12.7 Quelques exercices corrigés

Comme souvent, nous ne donnons pas la correction de tous les exercices. Beaucoup sont très simples, et juste un peu d'attention suffit pour les corriger.

Exercice 2 :

Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leqslant b$. Montrer que $[a;b] = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \left]a - \frac{1}{n}; b + \frac{1}{n}\right[$

1. **Clairement, nous avons $[a;b] \subset \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \left]a - \frac{1}{n}; b + \frac{1}{n}\right[$**

   En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons $a - \frac{1}{n} < a < b < b + \frac{1}{n}$, et donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons $[a;b] \subset \left]a - \frac{1}{n}; b + \frac{1}{n}\right[$, c'est à dire $[a;b] \subset \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \left]a - \frac{1}{n}; b + \frac{1}{n}\right[$

2. **Démontrons que nous avons $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \left]a - \frac{1}{n}; b + \frac{1}{n}\right[\subset [a;b]$**

   Soit $x \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \left]a - \frac{1}{n}; b + \frac{1}{n}\right[$; il faut donc montrer que $x \in [a;b]$

   Supposons le contraire, c'est à dire $x \notin [a;b]$; dans ce cas, $x < a$ ou $x > b$.

   → Supposons $x > a$; il existe alors $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $0 < \frac{1}{n_0} < a - x$, c'est à dire tel que $0 < x < a - \frac{1}{n_0}$, et donc $x \notin \left]a - \frac{1}{n_0}; b + \frac{1}{n_0}\right[$

   Il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $x \notin \left]a - \frac{1}{n_0}; b + \frac{1}{n_0}\right[$, c'est à dire $x \notin \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \left]a - \frac{1}{n}; b + \frac{1}{n}\right[$

   Il y a donc contradiction et donc $x \geqslant a$

   → On démontrerait de la même manière que $x \leqslant b$

   → Donc $x \in [a;b]$

   Ce qui veut dire que $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \left]a - \frac{1}{n}; b + \frac{1}{n}\right[\subset [a;b]$

En conclusion, $[a;b] = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \left]a - \frac{1}{n}; b + \frac{1}{n}\right[$

Exercice 3 :

C'est un exercice somme toute, très banal, mais néanmoins important ; il traite de cette relation entre es événements et leur formalisation

A l'aide de la réunion, de l'intersection et de la complémentation, écrire les événements suivants :

1. *L'un au moins des événements A, B et C est réalisé.*

   Très facile ; c'est $A \cup B \cup C$

2. *Un et un seul des événements A ou B se réalise*

   Ce ci veut donc dire que si A se réalise, B ne se réalise pas et que si B se réalise, A ne se réalise pas. C'est donc :
   $$\left(\overline{A} \cap B\right) \cup \left(A \cup \overline{B}\right) = A \Delta B$$

3. *A et B se réalisent, mais pas C*

   Bon, ben, c'est $A \cap B \cap \overline{C}$

4. *Tous les événements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se réalisent*

   C'est simplement $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$

5. *Il y a une infinité d'événements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui se réalisent.*

   Ce qui veut dire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $m \in \mathbb{N}$, avec $m \geqslant n$ tel que A_m soit réalisé, ce qui se traduit par :

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\left(\bigcup_{m\geqslant n} A_m\right) = \limsup_{n\to+\infty} A_n$$

6. *L'un au moins des événements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se réalise*

   Il existe donc $n \in \mathbb{N}$ tel que A_n se réalise ; c'est donc $\bigcup\limits_{n_i n\mathbb{N}} A_n$

7. *Seul un nombre fini d'événements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se réalisent*

   Il existe donc un entier $m \in \mathbb{N}$ tel que si $m \geqslant n$, A_m ne se réalise pas. Donc, c'est :

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\left(\bigcap_{m\geqslant n} \overline{A_m}\right) = \liminf_{n\to+\infty} \overline{A_n} = \overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\left(\bigcup_{m\geqslant n} A_m\right)} = \overline{\limsup_{n\to+\infty} A_n}$$

8. *Il y a une infinité d'événements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui ne se réalisent pas*

   Ce qui veut dire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe un entier $m \geqslant n$ tel que A_m ne se réalise pas ; c'est donc :

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\left(\bigcup_{m\geqslant n} \overline{A_m}\right) = \limsup_{n\to+\infty} \overline{A_n}$$

9. *Tous les événements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se réalisent à partir d'un certain rang.*

   Ce qui veut dire qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que si $m \geqslant n$, A_m est réalisé ; c'est donc

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\left(\bigcap_{m\geqslant n} A_m\right) = \liminf_{n\to+\infty} A_n = \overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\left(\bigcup_{m\geqslant n} \overline{A_m}\right)} = \overline{\limsup_{n\to+\infty} \overline{A_n}}$$

Exercice 4 :

Pour $\Omega = \mathbb{R}$, on considère les familles $\{A_n ; n \in \mathbb{N}\}$, d'éléments de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, les boréliens de $\mathbb{R}$; dans les deux cas suivants, donner $\limsup\limits_{n\to+\infty} A_n$

1. $A_n = \left[\dfrac{-1}{n} ; 3 + \dfrac{1}{n}\right]$

   Par définition de $\limsup\limits_{n\to+\infty} A_n$, nous avons $\limsup\limits_{n\to+\infty} A_n = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}}\left(\bigcup\limits_{m\geqslant n} A_m\right)$

   Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons $\dfrac{-1}{n} < \dfrac{-1}{n+1}$ et $3 + \dfrac{1}{n+1} < 3 + \dfrac{1}{n}$ et donc $A_{n+1} \subset A_n$, de telle sorte que $\bigcup\limits_{m\geqslant n} A_m = A_n$, et donc $\limsup\limits_{n\to+\infty} A_n = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \left[\dfrac{-1}{n} ; 3 + \dfrac{1}{n}\right] = [0 ; 3]$

2. $A_n = \left[-2 - (-1)^n ; 2 + (-1)^n\right]$

   Il faut remarquer 2 choses : $A_{2n} = [-2-1 ; 2+1] = [-3 ; 3]$ et $A_{2n+1} = [-2-(-1) ; 2+(-1)] = [-1 ; 1]$.

   D'où $\bigcup\limits_{m\geqslant n} A_m = [-3 ; 3]$, et donc, forcément, $\limsup\limits_{n\to+\infty} A_n = [-3 ; 3]$

12.7.1 Sur le dénombrement

Exercice 8 :

Combien peut-on former de numéros d'au plus 4 chiffres choisis parmi $\{1, 2, 3, 4\}$? Parmi ces numéros, combien ont-ils tous leurs chiffres distincts ?

1. **Combien peut-on former de numéros d'au plus 4 chiffres choisis parmi** $\{1, 2, 3, 4\}$
   L'important est donc de modéliser.
   (a) Les nombres à 1 chiffre sont bien entendu 4
   (b) Les nombres à 2 chiffres peuvent être $\{11, 12, 21, \dots\}$ Comment modéliser cette situation ? ? Un

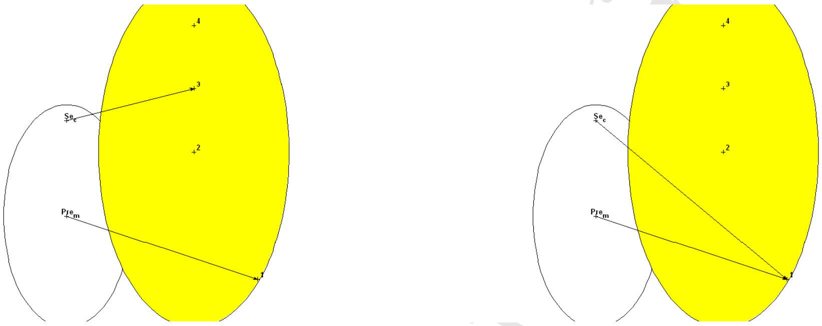

FIGURE 12.2 – Modélisation des nombres 13 et 11

   nombre à 2 chiffres pris dans l'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$ peut être modélisé comme une application d'un ensemble à deux éléments $\{P, S\}$ dans l'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$. Il y a donc $4^2 = 16$ tels nombres
   (c) De même, il y a $4^3 = 64$ nombres à 3 chiffres pris parmi $\{1, 2, 3, 4\}$ et $4^4 = 256$ nombres à 4 chiffres pris parmi $\{1, 2, 3, 4\}$
   (d) Il y a donc, en tout $4 + 4^2 + 4^3 + 4^4 = 340$ nombres d'au plus 4 chiffres choisis parmi $\{1, 2, 3, 4\}$
2. **Parmi ces numéros, combien ont-ils tous leurs chiffres distincts ?**
   (a) Pour les nombres à 1 chiffre, ils sont 4
   (b) Un nombre à 2 chiffres distincts pris dans l'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$ peut être modélisé comme une injection *(l'ordre est important : $12 \neq 21$)* d'un ensemble à deux éléments $\{P, S\}$ dans l'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$. Il y a donc $\mathrm{A}_4^2 = 12$ tels nombres
   (c) De même, il y a $\mathrm{A}_4^3 = 24$ nombres à 3 chiffres distincts pris parmi $\{1, 2, 3, 4\}$ et $\mathrm{A}_4^4 = 4! = 24$ nombres à 4 chiffres distincts pris parmi $\{1, 2, 3, 4\}$
   (d) Il y a donc en tout $4 + 12 + 24 + 24 = 64$ nombres avec tous leurs chiffres distincts

Exercice 9 :

On considère un jeu de 52 cartes, composées de 4 couleurs ; il y a 13 cartes par couleur (c'est le jeu habituel ! !). On appelle « main » , tout sous-ensemble de 13 cartes

1. *Combien y-a-t-il de mains en tout ?*
2. *Combien y-a-t-il de mains contenant les 4 as ? Au moins un as ?*
3. *Combien y-a-t-il de mains ne contenant aucun cœur ? 3 carreaux au plus ?*

1. **Combien y-a-t-il de mains en tout ?**
   Qu'est ce que c'est qu'une « main » ? En fait, c'est un sous-ensemble de 13 éléments d'un ensemble de cartes. Il y a donc C_{52}^{13} tels sous-ensembles.

2. **Combien y-a-t-il de mains contenant les 4 as ?**
   Pour résoudre cette question, il faut isoler les 4 as des 48 autres cartes qui ne sont pas des as. Il y a donc C_{48}^{9} façons de choisir 4 cartes parmi les cartes qui ne sont pas des as, et une seule façon ($\mathrm{C}_4^4 = 1$) de prendre les 4 as parmi les 4 cartes qui sont des as. Il y a donc $\mathrm{C}_4^4 \times \mathrm{C}_{48}^9 = \mathrm{C}_{48}^9$ mains contenant les 4 as
3. **Combien y-a-t-il de mains contenant au moins un as ?**
   Il y a deux façons de résoudre le problème : en utilisant les événements contraires ou en recensant précisément les différents événements.

   En utilisant l'événement contraire L'événement $\{$Avoir au moins un as$\}$ est l'événement contraire de $\{$N'avoir aucun as$\}$. N'avoir aucun as, veut dire qu'on prend 0 as parmi les 4 as, et 13 cartes, parmi les 48 cartes qui ne sont pas des as. Donc,

   $$\text{Card }\{\text{N'avoir aucun as}\} = \mathrm{C}_4^0 \times \mathrm{C}_{48}^{13} = \mathrm{C}_{48}^{13}$$

   Donc, le nombre de mains qui contiennent au moins un as, est le nombre de mains total, moins le nombre de mains qui ne contiennent aucun as.Donc

   $$\boxed{\text{Card }\{\text{Avoir au moins un as}\} = \mathrm{C}_{52}^{13} - \mathrm{C}_{48}^{13}}$$

   En recensant précisément les différents événements Qu'est ce que c'est qu'avoir au moins un as ? C'est :
   — Avoir exactement un as
   — **Ou** Avoir exactement 2 as
   — **Ou**Avoir exactement 3 as
   — **Ou** Avoir exactement 4 as

   Pour $1 \leqslant k \leqslant 4$, avoir exactement k as, c'est prendre k as parmi les 4 cartes qui sont des as, et $13-k$ cartes parmi les 48 autres cartes qui ne sont pas des as. Donc, Card $\{$Avoir exactement k as$\}$ = $\mathrm{C}_4^k \times \mathrm{C}_{48}^{13-k}$

   Donc $\boxed{\text{Card }\{\text{Avoir au moins un as}\} = \mathrm{C}_4^1 \times \mathrm{C}_{48}^{12} + \mathrm{C}_4^2 \times \mathrm{C}_{48}^{11} + \mathrm{C}_4^3 \times \mathrm{C}_{48}^{10} + \mathrm{C}_4^4 \times \mathrm{C}_{48}^{9}}$

   Bien entendu, nous avons : $\mathrm{C}_{52}^{13} - \mathrm{C}_{48}^{13} = \mathrm{C}_4^1 \times \mathrm{C}_{48}^{12} + \mathrm{C}_4^2 \times \mathrm{C}_{48}^{11} + \mathrm{C}_4^3 \times \mathrm{C}_{48}^{10} + \mathrm{C}_4^4 \times \mathrm{C}_{48}^{9}$, et nous avons alors l'égalité :

   $$\mathrm{C}_{52}^{13} = \mathrm{C}_{48}^{13} + \mathrm{C}_4^1 \times \mathrm{C}_{48}^{12} + \mathrm{C}_4^2 \times \mathrm{C}_{48}^{11} + \mathrm{C}_4^3 \times \mathrm{C}_{48}^{10} + \mathrm{C}_4^4 \times \mathrm{C}_{48}^{9}$$

   Qui est un cas particulier d'une égalité plus générale : $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} \mathrm{C}_{n'}^{k} \mathrm{C}_{n}^{p-k} = \mathrm{C}_{n+n'}^{p}$
4. **Combien y-a-t-il de mains ne contenant aucun cœur ?**
   La résolution sera au soin du lecteur ; c'est le même esprit que n'avoir aucun as.

Exercice 16 :

Ce n'est pas un exercice qui pose de grosses difficultés, mais que, souvent, les étudiants ont eu du mal à comprendre

E est un ensemble fini de cardinal n et $A \subset E$ de cardinal p

1. *Quel est le nombre de parties de E contenant A ?*
2. *Quel est le nombre de parties de E ne rencontrant pas A ?*

Nous allons répondre aux 2 questions en même temps

→ Soit $B \subset E$ et $A \subset B$; alors $B = A \cup (B \setminus A)$. Il faut donc dénombrer tous les sous-ensembles de E du type $B \setminus A$.

→ Il y a donc $n - p$ éléments de E qui ne sont pas dans A, et donc les ensembles $B \subset E$ qui contiennent A sont du type :

$$\begin{gathered}
B_0 = A \\
B_1 = A \cup \{x_1\} \text{ où } x_1 \notin A \\
B_1 = A \cup \{x_1, x_2\} \text{ où } x_1 \notin A \text{ et } x_2 \notin A \\
\vdots \\
B_1 = A \cup \{x_1, x_2, \cdots, x_{n-p}\} \text{ où } x_1, x_2, \ldots x_{n-p} \notin A
\end{gathered}$$

Il faut donc dénombrer tous les sous-ensembles de $E\setminus A$ qui ont k éléments pour $k = 0, 1, \cdots, n-p$

$\rightarrow$ Bien entendu, il y a $\mathrm{C}_{n-k}^{k} = \begin{pmatrix} n-k \\ k \end{pmatrix}$ sous ensembles de $E \setminus A$ qui ont k éléments et le nombre de sous-ensembles de E qui contiennent A est donc :

$$\sum_{k=0}^{n-k} \begin{pmatrix} n-k \\ k \end{pmatrix} = 2^{n-k}$$

C'est exactement le nombre de sous ensembles de $E\Delta A$, c'est à dire que $2^{n-k} = \text{Card } (\mathcal{P}(E \setminus A))$

$\rightarrow$ $2^{n-k} = \text{Card } (\mathcal{P}(E \setminus A))$ est exactement le nombre de parties de E ne rencontrant pas

Exercice 17 :

On considère une urne contenant a boules blanches et b boules noires ; on suppose toutes les boules indiscernables entre elles ; on tire les boules, unes à unes, jusqu'à vider l'urne.

1. *Combien y-a-t-il de façons de vider l'urne ?*

   Il faut essayer de modéliser. En fait, chaque tirage est une succession de boules noires et de boules blanches. Il faut donc qu'elles prennent place dans un « mot » de longueur $a + b$ ou dans $a + b$ cases ; le schéma ci-dessous tente de modéliser un tirage, les tirages commençnt à gauche :

   $$\underbrace{\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} N & B & B & \dots & \dots & N & N & B \end{array}}_{\text{avec } a+b \text{ « cases »}}$$

   Un tirage, c'est donc une façon de distribuer les a boules noires *(ou les b boules blanches)* dans $a + b$ cases

   Il y a donc $\mathrm{C}_{a+b}^{a} = \binom{a+b}{a}$ tirages possibles.

   Il faut remarquer que $\mathrm{C}_{a+b}^{a} = \mathrm{C}_{a+b}^{b} \iff \binom{a+b}{a} = \binom{a+b}{b}$, ce qui est logique : il n'y a aucune raison de privilégier une couleur par rapport à une autre !

2. *Combien y-a-t-il de séries de tirages qui amène la dernière boule noire en k-ième position ?*

   $\Rightarrow$ Première remarque, nous devons avoir $k \geqslant a$

   $\Rightarrow$ Si la dernière boule noire est dans la case numéro k, les $(a-1)$ autres boules se répartissent dans les $(k-1)$ premières cases

   $\Rightarrow$ Il y a donc $\mathrm{C}_{a-1}^{k-1} = \binom{a-1}{k-1}$ tirages qui mettent une boule noire en k-ième position.

3. *En sommant les nombres trouvés dans la question 2, établir une égalité remarquable.*

   $\Rightarrow$ Quel que soit le tirages, il y aura toujours une dernière boule noire ; l'emplacement de la dernière boule noire va du numéro $k = a$ à $k = a + b$

   $\Rightarrow$ Nous avons donc $\mathrm{C}_{a+b}^{a} = \displaystyle\sum_{k=a}^{a+b} \mathrm{C}_{k-1}^{a-1} \iff \begin{pmatrix} a+b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ b \end{pmatrix} = \sum_{k=a}^{a+b} \begin{pmatrix} k-1 \\ a-1 \end{pmatrix}$

Exercice 18 :

On considère le plan, rapporté à deux systèmes d'axes $(\mathrm{O}x, \mathrm{O}y)$.
Etant donnés 2 points A et B à coordonnées entières positives on appelle chemin joignant A à B, tout p-uplet $(M_1, \dots, M_p)$ où $(M_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ a pour coordonnées $(x_i, y_i) \in \mathbb{N}^2$ et $M_1 = A$ et $M_p = B$ et $\begin{cases} x_{i+1} = x_i + 1 \\ y_{i+1} = y_i \end{cases}$ ou bien $\begin{cases} x_{i+1} = x_i \\ y_{i+1} = y_i + 1 \end{cases}$

1. *Soit $\mathrm{B}(p, q)$ un point du plan. Combien y-a-t-il de chemins joignant l'origine O à $\mathrm{B}(p, q)$?*

   Si nous considérons un mobile qui part de l'origine vers un point $B(p, q)$, les seules possibilités d'y arriver étant d'avancer d'une unité, il y aura donc p déplacements horizontaux et q déplacements verticaux, c'est à dire $(p + q)$ déplacements en tout.

   Le nombre de chemins joignant O à B est le nombre de façons de placer$p$ déplacements horizontaux dans $(p + q)$ déplacements ; c'est donc $\mathrm{C}_{p+q}^{p} = mathrmC_{p+q}^{q} = \binom{p+q}{p}$

2. *On suppose $a < p$ et $b < q$. Combien y-a-t-il de chemins allant de $A(a,b)$ à $B(p,q)$?*

   Pas plus difficile ; il y a, ici, $(p-a)+(q-b)=(p+q)-(a+b)$ déplacements.
   Il y a donc $\mathrm{C}_{(p+q)-(a+b)}^{p-a}=\mathrm{C}_{(p+q)-(a+b)}^{q-b}=\binom{(p+q)-(a+b)}{p-a}$ allant de A à B

3. *Soit O le point de coordonnées $O(i,j)$ où $a < i < p$ et $b < j < q$.Combien de chemins passant par O pouvons nous prendre pour aller de A à B ?*

   Nous regardons le nombre de chemins de allant de A à O et le nombre de chemins allant de O à B, c'est à dire :

$$\mathrm{C}_{(i+j)-(a+b)}^{i-a}+\mathrm{C}_{(p+q)-(i+j)}^{p-i}=\binom{(p+q)-(i+j)}{p-i}+\binom{(i+j)-(a+b)}{i-a}$$

12.7.2 Sur les axiômes de probabilité

Exercice 19 :

Une urne contient huit boules blanches, six boules noires, cinq boules rouges et une boule verte et on en tire 3 simultanément.

1. *Définir l'espace fondamental et en donner son cardinal*
2. *Quelle est la probabilité pour que les boules tirées soient toutes 3 de couleurs différentes ?*
3. *Quelle est la probabilité pour qu'elles soient toutes 3 de même couleur ?*

1. **Définir l'espace fondamental et en donner son cardinal**
   On tire, ici, 3 boules ; on fait donc des sous ensembles de 3 éléments pris parmi 20 ; donc

$$\Omega=\{\text{Les sous ensembles de 3 éléments pris parmi 20}\}$$

   et donc $\mathrm{Card}\ \Omega=\binom{20}{3}=\mathrm{C}_{20}^{3}=\dfrac{20!}{3!17!}=\dfrac{18\times19\times20}{6}=1140$

2. **Quelle est la probabilité pour que les boules tirées soient toutes 3 de couleurs différentes ?**
   Soit A l'événement : $A=\{\text{Les boules tirées soient toutes 3 de couleurs différentes}\}$. Sachant qu'il y a 4 couleurs, les possibilités sont multiples, et il faut donc travailler sur des événements élémentaires. Il y a, en fait : $\mathrm{C}_4^3=4$ tels événements élémentaires :
   — $A_1=\{\text{Le tirage donne 1 boule blanche, 1 boule noire, 1 boule rouge}\}$
   — $A_2=\{\text{Le tirage donne 1 boule blanche, 1 boule noire, 1 boule verte}\}$
   — $A_3=\{\text{Le tirage donne 1 boule blanche, 1 boule verte, 1 boule rouge}\}$
   — $A_4=\{\text{Le tirage donne 1 boule noire, 1 boule verte, 1 boule rouge}\}$
   Et, nous avons $\mathbf{P}(A)=\mathbf{P}(A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4)=\mathbf{P}(A_1)+\mathbf{P}(A_2)+\mathbf{P}(A_3)+\mathbf{P}(A_4)$
   À chaque fois, nous avons $\mathbf{P}(A_i)=\dfrac{\mathrm{Card}\ A_i}{\mathrm{Card}\ \Omega}$, de telle sorte que

$$\mathbf{P}(A)=\frac{\mathrm{Card}\ (A_1)+\mathrm{Card}\ (A_2)+\mathrm{Card}\ (A_3)+\mathrm{Card}\ (A_4)}{\mathrm{Card}\ \Omega}$$

   Or :

   — $\mathrm{Card}\ A_1=\mathrm{C}_8^1\times\mathrm{C}_6^1\times\mathrm{C}_5^1=8\times6\times5=240$
   — $\mathrm{Card}\ A_2=\mathrm{C}_8^1\times\mathrm{C}_6^1\times\mathrm{C}_1^1=8\times6\times1=48$
   — $\mathrm{Card}\ A_3=\mathrm{C}_8^1\times\mathrm{C}_1^1\times\mathrm{C}_5^1=8\times1\times5=40$
   — $\mathrm{Card}\ A_4=\mathrm{C}_6^1\times\mathrm{C}_1^1\times\mathrm{C}_5^1=6\times1\times5=30$

   D'où $\boxed{\mathbf{P}(A)=\dfrac{358}{1140}=0,314}$

3. **Quelle est la probabilité pour qu'elles soient toutes 3 de même couleur ?**
   Soit B l'événement : $B=\{\text{Les 3 boules tirées soient toutes de même couleur}\}$.
   — $B_1=\{\text{Le tirage donne 3 boules blanches}\}$

— $B_2 = \{\text{Le tirage donne 3 boules noires}\}$
— $B_3 = \{\text{Le tirage donne 3 boules rouges}\}$
— Comme il n'y a qu'une seule boule verte dans l'urne, il est impossible d'avoir 3 boules vertes

Et, nous avons $\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(B_1 \cup B_2 \cup B_3) = \mathbf{P}(B_1) + \mathbf{P}(B_2) + \mathbf{P}(B_3)$

À chaque fois, nous avons $\mathbf{P}(B_i) = \dfrac{\text{Card } B_i}{\text{Card } \Omega}$, de telle sorte que

$$\mathbf{P}(B) = \frac{\text{Card } (B_1) + \text{Card } (B_2) + \text{Card } (B_3)}{\text{Card } \Omega}$$

Or :

— Card $B_1 = \mathrm{C}_8^3 = \dfrac{8!}{3! \times 5!} = \dfrac{6 \times 7 \times 8}{6} = 56$ — Card $B_3 = \mathrm{C}_5^3 = \dfrac{5!}{3! \times 2!} = \dfrac{3 \times 4 \times 5}{6} = 8$
— Card $B_2 = \mathrm{C}_6^3 = \dfrac{6!}{3! \times 3!} = \dfrac{4 \times 5 \times 6}{6} = 20$

D'où $\boxed{\mathbf{P}(B) = \dfrac{84}{1140} = 0,074}$

Exercice 20 :

Une épreuve consiste à lancer deux dés indiscernables et bien équilibrés.

1. *Quel est l'espace fondamental (ou espace des épreuves) Ω ? En donner le cardinal.*
2. *Soit A l'événement :*
$$A = \{\text{Au moins un dé donne un nombre pair}\}$$
Donner $\mathbf{P}(A)$
3. *Soit B l'événement :*
$$B = \{\text{La somme des dés donne un nombre pair}\}$$
Donner $\mathbf{P}(B)$
4. *(a) Décrire, par une phrase l'événement $A \cap B$, puis donner $\mathbf{P}(A \cap B)$*
(b) Les événements A et B sont-ils indépendants ?

1. **Quel est l'espace fondamental (ou espace des épreuves) Ω ? En donner le cardinal.**
Comme toujours dans ces cas, il est facile de formaliser cet espace Ω ; on distingue toujours les dés.
Ainsi, nous avons :
$$\Omega = \{(i, j) \text{ tels que } 1 \leqslant i \leqslant 6 \text{ et } 1 \leqslant j \leqslant 6\}$$
De telle sorte que $\sharp(\Omega) = 36$
2. **Soit A l'événement : $A = \{$Au moins un dé donne un nombre pair$\}$ Donner $\mathbf{P}(A)$**
Il est plus facile de s'intéresser à l'événement contraire, à savoir : $\overline{A} = \{\text{Aucun dé ne donne un nombre pair}\}$
Or,$\overline{A} = \{(i, j) \text{ tels que } i = 1, i = 3, i = 5 \text{ et } j = 1, j = 3, j = 5\}$, et donc $\sharp\left(\overline{A}\right) = 9$, et donc $\mathbf{P}\left(\overline{A}\right) = \dfrac{9}{36} = \dfrac{1}{4}$, d'où $\boxed{\mathbf{P}(A) = \dfrac{3}{4}}$
3. **Soit B l'événement : $B = \{$La somme des dés donne un nombre pair$\}$ Donner $\mathbf{P}(B)$**
Ici, sans difficulté, $\boxed{\mathbf{P}(B) = \dfrac{1}{2}}$
4. (a) **Décrire, par une phrase l'événement $A \cap B$, puis donner $\mathbb{P}(A \cap B)$**
— Tout d'abord,$A \cap B$ est l'ensemble des résultats dont la somme est paire et qui comporte au moins une face paire. Donc, $A \cap B$ est l'ensemble des lancers dont les deux faces sont paires.
— Comme tout à l'heure, nous avons $\boxed{\mathbf{P}(A \cap B) = \dfrac{9}{36} = \dfrac{1}{4}}$

(b) **Les événements A et B sont-ils indépendants ?**

Les événements A et B sont indépendants si et seulement si $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) \times \mathbf{P}(B)$.

Or, $\mathbf{P}(A) \times \mathbf{P}(B) = \dfrac{3}{4} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{8}$, ce qui est bien différent de $\mathbf{P}(A \cap B)$.
Les événements A et B ne sont pas indépendants

Exercice 21 :

Eugène et Diogène ont l'habitude de se retrouver chaque jeudi soir autour d'un verre, pas loin d'un tonneau, et de décider de tirer à pile ou face qui règle l'addition.
Eugène, le brave Eugène, se lamente d'avoir dû payer les quatre dernières additions. Diogène lui propose alors de modifier la règle :

Il propose à Eugène de lancer la pièce 5 fois de suite
et de ne payer que si apparaît une suite d'au moins 3 piles consécutifs ou 3 faces consécutifs

Eugène se félicite d'avoir un si bon ami. Qu'en pensez vous ? Pour vous forger une opinion :

1. *Caractériser l'espace fondamental ou univers des possibles Ω*
2. *Caractériser l'ensemble des cas favorables et en donner le cardinal*
3. *Conclure*

1. **Caractériser l'espace fondamental ou univers des possibles Ω**
Ici, c'est très simple, c'est l'ensemble des quintuplets formés de F ou de P, c'est à dire que Ω est le produit cartésien $\Omega = \{F, P\}^5$
2. **Caractériser l'ensemble des cas favorables et en donner le cardinal**
Ce n'est pas une question très difficile, mais elle nécessite une grande attention. Je vais proposer la bonne solution, puis une solution fausse, et je vais dire pourquoi elle est fausse :

(a) **Solution correcte**

Premièrement, si un lancer donne 3 « face » au moins, sur 5 lancers, il ne pourra jamais donner 3 « pile » . Donc nous regardons le cas des lancers qui donnent « face » , puis nous multiplierons par 2 pour envisager tous les cas.

i. Regardons les lancers qui donnent 3 « face » consécutifs. Ils sont du type

$$(P, F, F, F, P), (F, F, F, P, P), (P, P, F, F, F)$$

ii. Regardons les lancers qui donnent 4 « face » dont 3 consécutifs. Ils sont du type

$$(F, F, F, F, P), (F, F, F, P, F)\ (F, P, F, F, F), (P, F, F, F, F)$$

iii. Il n'y a qu'un seul lancer qui ne donne que des « face »

Il y a donc 8 lancers qui donnent 3 « face »consécutifs et donc, en tout, 16 lancers qui donnent 3 piles consécutifs ou 3 faces consécutifs

(b) **Fausse solution**

On appelle A l'ensemble des cas favorables. A pourrait être caractérisé par les quintuplets (F, F, F, X, Y),(X, F, F, F, Y) ou (X, Y, F, F, F) où $X \in \{F, P\}$ et $Y \in \{F, P\}$, c'est à dire que X et Y prennent n'importe quelle valeur F ou P. On recommencerait de la même manière avec le P de *"pile"*

Il y a $4 = 2^2$ quintuplets du type (F, F, F, X, Y) ; de même qu'il y en a 4 du type (X, F, F, F, Y) ou 4 du type (X, Y, F, F, F). Le problème est le même avec P.

Ainsi, $\text{card}A = \left(3 \times 2^2\right) \times 2 = 3 \times 2^3 = 24$

Ce raisonnement est faux, car, il compte plusieurs fois le même lancer :

Par exemple, en prenant la situation (F, F, F, X, Y), si $X = Y = F$, nous avons le lancer (F, F, F, F, F) que nous retrouvons dans la situation (X, F, F, F, Y) où nous faisons une nouvelle fois $X = Y = F$

Il faut donc être prudent et rigoureux

3. **Conclure**

Il faut donner la probabilité de A. Ainsi :

$$\mathbf{P}(A) = \frac{\text{Cas favorables}}{\text{Cas possibles}} = \frac{2^4}{2^5} = \frac{1}{2}$$

La conclusion est très simple : Diogène est un gredin qui se joue de son ami, car le risque *(pour l'un ou pour l'autre)* est exactement le même!....Mais, Eugène est un mauvais joueur en n'acceptant pas l'équiprobabilité qu'implique le lancer d'une simple pièce équilibrée ; il devrait faire plus de probabilités.

Exercice 26 :

Une urne contient 3 boules : 1 blanche, 1 verte et 1 rouge.
L'expérience consiste à tirer une boule de l'urne, noter sa couleur, la remettre dans l'urne. Cette opération est renouvelée n fois, avec $n \geqslant 3$

Il faut d'abord définir l'espace fondamental Ω et en donner le cardinal.
Ω est l'ensemble des applications de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$ dans $\{R, V, B\}$ où R désigne la couleur rouge, V la couleur verte et B la couleur blanche, et donc Card $\Omega = 3^n$

1. *Quelle est la probabilité pour avoir au moins une boule de chaque couleur ?*

   Soit A l'événement $A = \{\text{Avoir une boule de chaque couleur}\}$. Nous allons étudier $\overline{A}$.
   $\overline{A}$ est l'événement « le tirage est bicolore » ou « le tirage est unicolore ». Nous allons écrire $\overline{A} = B \cup C$ où :
   $$B = \{\text{tirage unicolor}\} \text{ et } C = \{\text{Tirage bicolor}\}$$
   On voit, tout de suite que $B \cap C = \emptyset$
   Nous avons $C = \{RV\} \cup \{RB\} \cup \{BV\}$ où $\{RV\}$ est le tirage bicolor « Rouge, Vert » $\{BV\}$ est le tirage bicolor « Blanc, Vert » et $\{RB\}$ est le tirage bicolor « Rouge, Blanc »
   Nous avons Card $(\{RB\}) = 2^n - 2$ puisque nous devons enlever les tirages unicolor « rouge » ou « blanc »
   Donc, Card $C = 3\left(2^n - 2\right)$.
   D'où $\mathbf{P}\left(\overline{A}\right) = \dfrac{3 + 3\left(2^n - 2\right)}{3^n} = \dfrac{2^n - 1}{3^{n-1}}$ D'où
   $$\mathbf{P}\left(A\right) = 1 - \mathbf{P}\left(\overline{A}\right) = 1 - \frac{2^n - 1}{3^{n-1}} = \frac{3^{n-1} - 2^n + 1}{3^{n-1}}$$

2. *Quelle est la probabilité pour que les 2 boules extrêmes soient de même couleur ?*

   Si le premier et le dernier tirage ont même couleur, alors il reste $(n-2)$ places pour les boules de n'importe quelle couleur R, V, B. Il y a donc 3^{n-2} tirage qui donne une couleur au premier tirage et la même couleur au dernier tirage.
   Il y a donc $3 \times 3^{n-2} = 3^{n-1}$ tirages qui donnent que les 2 boules extrêmes soient de même couleur.
   Donc, si D est l'événement $D = \{\text{Les 2 boules extrêmes soient de même couleur }\}$, nous avons $\mathbf{P}(D) = \dfrac{3^{n-1}}{3^n} = \dfrac{1}{3}$

Exercice 27 :

On suppose qu'une année a 365 jours (on ne tient pas compte des années bissextiles).
Montrer, qu'il y a plus d'une chance sur 2 pour que, sur un groupe de 23 personnes, 2 de ces personnes soient nées le même jour.
Que dire d'un groupe de 22 personnes ?

C'est un exercice des plus classiques. En donner un corrigé est un exercice des plus normal!!

⇒ Quel modèle pour cette question ? ?
Si nous numérotons les jours de l'année, nous avons $Annee = \{j_1, j_2, \ldots, j_{365}\}$ et $Groupe = \{g_1, g_2, \ldots, g_{23}\}$.
Une configuration particulière, est une application de l'ensemble *Groupe* dans l'ensemble *Annee*.
Et donc Ω est l'ensemble des applications de *Groupe* dans *Annee*, et donc Card $\Omega = (365)^{23}$

⇒ Cette fois-ci, nous considérons l'événement $A = \{2$ personnes sont nées le même jour$\}$ et surtout son événement contraire $\overline{A} = \{$ Aucune personne n'est née le même jour$\}$
Une configuration particulière pour $\overline{A}$ est une injection de l'ensemble *Groupe* dans l'ensemble *Annee* et donc Card $\overline{A} = A_{365}^{23}$ et donc $\mathbf{P}\left(\overline{A}\right) = \dfrac{A_{365}^{23}}{(365)^{23}}$ et

$$\mathbf{P}(A) = 1 - \mathbf{P}\left(\overline{A}\right) = 1 - \frac{A_{365}^{23}}{(365)^{23}} \approx 0,55173$$

⇒ Dans un même raisonnement, si *Groupe* est un ensemble de 22 personnes, $\mathbf{P}(A) = 0,4757$

Exercice 28 :

Une urne contient 8 jetons numérotés de 1 à 8. Nous en tirons 3 simultanément, au hasard. Quelle est la probabilité pour que la somme des numéros tirés soit supérieure ou égale à la somme des numéros restants ?

⇒ Toujours la même question : quel est l'espace fondamental Ω ?
Ω est l'ensemble des sous ensembles de 3 éléments pris parmi 8 et donc Card $\Omega = \mathrm{C}_8^3 = \binom{8}{3}$

⇒ On considère les couples (a, b, c), tels que $a < b < c$ et nous nous intéressons à la somme $a+b+c$ donnée par ce tirage et nous cherchons les triplets (a, b, c) tels que

$$a+b+c \geqslant 36 - (a+b+c) \Longleftrightarrow 2(a+b+c) \geqslant 36 \Longleftrightarrow a+b+c \geqslant 18$$

⇒ On recense donc les triplets (a, b, c) tels que $a+b+c \geqslant 18$. Ce sont donc :

3, 8, 7	5, 8, 7	6, 8, 7
4, 8, 6	5, 8, 6	
4, 7, 8	5, 7, 6	

Et donc $\mathbf{P}(A) = \dfrac{7}{56} = \dfrac{1}{8}$

Exercice 30 :

Soient f et g deux applications de Ω dans $\mathbb{R}$. Montrer que :

$$\{\omega \in \Omega \text{ tel que } f(\omega) + g(\omega) \geqslant \varepsilon\} \subset \left\{\omega \in \Omega \text{ tel que } g(\omega) \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right\} \cup \left\{\omega \in \Omega \text{ tel que } f(\omega) \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right\}$$

⇒ Tout d'abord, nous avons $X \subset Y \Longleftrightarrow \overline{Y} \subset \overline{X}$
- ⋆ Supposons $X \subset Y$ et montrons $\overline{Y} \subset \overline{X}$
  Soit donc $x \in \overline{Y}$; alors, $x \notin Y$, et comme $X \subset Y$, nous avons aussi $x \notin X$ et donc $x \in \overline{X}$
  Ainsi, si $x \in \overline{Y}$ alors $x \in \overline{X}$ et donc $\overline{Y} \subset \overline{X}$
- ⋆ Supposons $\overline{Y} \subset \overline{X}$, alors $\overline{\overline{X}} \subset \overline{\overline{Y}} \Longleftrightarrow X \subset Y$

⇒ Et donc $A \subset (B \cup C) \Longleftrightarrow \overline{(B \cup C)} \subset \overline{A} \Longleftrightarrow \overline{B} \cap \overline{C} \subset \overline{A}$

⇒ Ainsi, pour démontrer que

$$\{\omega \in \Omega \text{ tel que } f(\omega) + g(\omega) \geqslant \varepsilon\} \subset \left\{\omega \in \Omega \text{ tel que } g(\omega) \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right\} \cup \left\{\omega \in \Omega \text{ tel que } f(\omega) \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right\}$$

Nous démontrerons :

$$\overline{\left\{\omega \in \Omega \text{ tel que } g(\omega) \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right\} \cup \left\{\omega \in \Omega \text{ tel que } f(\omega) \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right\}} \subset \overline{\{\omega \in \Omega \text{ tel que } f(\omega) + g(\omega) \geqslant \varepsilon\}}$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\overline{\left\{\omega \in \Omega \text{ tel que } g(\omega) \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right\}} \cap \overline{\left\{\omega \in \Omega \text{ tel que } f(\omega) \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right\}} \subset \overline{\{\omega \in \Omega \text{ tel que } f(\omega) + g(\omega) \geqslant \varepsilon\}}$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\left\{\omega \in \Omega \text{ tel que } g(\omega) < \frac{\varepsilon}{2}\right\} \cap \left\{\omega \in \Omega \text{ tel que } f(\omega) < \frac{\varepsilon}{2}\right\} \subset \{\omega \in \Omega \text{ tel que } f(\omega) + g(\omega) < \varepsilon\}\}$$

Ce qui sera équivalent.
Soit donc $\omega \in \left\{\omega \in \Omega \text{ tel que } g(\omega) < \frac{\varepsilon}{2}\right\} \cap \left\{\omega \in \Omega \text{ tel que } f(\omega) < \frac{\varepsilon}{2}\right\}$, alors $g(\omega) < \frac{\varepsilon}{2}$ et $f(\omega) < \frac{\varepsilon}{2}$ et donc :

$$g(\omega) + f(\omega) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Et donc $\omega \in \{\omega \in \Omega \text{ tel que } f(\omega) + g(\omega) < \varepsilon\}$
Ce que nous voulions

Exercice 31 :

Partie 1 : Dénombrement
Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé une fois pour toutes

1. *Pour $1 \leqslant k \leqslant n$, montrer que le nombre de k-uplets d'entiers naturels $(i_1, \ldots, i_k)$ tels que $1 \leqslant i_1 < i_2 < i_3 < \ldots < i_{k-1} < i_k \leqslant n$ est $\mathrm{C}_n^k = \binom{n}{k}$*

   Pour modéliser, et se représenter le contexte de l'épreuve, on peut supposer que nous avons une urne composée de n boules numérotées de 1 à n et que nous en tirions k.

   Bien entendu, toutes les boules tirées n'ont pas le même numéro, et il est possible de les ranger par ordre croissant et nous obtenons ainsi un k-uplet d'entiers naturels $(i_1, \ldots, i_k)$ tels que $1 \leqslant i_1 < i_2 < i_3 < \ldots < i_{k-1} < i_k \leqslant n$

   Il y a $\mathrm{C}_n^k = \binom{n}{k}$ façons de tirer k boules parmi n et il y a donc $\mathrm{C}_n^k = \binom{n}{k}$ k-uplets d'entiers naturels $(i_1, \ldots, i_k)$ tels que $1 \leqslant i_1 < i_2 < i_3 < \ldots < i_{k-1} < i_k \leqslant n$

2. *On note E l'ensemble des k-uplets d'entiers naturels $(i_1, \ldots, i_k)$ tels que $1 \leqslant i_1 \leqslant i_2 \leqslant i_3 \leqslant \ldots \leqslant i_{k-1} \leqslant i_k \leqslant n$ et F l'ensemble des k-uplets d'entiers naturels $(j_1, \ldots, j_k)$ tels que $1 \leqslant j_1 < j_2 < j_3 < \ldots < j_{k-1} < j_k \leqslant n + k - 1$*
   Soit $\Phi : E \longrightarrow F$ qui, à $(i_1, \ldots, i_k) \in E$ fait correspondre $(j_1, \ldots, j_k) \in F$ défini par : $\Phi[(i_1, \ldots, i_k)] = (j_1, \ldots, j_k)$ tel que :

$$\left\{\begin{array}{rl} j_1 = & i_1 \\ j_2 = & i_2 + 1 \\ \vdots & \vdots \\ j_l = & i_l + (l-1) \\ \vdots & \vdots \\ j_k = & i_k + (k-1) \end{array}\right.$$

   Montrer que $\Phi : E \longrightarrow F$ est une bijection et donner $\mathrm{card}(E)$

   En voilà une question qu'elle est bonne!! Et c'est à ce moment que nous nous apercevons de l'importance de la résolution de la question 1

   Montrons donc que $\Phi : E \longrightarrow F$ est une bijection.

   $\Rightarrow$ Montrons que Φ est injective
   Soient donc 2 k-uplets $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ et $(i'_1, i'_2, \ldots, i'_k)$ de E tels que $\Phi[(i_1, i_2, \ldots, i_k)] = \Phi[(i'_1, i'_2, \ldots, i'_k)]$.
   Rappelons que $1 \leqslant i_1 \leqslant i_2 \leqslant i_3 \leqslant \ldots \leqslant i_{k-1} \leqslant i_k \leqslant n$ et $1 \leqslant i'_1 \leqslant i'_2 \leqslant i'_3 \leqslant \ldots \leqslant i'_{k-1} \leqslant i'_k \leqslant n$.

Nous avons alors, pour tour l tel que $1 \leqslant l \leqslant k$:

$$i_l + (l-1) = i'_l + (l-1) \iff i_l = i'_l$$

Et donc, nous avons $(i_1, i_2, \dots, i_k) = (i'_1, i'_2, \dots, i'_k)$; Φ est donc injective

$\Rightarrow$ Montrons que Φ est surjective

Soit donc $(j_1, j_2, \dots, j_k)$ un k-uplet de F. Rappelons que $j_1 < j_2 < \dots < j_k$

Existe-t-il un k-uplet $(i_1, i_2, \dots, i_k)$ de E tel que $\Phi[(i_1, \dots, i_k)] = (j_1, \dots, j_k)$?

Si ce k-uplet $(i_1, i_2, \dots, i_k) \in E$ existe, alors, nous avons $j_l = i_l + (l-1)$ et nous choisissons donc $i_l = j_l - (l-1) = j_l + 1 - l$.

Il faut, maintenant, montrer que $i_l \leqslant i_{l+1}$. Or :

$$i_{l+1} - i_l = j_{l+1} + 1 - l - 1 - j_l - 1 + l = j_{l+1} - j_l - 1$$

Or, de $j_l < j_{l+1}$, nous tirons $j_{l+1} - j_l \geqslant 1$ et donc $j_{l+1} - j_l - 1 \geqslant 0$, c'est à dire

$$i_{l+1} - i_l \geqslant 0 \iff i_{l+1} \geqslant i_l$$

Φ est donc surjective

Nous concluons que Φ est bijective et que Card E = Card F ; de la question 1, Card $F = \mathrm{C}_{n+k-1}^k = \binom{n+k-1}{k}$.

D'où Card $E = \mathrm{C}_{n+k-1}^k = \binom{n+k-1}{k}$

Partie 2 *Une urne contient des boules numérotées de 1 à N. On effectue une suite infinie de tirages avec remise, et on note $u_1, \dots, u_n, \dots$ la liste des numéros successifs obtenus. C'est à dire que l'on obtient une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$* d'entiers naturels *compris entre 1 et N avec $N \geqslant 2$.*

1. *Soit A_n l'événement*

   $$A_n = \{ \text{Les } n \text{ premiers tirages successifs amènent des numéros qui vont en ordre croissant au sens large} \}$$

   Calculer $\mathbf{P}(A_n)$; on convient que $\mathbf{P}(A_1) = 1$

   On considère les n premiers tirages. Le nombre de tirages possibles lors de ces n premiers tirages est l'ensemble des applications de $\{1, \dots, n\}$ dans l'ensemble $\{1, \dots, N\}$.

   On recherche donc les n-uplets $(u_1, \dots, u_n)$ qui sont rangés en ordre croissnt au sens large, c'est à dire tels que $u_1 \leqslant u_2 \leqslant \dots \leqslant u_n$.

   D'après la question 1, ils sont au nombre de $\mathrm{C}_{n+N-1}^n = \binom{n+N-1}{n}$, et donc :

   $$\boxed{\mathbf{P}(A_n) = \frac{\mathrm{C}_{n+N-1}^n}{N^n} = \frac{\binom{n+N-1}{n}}{N^n}}$$

2. *Démontrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} \mathbf{P}(A_n)$ converge*

   Nous allons utiliser le critère de D'Alembert :

   $$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\mathrm{C}_{n+N}^{n+1}}{N^{n+1}} \times \frac{N^n}{\mathrm{C}_{n+N-1}^n} = \frac{(n+N)! \times n! \times (N-1)!}{(n+1)! \times (N-1)! \times N \times (N+n-1)!} = \frac{n+N}{N(n+1)}$$

   Maintenant, $\lim_{n\to+\infty} \frac{v_{n+1}}{v_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+N}{N(n+1)} = \frac{1}{N}$, et comme $\frac{1}{N} < 1$, la série $\sum_{n\geqslant 1} v_n$ converge

3. *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons $A_{n+1} \subset A_n$*

   Soit $\omega \in A_{n+1}$.

   Que représente ω ?

   ω est une suite finie de $n+1$ entiers compris entre 1 et N tels que $u_1 \leqslant u_2 \leqslant \cdots \leqslant u_n \leqslant u_{n+1}$

   Nous avons, en particulier $u_1 \leqslant u_2 \leqslant \cdots \leqslant u_n$, ce qui montre que $\omega \in A_n$ et donc $A_{n+1} \subset A_n$

4. *Montrer que $\mathbf{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} A_n\right) = 0$; en donner une interprétation.*

   D'après le lemme de Borel-Cantelli vu en 12.3.8, comme la série $\sum_{n\geqslant 1} \mathbf{P}(A_n)$ est convergente, nous avons $\mathbf{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\left(\bigcup_{m\geqslant n} A_m\right)\right) = 0$

   Comme $A_{n+1} \subset A_n$, la suite d'événements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante et donc, $\bigcup_{m\geqslant n} A_m = A_n$, d'où nous tirons que $\mathbf{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = 0$

   Ce qui veut dire que **P**-presque sûrement, il se produira une décroissance stricte dans la suite des numérons tirés et donc que seuls un nombre fini d'événements A_n se réalisent.

Exercice 34 :

Soit $a > 1$. On définit le réel $\zeta(a)$ par : $\zeta(a) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^a}$.

Nous pouvons alors définir une probabilité $\mathbf{P}_a$ sur $\mathbb{N}$ en posant, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $\mathbf{P}_a(\{k\}) = \frac{1}{\zeta(a)\,k^a}$

1. *Vérifier que $\mathbf{P}_a$ une probabilité*

   Il faut prouver que $\mathbf{P}_a(\mathbb{N}^*) = 1$.
   Or, $\mathbb{N}^* = \bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} \{k\}$ et donc

   $$\mathbf{P}_a(\mathbb{N}^*) = \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \mathbf{P}_a(\{k\}) = \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{\zeta(a)\,k^a} = \frac{1}{\zeta(a)} \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{k^a} = \frac{1}{\zeta(a)} \times \zeta(a) = 1$$

   Ce que nous voulions

2. *Si $m \in \mathbb{N}^*$, on note $m\mathbb{N}^*$ l'ensemble $m\mathbb{N}^* = \{km, k \in \mathbb{N}^*\}$ de ses multiples non nuls. Calculer $\mathbf{P}_a(2\mathbb{N}^*)$.*

   Qu'est ce que $2\mathbb{N}^*$?
   En fait, $2\mathbb{N}^* = \bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} \{2k\}$ et donc

   $$\mathbf{P}_a(2\mathbb{N}^*) = \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \mathbf{P}_a(\{2k\}) = \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{\zeta(a)\,(2k)^a} = \frac{1}{\zeta(a)\,2^a} \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{k^a} = \frac{1}{\zeta(a)\,2^a} \times \zeta(a) = \frac{1}{2^a}$$

3. *Généraliser.*

   Comme tout à l'heure, pour $m \in \mathbb{N}^*$, nous avons $m\mathbb{N}^* = \bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} \{mk\}$ et donc

   $$\mathbf{P}_a(m\mathbb{N}^*) = \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \mathbf{P}_a(\{mk\}) = \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{\zeta(a)\,(mk)^a} = \frac{1}{\zeta(a)\,m^a} \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{k^a} = \frac{1}{\zeta(a)\,m^a} \times \zeta(a) = \frac{1}{m^a}$$

   Un tout petit peu plus loin
   Juste un petit exemple qui ne fait pas avancer le schmilbililic.
   Nous avons $6\mathbb{N}^* \subset 2\mathbb{N}^*$ et donc $\mathbf{P}_a(6\mathbb{N}^*) \leqslant \mathbf{P}_a(2\mathbb{N}^*)$, c'est à dire $\frac{1}{6^a} \leqslant \frac{1}{2^a}$
   Est ce que nous avons vraiment fait avancer la science ?

4. *Démontrer qu'il n'existe pas de probabilité uniforme sur $\mathbb{N}$.*

   Soit **P** cette probabilité ; supposons que pour tout $k \in \mathbb{N}$, nous ayons $\mathbf{P}(\{k\}) = p$ où $0 < p < 1$

- ⋆ Nous devons avoir $\sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbf{P}(\{k\}) = 1$, c'est à dire que la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbf{P}(\{k\})$ est convergente. Or si nous considérons les sommes partielles $S_n = \sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}(\{k\}) = \sum_{k=0}^{n} p = (n+1)\,p$ et nous avons $\lim_{n\to+\infty} = +\infty$
  La série est donc non-convergente
- ⋆ On peut aussi s'intéresser au terme général de cette série qui est le terme constant p, lequel ne converge pas vers 0.

Il n'existe donc pas de probabilité uniforme sur $\mathbb{N}$