13.3 Formule des Bayes, formule des probabilités totales

13.3.1 Généralisation de la formule des probabilités composées

Soit $\{\Omega ; \mathcal{F} ; \mathbf{P}\}$ un espace probabilisé et $A_1, A_2, \ldots, A_n$, n événements de $\mathcal{F}$ tels que $\mathbf{P}\left(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n\right) \neq 0$. Alors :

$$\mathbf{P}\left(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n\right)=\mathbf{P}\left(A_1\right) \times \mathbf{P}\left(A_2 / A_1\right) \times \mathbf{P}\left(A_3 / A_1 \cap A_2\right) \times \cdots \times \mathbf{P}\left(A_n / A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}\right)$$

Démonstration

Comme, pour tout $k=1, \cdots, n$, nous avons $(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n \subset A_k$ et comme $\mathbf{P}\left(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n\right) \neq 0$, alors $\mathbf{P}\left(A_k\right) \neq 0$; nous avons aussi, et pour les mêmes raisons $\mathbf{P}\left(A_1 \cap A_2\right) \neq 0$,....,$\mathbf{P}\left(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}\right) \neq 0$, de telle sorte que nous pouvons calculer les différentes probabilités conditionnelles.
Nous avons :

$$\mathbf{P}\left(A_1\right) \times \mathbf{P}\left(A_2 / A_1\right) \times \mathbf{P}\left(A_3 / A_1 \cap A_2\right) \times \cdots \times \mathbf{P}\left(A_n / A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}\right)$$
$$=$$
$$\mathbf{P}\left(A_1\right) \times \frac{\mathbf{P}\left(A_2 \cap A_1\right)}{\mathbf{P}\left(A_1\right)} \times \frac{\mathbf{P}\left(A_3 \cap A_1 \cap A_2\right)}{\mathbf{P}\left(A_1 \cap A_2\right)} \times \cdots \times \frac{\mathbf{P}\left(A_n \cap A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}\right)}{\mathbf{P}\left(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}\right)}$$

En simplifiant, successivement, nous avons

$$\mathbf{P}\left(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n\right)=\mathbf{P}\left(A_1\right) \times \mathbf{P}\left(A_2 / A_1\right) \times \mathbf{P}\left(A_3 / A_1 \cap A_2\right) \times \cdots \times \mathbf{P}\left(A_n / A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}\right)$$

Ce que nous voulions

13.3.2 Proposition : formule des probabilités totales

Soit $\{\Omega ; \mathcal{F} ; \mathbf{P}\}$ un espace probabilisé, et soit $A \in \mathcal{F}$ tel que $0<\mathbf{P}(A)<1$
Alors, pour tout $B \in \mathcal{F}$,

$$\mathbf{P}(B)=\mathbf{P}(B / A) \mathbf{P}(A)+\mathbf{P}(B / \overline{A}) \mathbf{P}(\overline{A})$$

Démonstration

On retrouve la méthode de cette démonstration dans plusieurs situations.
Retenons toujours que $\Omega=B \cup \overline{B}$, et que donc, pour $B \in \mathcal{F}$, nous avons :

$$B=B \cap \Omega=B \cap(A \cup \overline{A})=(B \cap A) \cup(B \cap \overline{A})$$

Donc, comme $(B \cap A) \cap(B \cap \overline{A})=\emptyset$

$$\mathbf{P}(B)=\mathbf{P}(B \cap A)+\mathbf{P}(B \cap \overline{A})=\mathbf{P}(B / A) \mathbf{P}(A)+\mathbf{P}(B / \overline{A}) \mathbf{P}(\overline{A})$$

Q.E.D.

Remarque 2 :

C'est une relation à utiliser si la réalisation de B dépend d'autres événements

Exemple 2 :

Exercice résolu

Soient U_1 et U_2 2 urnes

- ⋆ *La première urne U_1 contient b_1 boules blanches et n_1 boules noires*
- ⋆ *La seconde urne U_2 contient b_2 boules blanches et n_2 boules noires.*

On choisit l'une des 2 urnes au hasard puis, on tire 2 boules dans l'urne choisie.

On retrouve, ici, cette locution « au hasard », voulant dire qu'il y a équiprobabilité dans le choix des urnes ; comment procéder ? En jetant une pièce équilibrée, par exemple !

Quelle est la probabilité pour que les deux boules soient blanches ?

Résolution de cet exercice

Soit A_1, A_2 et B les événements : $A_1 = \{\text{le tirage se fait dans } U_1\}$, $A_2 = \{\text{le tirage se fait dans } U_2\}$, et $B = \{\text{les 2 boules tirées sont blanches}\}$

Il faut remarquer que $A_1 = \overline{A_2}$, et que $\mathbf{P}(A_1) = \mathbf{P}(A_2) = \dfrac{1}{2}$; donc :

$$\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(B/A_1)\,\mathbf{P}(A_1) + \mathbf{P}(B/A_2)\,\mathbf{P}(A_2)$$

Or, $\mathbf{P}(B/A_1) = \dfrac{\mathrm{C}^2_{b_1}}{\mathrm{C}^2_{b_1+n_1}}$ et $\mathbf{P}(B/A_2) = \dfrac{\mathrm{C}^2_{b_2}}{\mathrm{C}^2_{b_2+n_2}}$, et donc, $\mathbf{P}(B) = \dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{\mathrm{C}^2_{b_1}}{\mathrm{C}^2_{b_1+n_1}} + \dfrac{\mathrm{C}^2_{b_2}}{\mathrm{C}^2_{b_2+n_2}}\right\}$

13.3.3 Formule de Bayes

Soit $\{\Omega; \mathcal{F}; \mathbf{P}\}$ un espace probabilisé, et soit $A \in \mathcal{F}$ tel que $\mathbf{P}(A) > 0$. Soit $B \in \mathcal{F}$, tel que $\mathbf{P}(B) > 0$

Alors, $\mathbf{P}(A/B) = \dfrac{\mathbf{P}(B/A)\,\mathbf{P}(A)}{\mathbf{P}(B/A)\,\mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B/\overline{A})\,\mathbf{P}(\overline{A})}$

Démonstration

Nous avons : $\mathbf{P}(A/B) = \dfrac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)}$.

Pour le calcul de $\mathbf{P}(B)$, il suffit ensuite d'utiliser la formule des probabilités totales de 13.3.2

Exemple 3 :

Retour à l'exemple précédent 13.3.2

On constate que les deux boules tirées sont blanches. Quelle est la probabilité pour que ces deux boules proviennent de l'urne U_1 ?

On veut donc calculer $\mathbf{P}(A_1/B)$; or, $\mathbf{P}(A_1/B) = \dfrac{\mathbf{P}(B/A_1)\,\mathbf{P}(A_1)}{\mathbf{P}(B/A_1)\,\mathbf{P}(A_1) + \mathbf{P}(B/A_2)\,\mathbf{P}(A_2)}$

Or, $\mathbf{P}(B/A_1)\,\mathbf{P}(A_1) = \dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{\mathrm{C}^2_{b_1}}{\mathrm{C}^2_{b_1+n_1}}\right\}$ et $\mathbf{P}(B/A_2)\,\mathbf{P}(A_2) = \dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{\mathrm{C}^2_{b_2}}{\mathrm{C}^2_{b_2+n_2}}\right\}$

D'où le calcul ! !

13.3.4 Système complet d'événements

Soit $\{\Omega; \mathcal{F}\}$ un espace probabilisable

On appelle système complet d'événements une famille $\{A_n; n \in \mathbb{N}\}$ d'éléments de $\mathcal{F}$ tels que :

1. Ils sont deux à deux incompatibles, c'est à dire : $(m \neq n) \Longrightarrow (A_n \cap A_m = \emptyset)$
2. Et $\bigcup\limits_{n_i n\mathbb{N}} A_n = \Omega$

Remarque 3 :

1. La définition de système complet étant donnée pour une suite infinie d'événements, elle est tout autant valable pour un nombre fini d'événements $\{A_k; 1 \leqslant k \leqslant n\}$ où nous avons :
   (a) Pour tout $i = 1, \cdots, n$ et tout $j = 1, \cdots, n$, $(i \neq j) \Longrightarrow (A_i \cap A_j = \emptyset)$
   (b) Et $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k = \Omega$
2. Pour tout $A \in \mathcal{F}$, la famille $\{A, \overline{A}\}$ forme un système complet d'événements.

13.3.5 Formule des probabilités totales, généralisation

Soit $\{\Omega; \mathcal{F}; \mathbf{P}\}$ un espace probabilisé et $\{A_n; n \in \mathbb{N}\}$ un système complet d'éléments de $\mathcal{F}$.
Alors,
Pour tout $B \in \mathcal{F}$, nous avons $\mathbf{P}(B) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{P}(B/A_n)\,\mathbf{P}(A_n)$

Démonstration

Nous avons $B = B \cap \Omega = B \cap \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_n \cap B)$ par distributivité.
Comme pour $m \neq n$, nous avons $(A_n \cap B) \cap (A_m \cap B) = \emptyset$, nous avons :

$$\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_n \cap B)\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{P}(A_n \cap B)$$

D'après les résultats sur les probabilités conditionnelles, nous avons $\mathbf{P}(A_n \cap B) = \mathbf{P}(B/A_n) \times \mathbf{P}(A_n)$.
Donc :

$$\mathbf{P}(B) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{P}(B/A_n) \times \mathbf{P}(A_n)$$

13.3.6 Formule de Bayes, généralisation

Soit $\{\Omega; \mathcal{F}; \mathbf{P}\}$ un espace probabilisé et $\{A_n; n \in \mathbb{N}\}$ un système complet d'éléments de $\mathcal{F}$.
Alors,
Pour tout $B \in \mathcal{F}$, et tout $i \in \mathbb{N}$, nous avons

$$\mathbf{P}(A_i/B) = \frac{\mathbf{P}(B/A_i)\,\mathbf{P}(A_i)}{\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{P}(B/A_n)\,\mathbf{P}(A_n)}$$

Démonstration

Classiquement, $\mathbf{P}(A_i/B) = \dfrac{\mathbf{P}(A_i \cap B)}{\mathbf{P}(B)} = \dfrac{\mathbf{P}(B/A_i)\,\mathbf{P}(A_i)}{\mathbf{P}(B)}$

Or, $B = B \cap \Omega = B \cap \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_n \cap B)$ par distributivité.

Et donc, comme en 13.3.5 : $\mathbf{P}(B) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{P}(B/A_n) \times \mathbf{P}(A_n)$

D'où, nous obtenons $\mathbf{P}(A_i/B) = \dfrac{\mathbf{P}(B/A_i)\,\mathbf{P}(A_i)}{\mathbf{P}(B)} = \dfrac{\mathbf{P}(B/A_i)\,\mathbf{P}(A_i)}{\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{P}(B/A_n)\,\mathbf{P}(A_n)}$

Ce que nous voulions

Exemple 4 :

Une puce se déplace par sauts successifs sur les sommets d'un triangle équilatéral. Ce triangle est reproduit dans figure 13.1.
Au temps $t = 0$, la puce est en O. Puis, elle saute en l'un des points A, B ou C de façon équiprobable. Par la suite, au temps $t = n$, elle saute, du point où elle se trouve en l'un des autres points voisins de façon équiprobable.

1. *Calculer la probabilité pour que la puce revienne en O, pour la première fois, au temps $t = n$*
2. *Calculer la probabilité de l'événement « La puce revient en O ».*

1. Pour $k \in \mathbb{N}$, nous posons $A_k = \{\text{La puce est en } O \text{ à l'instant } t = k\}$; clairement, si $i \neq j$, alors $A_i \cap A_j = \emptyset$

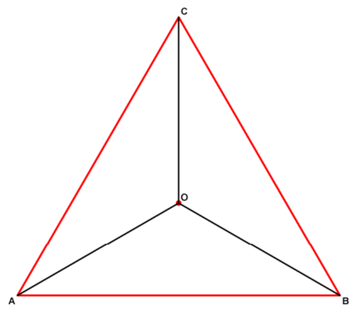

FIGURE 13.1 – Le Triangle et la puce

→ Clairement, $\mathbf{P}(A_0) = 1$ et $\mathbf{P}(A_1) = 0$

→ L'événement « La puce revient en O, pour la première fois, au temps $t = n$ » est donné par $\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_{n-1}} \cap A_n$

→ D'après la formule des probabilités totales, nous avons :

$$\begin{aligned}&\mathbf{P}\left(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_{n-1}} \cap A_n\right)\\ = &\mathbf{P}\left(\overline{A_1}\right) \times \mathbf{P}\left(\overline{A_2}/\overline{A_1}\right) \times \mathbf{P}\left(\overline{A_3}/\overline{A_1} \cap \overline{A_2}\right) \times \cdots \times \mathbf{P}\left(A_n/\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_{n-1}}\right)\end{aligned}$$

→ Nous avons donc $\mathbf{P}\left(\overline{A_1}\right) = 1$

→ Regardons $\mathbf{P}\left(\overline{A_2}/\overline{A_1}\right)$

On sait que nous avons $\overline{A_1}$, ce qui veut dire qu'à l'époque $t = 1$, la puce n'est pas sur le point O, mais sur les points A, B ou C ; et à $t = 2$, elle n'est toujours pas en O

Donc $\mathbf{P}\left(\overline{A_2}/\overline{A_1}\right) = \dfrac{2}{3}$

→ De manière générale, si $\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_{k-1}}$ est réalisé, ceci veut dire qu'au temps $t = k-1$, la puce n'est pas en O, mais sur les points A, B ou C et donc $\mathbf{P}\left(\overline{A_k}/\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_{k-1}}\right) = \dfrac{2}{3}$

→ Plus loin, nous avons, cette fois-ci, et de manière évidente $\mathbf{P}\left(A_n/\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_{n-1}}\right) \dfrac{1}{3}$

→ Donc :

$$\begin{aligned}&\mathbf{P}\left(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_{n-1}} \cap A_n\right)\\ = &\mathbf{P}\left(\overline{A_1}\right) \times \mathbf{P}\left(\overline{A_2}/\overline{A_1}\right) \times \mathbf{P}\left(\overline{A_3}/\overline{A_1} \cap \overline{A_2}\right) \times \cdots \times \mathbf{P}\left(A_n/\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_{n-1}}\right)\\ &= \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} \times \frac{1}{3}\end{aligned}$$

Ainsi, la probabilité pour que la puce revienne en O, pour la première fois, au temps $t = n$ est $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-2} \dfrac{1}{3}$

2. L'événement « La puce revient en O » est donné par $B = \bigcup\limits_{n \geqslant 2} A_n$.

   Et donc $\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}\left(\bigcup\limits_{n \geqslant 2} A_n\right) = \sum\limits_{n \geqslant 2} \mathbf{P}(A_n) = \sum\limits_{n \geqslant 2} \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-2} \dfrac{1}{3}$

   Or :
$$\sum_{n \geqslant 2} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \sum_{n \geqslant 2} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} = \frac{1}{3} \sum_{n \geqslant 0} \left(\frac{2}{3}\right)^{n} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 1$$

   Ainsi, presque sûrement, la puce revient en O.

Exercice 3 :

Un questionnaire à choix multiples propose m réponses pour chaque question. Soit p la probabilité qu'un étudiant connaisse la réponse à une question donnée. S'il ignore la réponse, il choisit au hasard l'une des réponses proposées. Quelle est pour le correcteur la probabilité qu'un étudiant connaisse vraiment la bonne réponse lorsqu'il l'a donnée ?

Exercice 4 :

Un test sanguin a une probabilité de 0.95 de détecter un certain virus lorsque celui ci est effectivement présent. Il donne néanmoins un faux résultat positif pour 1% des personnes non infectées. Si 0.5% de la population est porteuse du virus, quelle est la probabilité qu'une personne ait le virus sachant qu'elle a un test positif ?

Exercice 5 :

Cet exercice, qui ne pose aucune difficulté, se veut être une approche du paragraphe suivant
Soit $\{\Omega; \mathcal{F}; \mathbf{P}\}$ un espace probabolisé, $A \in \mathcal{F}$ et $B \in \mathcal{F}$ tels que $\mathbf{P}(A) \neq 0$ et $\mathbf{P}(B) \neq 0$
Montrez que les trois égalités suivantes sont équivalentes :

1. $\mathbf{P}(B|A) = \mathbf{P}(B)$
2. $\mathbf{P}(A|B) = \mathbf{P}(A)$
3. $\mathbf{P}(A|B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$