Chapitre 12

Espace probabilisable, Espace probabilisé

12.1 Bref historique du calcul des probabilités

Quand le calcul des probabilités n'existait pas

Depuis toujours les hommes ont essayé de prévoir le temps, ont fait de la divination, ont aussi pratiqué les jeux de hasard. Ils ont en quelque sorte fait des probabilités sans le savoir.
Citons pour exemple des relevés de type statistique fournis par les recensements dans l'empire romain, ou sous Guillaume le Conquérant ; quant aux jeux de hasard, pensons à la Bible et les "sorts sacrés", ou encore à l'Egypte où l'on jouait aux dés, dès -3500 ! On peut penser que les premiers dés avaient tendance à être pipés et les résultats, considérés comme une manifestation des dieux, n'avaient pas assez de régularité pour donner naissance à un calcul.
Cependant c'est de l'observation des jeux de dés que, en Occident, vers le XVème siècle, émergera peu à peu le "calcul des probabilités".

Naissance du Calcul des probabilités

Trois mathématiciens, italiens principalement, nous ont laissé leurs études : **Tartaglia** (1499 - 1577) s'intéresse à des problèmes de jeux de dés et de dénombrement comme le nombre de manières d'asseoir 10 personnes à 10 places différentes.

Cardan (1501 - 1576) dans un livre posthume "De ludo aleae" étudie le problème des partis, qu'il ne résoud pas, mais il donne un certain nombre de règles qui constituent les premiers éléments du calcul des probabili tés.

Galilée (1564 - 1642) explique pourquoi, lorsqu'on jette simultanément 3 dés, la somme 9 a moins de chances d'apparaître que 10, bien que ces deux nombres se décomposent tout deux de 6 manières di fférentes en la somme de 3 nombres de 1 à 6.
Ces hommes de la Renaissance découvrent que les jeux de hasard sont soumis à l'ordre des nombres ; la calcul des probabili tés est né.

La "géométrie du hasard"

En 1654, en France, **Pascal** (1623 - 1662) et **Fermat** (1601 - 1665) échangent des lettres sur le problème du chevalier de Méré et la règle des partis *(comment interrompre un jeu avant son terme en se partageant la mise de manière équitable en fonction des résultats partiels déjà obtenus)*. Ils résolvent ce problème de deux façons différentes ; et Pascal surtout saisit l'importance de sa découverte : le hasard est "géométrisable", ce qui semble a priori paradoxal. **Pascal** et **Fermat** font intervenir entre autres la notion "d'espérance de gain" (ce que Pascal, ironique, utilisera dans l'argument du Pari). Les successeurs de Pascal, dont Huyghens dans "De Ratiocinüs in ludo aleae", expliciteront cette notion et résoudront la plupart des problèmes de jeux de l'époque.

Les successeurs de Pascal

Cette nouvelle science bien que née en même. temps que d'autres inventions prestigieuses comme la géométrie analytique ou le calcul différentiel, se développe cependant dès la fin du XVIIème siècle, et est employée à la résolution de problèmes pratiques, comme des problèmes statistiques. Mais il reste encore beaucoup à faire.
Jacques Bernouilli (1654 - 1705) dans "Ars conjectandi" (publié en 1713) démontre de façon très rigoureuse la loi faible des grands nombres dans le jeu de pile ou face. [La fréquence moyenne d'apparition d'un résultat dans une répétition d'épreuves tend vers la probabilité d'observer cette apparition dans une épreuveJ. Il reprend les travaux de Huyghens et fournit une théorie sur les combinaisons et permutations en distinguant les combinaisons avec et sans répétition ou avec des restrictions supplémentaires d'ordre ou de catégorie.
Abraham De Moivre (1667 - 1754) précise, dans le théorème qui porte son nom, le théorème de Bernouilli en donnant une évaluation asymptotique de la loi de l'écart entre la probabilité "a priori" et la probabilité "a posteriori". [A cette occasion, ayant besoin de factorielles dont la croissance est très rapide il publie, avec **Stirling** (1692 - 1730), une formule donnant une valeur approchée de n : pour n très grandJ.
On peut alors faire de l'estimation statistique et construire des modèles probabilistes de phénomènes expérimentaux.

Le XVIIIème siècle

Ce siècle verra une évolution du calcul vers une "probabilisation" du monde qui pourra mener parfois à des dérapages.
Thomas Bayes (1702 - 1761) réfléchit au problème de l'estimation des probabilités des évènements naturels et dans "Thomas Bayes essay towards solving a problem in the doctrin of chances" (publié en 1763) il cherche la probabilité que la probabilité d'un évènement soit comprise entre deux bornes fixées à l'avance, et il définit la "règle de Bayes". A une loi subjective, il associe une loi de probabilité mathématique, pour remonter au réel. Le problème de la valeur pratique du résultat se pose et Bayes a sans doute senti confusément les dangers ; certains successeurs utiliseront parfois abusivement la méthode de Bayes, sans problème de conscience. Parallèlement, **Daniel Bernouilli** (1700 - 1782) fonde la "mécanique statistique" et construit un modèle de diffusion entre deux enceintes, qui sera complété plus tard par **Laplace** ; **Buffon** (1707 - 1788) s'intéresse à "l'arithmétique morale" c'est-à-dire la description probabiliste des sociétés humaines ; **Condorcet** (1743 - 1794) poussé par **Turgot**, tentera aussi d'utiliser les p'robabilités dans les questions d'arithmétique morale mais n'arrivera pas vraiment à créer la "science sociale". Les probabilités sont aussi utilisées pour justi fier des hypothèses. Buffon, par exemple, observe que 6 planètes du soleil tournent dans le même sens, alors que la probabilité pour qu'il en soit ainsi n'est que de $\dfrac{1}{2^6}$;il en déduit qu'un tel événement n'est pas dû au hasard mais à une cause bien précise eL suppose que ces 6 planètes sont issues d'une collision entre le soleil et une.. comète.
Il faut cependant noter que la propagation de ces nouvelles notions reste assez lente à ses débuts'car D'Alembert (1717 - 1783) dans son article de l'Encyclopédie "croix ou pile" en 1754 ne rejette pas l'idée qu'il y ait 2 chances sur 3 d'obtenir au moins 1 croix en lançant 2 fois de suite une pièce. Cette erreur sera ensuite rectifiée par Condorcet dans l'article "probabilité" en 1765.

L'influence de Laplace

Pierre Simon Laplace (1749 - '1827) est sans doute le plus marquant dans le domaine des probabilités. Dans "théorie analytique des probabilités" (1812) , ouvrage monumental, il donne la formule "nombre de cas favorables sur nombre de cas possibles" (empruntée sans doute à ses prédécesseurs) ; il en connaît les limites et traite aussi de cas beaucoup plus généraux. Il étend le théorème de Moivre et la formule de Stirling en créant la "méthode de Laplace". [Il s'agit de la loi normale connue aussi sous le nom de loi de Gauss, qui la complèteraJ. Il développe un nombre considérable d'applications. C'est aussi l'époque de la probabilité des erreurs, très importante pour les mesures physiques et astronomiques, que Gauss reprendra en inventant la "méthode des moindres carrés".

Dans le sillage de Laplace, **Poisson** (1781- 1840) publie "recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile" et nous est surtout connu pour sa "loi des petits nombres".. L'influence de Laplace est grande et ses-énoncés les plus contestables seront tenus longtemps pour acquis. Lui-même et ses élèves sont convaincus que le calcul des probabilités est une méthode scientifique pour pallier nos ignorances et corriger nos illusions.
Cependant certains déjà comme **Bienaymé** (1796 - 1878) réagissent à cette exploitation parfois contestable des théories de Laplace, sans beaucoup de succès. En France, le calcul des probabilités se trouve peu à peu discrédité, et comme dans d'autres domaines à l'époque, c'est à l'étranger que les recherches se poursuivent, sur des bases plus rigoureuses.

Les écoles anglaises et russes

Georges Boole (1815 - 1864) innove totalement, avec l'algèbre des évènements. Par ailleurs, sous l'influence de **Darwin** (1809 - 1882), les mathématiciens anglais (Galton, Weldon, Pearson, Yule, Student, ...) fondent la statistique moderne.
A Saint Petersbourg, à la même époque, **Tchebycheff** (182'1 - 1894) énonce une loi des grands nombres très générale et en donne une nouvelle démonstration (inégalité de Bienaymé - Tchebycheff). Ses élèves dont **Markov** (1856 - 1922), au début du XXème siècle, donneront la forme presque définitive du théorème de Moivre.

Les nouvelles théories

La fin du XIXème siècle est marquée par l'extraordinaire évolution de la mécanique statistique avec **Clausius** (1822 - 1888), **Maxwell** (1831 - 1879), **Boltzmann** (1844 - 1906), enfin **Einstein** (1879 - 1955) et le mouvement Brownien (1905). Les probabilités sont presque considérées comme une branche de la physique, mais très vite les possibilités du calcul sont dépassées et les mathématiciens "purs" vont faire des découvertes qui bouleverseront la "géométrie du hasard". Il était en effet impossible d'élaborer des bases solides du calcul des probabilités tant que la théorie de l'intégrale n'avait pas atteint un niveau de maturité suffisant. Citons **Borel** (1871 - 1956), **Lebesque** (1875 - 1941), enfin **Kolmogorov** (1903-1987) qui en 1933 propose une axiomatique du calcul des probabilités. S'appuyant sur la théorie de la mesure, il a donné un cadre mathématique précis pour le calcul des probabilités permettant ainsi à d'autres mathématiciens, au premier rang desquels **Paul Lévy**, de développer l'analyse stochastique.
Alors ce calcul devient à part entière une branche des mathématiques et se développe de façon exponentielle...
Le problème philosophique de la distinction entre probabilité-théorie mathématique et probabilité-description du monde, se posant peut-être de façon encore plus précise.