12.5 Cas où Ω est dénombrable infini

C'est le cas d'expériences infinies ; par exemple, on répète la même expérience indéfiniment.

Si $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n, \ldots\} = (\omega_n)_{n \geqslant 1}$, pour que $\mathbf{P}$ soit une probabilité, il faut donc que

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbf{P}(\{\omega_n\}) = 1$$

La dernière expression est la somme d'une série numérique

12.5.1 Exemples de de probabilité sur un ensemble dénombrable infini

1. La loi de Poisson sur $\mathbb{N}$
   On appelle loi de Poisson une loi définie pour tout $k \in \mathbb{N}$ par :
$$\mathbf{P}(\{k\}) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k\,!} \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}$$
2. Loi géométrique sur $\mathbb{N}$
   On appelle loi géométrique de paramètre r, une loi définie pour tout $k \in \mathbb{N}$ par :
$$\mathbf{P}(\{k\}) = r(1-r)^k \text{ où } 0 < r < 1$$

Remarque 12 :

1. **La loi de Poisson est bien une probabilité ;** en effet :
$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \mathbf{P}(\{k\}) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k\,!} = e^{-\lambda} \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{\lambda^k}{k\,!}$$
   Or, nous avons : $\displaystyle\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{\lambda^k}{k\,!} = e^{\lambda}$; ce qui montre que $\displaystyle\sum_{k \in \mathbb{N}} \mathbf{P}(\{k\}) = e^{-\lambda}e^{\lambda} = 1$
2. **La loi géométrique est bien une loi de probabilité** ; en effet,
$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \mathbf{P}(\{k\}) = \sum_{k \in \mathbb{N}} r(1-r)^k = r \sum_{k \in \mathbb{N}} (1-r)^k$$
   Or, nous savons que si $|x| < 1$, alors $\displaystyle\sum_{k \in \mathbb{N}} x^k = \frac{1}{1-x}$; donc
$$r \sum_{k \in \mathbb{N}} (1-r)^k = \frac{r}{1-(1-r)} = \frac{r}{r} = 1$$

Exemple 6 :

On lance un dé équilibré à 6 faces indéfiniment. A_n est l'événement :

$$A_n = \{\text{La face numérotée 6 apparaît pour la première fois au } n\text{-ième lancer }\}$$

L'événement A_n est réalisé lorsque, pour les $n-1$ premiers lancers, apparaissent toute autre face que le 6, et le 6 apparaissant pour la première fois au lancer numéro n.

Donc, $\mathbf{P}(A_n) = \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \times \frac{1}{6} = \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{n-1} \times \frac{1}{6}$; la loi géométrique modélise un temps d'attente.

Vérifions que $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbf{P}(A_n) = 1$

Nous avons :

$$\begin{aligned}
\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \mathbf{P}\left(A_n\right) = & \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \mathbf{P}\left(A_n\right) = \sum_{n\geqslant 1} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \times \frac{1}{6} \\
= & \frac{1}{6} \sum_{n\geqslant 0} \left(\frac{5}{6}\right)^{n} \\
= & \frac{1}{6} \times \frac{1}{1-\frac{5}{6}} \\
= & \frac{1}{6} \times \frac{1}{\frac{1}{6}} = 1
\end{aligned}$$

Ce que nous voulions