

12.2 Espace fondamental

12.2.1 Introduction

- A quoi tu penses ?
- Je pense que, si en ouvrant un dictionnaire au hasard, on tombait sur le mot « hasard », ce serait un miracle, alors que si on tombait sur le mot « miracle », ce serait un hasard.
H. Le Tellier, *Les amnésiques n'ont rien vécu d'inoubliable*.

Il peut paraître irréaliste et prétentieux de vouloir, de par sa nature même, quantifier le hasard. C'est pourtant ce qui a conduit à la notion de Probabilité.

Nous allons dans ce cours introduire ce concept mathématique, dont la puissance **permettra de modéliser** d'innombrables situations où le hasard intervient, dépassant ainsi largement le cadre restreint des jeux de dés et tirages de cartes. La **modélisation probabiliste est fondamentale** dans tous les domaines d'applications, qu'ils soient issus des sciences dures ou des sciences humaines, de la physique (*mouvement de particules, formation de gouttes d'eau*), de la météorologie, de la biologie (*mutation du génôme*), de l'écologie (*déplacement des oiseaux migrateurs pendant la grippe aviaire*), de la médecine (*traitement d'images*), de l'économie (*marchés boursiers*), ou de la sociologie.

Ce cours introduit toutes les notions de base de la théorie des probabilités et permet d'acquérir le raisonnement probabiliste. La théorie des probabilités ne peut se construire axiomatiquement qu'en utilisant la théorie de la mesure et de l'intégration, ce qui en constitue une des difficultés principales. Nous n'en donnerons que les éléments nécessaires à sa bonne compréhension, sans exiger de prérequis dans ce domaine. (*Mais nous remarquerons que la théorie des Probabilités constitue un très bel exemple d'application de la théorie de l'intégration*).

Soulignons que les probabilités sont en lien étroit avec la vie quotidienne. À ce titre, elles s'appuient sur un passage du concret à l'abstrait : **la modélisation**, ce qui les rend difficiles, mais palpitantes. L'apprentissage de ce raisonnement probabiliste sera développé dans le cours.

Le mot **Hasard** est un mot d'origine arabe : « az-zahr », le dé. Il est apparu en français pour signifier tout d'abord un jeu de dés, puis plus généralement un événement non prévisible, et par extension le mode d'apparition de ce type d'événement.

Dans la vie quotidienne, chacun est maintenant familier avec le mot et même le concept de probabilité : probabilité qu'il pleuve la semaine suivante, probabilité d'avoir une fille aux yeux bleus, probabilité de gagner au loto ou celle d'être dans la bonne file au supermarché.

Les assurances fixent le contrat d'assurance-vie d'un individu de 20 ans, grâce à une estimation de sa probabilité de survie à 80 ans. Dans de nombreux domaines, les probabilités interviennent : les entreprises cherchent à calculer le besoin probable de leurs produits dans le futur, les médecins cherchent à connaître les probabilités de succès de différents protocoles de soin, les compagnies pharmaceutiques doivent estimer les probabilités d'apparitions d'effets secondaires pour leurs médicaments.

Un exemple récent et spectaculaire est celui de l'utilisation des probabilités en économie, et en particulier en théorie aléatoire de la finance. On peut citer également d'autres domaines d'applications extrêmement importants et en pleine expansion, aussi variés que le calcul de structures, la théorie du signal, l'optimisation et le contrôle des systèmes

12.2.2 Premier exemple : Lancer de dés ; Alea jacta est

Lorsque vous lancez deux dés, vous ne pouvez savoir à l'avance quelles sont les faces qui vont apparaître. Il est certain que deux faces apparaîtront à l'issue de l'expérience, mais on ne peut les prédire avec certitude.

On dit que le résultat est aléatoire (*du latin "alea" qui signifie justement dé*). Alea jacta est, les dés en sont jetés.

12.2.3 Définition d'événement aléatoire

Un phénomène est dit aléatoire si, reproduit maintes fois dans des conditions identiques, il se déroule chaque fois différemment de telle sorte que le résultat de l'expérience change d'une fois sur l'autre de manière imprévisible.

Exemple 1 :

1. Si le résultat de l'expérience aléatoire consiste à la détermination du sexe d'un nouveau né, l'ensemble des résultats possibles est donné par :

$$\Omega = \{F, G\}$$

où G désigne que l'enfant est un garçon et F , une fille.

2. Si l'issue de l'expérience est l'ordre d'arrivée d'une course entre 7 chevaux ayant les positions de départ, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, alors

$$\Omega = \{\text{Toutes les permutations de } (1, 2, \dots, 7)\}$$

c'est à dire 7! possibilités d'arrivées au total

12.2.4 Où donc vont se nicher les probabilités ?

Les files d'attente

Postez vous à un guichet de péage et comptez les véhicules qui se présentent à ce guichet pendant un intervalle de temps $[0, T]$. Le résultat de l'expérience est à priori un nombre entier : on prendra donc pour espace des épreuves, l'ensemble \mathbb{N} des entiers positifs ou nuls ; un exemple d'événement est : "on observe au plus n voitures", représenté par le sous ensemble $\{0, 1, \dots, n\} \subset \mathbb{N}$. Une loi de probabilité souvent utilisée dans ces cas est la loi de Poisson :

$$\mathbb{P}(n) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$$

λ étant une constante caractérisant la fréquentation de la gare de péage pendant un intervalle de temps $[0, T]$; souvent, on écrit

$$\mathbb{P}(n) = e^{-\lambda_T} \frac{\lambda_T^n}{n!}$$

précisant ainsi que le paramètre λ dépend de l'intervalle de temps $[0, T]$. On a alors

$$\mathbb{P}(\{0, 1, \dots, n\}) = e^{-\lambda_T} \left(1 + \lambda_T + \frac{\lambda_T^2}{2!} + \dots + \frac{\lambda_T^n}{n!} \right)$$

Processus d'Erhenfest

En physique ou chimie, on considère un gaz confiné dans un cube à deux compartiments. Comment va se répartir ce gaz dans les deux compartiments ? Pour comprendre le phénomène, on le modélise à l'aide d'urnes et de boules. On considère donc $2N$ boules réparties dans 2 urnes A et B ; à chaque instant entier, on choisit "au hasard" une urne, puis, une fois l'urne choisie, on en tire une boule qu'on met dans l'autre urne. Le problème consiste à étudier l'évolution du système, les boules modélisant les molécules de gaz. Cette étude entre dans le cadre d'étude des chaînes de Markov et des marches aléatoires.

La gestion des stocks

L'état d'un stock à l'état $n + 1$ dépend de l'état du stock à l'état n et des départs et arrivées entre l'instant n et $n + 1$

12.2.5 Description générale d'une expérience aléatoire

La caractéristique d'une expérience aléatoire est que l'issue de celle-ci n'est pas entièrement déterminée par les conditions expérimentales. Pour modéliser une telle expérience, on commence donc par préciser l'ensemble Ω de toutes les issues, à priori possibles. La loi de l'expérience ne sera pas, à la différence du cas déterministe, une règle (*exprimée par une équation, par une formule*) permettant de prévoir avec certitude l'issue de l'expérience, mais une règle (appelée loi de probabilité) déterminant les "chances" que l'issue de l'expérience appartienne à tel ou tel sous-ensemble des issues possibles à priori.

La modélisation complète d'une expérience aléatoire comporte donc :

- La définition précise de l'ensemble Ω de toutes les issues à priori possibles. On appelle Ω **espace des issues** ou **espace fondamental**
- La définition d'un catalogue \mathbb{F} d'événements qui sont des sous-ensembles de Ω : une issue ω réalise l'événement $A \in \mathbb{F}$ si $\omega \in A$. Deux événements ne peuvent se réaliser simultanément s'ils sont deux sous-ensembles disjoints de Ω ; on dit qu'ils sont **incompatibles**
- La donnée d'une **loi de probabilité** \mathbb{P} qui, à chaque événement $A \in \mathbb{F}$ associe sa probabilité $\mathbb{P}(A) \in [0; 1]$

Dans l'évaluation des chances des événements, il est usuel de supposer que si deux événements A et B sont incompatibles, on a $\mathbb{P}(A \text{ ou } B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$. En outre, on a l'habitude d'attribuer la probabilité 1 (100% de chances) à l'événement certain Ω (qui est réalisé quel qu'en soit l'issue)

Dictionnaire utile entre langage ensembliste et langage probabiliste

Langage probabiliste	Traduction en langage ensembliste
Résultat de l'épreuve	Élément ω de Ω
Événement A	Partie A de Ω
L'événement A est réalisé	$\omega \in A$
Événement impossible	\emptyset
L'événement A implique l'événement B	$A \subset B$
Événement contraire de A	\bar{A}
Événement A et événement B	$A \cap B$
A et B sont incompatibles	$A \cap B = \emptyset$
Événement A ou événement B	$A \cup B$

Ainsi, par exemple, « L'événement A implique l'événement B » signifie que si $\omega \in A$, alors $\omega \in B$. Les probabilités peuvent être vues comme une continuation, un prolongement, du cours de logique vu en L_0 .

12.2.6 Définition

Soit Ω un ensemble quelconque et $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des parties de Ω .

On appelle **tribu** sur Ω , la donnée d'un sous-ensemble \mathcal{F} de $\mathcal{P}(\Omega)$ dont les éléments sont appelés « événements » tels que :

1. $\Omega \in \mathcal{F}$
2. $A \in \mathcal{F} \implies \bar{A} \in \mathcal{F}$
3. **Stabilité par réunion dénombrable :**
Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'événements de \mathcal{F} alors, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}$

La donnée de $\{\Omega, \mathcal{F}\}$ s'appelle **espace probabilisable**

On appelle **espace probabilisable fini**, une paire $\{\Omega; \mathcal{F}\}$ où Ω est un ensemble fini, et \mathcal{F} une tribu sur Ω

Remarque 1 :

Remarques importantes

1. Les événements sont bien des sous-ensembles de Ω

2. La propriété « **Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'événements de \mathcal{F} alors, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}$** » est évidemment vraie si la suite d'événements est finie ; nous avons donc aussi :

$$A \in \mathcal{F} \text{ et } B \in \mathcal{F} \implies A \cup B \in \mathcal{F}$$

3. Lorsque Ω est un ensemble fini, nous prendrons toujours comme tribu \mathcal{F} , l'ensemble des parties de Ω . Autrement dit, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$
4. Le point de vue adopté dans ce cours est le point de vue issu de l'axiomatic ensemble, très proche de la logique et de l'algèbre de Boole.
5. Quelle est la différence entre algèbre de Boole et tribu ?

Une algèbre de Boole est une partie de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans laquelle nous avons défini 2 opérations binaires (ici, la réunion \cup et l'intersection \cap), et une opération unaire : $A \mapsto \bar{A}$.

La définition de tribu montre qu'elle est stable par l'opération de réunion ; la proposition 12.2.7 montre qu'une tribu est stable par intersection.

Une tribu est donc une algèbre de Boole ; ce qu'une tribu a en plus, c'est la stabilité par réunion dénombrable. Une tribu est aussi appelée σ -algèbre de Boole.

Exemple 2 :

On lance 2 dés discernables¹

Soient A l'événement $A = \{\text{Les 2 numéros obtenus sont pairs}\}$ et $B = \{\text{La somme des numéros obtenus est paire}\}$

Il est clair que si A est réalisé, alors B l'est aussi, c'est à dire que si $\omega \in A$, alors $\omega \in B$, et donc $A \subset B$

Comment formaliser ces ensembles ?

* $\Omega = \{(i, j) \text{ où } 1 \leq i \leq 6 \text{ et } 1 \leq j \leq 6\}$. Evidemment $\text{Card } \Omega = 36$

* $A = \{(i, j) \in \Omega \text{ où } i \text{ est pair et } j \text{ est pair}\}$.

* $B = \{(i, j) \in \Omega \text{ où } i + j \text{ est pair}\}$.

Nous aurons l'occasion d'en voir plusieurs autres dans les exercices.

12.2.7 Proposition : stabilité par intersection dénombrable

Soient $\{\Omega, \mathcal{F}\}$ un espace probabilisable et $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements de \mathcal{F} alors, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}$

Démonstration

La clé de la démonstration est la loi de Morgan donnée, dans le cas fini par :

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B} \text{ et } \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

Nous allons démontrer la loi de Morgan dans le cas infini dénombrable

1. **Démontrons que $\overline{\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bar{A}_n$ (Loi de Morgan dans le cas infini dénombrable)**

(a) Soit $x \in \overline{\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n}$; alors $x \notin \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ et donc, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $x \notin A_p \iff x \in \bar{A}_p$

Et donc $x \in \bigcup_{p \in \mathbb{N}} \bar{A}_p$

Nous venons de montrer que si $x \in \overline{\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n}$, alors $x \in \bigcup_{p \in \mathbb{N}} \bar{A}_p$

Nous avons donc $\overline{\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n} \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bar{A}_n$.

1. Par exemple un dé bleu et un dé rouge ; de toutes façons, pour mieux modéliser une expérience, il faudra toujours différencier les dés

(b) Réciproquement, supposons $x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{A_n}$; il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x \in \overline{A_{n_0}} \iff x \notin A_{n_0}$, et donc $x \notin \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$, c'est à dire $x \in \overline{\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n}$

Ainsi, si $x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{A_n}$, alors $x \in \overline{\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n}$

Nous avons donc : $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{A_n} \subset \overline{\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n}$

(c) Nous avons $\overline{\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n} \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{A_n}$ et $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{A_n} \subset \overline{\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n}$, nous pouvons donc conclure que :

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{A_n} = \overline{\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n}$$

2. **D'après les axiômes de tribu**, si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n \in \mathcal{F}$, alors $\overline{A_n} \in \mathcal{F}$

Ensuite, $(\overline{A_n})_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite dénombrable d'éléments de \mathcal{F} , et donc, toujours par les axiômes de tribu, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{A_n} \in \mathcal{F}$, c'est à dire, par l'égalité démontrée précédemment $\overline{\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n} \in \mathcal{F}$

Par passage au complémentaire, nous avons bien $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}$

Ce que nous voulions

Remarque 2 :

1. En fait, nous avons $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}$ équivalent à $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{A_n} \in \mathcal{F}$ (toujours par la loi de Morgan)²

2. La propriété « **Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'événements de \mathcal{F} alors, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}$ » est évidemment vraie si la suite d'événements est finie; nous avons donc aussi :**

$$A \in \mathcal{F} \text{ et } B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$$

3. Que veut dire $\omega \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$?

Très simplement que, **pour tout** $n \in \mathbb{N}$, $\omega \in A_n$, c'est à dire, en langage formalisé :

$$\left(\omega \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) \iff ((\forall n \in \mathbb{N}) (\omega \in A_n))$$

4. De la même manière, que veut dire $\omega \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$?

Tout aussi simplement **qu'il existe** $n \in \mathbb{N}$ tel que $\omega \in A_n$, c'est à dire, en langage formalisé :

$$\left(\omega \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) \iff ((\exists n_0 \in \mathbb{N}) (\omega \in A_{n_0}))$$

12.2.8 Conséquences directes de la définition de tribu

Soit Ω un ensemble quelconque, et \mathcal{F} tribu sur Ω . Alors :

1. $\emptyset \in \mathcal{F}$
2. $A \in \mathcal{F}$ et $B \in \mathcal{F} \implies A \setminus B \in \mathcal{F}$ et $A \Delta B \in \mathcal{F}$

2. Démontrez le en exercice

Démonstration

Cette démonstration est élémentaire

- Il faut commencer par définir $A \setminus B$ et $A \Delta B$;
 $\rightarrow A \setminus B = A \cap \bar{B}$
 $\rightarrow A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$
 Le $A \Delta B$ correspond, en logique, au « **ou exclusif** »
- D'après les propriétés des tribus, si $\Omega \in \mathcal{F}$, alors $\bar{\Omega} \in \mathcal{F}$; comme $\bar{\Omega} = \emptyset$, on a le résultat
- D'après les lois de Morgan et 12.2.7, $A \cap B = \overline{\bar{A} \cup \bar{B}}$; il suffit ensuite d'appliquer les axiômes de tribu.
- $A \setminus B = A \cap \bar{B}$ et on applique les axiômes ; même problème avec $A \Delta B$

Exemple 3 :**Exemples de tribu**

- Si Ω est un ensemble fini, $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des parties de Ω est une tribu sur Ω . C'est la tribu naturelle que nous allons utiliser le plus souvent, surtout lorsque nous travaillerons les espaces probabilisés finis.
- L'ensemble $B = \{\emptyset; \Omega\}$ est une tribu ; c'est la tribu grossière.
- Soit $A \subset \Omega$; alors, $B = \{\emptyset; \Omega; A; \bar{A}\}$ est une tribu sur Ω (c'est une tribu adaptée au jeu de « pile ou face »)
- Soient \mathcal{F}_1 une tribu sur Ω et \mathcal{F}_2 une seconde tribu sur Ω , alors $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ est une tribu sur Ω .
- Soit $B \subset \Omega$; on appelle $\sigma(B)$ la tribu engendrée par B ; c'est la plus petite tribu contenant B ; en fait, $\sigma(B)$ est l'intersection de toutes les tribus contenant B
 Nous avons, en particulier, $B \in \sigma(B)$
- La tribu des boréliens de \mathbb{R}
 Soit \mathcal{O} l'ensemble des intervalles ouverts de \mathbb{R} $\sigma(\mathcal{O})$ est la tribu des boréliens de \mathbb{R} ; nous avons
 $[a; b] \in \sigma(\mathcal{O})$ car $[a; b] = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left] a - \frac{1}{n}; b + \frac{1}{n} \right[$ (très intéressant à démontrer ; utiliser pour cela le cours sur les nombres réels et les suites)
 Petite histoire : **Boréliens**, en hommage au mathématicien français Emile Borel

Exercice 1 :

Soient Ω un ensemble quelconque, \mathcal{F}_1 une tribu sur Ω et \mathcal{F}_2 une seconde tribu sur Ω , montrer que $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ est une tribu sur Ω .

Exercice 2 :

Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq b$. Montrer que $[a; b] = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left] a - \frac{1}{n}; b + \frac{1}{n} \right[$

Remarque 3 :

- Les opérations pour lesquelles une tribu \mathcal{F} est stable (intersection, complémentation, réunion) **correspondent à des opérations logiques** (et, non, ou).
 Il est donc naturel d'utiliser la notion de tribu (cf cours d'algèbre de Boole et de logique de L_0)
- Ω est l'ensemble des épreuves, ou « **événement certain** »
- \emptyset est l'**événement impossible**
- Soit $A \in \mathcal{F}$, alors A est un **événement** ; \bar{A} est l'**événement contraire de A** ;
- $\omega \in A$ est un **événement élémentaire**.
- Soient $A \in \mathcal{F}$ et $B \in \mathcal{F}$, alors $A \cap B$ est la **conjonction** de A et B .
- Si $A \cap B = \emptyset$, on dit que les deux événements sont **incompatibles**.
- Soient $A \in \mathcal{F}$ et $B \in \mathcal{F}$, alors $A \cup B$ est la **disjonction** de A et B