12.6 Exercices complémentaires

12.6.1 Sur le dénombrement

Il n' y a pas ce classique chapitre sur le dénombrement que l'on voit dans tous les cours de probabilité élémentaire. Nous l'avons vu dans le premier chapitre de L_0. Je vous propose ces quelques exercices pour vous replonger dans ce bain d'eau froide qu'est le dénombrement

Exercice 8 :

Combien peut-on former de numéros d'au plus 4 chiffres choisis parmi $\{1, 2, 3, 4\}$? Parmi ces numéros, combien ont-ils tous leurs chiffres distincts ?

Exercice 9 :

On considère un jeu de 52 cartes, composées de 4 couleurs ; il y a 13 cartes par couleur (c'est le jeu habituel !!). On appelle « main » , tout sous-ensemble de 13 cartes

1. Combien y-a-t-il de mains en tout ?
2. Combien y-a-t-il de mains contenant les 4 as ? Au moins un as ?
3. Combien y-a-t-il de mains ne contenant aucun cœur ? 3 carreaux au plus ?

Exercice 10 :

Une ville de 100 000 habitants compte trois journaux locaux :
— Le journal I
— Le journal II
— Le journal III

Le tableau suivant donne la proportion des lecteurs pour ces journaux :

Journaux	Proportions [en %]
I	10
II	30
III	05
I et II	8
I et III	2
II et III	4
I et II et III	1

1. Trouver le nombre de personnes ne lisant qu'un seul journal
2. Trouver le nombre de personnes qui lisent au moins deux journaux
3. Combien de personnes ne lisent aucun journal ?
4. II est un quotidien du soir, tandis que I et III sortent le matin.
   (a) Combien de personnes lisent au moins un journal du matin, plus celui du soir ?
   (b) Combien de personnes lisent un journal du matin seulement et le journal du soir ?

Exercice 11 :

Comme l'écrit la publicité de « La Française des Jeux » le jeu de **rapido** est simple : Cochez, Misez, Gagnez ; le tout en prenant son petit café, avouez que c'est facile !!
En quoi consiste ce "jeu" ? Vous avez deux grilles de nombres :
— La grille A constituée de nombres de 1 à 20 : $A = \{1, 2, \ldots, 19, 20\}$ Dans cette grille A, vous cochez 8 numéros.
— La grille B constituée de nombres de 1 à 4 : $B = \{1, 2, 3, 4\}$ Dans cette grille B, vous cochez 1 seul numéro.

Vous gagnez si vous avez les 8 bons numéros dans la grille A et le numéro de la grille B.
En supposant, ce dont nous ne doutons pas, « **La Française des Jeux** » totalement honnête, combien y-a-t-il de combinaisons possibles ?

Exercice 12 :

Une association comprend 35 adhérents (16 femmes et 19 hommes). Cette association a un bureau composé du président, du vice-président et d'un trésorier ; aucun des postes n'est cumulable.

1. Quel est le nombre de bureaux possibles ?
2. Quel est le nombre de bureaux
   (a) Dans le cas où le poste de vice-président est occupé par une femme ?
   (b) Dans le cas où le président et le trésorier sont des hommes ?
   (c) Dans le cas où le président et le vice-président ont des sexes différents ?
   (d) Quel est le nombre de bureaux possibles, sachant que le président est un homme, le vice président une femme, et que MrX.... Refuse de siéger avec Mme Y.....

Exercice 13 :

1. Le congrès *(réunion des députés et des sénateurs)* a décidé de créer un comité Théodule *(ce n'est pas la première fois)*, c'est à dire un comité composé de 3 députés et de 5 sénateurs pris dans un groupe de 7 députés et 8 sénateurs. Combien de comités Théodule peuvent être ainsi constitués.
2. Combien peut-on constituer de comités différents de 8 personnes :
   (a) Comportant au moins un député ?
   (b) Comportant au moins un sénateur
3. Les 8 personnes étant choisies, de combien de manières peut-on choisir parmi ces 8 personnes, un président, un vice-président et un sécrétaire.

Exercice 14 :

Une maîtresse de maison donne régulièrement d'excellents dîners où elle invite toujours 5 personnes. Or, elle a 11 bons amis à recevoir (tous célibataires)

1. Combien de groupes de 5 personnes peut-elle constituer ?
2. Deux de ses bons amis, Christophe et Nathalie, se marient. Elle ne peut donc plus ne les recevoir qu'ensembles ou pas du tout. De combien de façons différentes peut-elle faire ses invitations ?
3. Deux ans plus tard, Christophe et Nathalie divorcent et ne peuvent, bien sûr, plus se voir. De combien de façons notre maîtresse de maison peut-elle encore organiser ses dîners ?

Exercice 15 :

Paradoxe de Galilée
On lance 3 dés, et on regarde la somme obtenue. On observe que les totaux 9 et 10 peuvent être obtenus de la façon suivante :

Total 9 :	**1-2-6**	**1-3-5**	**1-4-4**	**2-2-5**	**2-3-4**	**3-3-3**
Total 10 :	**1-3-6**	**1-4-5**	**2-3-5**	**2-4-4**	**3-3-4**	**2-6-2**

10 est plus fréquemment obtenu que 9 : pourquoi ?

Exercice 16 :

E est un ensemble fini de cardinal n et $A \subset E$ de cardinal p

1. Quel est le nombre de parties de E contenant A ?
2. Quel est le nombre de parties de E ne rencontrant pas A ?

Exercice 17 :

On considère une urne contenant a boules blanches et b boules noires ; on suppose toutes les boules indiscernables entre elles ; on tire les boules, unes à unes, jusqu'à vider l'urne.

1. Combien y-a-t-il de façons de vider l'urne ?
2. Combien y-a-t-il de séries de tirages qui amène la dernière boule noire en k-ième position ?
3. En sommant les nombres trouvés dans la question 2, établir une égalité remarquable.

Exercice 18 :

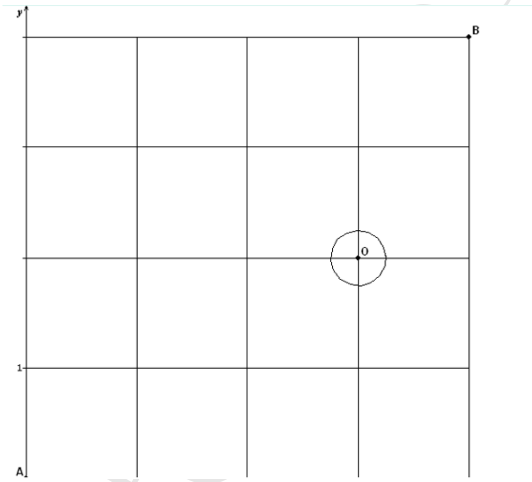

Figure 12.1 –

On considère le plan, rapporté à deux systèmes d'axes $(\mathrm{O}x, \mathrm{O}y)$.
Etant donnés 2 points A et B à <u>coordonnées entières positives</u> on appelle chemin joignant A à B, tout p-uplet $(M_1, \ldots, M_p)$ où $(M_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ a pour coordonnées $(x_i, y_i) \in \mathbb{N}^2$ et $M_1 = A$ et $M_p = B$ et $\begin{cases} x_{i+1} = x_i + 1 \\ y_{i+1} = y_i \end{cases}$ ou bien $\begin{cases} x_{i+1} = x_i \\ y_{i+1} = y_i + 1 \end{cases}$

1. Soit $\mathrm{B}\,(p, q)$ un point du plan. Combien y-a-t-il de chemins joignant l'origine O à $\mathrm{B}\,(p, q)$?
2. On suppose $a < p$ et $b < q$. Combien y-a-t-il de chemins allant de $A\,(a, b)$ à $B\,(p, q)$?
3. Soit O le point de coordonnées $O\,(i, j)$ où $a < i < p$ et $b < j < q$.Combien de chemins passant par O pouvons nous prendre pour aller de A à B ?

12.6.2 Sur les axiômes de probabilité

Exercice 19 :

Une urne contient huit boules blanches, six boules noires, cinq boules rouges et une boule verte et on en tire 3 simultanément.

1. Définir l'espace fondamental et en donner son cardinal
2. Quelle est la probabilité pour que les boules tirées soient toutes 3 de couleurs différentes ?
3. Quelle est la probabilité pour qu'elles soient toutes 3 de même couleur ?

Exercice 20 :

Une épreuve consiste à lancer deux dés indiscernables et bien équilibrés.

1. Quel est l'espace fondamental (ou espace des épreuves) Ω ? En donner le cardinal.
2. Soit A l'événement :
$$A = \{\text{Au moins un dé donne un nombre pair}\}$$
Donner $\mathbf{P}(A)$
3. Soit B l'événement :
$$B = \{\text{La somme des dés donne un nombre pair}\}$$
Donner $\mathbf{P}(B)$
4. (a) Décrire, par une phrase l'événement $A \cap B$, puis donner $\mathbf{P}(A \cap B)$
   (b) Les événements A et B sont-ils indépendants ?

Exercice 21 :

Eugène et Diogène ont l'habitude de se retrouver chaque jeudi soir autour d'un verre, pas loin d'un tonneau, et de décider de tirer à pile ou face qui règle l'addition.
Eugène, le brave Eugène, se lamente d'avoir dû payer les quatre dernières additions. Diogène lui propose alors de modifier la règle :

Il propose à Eugène de lancer la pièce 5 fois de suite
et de ne payer que si apparaît une suite d'au moins 3 piles consécutifs ou 3 faces consécutifs

Eugène se félicite d'avoir un si bon ami. Qu'en pensez vous ? Pour vous forger une opinion :

1. Caractériser l'espace fondamental ou univers des possibles Ω
2. Caractériser l'ensemble des cas favorables et en donner le cardinal
3. Conclure

Exercice 22 :

Quelques égalités ou inégalités
Pour ces 3 questions indépendantes, on considère le même espace probabilisé $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}\}$

1. Soient E_i, avec $i = 1, \ldots, n$, n événements. Montrez l'inégalité de Boole :
$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(E_i)$$
2. Deux événements A et B sont tels que : $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(B) = 0,75$. Quel est le maximum de $\mathbf{P}(A \cap B)$? Quel est son minimum ?
3. Montrez l'inégalité de Bonferroni :
$$\mathbf{P}(E \cap F) \geqslant \mathbf{P}(E) + \mathbf{P}(F) - 1$$
4. (a) Démontrer que $\mathbf{P}\left(E \cap \overline{F}\right) = \mathbf{P}(E) - \mathbf{P}(E \cap F)$
   (b) Démontrer que $\mathbf{P}\left(\overline{E} \cap \overline{F}\right) = 1 - \mathbf{P}(E) - \mathbf{P}(F) + \mathbf{P}(E \cap F)$

Exercice 23 :

Soit $\{\Omega; \mathcal{F}; \mathbf{P}\}$ un espace probabilisé.
Montrer que, pour tout $A \in \mathcal{F}$ et $B \in \mathcal{F}$, nous avons :
$$\mathbf{P}(A \cup B) + \mathbf{P}\left(A \cup \overline{B}\right) + \mathbf{P}\left(\overline{A} \cup B\right) + \mathbf{P}\left(\overline{A} \cup \overline{B}\right) = 3$$

Exercice 24 :

On jette trois dés non pipés et parfaitement équilibrés.

1. Décrire l'espace fondamental Ω
2. Calculer la probabilité d'obtenir au moins un as
3. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins 2 faces portant le même chiffre ?
4. Quelle est la probabilité pour que la somme des points marqués sur les trois faces soit paire

Exercice 25 :

Un certain composant électronique est classé défectueux s'il présente l'un ou l'autre des types de défauts suivants :

— Défaut critique
— Défaut majeur
— Défaut mineur

Le tableau qui suit présente la compilation effectuée par le département « Assurance-Qualité » sur une période de plusieurs mois. Notons que plusieurs types de défauts peuvent se présenter sur un même composant.

Pourcentage de composants	Types de défauts
46%	Critique (A)
40%	Majeur (B)
36%	Mineur (C)
10%	Critique et Majeur
20%	Critique et Mineur
15%	Majeur et Mineur
4%	Critique, Majeur et Mineur

Dans un lot de 100 composants, on prélève un composant au hasard.

1. Indiquer sur un diagramme de Venn, la répartition des composants selon leurs types de défauts.
2. Quelle est la probabilité que le composant choisi ne présente qu'un défaut critique ? qu'un défaut mineur ?
3. Quelle est la probabilité que ce composant présente un défaut majeur et un défaut mineur mais aucun défaut critique ?
4. Quelle est la probabilité que ce composant présente un défaut critique ou un défaut mineur ?
5. Sur 100 composants, combien de composants sans aucun type de défaut peut-on espérer trouver ?

Exercice 26 :

Une urne contient 3 boules : 1 blanche, 1 verte et 1 rouge.
L'expérience consiste à tirer une boule de l'urne, noter sa couleur, la remettre dans l'urne. Cette opération est renouvelée n fois, avec $n \geqslant 3$

1. Quelle est la probabilité pour avoir au moins une boule de chaque couleur ?
2. Quelle est la probabilité pour que les 2 boules extrêmes soient de même couleur ?

Exercice 27 :

On suppose qu'une année a 365 jours *(on ne tient pas compte des années bissextiles)*.
Montrer, qu'il y a plus d'une chance sur 2 pour que, sur un groupe de 23 personnes, 2 de ces personnes soient nées le même jour.
Que dire d'un groupe de 22 personnes ?

Exercice 28 :

Une urne contient 8 jetons numérotés de 1 à 8. Nous en tirons 3 simultanément, au hasard. Quelle est la probabilité pour que la somme des numéros tirés soit supérieure ou égale à la somme des numéros restants ?

Exercice 29 :

Dans une bibliothèque, n livres sont exposés sur une étagère rectiligne et répartis au hasard. Parmi ces n livres, k sont du même auteur A, les autres étant d'auteurs tous différents. Calculez la probabilité qu'au moins p livres se retrouvent côte à côte, lorsque $n = 20$, $k = 3$ et $p = 3$

Exercice 30 :

Soient f et g deux applications de Ω dans $\mathbb{R}$. Montrer que :

$$\{\omega \in \Omega \text{ tel que } f(\omega) + g(\omega) \geqslant \varepsilon\} \subset \left\{\omega \in \Omega \text{ tel que } g(\omega) \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right\} \cup \left\{\omega \in \Omega \text{ tel que } f(\omega) \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right\}$$

Exercice 31 :

Partie 1 : Dénombrement Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé une fois pour toutes

1. Pour $1 \leqslant k \leqslant n$, montrer que le nombre de k-uplets d'entiers naturels $(i_1, \ldots, i_k)$ tels que $1 \leqslant i_1 < i_2 < i_3 < \ldots < i_{k-1} < i_k \leqslant n$ est $\mathrm{C}_n^k = \binom{n}{k}$
2. On note E l'ensemble des k-uplets d'entiers naturels $(i_1, \ldots, i_k)$ tels que $1 \leqslant i_1 \leqslant i_2 \leqslant i_3 \leqslant \ldots \leqslant i_{k-1} \leqslant i_k \leqslant n$ et F l'ensemble des k-uplets d'entiers naturels $(j_1, \ldots, j_k)$ tels que $1 \leqslant j_1 < j_2 < j_3 < \ldots < j_{k-1} < j_k \leqslant n + k - 1$
   Soit $\Phi : E \to F$ qui, à $(i_1, \ldots, i_k) \in E$ fait correspondre $(j_1, \ldots, j_k) \in F$ défini par : $\Phi[(i_1, \ldots, i_k)] = (j_1, \ldots, j_k)$ tel que :
   $$\begin{cases} j_1 = i_1 \\ j_2 = i_2 + 1 \\ \vdots \\ j_l = i_l + (l-1) \\ \vdots \\ j_k = i_k + (k-1) \end{cases}$$
   Montrer que $\Phi : E \to F$ est une bijection et donner $\operatorname{card}(E)$

Partie 2 Une urne contient des boules numérotées de 1 à N.. On effectue une suite infinie de tirages avec remise, et on note $u_1, \ldots, u_n, \ldots$ la liste des numéros successifs obtenus. C'est à dire que l'on obtient une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ d'entiers naturels compris entre 1 et N avec $N \geqslant 2$

1. Soit A_n l'événement

   $A_n = \{$ Les n premiers tirages successifs amènent des numéros qui vont en ordre croissant au sens large$\}$

   Calculer $\mathbf{P}(A_n)$; on convient que $\mathbf{P}(A_1) = 1$
2. Démontrer que la série $\sum_{n \geqslant 1} \mathbf{P}(A_n)$ converge
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons $A_{n+1} \subset A_n$
4. Montrer que $\mathbf{P}\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} A_n\right) = 0$; en donner une interprétation.

Exercice 32 :

Une urne renferme N boules identiques numérotées de 1 à N ; on tire successivement n boules, sans les remettre $(1 \leqslant n \leqslant N)$

1. On suppose $3 \leqslant n$; déterminer la probabilité pour que "la 3 ° boule porte le numéro k"
2. On suppose $i \leqslant n$; déterminer la probabilité pour que "la i ° boule porte le numéro k"

Exercice 33 :

Un joueur a le choix entre les deux paris suivants :

1° pari : Jeter 6 dés, et gagner s'il "sort" au moins un as

2° pari : Jeter 12 dés, et gagner s'il "sort" au moins deux as

Calculez la probabilité de gagner dans chaque cas, les issues possibles étant supposées équiprobables.

Exercice 34 :

Soit $a > 1$. On définit le réel $\zeta(a)$ par : $\zeta(a) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^a}$. Cette fonction ζ a été étudiée en 6.4.4

Nous pouvons alors définir une probabilité $\mathbf{P}_a$ sur $\mathbb{N}$ en posant, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $\mathbf{P}_a(\{k\}) = \dfrac{1}{\zeta(a)\, k^a}$

1. Vérifier que $\mathbf{P}_a$ une probabilité ; on dit que $\mathbf{P}_a$ suit la loi ζ
2. Si $m \in \mathbb{N}^*$, on note $m\mathbb{N}^*$ l'ensemble $m\mathbb{N}^* = \{km, k \in \mathbb{N}^*\}$ de ses multiples non nuls. Calculer $\mathbf{P}_a(2\mathbb{N}^*)$.
3. Généraliser.
4. Démontrer qu'il n'existe pas de probabilité uniforme sur $\mathbb{N}$.