13.4 Notion d'indépendance

13.4.1 Définition

Soit $\{\Omega; \mathcal{F}; \mathbf{P}\}$ un espace probabilisé.
Deux événements $A \in \mathcal{F}$ et $B \in \mathcal{F}$ sont dits <u>indépendants</u> si et seulement si :

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) \times \mathbf{P}(B)$$

13.4.2 Proposition

Soit $\{\Omega; \mathcal{F}; \mathbf{P}\}$ un espace probabilisé, $A \in \mathcal{F}$ et $B \in \mathcal{F}$ tel que $\mathbf{P}(B) \neq 0$
Alors $A \in \mathcal{F}$ et $B \in \mathcal{F}$ sont indépendants si et seulement si : $\mathbf{P}(A/B) = \mathbf{P}(A)$

<u>Démonstration</u>

1. Supposons A et B indépendants,
   Alors $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) \times \mathbf{P}(B)$ et donc
   $$\mathbf{P}(A/B) = \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)} = \frac{\mathbf{P}(A) \times \mathbf{P}(B)}{\mathbf{P}(B)} = \mathbf{P}(A)$$
2. Réciproquement, supposons $\mathbf{P}(A/B) = \mathbf{P}(A)$;
   Nous avons, toujours $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A/B) \times \mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A) \times \mathbf{P}(B)$
   Les événements A et B sont donc indépendants.

Exemple 5 :

On jette deux fois le même dé. Les événements

$$A = \{\text{Nous obtenons un chiffre pair au premier lancer}\} \text{ et } B = \{\text{Nous obtenons 1 au second lancer}\}$$

sont indépendants.

<u>En effet</u>
L'espace fondamental est, ici, $\Omega = \{(i, j) \text{ avec } 1 \leqslant i \leqslant 6 \text{ et } 1 \leqslant j \leqslant 6\}$
Nous avons $\text{Card } \Omega = 36$.
Nous choisissons $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ et pour probabilité $\mathbf{P}$, la probabilité uniforme sur Ω
Clairement, $A = \{(2, j), (4, j), (6, j) \text{ avec } 1 \leqslant j \leqslant 6\}$; $\text{Card } A = 18$ et $\mathbf{P}(A) = \dfrac{18}{36} = \dfrac{1}{2}$.
De même, $B = \{(i, 1) \text{ avec } 1 \leqslant 6 \leqslant 6\}$; $\text{Card } B = 6$ et $\mathbf{P}(B) = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$
Nous avons alors $A \cap B = \{(2, 1); (4, 1); (6, 1)\}$, d'où

$$\text{Card } (A \cap B) = 3 \text{ et } \mathbf{P}(A \cap B) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

Nous avons bien $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) \times \mathbf{P}(B)$ et les événements A et B sont indépendants

Exemple 6 :

Si $A \in \mathcal{F}$ et $B \in \mathcal{F}$ sont tels que $\mathbf{P}(A) \neq 0$,$\mathbf{P}(B) \neq 0$ et $A \cap B = \emptyset$, alors, A et B ne sont pas indépendants puisque $\mathbf{P}(A \cap B) = 0$ alors que $\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B) \neq 0$; nous n'avons donc pas $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) \times \mathbf{P}(B)$.
Ainsi, 2 événements incompatibles A et B (c'est à dire tels que $A \cap B = \emptyset$) et tels que $\mathbf{P}(A) \neq 0$ et $\mathbf{P}(B) \neq 0$ ne sont jamais indépendants

Exercice 6 :

1. Soient $\{\Omega; \mathcal{F}; \mathbf{P}\}$ un espace probabilisé et deux événements $A \in \mathcal{F}$ et $B \in \mathcal{F}$ indépendants ; montrer que $\overline{A}$ et B sont indépendants, ainsi que $\overline{A}$ et $\overline{B}$
2. Montrer que 2 événements $A \in \mathcal{F}$ et $B \in \mathcal{F}$ sont indépendants si et seulement si $\mathbf{P}(A/B) = \mathbf{P}\left(A/\overline{B}\right)$

Remarque 4 :

L'indépendance de deux événements A et B n'est pas une propriété intrinsèque aux événements, elle est toujours relative au modèle $\{\Omega; \mathcal{F}; \mathbf{P}\}$ qui a été choisi.

Illustration par un exemple

$\Rightarrow$ *Une urne contient 12 boules numérotées de 1 à 12. On en tire une au hasard et on considère les événements :*

$$A = \{\textit{Tirage d'un nombre pair}\} \quad \textit{et } B = \{\textit{Tirage d'un multiple de 3}\}$$

L'espace probabilisé qui s'impose naturellement ici est $\Omega = \{1, \ldots, 12\}$ muni de la probabilité uniforme. Les événements A et B s'écrivent : $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$, $B = \{3, 6, 9, 12\}$ et $A \cap B = \{6, 12\}$.

Ainsi, $\mathbf{P}(A) = \dfrac{6}{12} = \dfrac{1}{2}$, $\mathbf{P}(B) = \dfrac{4}{12} = \dfrac{1}{3}$ et $\mathbf{P}(A \cap B) = \dfrac{2}{12} = \dfrac{1}{6}$

Nous avons donc $\mathbf{P}(A \cap B) = \dfrac{1}{6} = \mathbf{P}(B) \times \mathbf{P}(A)$ et A et B sont indépendants.

$\Rightarrow$ *On rajoute maintenant dans l'urne une boule numérotée treize et on recommence l'expérience*

Si les événements A et B restent les mêmes, **le modèle a changé**.
Nous avons toujours les mêmes événements $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$, $B = \{3, 6, 9, 12\}$ et $A \cap B = \{6, 12\}$, mais l'espace fondamental Ω_1 a changé. Nous avons $\Omega_1 = \{1, \ldots, 12, 13\}$, de telle sorte que $\mathbf{P}(A) = \dfrac{6}{13}$, $\mathbf{P}(B) = \dfrac{4}{13}$ et $\mathbf{P}(A \cap B) = \dfrac{2}{13}$

Nous avons $\mathbf{P}(A \cap B) \neq \mathbf{P}(B) \times \mathbf{P}(A)$ et A et B **ne sont pas indépendants.**

13.4.3 Définition d'événements indépendants dans leur ensemble

Soit $\{\Omega; \mathcal{F}; \mathbf{P}\}$ un espace probabilisé

1. Soient $A_1, \ldots, A_n$, n événements de $\mathcal{F}$.
   On dit que $A_1, \ldots, A_n$ sont indépendants dans leur ensemble (ou mutuellement indépendants ou totalement indépendants), si, pour tout sous-ensemble $I \subset \{1, \ldots, n\}$, $\mathbf{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} \mathbf{P}(A_i)$
2. Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements de $\mathcal{F}$. On dit que ces événements sont mutuellement indépendants si et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille d'événements $A_1, \ldots, A_n$, sont mutuellement indépendants

Remarque 5 :

1. Si $E_1, \ldots, E_n$ sont n événements totalement indépendants, alors

$$\mathbf{P}(E_1 \cap E_2 \cap \ldots \cap E_n) = \mathbf{P}(E_1) \times \mathbf{P}(E_2) \times \cdots \times \mathbf{P}(E_n)$$

2. Si n événements sont indépendants dans leur ensemble alors, ils le sont 2 à 2, mais la réciproque est fausse, comme on peut le voir dans l'exercice ci-dessous.

Exercice 7 :

On jette 2 dés à 6 faces non truqués et on considère les événements suivants :
- $A_1 = \{\text{le premier dé donne un nombre pair}\}$
- $A_2 = \{\text{le second dé donne un nombre pair}\}$
- $A_3 = \{\text{la somme des dés donne un nombre pair}\}$

Montrer que A_1 et A_2 sont indépendants, que A_1 et A_3 sont indépendants, que A_3 et A_2 sont indépendants, mais que A_1 et A_2 et A_3 ne sont pas indépendants dans leur ensemble.

13.4.4 Epreuve de Bernouilli

On appelle épreuve de Bernouilli, une expérience aléatoire pour laquelle Ω a 2 éléments

Remarque 6 :

1. Si $\Omega = \{a; b\}$, il suffit de connaître $\mathbf{P}(\{a\}) = p$ et donc, $\mathbf{P}(\{b\}) = 1 - p = q$
2. Le schéma de Bernouilli est adapté aux expériences dans lesquelles il n'y a que deux issues possibles : **Echec** ou **succès**

13.4.5 Loi Binômiale

Soit $\Omega = \{a, b\}$ un univers associé à une épreuve de Bernouilli ; on pose $\mathbf{P}(\{a\}) = p$ et $\mathbf{P}(\{b\}) = 1 - p = q$.
L'événement $\{a\}$ est considéré comme un succès.
L'univers associé à la répétition de n épreuves de Bernouilli, identiques et indépendantes est le produit cartésien $\Omega^n = (\{a, b\})^n$
La probabilité pour obtenir k succès (ou k fois $\{a\}$) est $\mathrm{C}_n^k p^k (1-p)^{n-k} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

Démonstration

On étudie pour le cas particulier $n = 3$ Imaginez que l'on répète trois fois la même opération qui n'a que deux choix : réussite ou succès. Combien de possibilités d'événements avons nous ? Bien évidemment : 2^3

L'évenement " avoir deux succès " est donné par : $\{(a, a, b) ; (a, b, a) ; (b, a, a)\}$; chacun des événements élémentaire de " avoir deux succès " a pour probabilité $p^2 q$; donc, $\mathbf{P}(\{\text{avoir deux succès}\}) = 3p^2 q$

Cas général Un événement élémentaire ω d'une répétition de n épreuves de Bernouilli identiques et indépendantes est donné par une succession de $\{a\}$ ou de $\{b\}$; on a donc

$$\omega = (a, b, b, a, \ldots, b, b, a)$$

où ω est un " mot " de longueur n
Nous avons donc un espace fondamental E défini par :

$$E = \{\omega = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \text{ où } y_i \in \{a, b\}\}$$

C'est à dire $E = \Omega^n$ E est donc l'ensemble des suites finies d'éléments de $\{a, b\}$
L'évenement " avoir k succès " est donné par : $\{(a, a, \ldots, b) ; \ldots ; (a, \ldots, b, a) ; (b, a, \ldots, a)\}$; où les mots ω ont une longueur de n chacun des événements élémentaires de « avoir $k$succès »a pour probabilité $p^k q^{n-k}$.
Avoir k succès, c'est placer k $\{a\}$ dans n emplacements, et il y a C_n^k façons de le faire, donc,

$$\mathbf{P}(\{\text{avoir } k \text{ succès}\}) = \mathrm{C}_n^k p^k q^{n-k}$$

Exemple 7 :

On réalise une séquence infinie d'épreuves de Bernouilli indépendantes. Chaque épreuve donne soit un succès avec la probabilité p, soit un échec avec la probabilité $1-p$
Quelle est la probabilité pour que :

1. *Il survienne au moins un succès parmi les n premières épreuves*
2. *Qu'il survienne exactement k succès parmi les n premières épreuves*
3. *Que toutes les épreuves donnent un succès*

Résolution

1. **Quelle est la probabilité pour qu'il survienne au moins un succès parmi les n premières épreuves**
   Comme souvent, dans de tels problèmes, nous allons nous intéresser à l'événement contraire : « Il n'y a aucun succès pendant les n épreuves »
   Considérons l'événement $E_i = \{\text{la } i\text{-ème épreuve donne un échec}\}$; alors l'événement « Il n'y a aucun succès pendant les n épreuves »est donné par : $E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_n = \bigcap\limits_{i=1}^{n} E_i$, et
   $$\mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} E_i\right) = \mathbf{P}\left(E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_n\right) \overset{\text{Indépendance}}{=} \mathbf{P}\left(E_1\right)\times\mathbf{P}\left(E_2\right)\times\cdots\mathbf{P}\left(E_n\right) = (1-p)^n$$
   Ainsi, la probabilité pour qu'il survienne au moins un succès parmi les n premières épreuves est $1-(1-p)^n$
2. **Quelle est la probabilité pour qu'il survienne exactement k succès parmi les n premières épreuves**
   La résolution de cette question est une autre démonstration du théorème 13.4.5
   Considérons une séquence de n épreuves qui comprennent k succès, et donc $n-k$ échecs, ces échecs et ces succès apparaissants dans un ordre bien précis. Cette séquence apparaîtra avec la probabilité $p^k(1-p)^{n-k}$. Comme il y a $\binom{n}{k}$ telles séquences qui sont les façons de placer k succès et $n-k$ échecs parmi n épreuves.
   La probabilité demandée est donc $\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$
3. **Quelle est la probabilité pour que toutes les épreuves donnent un succès**
   L'événement « Toutes les épreuves donnent un succès » peut se traduire par :
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\overline{E_n}$ est réalisé, et en termes ensemblistes, cet événement se traduit par : $\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} \overline{E_n}$
   Considérons l'événement $X_n = \bigcap\limits_{k=1}^{n} \overline{E_n}$ qui est l'événement « **n'avoir que des succès lors des n premières épreuves** » ; la probabilité de X_n est donnée par :
   $$\mathbf{P}\left(X_n\right) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} \overline{E_n}\right) \overset{\text{Indépendance}}{=} \mathbf{P}\left(\overline{E_1}\right) \times \mathbf{P}\left(\overline{E_2}\right) \times \cdots \times \mathbf{P}\left(\overline{E_n}\right) = p^n$$
   D'autre part, nous avons $X_{n+1} \subset X_n$, car, **si** nous n'avons que des succès lors des $n+1$ premières épreuves **alors** nous n'avons que des succès lors des n premières épreuves.
   L'événement « Toutes les épreuves donnent un succès » se traduisant par : $\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} \overline{E_n} = \bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} X_n$, d'après la proposition 12.3.4,
   $$\mathbf{P}\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} X_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(X_n\right) = \lim_{n\to\infty} p^n = \begin{cases} 0 \text{ si } p<1 \\ 1 \text{ si } p=1 \end{cases}$$