N}$, il existe $p\in\mathbb{Z}$ tel que $|p|\geqslant N$ et $c_p(f)\neq 0$

Comme $f\in E_0$, il existe $M_f>0$ et $A_f>0$ tels que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\left\|f^{(n)}\right\|_\infty\leqslant M_f(A_f)^n$.

D'après la question 1, nous avons $|c_p(f)|\leqslant \dfrac{\left\|f^{(n)}\right\|_\infty}{|p|^n}\leqslant M_f\left(\dfrac{A_f}{|p|}\right)^n$

Soit $N>A_k$ et $p_0\in\mathbb{Z}$ tel que $|p_0|>N$ et $c_{p_0}(f)\neq 0$.

Nous avons alors $|c_{p_0}(f)|\leqslant M_f\left(\dfrac{A_f}{|p_0|}\right)^n$.

Comme $A_k<N<|p_0|$, nous avons $0<\dfrac{A_f}{|p_0|}<1$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{A_f}{|p_0|}\right)^n=0$

C'est là qu'intervient la contradiction puisque si $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{A_f}{|p_0|}\right)^n=0$, il existe un entier $P\in\mathbb{N}$ tel que si $n>P$, alors $M_f\left(\dfrac{A_f}{|p_0|}\right)^n<|c_{p_0}(f)|$

Donc, contradiction.

Il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $p\in\mathbb{Z}$, si $|p|\geqslant N$, alors $c_p(f)=0$, c'est à dire $c_p(f)$ est nul sauf pour un nombre fini de valeurs de p

On vient de montrer que si $f\in E_0$, alors f est un polynôme trigonométrique. La question suivante consiste à démontrer que si f est un polynôme trigonométrique, alors $f\in E_0$

(b) *Soit q un entier strictement positif; on définit f par $f(t)=\sum\limits_{p=-q}^{q} c_p e^{ipt}$ pour tout $t\in\mathbb{R}$, les c_p étant des constantes complexes et l'un au moins des deux nombres c_q et c_{-q} étant non nul. Montrer qu'il existe $M>0$ tel que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\left\|f^{(n)}\right\|_\infty\leqslant Mq^n$*

f est un polynôme trigonométrique de degré q et, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f^{(n)}(t)=\sum\limits_{p=-q}^{q}(ip)^n c_p e^{ipt}$

et donc $\left|f^{(n)}(t)\right|\leqslant\sum\limits_{p=-q}^{q}|p|^n|c_p|$.

Pour tout $p\in\mathbb{Z}$ tel que $-q\leqslant p\leqslant q$, nous avons $|p|^n\leqslant q^n$ et donc $\left|f^{(n)}(t)\right|\leqslant\left(\sum\limits_{p=-q}^{q}|c_p|\right)q^n$.

En particulier $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}}\left|f^{(n)}(t)\right|\leqslant\left(\sum\limits_{p=-q}^{q}|c_p|\right)q^n$, c'est à dire $\left\|f^{(n)}\right\|_\infty\leqslant Mq^n$ où $M=\left(\sum\limits_{p=-q}^{q}|c_p|\right)$

Donc, $f\in E_0$

Les seuls éléments de E_0 sont donc les polynômes trigonométriques

Montrer que, si M' et A sont deux constantes positives satisfaisant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, à l'inégalité :$\left\| f^{(n)} \right\|_\infty \leqslant M' A^n$, alors $A \geqslant q$

f étant un polynôme trigonométrique, alors $c_p(f) = c_p$ et d'après la question a, nous avons

$$|c_p(f)| \leqslant \frac{\left\| f^{(n)} \right\|_\infty}{|p|^n} \leqslant M' \left(\frac{A}{|p|} \right)^n$$

Nous avons démontré que si $|p| > A$, alors $c_p = 0$.

Or, si $A < q$, nous aurons alors $c_q = 0$ ou $c_{-q} = 0$, ce qui est impossible.

Donc $A \geqslant q$ et l'inégalité $\left\| f^{(n)} \right\|_\infty \leqslant M q^n$ est donc la meilleure.

6. *Soit q un entier strictement positif ; on définit g_1 par : $g_1(\theta) = \cos^q \theta$ Établir la meilleure inégalité possible du type suivant : Pour tout $n \in \mathbb{N}$ nous avons $\left\| g_1^{(n)} \right\|_\infty \leqslant M_1 (n!)^k A_1^n$*

Comme d'habitude, nous écrivons $\cos^q \theta = \left(\dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right)^q = \dfrac{1}{2^q} \left(e^{i\theta} + e^{-i\theta} \right)^q$

Pour commencer, nous avons $\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta} \right)^q = \displaystyle\sum_{k=0}^{q} \mathrm{C}_q^k e^{ik\theta} e^{-i(q-k)\theta} = \sum_{k=0}^{q} \mathrm{C}_q^k e^{i\theta(2k-q)}$

En remarquant que si $0 \leqslant k \leqslant q$, alors $-q \leqslant 2k - q \leqslant q$, que $\mathrm{C}_q^{q-k} = \mathrm{C}_q^k$, nous pouvons alors écrire : $g_1(\theta) = \cos^q \theta = \displaystyle\sum_{k=-q}^{q} c_k e^{ik\theta}$ avec $c_k = c_{-k}$.

D'autre part, si q est pair alors c_{2k+1}, les termes d'ordre impair sont nuls, et, de même si q est impair alors c_{2k}, les termes d'ordre pair sont nuls,

Nous montrons ainsi que $g_1(\theta) = \cos^q \theta$ est un polynôme trigonométrique de degré q tel que $c_q = c_{-q} = \dfrac{1}{2^q}$

De l'expression $g_1(\theta) = \dfrac{1}{2^q} \displaystyle\sum_{k=0}^{q} \mathrm{C}_q^k e^{i\theta(2k-q)}$, nous tirons, sans difficulté aucune *(avec un raisonnement par récurrence, par exemple)* que

$$g_1^{(n)}(\theta) = \frac{1}{2^q} \sum_{k=0}^{q} (i(2k-q))^n \mathrm{C}_q^k e^{i\theta(2k-q)}$$

Et, en passant à la valeur absolue (ou aux modules), nous avons :

$$\left| g_1^{(n)}(\theta) \right| \leqslant \frac{1}{2^q} \sum_{k=0}^{q} |(2k-q)|^n \mathrm{C}_q^k$$

De la remarque ci-dessus : si $0 \leqslant k \leqslant q$, alors $-q \leqslant 2k - q \leqslant q$, nous avons $|(2k-q)|^n \leqslant q^n$, et donc :

$$\left| g_1^{(n)}(\theta) \right| \leqslant \frac{1}{2^q} \sum_{k=0}^{q} |(2k-q)|^n \mathrm{C}_q^k \leqslant \frac{q^n}{2^q} \sum_{k=0}^{q} \mathrm{C}_q^k = q^n$$

Puisque de façon bien connue, nous avons $\displaystyle\sum_{k=0}^{q} \mathrm{C}_q^k = 2^q$

Ainsi, nous avons $\left\| g_1^{(n)} \right\|_\infty \leqslant q^n$, et c'est la meilleure majoration possible pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour $n = 0$, cette majoration est atteinte ; en effet : $\left\| g_1^{(0)} \right\|_\infty = \|g_1\|_\infty = 1 = q^0$

Partie 2 *(intermède ludique et reposant)* : étude de fonctions et de majorations

1. *Soient $a > 1$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Etudier les variations de la fonction f_n ainsi définie :*

$$\left\{ \begin{array}{lcl} f_n : \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f_n(x) = x^n a^{-x} \end{array} \right.$$

Donner explicitement le maximum de cette fonction.

C'est une question qui ne doit poser aucune difficulté ; c'est tout L_0 tout cuit !!.
Comme $a > 1$ et $x > 0$, nous povons simplement écrire : $f_n(x) = x^n a^{-x} = x^n e^{-x\ln a}$.
Calculons-en la dérivée :

$$f_n'(x) = nx^{n-1}e^{-x\ln a} - \ln a e^{-x\ln a} x^n = x^{n-1}e^{-x\ln a}(n - x\ln a)$$

Clairement, le signe de $f_n'(x)$ est celui de $(n - x\ln a)$. Ainsi :

⋆ Si $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{n}{\ln a}$, alors $f_n'(x) \geqslant 0$ et f_n est croissante sur l'intervalle $\left[0; \dfrac{n}{\ln a}\right]$

⋆ Et si $x \geqslant \dfrac{n}{\ln a}$, alors $f_n'(x) \leqslant 0$ et f_n est décroissante sur l'intervalle $\left[\dfrac{n}{\ln a}; +\infty\right[$

Le maximum de f_n est donc atteint, sur $\mathbb{R}^+$ en $x_0 = \dfrac{n}{\ln a}$ et ce maximum est

$$f_n\left(\frac{n}{\ln a}\right) = \left(\frac{n}{\ln a}\right)^n e^{-\frac{n}{\ln a}\times\ln a} = \frac{n^n}{(\ln a)^n}e^{-n} = \left(\frac{n}{e}\right)^n \times \left(\frac{1}{\ln a}\right)^n$$

Ainsi donc, pour tout $x \geqslant 0$ et tout $a > 1$, nous avons $x^n a^{-x} \leqslant \left(\dfrac{n}{e}\right)^n \times \left(\dfrac{1}{\ln a}\right)^n$.

En particulier, si $a = e$, nous avons $x^n e^{-x} \leqslant \left(\dfrac{n}{e}\right)^n$

2. (a) *Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $u_n = \dfrac{1}{n!} \times \left(\dfrac{n}{e}\right)^n$*

Pour connaître cette monotonie, nous allons faire le rapport $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ et en faire la comparaison à 1.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{(n+1)!} \times \left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1} \times \left(\frac{e}{n}\right)^n n! = \frac{1}{n+1} \times (n+1) \times \frac{(n+1)^n}{e^{n+1}} \times \frac{e^n}{n^n} = \frac{1}{e} \times \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$$

Nous allons étudier un tout petit peu, la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ où $X_n = \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$

⇒ Déjà, nous savons que $\lim\limits_{n\to+\infty} X_n = e$

⇒ D'autre part, la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite croissante telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n < e$

Comment montrer que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite croissante ?
Il suffit, pour celà, d'utiliser la fonction auxiliaire $\varphi : \mathbb{R}^{*+} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$

Sa dérivée est donnée par $\varphi'(x) = \left(\ln(x+1) - \ln x - \dfrac{1}{x+1}\right)e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$ dont le signe ne dépend que que $\left(\ln(x+1) - \ln x - \dfrac{1}{x+1}\right)$.
Lorsque nous aurons remarqué que :

$$\frac{1}{x+1} \leqslant \int_x^{x+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \frac{1}{x} \Longleftrightarrow \frac{1}{x+1} \leqslant \ln(x+1) - \ln x \leqslant \frac{1}{x}$$

nous aurons alors démontré que $\left(\ln(x+1) - \ln x - \dfrac{1}{x+1}\right) \geqslant 0$ et donc que $\varphi'(x) \geqslant 0$. *(Voir la figure 9.20)*
La fonction φ est donc croissante et donc la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite croissante

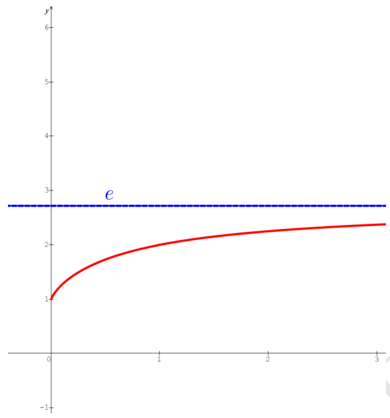

FIGURE 9.20 – La représentation graphique de $\varphi(x) = \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$

Donc, comme $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{1}{e} \times \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n = \dfrac{1}{e} \times X_n < \dfrac{1}{e} \times e = 1$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $u_n = \dfrac{1}{n!} \times \left(\dfrac{n}{e}\right)^n$ est donc décroissante

(b) *En déduire l'inégalité $n! \geqslant e\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$*

⇒ **Première méthode Bulldozer**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ étant décroissante, nous avons :

$$\frac{1}{n!} \times \left(\frac{n}{e}\right)^n \geqslant \frac{1}{(n+1)!} \times \left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1} \Longleftrightarrow \left(\frac{n}{e}\right)^n \geqslant \frac{1}{n+1} \times \left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}$$

Ainsi :

$$\begin{cases} \text{pour } n=1 & \dfrac{1}{e} \geqslant \dfrac{1}{2} \times \left(\dfrac{2}{e}\right)^2 \\ \text{pour } n=2 & \left(\dfrac{2}{e}\right)^2 \geqslant \dfrac{1}{3} \times \left(\dfrac{3}{e}\right)^3 \\ \text{pour } n=3 & \left(\dfrac{3}{e}\right)^3 \geqslant \dfrac{1}{4} \times \left(\dfrac{4}{e}\right)^4 \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ & \left(\dfrac{n-2}{e}\right)^{n-2} \geqslant \dfrac{1}{n-1} \times \left(\dfrac{n-1}{e}\right)^{n-1} \\ & \left(\dfrac{n-1}{e}\right)^{n-1} \geqslant \dfrac{1}{n} \times \left(\dfrac{n}{e}\right)^n \end{cases}$$

En multipliant termes à termes, puis en simplifiant, nous obtenons :

$$\frac{1}{e} \geqslant \frac{1}{n!} \times \left(\frac{n}{e}\right)^n \Longleftrightarrow n! \geqslant e\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

⇒ **Seconde méthode, tellement plus subtile :**

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ étant décroissante, nous avons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_1 \geqslant u_n$, c'est à dire $\dfrac{1}{e} \geqslant \dfrac{1}{n!} \times \left(\dfrac{n}{e}\right)^n$, ou, ce qui est équivalent, $n! \geqslant e\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$

3. *On pose, pour tout $x > 0$, $\Phi(x) = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} (n!x^{-n})$*

(a) *Donner une expression explicite de $\Phi(x)$ lorsque $x \in]s, s+1]$, où $s \in \mathbb{N}$.*

Pour nous simplifier l'étude, nous appelons, pour $x \in \mathbb{R}$ fixé : $v_n = \dfrac{n!}{x^n}$. Nous allons étudier les variations de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Tout d'abord $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{(n+1)!}{x^{n+1}} \times \dfrac{x^n}{n!} = \dfrac{n+1}{x}$

$\Rightarrow$ Commençons par un peu de bricolages.

Si $x \in]0;1]$, alors $\dfrac{1}{x} \geqslant 1$, donc $\dfrac{n+1}{x} \geqslant n+1 \geqslant 1$ et alors $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} \geqslant 1$; ce qui veut dire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $v_0 \leqslant v_n$ et donc $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} (n!x^{-n}) = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} v_n = v_0 = \dfrac{0!}{x^0} = 1$.

Ainsi, si $x \in]0;1]$, alors $\Phi(x) = 1$

$\Rightarrow$ Jouons plus sérieux et soit $s \in \mathbb{N}$ et $x \in]s; s+1]$

De $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{n+1}{x}$ et de $\dfrac{1}{s+1} \leqslant \dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{1}{s}$, nous tirons $\dfrac{n+1}{s+1} \leqslant \dfrac{n+1}{x} \leqslant \dfrac{n+1}{s}$

- ⋆ Ainsi, si $n \geqslant s$, alors $\dfrac{n+1}{s+1} \geqslant 1$ et donc $\dfrac{n+1}{x} \geqslant 1$, c'est à dire $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} \geqslant 1$
- ⋆ Si $n < s$, c'est à dire $n+1 \leqslant s$ et donc $\dfrac{n+1}{s} \leqslant 1$ i.e. $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} \leqslant 1$

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante si $n < s$ et croissante si $n \geqslant s$ et donc $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} (n!x^{-n}) = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} v_n = v_s = \dfrac{s!}{x^s}$

$\Rightarrow$ Ainsi, sur les intervalles $]s; s+1]$ nous avons $\Phi(x) = \dfrac{s!}{x^s}$ et définition qui reste valable même pour $s = 0$

(b) $\to$ *Etudier la continuité de Φ*

Les points qui peuvent poser problème dans la continuité de Φ sont les points à valeurs entières $s \in \mathbb{N}$.

Nous avons donc $\Phi(s) = \dfrac{(s-1)!}{s^{s-1}}$

- ⋆ Bien entendue, la fonction Φ est continue à gauche de s
- ⋆ Etudions la continuité à droite de s.

A droite de s, sur l'intervalle $]s; s+1]$ nous avons $\Phi(x) = \dfrac{s!}{x^s}$. Donc :

$$\lim_{\substack{x\to s\\ x>s}} \Phi(x) = \lim_{\substack{x\to s\\ x>s}} \frac{s!}{x^s} = \frac{(s-1)!}{s^{s-1}} = \Phi(s)$$

Φ est donc bien continue à droite de s

Nous pouvons donc conclure que Φ est continue sur $\mathbb{R}^+$

$\to$ *Représenter graphiquement la restriction de Φ à l'intervalle $]0,4]$*

- ⋆ Il suffit de définir les différents intervalles :

$$\begin{array}{ll}
\text{Si } x \in]0;1] & \text{alors } \Phi(x) = 1 \\
\text{Si } x \in]1;2] & \text{alors } \Phi(x) = \dfrac{1}{x} \\
\text{Si } x \in]2;3] & \text{alors } \Phi(x) = \dfrac{2}{x^2} \\
\text{Si } x \in]3;4] & \text{alors } \Phi(x) = \dfrac{6}{x^3}
\end{array}$$

- ⋆ D'où le graphe :

(c) *Etablir l'existence d'une constante β telle que, pour tout $x > 0$: $\Phi(x) \leqslant \beta e^{\frac{-x}{2}}$*

Pour résoudre cette question, nous allons simplement étudier la fonction $\Psi(x) = \Phi(x) \times e^{\frac{x}{2}}$ et démontrer qu'elle est bornée sur $\mathbb{R}^+$

$\to$ Sur l'intervalle $]0;1]$, nous avons $\Psi(x) = e^{\frac{x}{2}}$. Ψ y est donc croissante et, pour tout $x \in]0;1]$, nous avons donc $\Psi(x) \leqslant e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$

$\to$ Soit $s \in \mathbb{N}^*$.

Alors, sur chaque intervalle $]s; s+1]$, nous avons

$$\Psi(x) = \Phi(x) \times e^{\frac{x}{2}} = \frac{s!}{x^s} \times e^{\frac{x}{2}} = \frac{s!}{x^s \times (\sqrt{e})^{-x}}$$

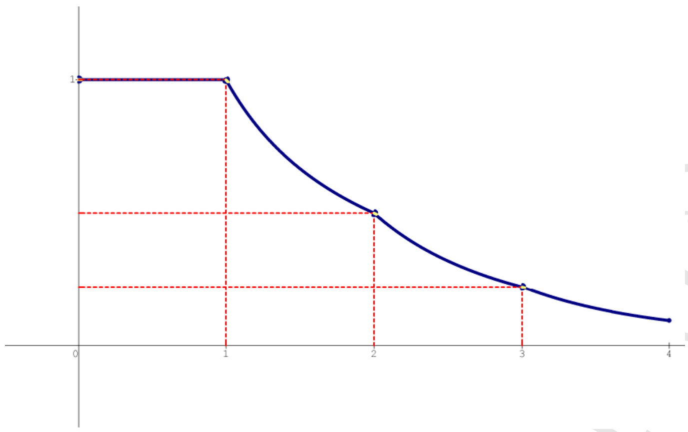

FIGURE 9.21 – Le graphe de la restriction de Φ à l'intervalle $]0,4]$

Nous avons démontré en question 1 que si $0 \leqslant x \leqslant \frac{s}{\ln a}$, alors $x^s \times a^{-x}$ est croissante sur l'intervalle $\left[0;\frac{n}{\ln a}\right]$, et que si $x \geqslant \frac{s}{\ln a}$, alors $x^s \times a^{-x}$ est décroissante sur l'intervalle $\left[\frac{n}{\ln a};+\infty\right[$.
Dans notre cas, $a=\sqrt{e}$, donc $\frac{s}{\ln a}=\frac{s}{\ln\sqrt{e}}=\frac{s}{\frac{1}{2}}=2s$ et comme $2s \geqslant s+1$, la fonction $x^s \times \left(\sqrt{e}\right)^{-x}$ est croissante sur l'intervalle $]s;s+1]$.
De l'expression de $\Psi\left(x\right)=\frac{s!}{x^s \times \left(\sqrt{e}\right)^{-x}}$, nous déduisons que la fonction Ψ est continue et décroissante sur chaque intervalle $]s;s+1]$ avec $s \in \mathbb{N}^*$
C'est à dire que la fonction Ψ est continue et décroissante sur $[1;+\infty[$

→ Comme nous avons démontré que Ψ est croissante sur l'intervalle $]0;1]$, nous avons donc, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\Psi\left(x\right) \leqslant \Psi\left(1\right)$, c'est à dire

$$\Psi\left(x\right) \leqslant \Psi\left(1\right) \Longleftrightarrow \Phi\left(x\right)\times e^{\frac{x}{2}} \leqslant \Phi\left(1\right)\times e^{\frac{1}{2}} \Longleftrightarrow \Phi\left(x\right)\times e^{\frac{x}{2}} \leqslant e^{\frac{1}{2}} \Longleftrightarrow \Phi\left(x\right) \leqslant e^{\frac{1}{2}}e^{\frac{-x}{2}}$$

Nous avons donc $\beta = e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$.
En fait, nous venons de montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\Phi\left(x\right) \leqslant e^{\frac{1-x}{2}}$

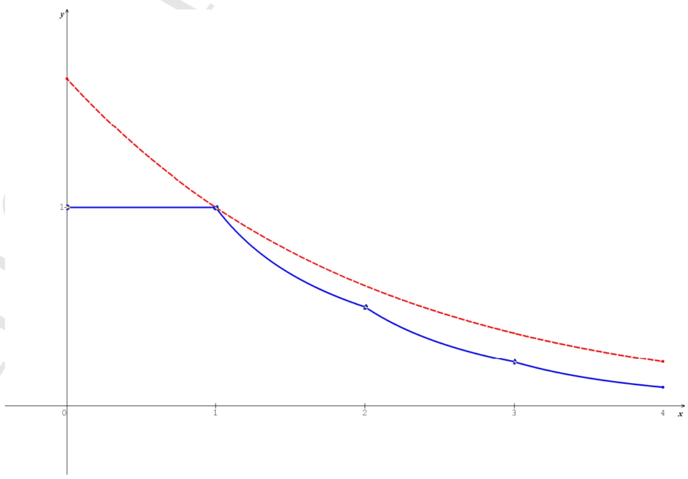

FIGURE 9.22 – Le graphe de la restriction de Φ à l'intervalle $]0,4]$ avec la majoration par la fonction $e^{\frac{1-x}{2}}$

Partie 3 : Etude du cas particulier des « fonctions rationnelles trigonométriques »

1. *Soit $a \in \mathbb{C}$, tel que $|a| > 1$. On pose, pour tout $t \in \mathbb{R}$: $h_a(t) = \sum_{p=1}^{+\infty} a^{-p} e^{ipt}$*

   (a) *Donner une expression explicite de $h_a(t)$*

   Ce n'est pas une question qui pose d'énormes difficultés.

   Pour tout $t \in \mathbb{R}$, nous avons $\left|a^{-p}e^{ipt}\right| = \left|\frac{e^{it}}{a}\right|^p = \left|\frac{1}{a}\right|^p$.

   Comme $\left|\frac{1}{a}\right| < 1$, la série $h_a(t) = \sum_{p=1}^{+\infty} a^{-p} e^{ipt}$ est normalement convergente, et nous avons :

$$h_a(t) = \frac{1}{1 - \frac{e^{it}}{a}} - 1 = \frac{a}{a - e^{it}} - 1 = \frac{e^{it}}{a - e^{it}}$$

   (b) i. *Etablir que $h_a \in \mathcal{C}^\infty(T)$*

   → h_a est évidemment continue sur $\mathbb{R}$ et ce, pour 2 raisons :

   ▷ D'une part par l'expression simplifiée de $h_a(t) = \frac{e^{it}}{a - e^{it}}$

   ▷ D'autre part par la convergence normale de $\sum_{p=1}^{+\infty} a^{-p} e^{ipt}$. En effet, chaque fonction $a^{-p}e^{ipt}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et de cette convergence normale, on déduit que la somme est continue sur $\mathbb{R}$

   → D'autre part, et sans difficulté, nous voyons que h_a est 2π-périodique.

   → La série entière $H(z) = \sum_{p=1}^{+\infty} a^{-p} z^p$ a un rayon de convergence ρ tel que $\rho > 1$.

   Sur ce domaine de convergence, H y est indéfiniment dérivable.

   La fonction $h_a(t) = \sum_{p=1}^{+\infty} a^{-p} e^{ipt} = H\left(e^{it}\right)$ est donc indéfiniment différentiable et

$$h_a^{(n)}(t) = \sum_{p=1}^{+\infty} a^{-p} (ip)^n e^{ipt}$$

   Et donc $h_a \in \mathcal{C}^\infty(T)$

   ii. *Donner, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le développement en série de Fourier de $h_a^{(n)}$*

   Si nous appelons $c_k\left(h_a^{(n)}\right)$ le coefficient de Fourier d'ordre k de $h_a^{(n)}$, nous avons :

$$\begin{aligned} c_k\left(h_a^{(n)}\right) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h_a^{(n)}(t)\, e^{-ikt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum_{p=1}^{+\infty} a^{-p}(ip)^n e^{ipt}e^{-ikt}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi}\sum_{p=1}^{+\infty} a^{-p}(ip)^n \int_0^{2\pi} e^{-i(k-p)t}\,\mathrm{d}t \\ &= a^{-k}(ik)^n \end{aligned}$$

   Et donc $h_a^{(n)}(t) = \sum_{p=1}^{+\infty} a^{-p}(ip)^n e^{ipt}$ est bien somme de sa série de Fourier

   (c) *Etablir l'inégalité, valable pour n et p entiers, $n \geqslant 0$ et $p > 0$: $p^n \times |a|^{-\frac{p}{2}} \leqslant \left(\frac{2}{\ln|a|}\right)^n \times n!$*

$\rightarrow$ Nous avons démontré que, pour tout $x \geqslant 0$ et tout $a > 1$, nous avons

$$x^n a^{-x} \leqslant \left(\frac{n}{e}\right)^n \times \left(\frac{1}{\ln a}\right)^n$$

Puis, nous avons démontré que $n! \geqslant e\left(\frac{n}{e}\right)^n \iff \left(\frac{n}{e}\right)^n \leqslant \frac{n!}{e}$; et comme $\frac{n!}{e} \leqslant n!$, nous avons $\left(\frac{n}{e}\right)^n \leqslant n!$

$\rightarrow$ Nous allons appliquer les inégalités rappelée ci-dessus à $a \in \mathbb{C}$ avec $|a| > 1$ et $p \in \mathbb{N}^*$.

Tout d'abord, nous avons $p^n \times |a|^{-\frac{p}{2}} = p^n \times \left(|a|^{\frac{1}{2}}\right)^{-p} = p^n \times \left(\sqrt{|a|}\right)^{-p}$, et donc :

$$\begin{aligned} p^n \times |a|^{-\frac{p}{2}} &= p^n \times \left(\sqrt{|a|}\right)^{-p} \\ &\leqslant \left(\frac{n}{e}\right)^n \left(\frac{1}{\ln\left(\sqrt{|a|}\right)}\right)^n = \left(\frac{n}{e}\right)^n \left(\frac{2}{\ln|a|}\right)^n \\ &\leqslant \frac{n!}{e}\left(\frac{2}{\ln|a|}\right)^n \leqslant n!\left(\frac{2}{\ln|a|}\right)^n \end{aligned}$$

D'où, nous avons bien pour pour n et p entiers, $n \geqslant 0$ et $p > 0$, $p^n \times |a|^{-\frac{p}{2}} \leqslant \left(\frac{2}{\ln|a|}\right)^n \times n!$

(d) *En déduire que $h_a \in E_1$*

Nous avons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p^n \times |a|^{-\frac{p}{2}} \leqslant \left(\frac{2}{\ln|a|}\right)^n \times n!$ et $h_a^{(n)}(t) = \sum_{p=1}^{+\infty} a^{-p}(ip)^n e^{ipt}$.

Donc :

$$\begin{aligned} \left|h_a^{(n)}(t)\right| &\leqslant \sum_{p=1}^{+\infty}\left|a^{-p}(ip)^n e^{ipt}\right| = \sum_{p=1}^{+\infty}|a|^{-p}p^n = \sum_{p=1}^{+\infty}|a|^{-\frac{p}{2}}|a|^{-\frac{p}{2}}p^n \\ &\leqslant \sum_{p=1}^{+\infty}|a|^{-\frac{p}{2}}\left(\frac{2}{\ln|a|}\right)^n \times n! = \left(\frac{2}{\ln|a|}\right)^n \times n!\sum_{p=1}^{+\infty}|a|^{-\frac{p}{2}} \end{aligned}$$

Il faut maintenant remarquer que $\sum_{p=1}^{+\infty}|a|^{-\frac{p}{2}} = \sum_{p=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{|a|}}\right)^p = \frac{1}{\sqrt{|a|}-1}$, et donc :

$$\left|h_a^{(n)}(t)\right| \leqslant \left(\frac{1}{\sqrt{|a|}-1}\right)n!\left(\frac{2}{\ln|a|}\right)^n$$

En particulier $\sup_{t\in\mathbb{R}}\left|h_a^{(n)}(t)\right| \leqslant \left(\frac{1}{\sqrt{|a|}-1}\right)n!\left(\frac{2}{\ln|a|}\right)^n$ et donc :

$$\left\|h_a^{(n)}\right\|_\infty \leqslant \left(\frac{1}{\sqrt{|a|}-1}\right)n!\left(\frac{2}{\ln|a|}\right)^n$$

Ce qui nous autorise à conclure que $h_a \in E_1$

2. *Soit $b \in \mathbb{C}$, avec $|b| \neq 1$.*

   (a) *Donner les coefficients de Fourier de la fonction ψ_b, définie par $\psi_b(t) = \frac{1}{b - e^{it}}$*

   (b) *En déduire que $\psi_b \in E_1$*

Comme $|b| \neq 1$, nous allons étudier 2 cas : $|b| > 1$ puis $|b| < 1$

$\Rightarrow$ Supposons donc $|b| > 1$

- ⋆ Alors, $\dfrac{1}{b-e^{it}} = \dfrac{1}{b\left(1-\frac{e^{it}}{b}\right)} = \dfrac{1}{b}\left(\dfrac{1}{1-\left(\frac{e^{it}}{b}\right)}\right)$

  Comme $|b|>1$, alors $\left|\dfrac{e^{it}}{b}\right| = \dfrac{1}{|b|} < 1$, et donc :

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-\left(\frac{e^{it}}{b}\right)} &= \sum_{n\geqslant 0}\frac{e^{int}}{b^n} = \sum_{n\geqslant 0} b^{-n}e^{int}\\ &= \sum_{n\geqslant 1} b^{-n}e^{int}+1 = h_b(t)+1\end{aligned}$$

  Ainsi, si $|b|>1$, alors $\psi_b(t) = \dfrac{1}{b}\left[h_b(t)+1\right] = \dfrac{1}{b}h_b(t)+\dfrac{1}{b}$

- ⋆ Nous avons démontré que si $\mu\in\mathbb{C}$ et $f\in E_k$ alors $\mu f\in E_k$ et donc, nous avons $\dfrac{1}{b}h_b\in E_1$.

  D'autre part, la fonction constante $\dfrac{1}{b}$ est un élément de E_1 et comme la somme de 2 fonctions de E_1 est encore un élément de E_1, nous avons $\psi_b\in E_1$

- ⋆ De l'identité $\psi_b(t) = \dfrac{1}{b}h_b(t)+\dfrac{1}{b}$, nous tirons :

$$\psi_b(t) = \frac{1}{b}\sum_{p=1}^{+\infty} b^{-p}e^{ipt}+\frac{1}{b} = \frac{1}{b}+\sum_{p=1}^{+\infty} b^{-p-1}e^{ipt} = \sum_{p=0}^{+\infty} b^{-(p+1)}e^{ipt}$$

  Un calcul simple montre que $c_p(\psi_b) = b^{-(p+1)}$ si $p\geqslant 0$ et que $c_p(\psi_b)=0$ si $p<0$

  La série $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} b^{-(p+1)}e^{ipt}$ est donc la série de Fourier de ψ_b lorsque $|b|>1$

$\Rightarrow$ Supposons maintenant que $|b|<1$

- ⋆ Alors, $\dfrac{1}{b-e^{it}} = \dfrac{e^{-it}}{be^{-it}-1} = -e^{-it}\dfrac{1}{1-be^{-it}}$.

  Comme $|b|<1$, nous avons aussi $\left|be^{-it}\right|<1$, et donc, nous pouvons écrire, pour tout $t\in\mathbb{R}$:

$$\frac{1}{1-be^{-it}} = \sum_{p\geqslant 0} b^pe^{-ipt} = 1+\sum_{p\geqslant 1} b^pe^{-ipt} = 1+\sum_{p\geqslant 1}\left(\frac{1}{b}\right)^{-p}e^{-ipt} = 1+h_{\frac{1}{b}}(-t)$$

  D'où $\psi_b(t) = \dfrac{1}{b-e^{it}} = -e^{-it}\left(1+h_{\frac{1}{b}}(-t)\right)$ et nous retrouvons les conditions pour que $\psi_b\in E_1$

- ⋆ Nous avons donc :

$$\psi_b(t) = -e^{-it}\sum_{p\geqslant 0} b^pe^{-ipt} = \sum_{p\geqslant 0} -b^pe^{-i(p+1)t} = \sum_{p\geqslant 1} -b^{p-1}e^{-ipt}$$

  La série de Fourier de ψ_b s'écrivant $\psi_b(t) = \displaystyle\sum_{p\geqslant 0} c_pe^{ipt}+\sum_{p\geqslant 1} c_pe^{-ipt}$ nous avons, pour $p\geqslant 0$, $c_p(\psi_b)=0$ et si $p\leqslant -1$, $c_p(\psi_b) = -b^{p-1}$

Partie 4 : Caractérisation des éléments de E_k par leurs coefficients de Fourier

1. *Soit k un entier strictement positif, et soit $f\in E_k$; par définition des éléments de E_k, il existe alors $M>0$ et $A>0$ tels pour tout $n\in\mathbb{N}$:*

$$\left\|f^{(n)}\right\|_\infty \leqslant M\,(n!)^k A^n$$

(a) *Etablir que, pour tout entier relatif $p \neq 0$, nous avons l'inégalité $|c_p(f)| \leqslant M(n!)^k \left(\frac{A}{|p|}\right)^n$*

Nous avons déjà démontré, dans la partie 1 que pour $p \neq 0$, nous avons l'inégalité

$$|c_p(f)| \leqslant \frac{\|f^{(n)}\|_\infty}{|p|^n}$$

Donc : $|c_p(f)| \leqslant \dfrac{M(n!)^k A^n}{|p|^n} = M(n!)^k \left(\dfrac{A}{|p|}\right)^n$

(b) *A l'aide de la fonction Φ définie pour tout $x > 0$ par $\Phi(x) = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} (n!x^{-n})$, montrer l'existence de deux constantes strictement positives, B et λ telles que, pour tout $p \in \mathbb{Z}$:*

$$|c_p(f)| \leqslant B\exp\left(-\lambda |p|^{\frac{1}{k}}\right)$$

Nous avons démontré que $|c_p(f)| \leqslant M(n!)^k \left(\dfrac{A}{|p|}\right)^n$.

Soit $X = \left(\dfrac{|p|}{A}\right)^{\frac{1}{k}}$. Donc $X^{-n} = \left(\dfrac{A}{|p|}\right)^{\frac{n}{k}}$ et donc $\left(\dfrac{A}{|p|}\right)^n = \left(X^{\frac{-n}{k}}\right)^k$.

Alors, $|c_p(f)| \leqslant M\left[(n!)X^{-n}\right]^k$.

Cette inégalité étant vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ est aussivraie pour $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} (n!)X^{-n} = \Phi(X)$ et donc $|c_p(f)| \leqslant M[\Phi(X)]^k$.

Comme pour tout $X > 0$, nous avons $\Phi(X) \leqslant \beta e^{\frac{-X}{2}}$, nous avons

$$|c_p(f)| \leqslant M\beta^k e^{\frac{-kX}{2}} = M\beta^k e^{\frac{-k|p|^{\frac{1}{k}}}{2A^{\frac{1}{k}}}}$$

En conclusion, et en ayant posé $B = M\beta^k$ et $\lambda = \dfrac{k}{2}A^{\frac{-1}{k}}$, nous avons bien

$$|c_p(f)| \leqslant B\exp\left(-\lambda |p|^{\frac{1}{k}}\right)$$

2. *Inversement soit C une application de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{C}$, ainsi définie :*

$$\begin{cases} C : \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \quad p & \longmapsto & C(p) = c_p \end{cases}$$

pour laquelle il existe deux constantes $B > 0$ et $\lambda > 0$ strictement positives telles que, pour tout $p \in \mathbb{Z}$, nous ayions

$$|c_p| \leqslant B\exp\left(-\lambda |p|^{\frac{1}{k}}\right)$$

(a) *Etablir qu'il existe un élément $f \in \mathcal{C}^\infty(T)$ tel que, pour tout $p \in \mathbb{Z}$ $c_p = c_p(f)$*

Comme $B > 0$ et $\lambda > 0$ et « l'exponentielle l'emportant sur la puissance »

$$\lim_{|p|\to+\infty} p^n \left(B\exp\left(-\lambda |p|^{\frac{1}{k}}\right)\right) = 0$$

C'est à dire $\lim\limits_{|p|\to+\infty} p^n c_p = 0$.

Nous réutilisons, ici, la question 3 de la partie 1 :

Les séries $\sum_{p=0}^{+\infty} c_p e^{ipt}$ et $\sum_{p=1}^{+\infty} c_{-p} e^{-ipt}$ sont normalement convergentes.

D'autre part, la fonction $f(t) = \sum_{p=0}^{+\infty} c_p e^{ipt} + \sum_{p=1}^{+\infty} c_{-p} e^{-ipt}$ est un élément de $\mathcal{C}^{\infty}(T)$ et nous démontrons, facilement que $c_p(f) = c_p$

(b) *Déduire de la partie 2 l'inégalité, valable pour tout couple $(n, p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ d'entiers strictement positifs :*

$$p^n \exp\left(-\frac{\lambda}{2} p^{\frac{1}{k}}\right) \leqslant (n!)^k \left(\frac{2k}{\lambda}\right)^{nk}$$

Il faut donc que nous majorions $p^n \exp\left(-\frac{\lambda}{2} p^{\frac{1}{k}}\right)$ et que nous mettions cette expression sous une forme intéressante et facile à majorer ; ce qui n'est pas gagné !

$\Rightarrow$ Tout d'abord :

$$p^n \exp\left(-\frac{\lambda}{2} p^{\frac{1}{k}}\right) = \left(p^{\frac{1}{k}}\right)^{kn} \left[\exp\left(-\frac{\lambda}{2}\right)\right]^{p^{\frac{1}{k}}} = \left(p^{\frac{1}{k}}\right)^{kn} \left[\exp\left(\frac{\lambda}{2}\right)\right]^{-p^{\frac{1}{k}}} = \left(p^{\frac{1}{k}}\right)^{kn} \left(e^{\frac{\lambda}{2}}\right)^{-p^{\frac{1}{k}}}$$

$\Rightarrow$ Comme $\lambda > 0$, nous avons $e^{\frac{\lambda}{2}} > 1$; posons $a = e^{\frac{\lambda}{2}}$

$\Rightarrow$ Posons, maintenant, $x = p^{\frac{1}{k}}$. Alors : $\left(p^{\frac{1}{k}}\right)^{kn} \left(e^{\frac{\lambda}{2}}\right)^{-p^{\frac{1}{k}}} = x^{kn} a^{-x}$

$\Rightarrow$ Nous avons montré, dans la question 1 de la partie 2 que $x^{kn} a^{-x} \leqslant \left(\frac{kn}{e}\right)^{kn} \left(\frac{1}{\ln a}\right)^{kn}$

- $\star$ Remarquons, dans un premier temps, que $\left(\frac{1}{\ln a}\right)^{kn} = \left(\frac{1}{\ln e^{\frac{\lambda}{2}}}\right)^{kn} = \left(\frac{2}{\lambda}\right)^{kn}$
- $\star$ Donc : $x^{kn} a^{-x} \leqslant \left(\frac{kn}{e}\right)^{kn} \left(\frac{2}{\lambda}\right)^{kn} = \left(\frac{2kn}{e\lambda}\right)^{kn} = \left(\frac{n}{e}\right)^{kn} \left(\frac{2k}{\lambda}\right)^{kn}$
- $\star$ Or, toujours d'après la partie 2 : $\left(\frac{n}{e}\right)^{kn} = \left[\left(\frac{n}{e}\right)^n\right]^k \leqslant \left(\frac{n!}{e}\right)^k \leqslant (n!)^k$

Et donc, nous avons $x^{kn} a^{-x} \leqslant (n!)^k \times \left(\frac{2k}{\lambda}\right)^{kn}$

$\Rightarrow$ Et donc, en synthèse, et en remplaçant x et a par leur valeur :

$$p^n \exp\left(-\frac{\lambda}{2} p^{\frac{1}{k}}\right) \leqslant (n!)^k \left(\frac{2k}{\lambda}\right)^{nk}$$

(c) *En déduire une majoration de $\left\|f^{(n)}\right\|_{\infty}$ et montrer que $f \in E_k$*

Classiquement, nous avons $f^{(n)}(t) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} (ip)^n c_p e^{ipt}$ et donc $\left|f^{(n)}(t)\right| \leqslant \sum_{p=-\infty}^{+\infty} |p|^n |c_p|$

Or, par hypothèses, nous avons $|c_p| \leqslant B \exp\left(-\lambda |p|^{\frac{1}{k}}\right)$ et donc $|p|^n |c_p| \leqslant B |p|^n \exp\left(-\lambda |p|^{\frac{1}{k}}\right)$

Or, $\exp\left(-\lambda |p|^{\frac{1}{k}}\right) = \left(\exp\left(-\frac{\lambda}{2} |p|^{\frac{1}{k}}\right)\right)^2 = \exp\left(-\lambda |p|^{\frac{1}{k}}\right) \times \exp\left(-\lambda |p|^{\frac{1}{k}}\right)$.

Et donc $|p|^n |c_p| \leqslant B |p|^n \exp\left(-\lambda |p|^{\frac{1}{k}}\right) = B |p|^n \exp\left(-\lambda |p|^{\frac{1}{k}}\right) \times \exp\left(-\lambda |p|^{\frac{1}{k}}\right)$.

Nous avons démontré que $p^n \exp\left(-\frac{\lambda}{2} p^{\frac{1}{k}}\right) \leqslant (n!)^k \left(\frac{2k}{\lambda}\right)^{nk}$ et donc :

$$|p|^n |c_p| \leqslant B (n!)^k \left(\frac{2k}{\lambda}\right)^{nk} \times \exp\left(-\frac{\lambda}{2} |p|^{\frac{1}{k}}\right)$$

Et donc :

$$\left|f^{(n)}(t)\right| \leqslant B\,(n!)^k \left(\frac{2k}{\lambda}\right)^{nk} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{\lambda}{2}\,|p|^{\frac{1}{k}}\right)$$

La série $\displaystyle\sum_{p=-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{\lambda}{2}\,|p|^{\frac{1}{k}}\right)$ est une série convergente ; en posant $S = \displaystyle\sum_{p=-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{\lambda}{2}\,|p|^{\frac{1}{k}}\right)$, nous avons :

$$\left|f^{(n)}(t)\right| \leqslant BS\,(n!)^k \left(\frac{2k}{\lambda}\right)^{nk} = M\,(n!)^k A^n$$

Où $M = BS$ et $A = \left(\dfrac{2k}{\lambda}\right)^k$.

Donc $f \in E_k$

On vient donc de montrer que $f \in E_k$ si et seulement si il existe $B > 0$ et $\lambda > 0$ tels que $|c_p(f)| \leqslant B \exp\left(-\lambda\,|p|^{\frac{1}{k}}\right)$