Chapitre 13

Indépendance, conditionnement

13.1 Exemples d'introduction

13.1.1 Premier exemple

Comment doit-on modifier la probabilité que l'on attribue à un événement lorsque l'on dispose d'une information supplémentaire ? Le concept de probabilité conditionnelle permet de répondre à cette question.

Enoncé de l'exemple

On considère une famille qui a 2 enfants ; on suppose qu'à chaque naissance, il y a équiprobabilité d'avoir une fille ou un garçon. Quelle est la probabilité pour que le second soit un garçon, sachant que l'aîné est une fille ?

Quel est, dans cette situation, l'espace fondamental ? Il est simple :

$$\Omega = \{(G, F), (G, G), (F, G), (F, F)\}$$

Nous savons *(et nous en sommes même sûrs)* que l'aînée est une fille. Nous avons donc, en fait, un nouvel espace fondamental : nous sommes donc dans la situation : $\Omega' = \{(F, G), (F, F)\}$; donc, la probabilité pour que le second soit un garçon, sachant que aîné est une fille est de $\dfrac{1}{2}$

13.1.2 Second exemple

On lance 2 dés, numérotés de 1 à 6 et on s'intéresse à la somme des dés. Quelle est la probabilité pour que l'un des dés soit un 2, alors que la somme est 6

Quel est, dans cette situation, l'espace fondamental ? Il est moins simple, mais très explicite :

$$\Omega = \{(i, j) \text{ tels que } 1 \leqslant i \leqslant 6 \text{ et } 1 \leqslant j \leqslant 6\} :$$

Nous avons $\text{Card } \Omega = 36$

Nous savons que la somme est 6 ; comme précédemment, nous sommes donc dans la situation :

$$\Omega' = \{(1, 5); (5, 1); (2, 4); (4, 2); (3, 3)\}$$

Donc, les « tirages » qui ont un 2 sont : $X = \{(2, 4); (4, 2)\}$, et la probabilité pour que l'un des dés ait un 2, alors que le somme est 6 est : $\dfrac{\text{Card } X}{\text{Card } \Omega'} = \dfrac{2}{5}$

13.2 Probabilités conditionnelles

13.2.1 Première définition

Soit $\{\Omega; \mathcal{F}; \mathbf{P}\}$ un espace probabilisé, et soit $A \in \mathcal{F}$ tel que $\mathbf{P}(A) > 0$
On appelle probabilité conditionnelle d'un événement $B \in \mathcal{F}$ sachant A, le nombre

$$\mathbf{P}(B/A) = \frac{\mathbf{P}(B \cap A)}{\mathbf{P}(A)}$$

13.2.2 Proposition

L'application $\mathbf{P}_A$:

$$\begin{cases} \mathbf{P}_A : \mathcal{F} & \longrightarrow \quad [0; +1] \\ \quad B & \longmapsto \quad \mathbf{P}_A(B) = \mathbf{P}(B/A) = \dfrac{\mathbf{P}(B \bigcap A)}{\mathbf{P}(A)} \end{cases}$$

est une probabilité

Démonstration

Nous allons vérifier, dans cette démonstration, tous les axiômes de probabilité.

1. On va démontrer que $\mathbf{P}_A(\Omega) = 1$
   Rien de plus simple :
   $$\mathbf{P}_A(\Omega) = \mathbf{P}(\Omega/A) = \frac{\mathbf{P}(\Omega \bigcap A)}{\mathbf{P}(A)}$$
   Comme $A \subset \Omega$, $\Omega \cap A = A$, donc
   $$\mathbf{P}_A(\Omega) = \mathbf{P}(\Omega/A) = \frac{\mathbf{P}(\Omega \bigcap A)}{\mathbf{P}(A)} = \frac{\mathbf{P}(A)}{\mathbf{P}(A)} = 1$$
2. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements de $\mathcal{F}$ deux à deux disjoints
   C'est à dire : $(m \neq n) \Longrightarrow A_m \cap A_n = \emptyset$
   On va montrer que $\mathbf{P}_A\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{P}_A(A_n)$
   Il faut commencer par évaluer $\mathbf{P}_A\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)$; nous avons, d'après la définition 13.2.1
   $$\mathbf{P}_A\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \frac{\mathbf{P}\left(\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \cap A\right)}{\mathbf{P}(A)}$$
   Or, par la distributivité de l'intersection par rapport à la réunion, $\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \cap A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_n \cap A)$
   Donc, $\mathbf{P}\left(\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \cap A\right) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_n \cap A)\right)$
   Comme, par hypothèse, nous avons $(m \neq n) \Longrightarrow A_m \cap A_n = \emptyset$, nous avons aussi :
   $$(m \neq n) \Rightarrow (A_m \cap A) \cap (A_n \cap A) = \emptyset$$
   D'où : $\mathbf{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_n \cap A)\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{P}(A_n \cap A)$ *(propriété des probabilités)*

Nous en déduisons donc :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_A\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) &= \frac{\mathbf{P}\left(\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)\cap A\right)}{\mathbf{P}(A)} \\ &= \frac{1}{\mathbf{P}(A)}\sum_{n\in\mathbb{N}}\mathbf{P}(A_n\cap A) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{\mathbf{P}(A_n\cap A)}{\mathbf{P}(A)} \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}}\mathbf{P}(A_n/A) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}}\mathbf{P}_A(A_n)\end{aligned}$$

Ce que nous voulions

Remarque 1 :

1. Si $\mathbf{P}(B)=0$, alors $\mathbf{P}(B/A)=\dfrac{\mathbf{P}(B\cap A)}{\mathbf{P}(A)}=0$, car $(A\cap B)\subset B$, et $\mathbf{P}(A\cap B)\leqslant \mathbf{P}(B)$, donc $\mathbf{P}(B\cap A)=0$
2. Nous avons toujours l'égalité : $\mathbf{P}(A)\times\mathbf{P}(B/A)=\mathbf{P}(B\cap A)$

13.2.3 Corollaire

Ce corollaire traite des conséquences du fait que $\mathbf{P}_A$ est **une nouvelle probabilité**

Soit $\{\Omega;\mathcal{F};\mathbf{P}\}$ un espace probabilisé et $A\in\mathcal{F}$ tel que $\mathbf{P}(A)\neq 0$. Alors, la probabilité conditionnelle vérifie :

1. $\mathbf{P}(\Omega/A)=1$, $\mathbf{P}(\emptyset/A)=0$ et si $A\subset B$, alors $\mathbf{P}(B/A)=1$
2. Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ forment une famille d'éléments de $\mathcal{F}$ deux à deux disjoints, alors
$$\mathbf{P}\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n} X_i\right)/A\right)=\sum_{i=1}^{n}\mathbf{P}(X_i/A)$$
3. Pour tout $B\in\mathcal{F}$, nous avons $\mathbf{P}\left(\overline{B}/A\right)=1-\mathbf{P}(B/A)$
4. Pour tout $X\in\mathcal{F}$ et tout $Y\in\mathcal{F}$, si $X\subset Y$, alors $\mathbf{P}(X/A)\leqslant\mathbf{P}(Y/A)$
5. Pour tout $X\in\mathcal{F}$ et tout $Y\in\mathcal{F}$, nous avons $\mathbf{P}(X\cup Y/A)=\mathbf{P}(X/A)+\mathbf{P}(Y/A)-\mathbf{P}(X\cap Y/A)$
6. Pour toute suite d'éléments $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de $\mathcal{F}$, nous avons
$$\mathbf{P}\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n} X_i\right)/A\right)\leqslant\sum_{i=1}^{n}\mathbf{P}(X_i/A)$$
7. Pour toute **suite croissante** $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements de $\mathcal{F}$, c'est à dire tels que $X_n\subset X_{n+1}$, nous avons :
$$\mathbf{P}\left(\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n\right)/A\right)=\lim_{n\to+\infty}\mathbf{P}(X_n/A)$$
8. Pour toute suite décroissante $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements de $\mathcal{F}$, c'est à dire tels que $X_{n+1}\subset X_n$, nous avons :
$$\mathbf{P}\left(\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} X_n\right)/A\right)=\lim_{n\to+\infty}\mathbf{P}(X_n/A)$$

Démonstration

1. Le fait que $\mathbf{P}(\Omega/A) = 1$ et $\mathbf{P}(\emptyset/A) = 0$ vient essentiellement du fait que $\mathbf{P}_A$ est une probabilité. Supposons, maintenant, que $A \subset B$. Alors $B \cap A = A$ et :
$$\mathbf{P}(B/A) = \frac{\mathbf{P}(B \cap A)}{\mathbf{P}(A)} = \frac{\mathbf{P}(A)}{\mathbf{P}(A)} = 1$$
2. L'item numéro 2 est la conséquence de la définition de probabilité vue en 12.3.1, et ce qui est vrai pour une infinité d'ensembles, l'est aussi pour un nombre fini.
3. D'après 12.3.2, nous avons pour toute probabilité $\mathbf{P}\left(\bar{A}\right) = 1 - \mathbf{P}(A)$, en particulier pour la probabilité $\mathbf{P}_A$. Et donc $\mathbf{P}\left(\overline{B}/A\right) = 1 - \mathbf{P}(B/A)$
4. Toujours d'après 12.3.2, nous avons pour toute probabilité $A \subset B \Longrightarrow \mathbf{P}(B \setminus A) = \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A)$, en particulier pour la probabilité $\mathbf{P}_A$. Et donc si $X \subset Y$, alors $\mathbf{P}(X/A) \leqslant \mathbf{P}(Y/A)$
5. Il suffit, une nouvelle fois de se retourner vers les résultats de 12.3.2
6. $\mathbf{P}\left(\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} X_i\right)/A\right) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbf{P}(X_i/A)$ est un résultat classique des propriétés des probabilités
7. Il suffit d'appliquer 12.3.3 à la probabilité $\mathbf{P}_A$
8. Il suffit d'appliquer 12.3.4 à la probabilité $\mathbf{P}_A$. Il faut remarquer que les 2 dernières propriétés sont équivalentes

Exercice 1 :

Voici une question très simple, tout ce qu'il y a de plus proche de la définition. Application directe, donc
Soient $\{\Omega; \mathcal{F}; \mathbf{P}\}$ un espace probabilisé, $A \in \mathcal{F}$ et $B \in \mathcal{F}$ tels que $\mathbf{P}(A) \neq 0$ et $\mathbf{P}(B) \neq 0$.
Démontrer que si $\mathbf{P}(A/B) \geqslant \mathbf{P}(A)$, alors $\mathbf{P}(B/A) \geqslant \mathbf{P}(B)$

Exercice 2 :

Revenons à l'exemple 13.1.1 de l'introduction.
$\longrightarrow$ Si H est l'événement « La famille a au moins un garçon »
$\longrightarrow$ Si K est l'événement « La famille a 2 garçons »
$\longrightarrow$ Si L est l'événement « L'aîné est un garçon »
Calculer : $\mathbf{P}(H/L)$; $\mathbf{P}(L/H)$; $\mathbf{P}(L/K)$

Résolution de l'exercice

1. Si H est l'événement « La famille a au moins un garçon », nous avons $H = \{(G,G);(G,F);(F,G)\}$, et si L est l'événement « L'aîné est un garçon », nous avons $L = \{(G,G);(G,F)\}$ et $H \cap L = \{(G,G);(G,F)\}$
Comme $\mathbf{P}(H/L) = \dfrac{\mathbf{P}(H \cap L)}{\mathbf{P}(L)}$, que $\mathbf{P}(H \cap L) = \dfrac{1}{2}$ et que $\mathbf{P}(L) = \dfrac{1}{2}$, nous avons $\dfrac{\mathbf{P}(H \cap L)}{\mathbf{P}(L)} = 1$
Le résultat n'est rien d'autre que de plus normal, puisque si nous savons que l'aîné est un garçon, nous savons déjà qu'elle a au moins un garçon !!
2. Cette fois ci, $\mathbf{P}(L/H) = \dfrac{\mathbf{P}(H \cap L)}{\mathbf{P}(H)}$; or, $\mathbf{P}(H) = \dfrac{3}{4}$ et donc $\mathbf{P}(L/H) = \dfrac{2}{3}$
Cette question est juste pour faire remarquer que $\mathbf{P}(H/L) \neq \mathbf{P}(L/H)$
3. Sans surprise $\mathbf{P}(L/K) = 1$!!!
Remarquer que $L \subset K$, et que, de manière générale, si $A \subset B$, alors $\mathbf{P}(A/B) = 1$

Exemple 1 :

Une urne contient n boules dont b sont blanches et r sont rouges. On tire simultanément 2 boules de cette urne, et soit R l'événement

$$R = \{\text{les 2 boules tirées sont rouges}\}$$

Calculer $\mathbf{P}(R)$

Nous allons utiliser 2 méthodes pour résoudre cette question.

Méthode 1 Méthode classique, habituelle : $\dfrac{\text{cas favorables}}{\text{cas possibles}} = \dfrac{\mathrm{C}_r^2}{\mathrm{C}_n^2} = \dfrac{r(r-1)}{n(n-1)}$

Méthode 2 On considère cette fois-ci que les 2 boules sont tirées l'une après l'autre. On s'intéresse aux événements suivants :

$$R_1 = \{\text{la première boule tirée est rouge}\}\,; \quad R_2 = \{\text{la seconde boule tirée est rouge}\}$$

On calcule donc $\mathbf{P}(R_1 \cap R_2) = \mathbf{P}(R_1) \times \mathbf{P}(R_2/R_1) = \dfrac{r}{n} \times \dfrac{r-1}{n-1}$