12.3 Espace probabilisé

12.3.1 Définition de probabilité

Soit $\{\Omega; \mathcal{F}\}$ un espace probabilisable.
On appelle probabilité sur $\{\Omega; \mathcal{F}\}$, une application $\mathbf{P}$ *ou fonction d'ensembles* de $\mathcal{F}$ dans l'intervalle $[0, 1]$ telle que :

1. $\mathbf{P}(\Omega) = 1$
2. Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements de $\mathcal{F}$ deux à deux disjoints c'est à dire :
$$(m \neq n) \Rightarrow A_m \cap A_n = \emptyset$$
alors, $\mathbf{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{P}(A_n)$ (Somme d'une série)

La donnée du triplet $\{\Omega; \mathcal{F}; \mathbf{P}\}$ définit un espace probabilisé
Si Ω est un ensemble fini, la donnée du triplet $\{\Omega; \mathcal{F}; \mathbf{P}\}$ définit un espace probabilisé fini.

Remarque 4 :

1. La propriété
Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements de $\mathcal{F}$ deux à deux disjoints alors,
$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{P}(A_n)$$
est évidemment vraie si la suite d'événements est finie ; nous avons donc aussi [3] :
$$(\forall A \in \mathcal{F})(\forall B \in \mathcal{F})(A \cap B = \emptyset \Longrightarrow \mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B))$$
2. Plus généralement :
Si $(A_n)_{0\leqslant n\leqslant p}$ est une suite d'événements de $\mathcal{F}$ deux à deux disjoints c'est à dire :
$$(m \neq n) \Longrightarrow A_m \cap A_n = \emptyset$$
alors, $\mathbf{P}\left(\bigcup_{n=0}^{p} A_n\right) = \sum_{n=0}^{p} \mathbf{P}(A_n)$
3. Supposons $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$ fini
   (a) Il est beaucoup plus simple, et c'est ce qu'on utilise de prendre $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$
   (b) Si on veut construire une probabilité $\mathbf{P}$ sur $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, il suffit de connaître, pour tout $\omega_i \in \Omega$, $\mathbf{P}(\{\omega_i\}) = p_i$, et nous devons avoir :
$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(\{\omega_i\}) = \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$
   (c) Lorsque Ω est fini, pour $A \subset \Omega$, nous avons la probabilité de l'événement A :
$$\mathbf{P}(A) = \sum_{\omega_k \in A} \mathbf{P}(\omega_k)$$

3. Faire le lien avec les cardinaux : Si $A \cap B = \emptyset$, alors Card $(A \cup B) =$ Card $(A) +$ Card (B)

12.3.2 Théorème

Soit $\{\Omega;\mathcal{F};\mathbf{P}\}$ un espace probabilisé ; soient $A\in\mathcal{F}$ et $B\in\mathcal{F}$. Alors

1. $\mathbf{P}\left(\bar{A}\right)=1-\mathbf{P}\left(A\right)$
2. $\mathbf{P}\left(\emptyset\right)=0$
3. $A\subset B\Longrightarrow\mathbf{P}\left(A\right)\leqslant\mathbf{P}\left(B\right)$
4. $A\subset B\Longrightarrow\mathbf{P}\left(B\setminus A\right)=\mathbf{P}\left(B\right)-\mathbf{P}\left(A\right)$
5. $\mathbf{P}\left(A\cup B\right)=\mathbf{P}\left(A\right)+\mathbf{P}\left(B\right)-\mathbf{P}\left(A\cap B\right)$

Démonstration

La démonstration est élémentaire [4]

1. Nous avons : $\Omega=A\cup\bar{A}$; de plus, $\emptyset=A\cap\overline{A}$; donc : $\mathbf{P}\left(A\cup\overline{A}\right)=\mathbf{P}\left(A\right)+\mathbf{P}\left(\overline{A}\right)=1$
   Ce que nous voulions
2. Comme $\emptyset=\overline{\Omega}$, c'est fini !!
3. Supposons $A\subset B$; alors,
   $$B=\Omega\cap B=\left(A\cup\overline{A}\right)\cap B=\left(A\cap B\right)\cup\left(\overline{A}\cap B\right)=A\cup\left(\overline{A}\cap B\right)=A\cup\left(B\setminus A\right)$$
   Donc $\mathbf{P}\left(B\right)=\mathbf{P}\left(A\right)+\mathbf{P}\left(B\setminus A\right)$ et $\mathbf{P}\left(B\setminus A\right)=\mathbf{P}\left(B\right)-\mathbf{P}\left(A\right)$
   De plus, comme $\mathbf{P}\left(B\setminus A\right)\geqslant 0$, on a le résultat
4. $A\cup B=\left(A\setminus B\right)\cup\left(A\cap B\right)\cup\left(B\setminus A\right)$
   Donc, $\mathbf{P}\left(A\cup B\right)=\mathbf{P}\left(A\setminus B\right)+\mathbf{P}\left(A\cap B\right)+\mathbf{P}\left(B\setminus A\right)$
   Or, $A=\left(A\setminus B\right)\cup\left(A\cap B\right)$, et $B=\left(A\cap B\right)\cup\left(B\setminus A\right)$
   D'où $\mathbf{P}\left(B\right)=\mathbf{P}\left(A\cap B\right)+\mathbf{P}\left(B\setminus A\right)$, et, de même, $\mathbf{P}\left(A\right)=\mathbf{P}\left(A\cap B\right)+\mathbf{P}\left(A\setminus B\right)$, d'où, en remplaçant, on obtient :
   $$\mathbf{P}\left(A\cup B\right)=\mathbf{P}\left(A\right)-\mathbf{P}\left(A\cap B\right)+\mathbf{P}\left(A\cap B\right)+\mathbf{P}\left(B\right)-\mathbf{P}\left(A\cap B\right)$$
   C'est à dire $\mathbf{P}\left(A\cup B\right)=\mathbf{P}\left(A\right)+\mathbf{P}\left(B\right)-\mathbf{P}\left(A\cap B\right)$

Remarque 5 :

1. Si nous savons que $\mathbf{P}\left(\Omega\right)=1$, Ω peut ne pas être le seul événement A tel que $\mathbf{P}\left(A\right)=1$
   Si $A\subset\Omega$ est tel que $\mathbf{P}\left(A\right)=1$, A est dit : « **événement presque certain** »
2. De même, si nous sommes sûrs que $\mathbf{P}\left(\emptyset\right)=0$, ce n'est peut-être pas le seul événement A tel que $\mathbf{P}\left(A\right)=0$; si $A\subset\Omega$ est tel que $\mathbf{P}\left(A\right)=0$ A est alors dit : « **événement presque impossible** »
3. Si $A\subset B$, et si $\mathbf{P}\left(A\right)=\mathbf{P}\left(B\right)$, on n'a pas non plus forcément $A=B$

Exemple 4 :

Tarzan offre à Jane 2 livres $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$. La probabilité pour que Jane aime le livre $\mathcal{B}_1$ est 0,6 et pour que Jane aime le livre $\mathcal{B}_2$ est 0,4. La probabilité pour que Jane aime les deux livres est 0,2. Quelle est la probabilité pour que Jane n'aime ni l'un ni l'autre ?

Pour simplifier, appelons B_i l'événement $\{$Jane aime le livre $\mathcal{B}_i\}$
Alors, $\mathbf{P}\left(B_1\right)=0,6$ et $\mathbf{P}\left(B_2\right)=0,4$ et $\mathbf{P}\left(B_1\cap B_2\right)=0,2$
L'événement $\{$Jane n'aime ni le livre $\mathcal{B}_\infty$ ni le livre $\mathcal{B}_\in\}$ peut se traduire par :

$$\{\text{Jane n'aime ni le livre } \mathcal{B}_1 \text{ni le livre } \mathcal{B}_2\}=\overline{B_1}\cap\overline{B_2}$$

Nous devons donc calculer $\mathbf{P}\left(\overline{B_1}\cap\overline{B_2}\right)$. Or, d'après les lois de Morgan, $\overline{B_1}\cap\overline{B_2}=\overline{B_1\cup B_2}$
et $\mathbf{P}\left(\overline{B_1}\cap\overline{B_2}\right)=1-\mathbf{P}\left(B_1\cup B_2\right)$
$\mathbf{P}\left(B_1\cup B_2\right)=\mathbf{P}\left(B_1\right)+\mathbf{P}\left(B_2\right)-\mathbf{P}\left(B_1\cap B_2\right)=0,6+0,4-0,2=0,8.$
Donc, $\mathbf{P}\left(\overline{B_1}\cap\overline{B_2}\right)=0,2$
Il a bien de la chance, Tarzan !!

4. Pour bien comprendre cette démonstration, et celles qui vont suivre, il ne faut surtout pas hésiter à faire des schémas

12.3.3 Proposition

Soit $\{\Omega; \mathcal{F}; \mathbf{P}\}$ un espace probabilisé
Alors, pour toute **suite croissante** $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements de $\mathcal{F}$, c'est à dire tels que $A_n \subset A_{n+1}$, nous avons : $\mathbf{P}\left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{P}(A_n)$

Démonstration

Soit donc $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante d'éléments de F.
On peut déjà remarquer, d'après le résultat 12.3.2 que la suite numérique $(\mathbf{P}(A_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante, majorée *(tout simplement par 1)* et donc convergente. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{P}(A_n)$ existe bien.
On construit la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'ensembles par : $F_0 = A_0$, $F_1 = A_1 \backslash A_0$, $F_2 = A_2 \backslash A_1$ et, plus généralement, par $F_n = A_n \setminus A_{n-1}$
C'est à dire que nous avons : $F_n = A_n \cap \overline{A_{n-1}}$

Cette construction nous amène donc deux choses : $\begin{cases} (m \neq n) \Rightarrow (F_m \cap F_n = \emptyset) \\ (\forall n \in \mathbb{N}) \left(\bigcup\limits_{k=0}^{n} F_k = \bigcup\limits_{k=0}^{n} A_k = A_n\right) \end{cases}$

Et nous avons donc, $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n$

Des axiômes de probabilités, nous obtenons $\mathbf{P}\left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n\right) = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{P}(F_n)$, c'est à dire $\mathbf{P}\left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{P}(F_n)$

Des cours sur les séries nous avons $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{P}(F_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \mathbf{P}(F_k)$

Or, $\sum\limits_{k=0}^{n} \mathbf{P}(F_k) = \mathbf{P}(F_0) + \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbf{P}(F_k) = \mathbf{P}(A_0) + \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbf{P}(A_k \setminus A_{k-1})$
Comme, puisque $A_k \subset A_{k+1}$, $\mathbf{P}(A_{k+1} \setminus A_k) = \mathbf{P}(A_{k+1}) - \mathbf{P}(A_k)$, nous avons

$$\sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}(F_k) = \mathbf{P}(A_0) + \sum_{k=1}^{n} (\mathbf{P}(A_k) - \mathbf{P}(A_{k-1})) = \mathbf{P}(A_n)$$

C'est à dire : $\mathbf{P}\left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{P}(F_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \mathbf{P}(F_k) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{P}(A_n)$
Q.E.D.

Remarque 6 :

1. Très prosaïquement, si $(A_n)_{0\leqslant n\leqslant p}$ est une suite finie et croissante d'événements de $\mathcal{F}$, c'est à dire tels que $A_n \subset A_{n+1}$, nous avons : $\mathbf{P}\left(\bigcup\limits_{n=0}^{p} A_n\right) = \mathbf{P}(A_p)$
2. De la même manière, si $(A_n)_{0\leqslant n\leqslant p}$ est une suite finie et décroissante d'événements de $\mathcal{F}$, c'est à dire tels que $A_{n+1} \subset A_n$, nous avons : $\mathbf{P}\left(\bigcup\limits_{n=0}^{p} A_n\right) = \mathbf{P}(A_0)$
3. Soit $\{A_n; n \in \mathbb{N}\}$ une famille dénombrable quelconque d'éléments de $\mathcal{F}$, alors

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{P}(A_n)$$

12.3.4 Proposition

Soit $\{\Omega; \mathcal{F}; \mathbf{P}\}$ un espace probabilisé
Alors, les propriétés suivantes sont équivalentes :

$\Longrightarrow$ Pour toute suite croissante $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements de $\mathcal{F}$, c'est à dire tels que $A_n \subset A_{n+1}$, nous avons : $\mathbf{P}\left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{P}(A_n)$

$\Longrightarrow$ Pour toute suite décroissante $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements de $\mathcal{F}$, c'est à dire tels que $A_{n+1} \subset A_n$, nous avons : $\mathbf{P}\left(\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{P}(A_n)$

Démonstration

1. **Supposons que, pour toute suite croissante $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements de $\mathcal{F}$, nous avons : $\mathbf{P}\left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{P}(A_n)$**
   Nous allons démontrer que, pour toute suite décroissante $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements de $\mathcal{F}$, nous avons : $\mathbf{P}\left(\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{P}(A_n)$
   (a) Soit donc $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements de $\mathcal{F}$, décroissante. Démontrons que la suite $\left(\overline{A_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
   Soit donc $x \in \overline{A_n}$; comme $x \notin A_n$, et comme $A_{n+1} \subset A_n$, $x \notin A_{n+1}$, c'est à dire $x \in \overline{A_{n+1}}$ et donc $\overline{A_n} \subset \overline{A_{n+1}}$ et la suite $\left(\overline{A_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante
   (b) Nous avons donc $\mathbf{P}\left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(\overline{A_n}\right) = 1 - \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{P}(A_n)$
   (c) Par les lois de Morgan, nous avons $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n = \overline{\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}}$, donc, $\mathbf{P}\left(\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = 1 - \mathbf{P}\left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}\right)$
   (d) Ainsi :
   $$\mathbf{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = 1-\mathbf{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}\right) = 1-\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(\overline{A_n}\right) = 1-\left(1 - \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(A_n)\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(A_n)$$
   Ce que nous voulions
2. **Supposons maintenant que, pour toute suite décroissante $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements de $\mathcal{F}$, nous avons : $\mathbf{P}\left(\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{P}(A_n)$**
   Nous allons démontrer que, pour toute suite croissante $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements de $\mathcal{F}$, nous avons : $\mathbf{P}\left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{P}(A_n)$
   (a) Soit donc $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements de $\mathcal{F}$, croissante. Démontrons que la suite $\left(\overline{A_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   Soit donc $x \in \overline{A_{n+1}}$; comme $x \notin A_{n+1}$, et comme $A_n \subset A_{n+1}$, $x \notin A_n$, c'est à dire $x \in \overline{A_n}$ et donc $\overline{A_{n+1}} \subset \overline{A_n}$ et la suite $\left(\overline{A_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante
   (b) Nous avons donc $\mathbf{P}\left(\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(\overline{A_n}\right) = 1 - \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{P}(A_n)$
   (c) Par les lois de Morgan, nous avons $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n = \overline{\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}}$, donc, $\mathbf{P}\left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = 1 - \mathbf{P}\left(\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}\right)$
   (d) Ainsi :
   $$\mathbf{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = 1-\mathbf{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}\right) = 1-\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(\overline{A_n}\right) = 1-\left(1 - \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(A_n)\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(A_n)$$
   Ce que nous voulions

Il y a donc équivalence entre les deux propositions

Remarque 7 :

Soit $\{A_n; n \in \mathbb{N}\}$, une famille quelconque d'éléments de $\mathcal{F}$

1. Si $F_n = \bigcup_{p=0}^{n} A_p$, alors la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante d'éléments de $\mathcal{F}$.

   En effet, nous avons $F_{n+1} = F_n \cup A_{n+1}$ et donc $F_n \subset F_{n+1}$

   D'après 12.3.3, nous avons $\mathbf{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(F_n)$, tout en remarquant que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$

2. De manière parallèle, si $G_n = \bigcap_{p=0}^{n} A_p$, alors la suite $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante d'éléments de $\mathcal{F}$.

   En effet, nous avons $G_{n+1} = G_n \cap A_{n+1}$ et donc $G_{n+1} \subset G_n$

   D'après 12.3.3 et 12.3.4, nous avons $\mathbf{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(G_n)$, tout en remarquant que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$

3. Soit $F_n^1 = \bigcup_{m\geqslant n} A_m$, alors la suite $\left(F_n^1\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante d'éléments de $\mathcal{F}$.

   En effet, nous avons $F_n^1 = \bigcup_{m\geqslant n+1} A_m \cup A_n = F_{n+1}^1 \cup A_m$ et donc $F_{n+1}^1 = \bigcup_{m\geqslant n+1} A_m \subset F_n^1$

   D'après 12.3.4, nous avons $\mathbf{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n^1\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(F_n^1\right)$

4. De manière similaire, soit $G_n^1 = \bigcap_{m\geqslant n} A_m$, alors la suite $\left(G_n^1\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante d'éléments de $\mathcal{F}$.

   En effet, nous avons $G_{n+1}^1 = \bigcap_{m\geqslant n+1} A_m = A_{n+1} \cap A_{n+2} \cup \cdots$ et $G_n^1 = \bigcap_{m\geqslant n} A_m = A_n \cap A_{n+1} \cap A_{n+2} \cap \cdots = A_n \cap G_{n+1}^1$ et donc $G_n^1 \subset G_{n+1}^1$

   D'après 12.3.3, nous avons $\mathbf{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_n^1\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(G_n^1\right)$

D'où les définitions ci-après

12.3.5 Définition

Soit $\{A_n; n \in \mathbb{N}\}$, une famille quelconque d'éléments de $\mathcal{F}$

1. On écrit $\sup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$
2. On écrit $\inf_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$
3. On écrit $\limsup_{n\to+\infty} A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(\bigcup_{m\geqslant n} A_m\right)$
4. On écrit $\liminf_{n\to+\infty} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(\bigcap_{m\geqslant n} A_m\right)$

Remarque 8 :

1. Nous avons, évidemment, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\inf_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset A_n \subset \sup_{n\in\mathbb{N}} A_n$

2. Il faut se mettre en tête que $\limsup\limits_{n\to+\infty} A_n$ et $\liminf\limits_{n\to+\infty} A_n$ sont des événements de $\mathcal{F}$

3. Que veut dire $\omega \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \left(\bigcup\limits_{m\geqslant n} A_m\right)$, c'est à dire : que veut dire que $\omega \in \limsup\limits_{n\to+\infty} A_n$?

   Très simplement, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $m \geqslant n$ tel que $\omega \in A_m$
   Ce qui veut dire qu'il existe une infinité d'événements A_n tels que $\omega \in A_n$ *(il y a une infinité d'événements qui se réalisent)*

4. Que veut dire $\omega \in \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \left(\bigcap\limits_{m\geqslant n} A_m\right)$ c'est à dire $\omega \in \liminf\limits_{n\to+\infty} A_n$?

   Très simplement, qu'il existe un rang $n \in \mathbb{N}$ à partir duquel, pour tout $m \geqslant n$ $\omega \in A_m$
   Ce qui veut dire qu'à partir d'un rang $n \in \mathbb{N}$, tous les événements A_n sont tels que $\omega \in A_n$ *(tous les événements A_n sont réalisés)*

Exercice 3 :

A l'aide de la réunion, de l'intersection et de la complémentation, écrire les événements suivants :

1. L'un au moins des événements A, B et C est réalisé.
2. Un et un seul des événements A ou B se réalise
3. A et B se réalisent, mais pas C
4. Tous les événements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se réalisent
5. Il y a une infinité d'événements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui se réalisent.
6. L'un au moins des événements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se réalise
7. Seul un nombre fini d'événements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se réalisent
8. Il y a une infinité d'événements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui ne se réalisent pas
9. Tous les événements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se réalisent à partir d'un certain rang.

12.3.6 Proposition

Soit $\{A_n; n \in \mathbb{N}\}$, une famille quelconque d'éléments de $\mathcal{F}$; alors :

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset \liminf_{n\to+\infty} A_n \subset \limsup_{n\to+\infty} A_n \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(\bigcap_{m\geqslant n} A_m\right) \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(\bigcup_{m\geqslant n} A_m\right) \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$$

Démonstration

1. **Montrons que** $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \left(\bigcap\limits_{m\geqslant n} A_m\right)$

   Soit $x \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$; alors, il existe un $n \in \mathbb{N}$ (ici, $n = 0$) tel que $x \in \bigcap\limits_{m\geqslant n} A_m$.

   Donc, $x \in \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \left(\bigcap\limits_{m\geqslant n} A_m\right)$

2. **Montrons, maintenant que** $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\left(\bigcap_{m\geqslant n} A_m\right) \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}}\left(\bigcup_{m\geqslant n} A_m\right)$

   Soit $\omega \in \liminf\limits_{n\to+\infty} A_n$, c'est à dire que $\omega \in \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\left(\bigcap_{m\geqslant n} A_m\right)$

   Il existe alors $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que $\omega \in \displaystyle\bigcap_{m\geqslant n_0} A_m$, c'est à dire que pour tout $m \in \mathbb{N}$, si $m \geqslant n_0$ alors $\omega \in A_m$.
   Soit $n \in \mathbb{N}$ et posons $p = \max\{n; n_0\}$; Alors, puisque $p \geqslant n_0$, $\omega \in A_p$.

   Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\omega \in A_p$ et donc $\omega \in \displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\left(\bigcup_{m\geqslant n} A_m\right)$

3. **Pour terminer, montrons que** $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\left(\bigcup_{m\geqslant n} A_m\right) \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$

   Soit $\omega \in \displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\left(\bigcup_{m\geqslant n} A_m\right)$
   Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $m \geqslant n$ tel que $\omega \in A_m$.
   Et donc, en posant $n = 0$, il existe $p \geqslant 0$ tel que $\omega \in A_p$ et donc $\omega \in \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ et l'inclusion est démontrée.

La proposition est donc démontrée. Ce que nous voulions.

Remarque 9 :

Soit $\{\Omega; \mathcal{F}; \mathbf{P}\}$ un espace probabilisé et $\{A_n; n \in \mathbb{N}\}$, une famille quelconque d'éléments de $\mathcal{F}$. Alors, d'après la proposition précédente et les propriétés 12.3.2, nous avons :

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leqslant \mathbf{P}\left(\liminf_{n\to+\infty} A_n\right) \leqslant \mathbf{P}\left(\limsup_{n\to+\infty} A_n\right) \leqslant \mathbf{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)$$

La proposition ci-après est encore plus précise

12.3.7 Proposition

Soit $\{\Omega; \mathcal{F}; \mathbf{P}\}$ un espace probabilisé et $\{A_n; n \in \mathbb{N}\}$, une famille quelconque d'éléments de $\mathcal{F}$. Alors :

$$\mathbf{P}\left(\liminf_{n\to+\infty} A_n\right) \leqslant \liminf_{n\to+\infty} \mathbf{P}(A_n) \leqslant \limsup_{n\to+\infty} \mathbf{P}(A_n) \leqslant \mathbf{P}\left(\limsup_{n\to+\infty} A_n\right)$$

Démonstration

1. On peut considérer $(\mathbf{P}(A_n))_{n\in\mathbb{N}}$ comme une suite numérique de nombres réels bornée, et donc, classiquement, nous avons :
$$\liminf_{n\to+\infty} \mathbf{P}(A_n) \leqslant \limsup_{n\to+\infty} \mathbf{P}(A_n)$$

2. Il faut donc montrer que $\mathbf{P}\left(\liminf\limits_{n\to+\infty} A_n\right) \leqslant \liminf\limits_{n\to+\infty} \mathbf{P}(A_n)$ et $\limsup\limits_{n\to+\infty} \mathbf{P}(A_n) \leqslant \mathbf{P}\left(\limsup\limits_{n\to+\infty} A_n\right)$

   (a) **Montrons que** $\mathbf{P}\left(\liminf\limits_{n\to+\infty} A_n\right) \leqslant \liminf\limits_{n\to+\infty} \mathbf{P}(A_n)$

Rappelons, tout d'abord que $\liminf\limits_{n\to+\infty} A_n = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}\left(\bigcap\limits_{m\geqslant n} A_m\right)$, et qu'en posant $B_n = \bigcap\limits_{m\geqslant n} A_m$, nous construisons une suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante.

En effet, $B_{n+1} = \bigcap\limits_{m\geqslant n+1} A_m$ et $B_n = \bigcap\limits_{m\geqslant n} A_m = A_n \cap \bigcap\limits_{m\geqslant n+1} A_m = A_n \cap B_{n+1}$ et donc $B_n \subset B_{n+1}$

D'après la proposition 12.3.3, nous avons $\mathbf{P}\left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{P}(B_n)$, c'est à dire :

$$\mathbf{P}\left(\liminf_{n\to+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(\bigcap_{m\geqslant n} A_m\right)$$

Or, $B_n = \bigcap\limits_{m\geqslant n} A_m \subset A_n$, et donc $\mathbf{P}(B_n) \leqslant \mathbf{P}(A_n)$, et par passage à la limite :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(B_n) \leqslant \liminf_{n\to+\infty} \mathbf{P}(A_n)$$

Et, en conclusion : $\mathbf{P}\left(\liminf\limits_{n\to+\infty} A_n\right) \leqslant \liminf\limits_{n\to+\infty} \mathbf{P}(A_n)$

(b) **Démontrons, maintenant que** $\limsup\limits_{n\to+\infty} \mathbf{P}(A_n) \leqslant \mathbf{P}\left(\limsup\limits_{n\to+\infty} A_n\right)$

Soit $B_n = \bigcup\limits_{m\geqslant n} A_m$. Alors, la suite d'événements $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante.

En effet, $B_{n+1} = \bigcup\limits_{m\geqslant n+1} A_m$ et donc $B_n = A_n \cup B_{n+1}$, c'est à dire que nous avons $B_{n+1} \subset B_n$

D'après les propositions 12.3.3 et 12.3.4, nous avons $\mathbf{P}\left(\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{P}(B_n)$

Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $A_n \subset B_n$, nous avons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(A_n) \leqslant \mathbf{P}(B_n)$. Cette inégalité étant conservée par le passage à la limite, nous avons aussi :

$$\liminf_{n\to+_infty} \mathbf{P}(A_n) \leqslant \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(B_n)$$

C'est à dire $\limsup\limits_{n\to+\infty} \mathbf{P}(A_n) \leqslant \mathbf{P}\left(\limsup\limits_{n\to+\infty} A_n\right)$

Ce que nous voulions

La proposition est démontrée

Exercice 4 :

Pour $\Omega = \mathbb{R}$, on considère les familles $\{A_n; n \in \mathbb{N}\}$, d'éléments de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, les boréliens de $\mathbb{R}$

1. $A_n = \left[\dfrac{-1}{n}; 3 + \dfrac{1}{n}\right]$
2. $A_n = \left[-2 - (-1)^n ; 2 + (-1)^n\right]$

Dans ces deux cas, donner $\limsup\limits_{n\to+\infty} A_n$

12.3.8 Lemme de Borel-Cantelli

Soit $\{\Omega; \mathcal{F}; \mathbf{P}\}$ un espace probabilisé et $\{A_n; n \in \mathbb{N}\}$, une famille quelconque d'éléments de $\mathcal{F}$.
On suppose que la série numérique $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{P}(A_n)$ est convergente.
Alors $\limsup A_n$ est un ensemble négligeable, c'est à dire :

$$\mathbf{P}(\limsup A_n) = 0 \Longleftrightarrow \mathbf{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\left(\bigcup_{m\geqslant n} A_m\right)\right) = 0$$

Démonstration

Une première remarque consiste à écrire que si la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{P}(A_n)$ converge, alors $\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(A_n) = 0$

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$.

Nous avons toujours $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(\bigcup_{m\geqslant n} A_m\right) \subset \bigcup_{m\geqslant n_0} A_m$, et donc, alors :

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(\bigcup_{m\geqslant n} A_m\right)\right) \leqslant \mathbf{P}\left(\bigcup_{m\geqslant n_0} A_m\right)$$

Or, $\mathbf{P}\left(\bigcup_{m\geqslant n_0} A_m\right) \leqslant \sum_{m\geqslant n_0} \mathbf{P}(A_m)$, et cette inégalité est vraie pour tout $n_0 \in \mathbb{N}$.

L'expression $\sum_{m\geqslant n_0} \mathbf{P}(A_m)$ apparaît comme le reste de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{P}(A_n)$ qui est convergente. Donc $\lim_{n_0\to+\infty} \sum_{m\geqslant n_0} \mathbf{P}(A_m) = 0$

L'inégalité $\mathbf{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(\bigcup_{m\geqslant n} A_m\right)\right) \leqslant \mathbf{P}\left(\bigcup_{m\geqslant n_0} A_m\right)$ étant vraie pour tout n_0, nous en déduisons que $\mathbf{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(\bigcup_{m\geqslant n} A_m\right)\right) = 0$, c'est à dire $\mathbf{P}(\limsup A_n) = 0$

Remarque 10 :

Ce qui veut dire que la probabilité pour qu'une infinité d'événements A_n se réalisent est nulle, ou alors **P**-presque sûrement, seuls un nombre fini d'événements se réalisent.