12.4 A quoi sert cette formalisation ? Exemples de probabilité

Si les mathématiciens se donnent tant de peine pour faire une formalisation rigoureuse, c'est bien pour modéliser les cas réels, approcher la réalité, et, surprise, pour simplifier les problèmes

12.4.1 Problèmes d'échantillonnage

Beaucoup de problèmes élémentaires de probabilités concernent une expérience aléatoire consistant à tirer un « échantillon » dans un ensemble donné *(appelé souvent « population »)*. La modélisation la plus courante est le tirage de boules de couleurs diverses et variées dans des urnes.
Définissons précisément cette terminologie :
Soit S une population $S = \{s_1, \dots, s_n\}$; on appelle :

1. Echantillon de taille r avec replacement, toute application de l'ensemble $\{1, \dots, r\}$ dans S. Si on appelle Ω_1 l'ensemble des échantillons de taille r avec replacement, Card $\Omega_1 = n^r$
2. Echantillon de taille $r \leqslant n$ sans replacement, toute injection de l'ensemble $\{1, \dots, r\}$ dans S. Si on appelle Ω_2 l'ensemble des échantillons de taille r avec replacement, Card $\Omega_2 = \dfrac{n\,!}{(n-r)\,!} = \mathrm{A}_n^r$
3. Sous population de taille $r \leqslant n$ tout sous ensemble de S de cardinal (ou d'ordre) r. Si on appelle Ω_3 l'ensemble des sous-population de taille r de S, Card $\Omega_3 = \dfrac{n\,!}{r\,!\,(n-r)\,!} = \dfrac{\mathrm{A}_n^r}{r\,!} = \mathrm{C}_n^r = \dbinom{n}{r}$

On remarque donc que nous tombons, dans ces cas, dans des problèmes de dénombrement.

12.4.2 Différents énoncés d'un même problème

Nous utilisons très souvent le pittoresque langage des boules et des urnes, mais, c'est souvent le même espace fondamental qui est mis en œuvre qui admet une grande variété d'interprétations pratiques.

Combien y-a-til de façons de placer r boules dans n urnes ?
Chaque urne peut avoir entre 0 et r boules. Donc :

$$\Omega = \{\text{Ensemble des applications de } \{1, \cdots, r\} \text{ dans } \{1, \cdots, n\}\}$$

Et Card $\Omega = n^r$

Nous listons, ci-après, un nombre de situations dans lesquelles les énoncés sont très différents. Toutes sont cependant, abstraitement, équivalents à la question de placer r boules dans n urnes.

1. **Les anniversaires**
   Si r personnes sont dans une pièce, les configurations possibles des dates anniversaires correspondent aux différentes applications de $\{1, \cdots, r\}$ dans $\{1, \cdots, 365\}$, c'est à dire, aux placements de r boules dans 365 urnes.
2. **Les accidents**
   Si nous devons classer r accidents en fonction des jours de la semaine, c'est comme ranger r boules dans 7 urnes.
3. **En biologie**
   Lorsque les cellules de la rétine sont exposées à la lumière, les photons jouent le role des boules et les cellules sont les urnes de notre modèle.
4. **L'ascenceur**
   Un ascenceur de r personnes desservant n étages ; les personnes jouent le rôle des boules et les étages celui des urnes
5. **Le jeu de dés**
   Les sorties possibles d'un lancer de r dés, correspondent au placement de r boules dans $n = 6$ urnes
6. **Répartition hommes-femmes**
   Dans un groupe de r personnes, la répartion hommes-femmes correspond à r boules dans $n = 2$ urnes.

7. **Répartition des fautes de frappe**
   r fautes d'impression dans n pages correspond à r boules dans n urnes.

12.4.3 Le jeu de pile ou face

Soit Ω un ensemble quelconque et $A \subset \Omega$; soit $\mathcal{F} = \left\{\emptyset; \Omega; A; \overline{A}\right\}$; on sait que c'est une tribu.
Soit $\mathbf{P} : \mathcal{F} \longrightarrow [0,1]$, une probabilité telle que $\mathbf{P}\left(A\right) = p$; alors, $\mathbf{P}\left(\overline{A}\right) = q$, et nous avons $p + q = 1$; c'est le jeu de « pile ou face » ou la situation « échec ou succès »

Remarque 11 :

Si la pièce est équilibrée, $p = q = \dfrac{1}{2}$
En fait, le jeu de " pile ou face " peut se généraliser facilement par : « **un événement se réalise** » ou « **un événement ne se réalise pas** »

12.4.4 Le lancer de dés

On jette deux dés et on s'intéresse à l'événement : « La somme amenée est paire ». Comment formaliser cette situation ?

1. On prend comme espace fondamental : $\Omega = \{(i,j) \text{ où } 1 \leqslant i \leqslant 6 \text{ et } 1 \leqslant j \leqslant 6\}$.
   Tout se passe comme si nous avions différencié les deux dés.
2. En posant

$$P = \left\{ \begin{array}{l} (1,1)\ ;\ (1,3)\ ;\ (1,5)\ ;\ (2,2)\ ;\ (2,4)\ ;\ (2,6) \\ (3,1)\ ;\ (3,3)\ ;\ (3,5)\ ;\ (4,2)\ ;\ (4,4)\ ;\ (4,6) \\ (5,1)\ ;\ (5,3)\ ;\ (5,5)\ ;\ (6,2)\ ;\ (6,4)\ ;\ (6,6) \end{array} \right\}$$

   ou, autre forme plus concise $P = \{(i,j) \text{ tel que } i+j \text{ est pair}\}$
   On construit la tribu : $\mathcal{F} = \left\{\Omega\,;\,\emptyset\,;\,P\,;\,\overline{P}\right\}$
3. Quelle probabilité choisir ?
   Celle induite par l'expérience ; ici, il y a la même probabilité d'obtenir l'un ou l'autre couple (on dit qu'il y a équiprobabilité)
   Comme Card $\Omega = 36$, pour tout $(i,j) \in \Omega$, $\mathbf{P}\left(\{(i,j)\}\right) = \dfrac{1}{36}$ et

$$\mathbf{P}\left(P\right) = \frac{\text{Card } P}{\text{Card } \Omega} = \frac{\text{cas favorables}}{\text{cas possibles}} = \frac{1}{2}$$

Exercice 5 :

Dans les conditions de l'exemple 12.4.4 précédent, quelle est la probabilité pour que la somme amenée soit égale à 7 ?

12.4.5 Définition importante : l'équiprobabilité

Soit $\{\Omega; \mathcal{F}; \mathbf{P}\}$ un espace probabilisé fini.
On note : $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ et nous choisissons $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$.

1. Si on veut construire une probabilité $\mathbf{P}$ sur $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, il suffit de connaître $\mathbf{P}(\{\omega_i\}) = p_i$, et nous devons avoir :
$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(\{\omega_i\}) = \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$
Dans ces cas, $\mathbf{P}(A) = \sum_{\omega_A \in A} \mathbf{P}(\omega_A)$
2. Un cas particulier est le cas donc le cas d'équiprobabilité où, pour tout i, $\mathbf{P}(\{\omega_i\}) = p = \dfrac{1}{n}$; on dit donc que les événements sont équiprobables.
3. Autrement dit : nous avons, pour tout $\omega \in \Omega$, $\mathbf{P}(\{\omega\}) = \dfrac{1}{\text{Card } \Omega}$, et si $A \in \mathcal{F}$, nous avons $\mathbf{P}(A) = \dfrac{\text{Card } A}{\text{Card } \Omega}$

La locution « tirer au hasard » signifie que l'on a un espace probabilisé de ce type

Exemple 5 :

1. **Le jet d'une pièce n fois**
C'est le cas où on jette une pièce un nombre fini de fois ; si P désigne l'événement défini par l'apparition de la face « pile », et F, celle de '« face », l'espace fondamental est donné par les n-uplets $(P, P, F, F, \ldots, P, F)$; autrement dit, Ω est le produit cartésien $\Omega = \{P, F\}^n$

   On lance une pièce 3 fois. Quelle est la probabilité pour qu'on ait au moins 2 fois FACE

   L'espace fondamental est : $\Omega = \{P, F\}^3$ et $\text{Card } \Omega = 2^3 = 8$.
   Si A est l'événement :
$$A = \{\text{On a au moins 2 fois FACE}\} = \{(F, F, F) ; (F, F, P) ; (F, P, F) ; (P, F, F)\}$$
   D'où $\mathbf{P}(A) = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$
2. *On considère un jeu de 52 cartes ; on en tire au hasard, 3 cartes. Quelle est la probabilité d'avoir au moins un as ?*

   (a) Il faut d'abord définir Ω ;
$$\Omega = \{\text{Les sous ensembles de 3 cartes prises parmi les 52}\}$$
   Et on a alors, $\text{Card } \Omega = \text{C}_{52}^3$
   On prend 3 cartes parmi les 48 qui ne sont pas des as.

   (b) L'événement :
$$\{\text{Avoir au moins un as}\}$$
   est le contraire de
$$\{\text{N'avoir aucun as}\}$$
   Il faut déterminer Card ({N'avoir aucun as}).

   Or, Card ({N'avoir aucun as}) $= \text{C}_{48}^3$, donc, $\mathbf{P}(\{\text{N'avoir aucun as}\}) = \dfrac{\text{C}_{48}^3}{\text{C}_{52}^3} \simeq 0,782$.

   Donc, $\mathbf{P}(\{\text{Avoir au moins un as}\}) = 1 - \dfrac{\text{C}_{48}^3}{\text{C}_{52}^3} \simeq 1 - 0,782 = 0,218$

Exercice 6 :

On tire « au hasard » 5 cartes dans un jeu de 32.

1. Soit A l'événement : $A = \{$sur les 5 cartes tirées, 2 et 2 seulement sont des cœurs$\}$. Calculer $\mathbf{P}(A)$
2. Soit B l'événement : $B = \{$sur les 5 cartes tirées, au moins une carte est un trèfle$\}$. Calculer $\mathbf{P}(B)$
3. Soit C l'événement : $C = \{$le tirage donne 2 cœurs et 2 trèfles$\}$. Calculer $\mathbf{P}(C)$

Exercice 7 :

Sur 100 personnes ayant posé leur candidature à un poste de direction du service d'ingénierie d'une grande société industrielle, 55 ont une expérience en surveillance de projets dépassant le million d'euros (A), 35 ont un diplôme de 2ème cycle en ingénierie (B) et 10 ont à la fois l'expérience et le diplôme requis.

1. Schématiser cette situation à l'aide d'un diagramme de Venn.
2. Quelle est la probabilité qu'un candidat, choisi au hasard, ait uniquement le diplôme de 2ème cycle ? Identifier d'abord en notation ensembliste l'événement correspondant.
3. Quelle est la probabilité qu'un candidat ait, soit l'expérience en surveillance de projets de plus d'un million d'euros soit le diplôme de 2ème cycle ?
4. Quelle est la probabilité qu'une personne choisie au hasard parmi les candidats n'ait ni l'expérience en surveillance requise, ni diplôme de 2ème cycle en ingénierie