13.5 Exercices

Exercice 8 :

On considère des nombres décimaux a et b appartenant à l'intervalle $]0,1[$, tels que $10a$ et $10b$ sont des nombres entiers. Une urne rouge contient $10a$ boules rouges et $10(1-a)$ boules noires et une urne noire contient $10b$ boules rouges et $10(1-b)$ boules noires.
Les boules étant indiscernables les unes des autres, on effectue une suite de tirages au hasard d'une boule dans l'une des deux urnes selon les règles suivantes :

— Le premier tirage a lieu dans l'une des deux urnes prise au hasard *(On admet l'équiprobabilité.)*
— Après chaque tirage dans une urne, la boule est remise dans la même urne;
— Pour tout nombre entier naturel n, le $n+1$-ième tirage a lieu dans l'urne de la couleur de la boule tirée au n-ième tirage.

Pour tout nombre entier strictement positif n, on désigne par R_n l'évènement

« On tire une boule rouge au n-ième tirage »

Et par N_n l'évènement

« On tire une boule noire au n-ième tirage »

1. Calculer les probabilités $\mathbf{P}(R_1)$ et $\mathbf{P}(N_1)$
2. Expliquer pourquoi, pour tout entier naturel n strictement supérieur à 1,nous avons :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P}(R_n) \\ \mathbf{P}(N_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 1-a & 1-b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{P}(R_{n-1}) \\ \mathbf{P}(N_{n-1}) \end{pmatrix}$$

Exercice 9 :

Le gérant d'un magasin d'informatique a reçu un lot de boites de CD-ROM. 5% de ces boîtes sont abîmées. Le gérant estime que :

— 60% des boîtes abîmées contiennent au moins un CD-ROM défectueux.
— 98% des boîtes non abîmées ne contiennent aucun CD-ROM défectueux.

Un client achète une boite du lot. On désigne par A l'événement : « La boite est abimée » et par B l'événement « La boite achetée contient au moins un disque défectueux ».

Exercice 10 :

Une compagnie d'assurance répartit ses clients en trois classes de risques :

— $R1$ est la classe des « bons risques »
— $R2$ est la classe des « risques moyens »
— $R3$ est la classe des « mauvais risques »

Les effectifs de ces trois classes représentent

— 20% de la population totale pour la classe $R1$
— 50% pour la classe $R2$
— 30% pour la classe $R3$

Les statistiques indiquent que les probabilités d'avoir un accident au cours de l'année pour une personne de l'une de ces trois classes sont respectivement de 0,05, 0,15 et 0,30.

Exercice 11 :

Soit $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}\}$ un espace probabilisé.
Soient A et B deux événements tels que

$$\mathbf{P}(A) = \frac{2}{3} \text{ et } \mathbf{P}(B) = \frac{5}{6}$$

1. Démontrez que $\mathbf{P}(A \cap B) \geqslant \dfrac{1}{2}$
2. Les événements A et B sont-ils incompatibles ?

3. On suppose $\mathbf{P}(A \cap B) = \dfrac{5}{9}$.
   (a) Les événements A et B sont-ils indépendants ?
   (b) Donner $\mathbf{P}(A/B)$

Exercice 12 :

Soit $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}\}$ un espace probabilisé.
Soient A et B deux événements tels que

$$\mathbf{P}(A) = \frac{1}{3} \text{ et } \mathbf{P}(B) = \frac{1}{2}$$

Calculer $\mathbf{P}(A \cup B)$ dans chacun des cas suivants :

1. A et B sont des événements incompatibles
2. A et B sont des événements indépendants
3. L'événement A implique l'événement B.
4. $\mathbf{P}(A/B) = \dfrac{1}{2}$

Exercice 13 :

Soit $\{\Omega; \mathcal{F}; \mathbf{P}\}$ un espace probabilisé et A et B deux éléments de $\mathcal{F}$. Montrer que :

1. Si $\mathbf{P}(A) = 1$, alors, il est indépendant de lui-même
2. Si $\mathbf{P}(A) = 0$, alors, il est indépendant de tout événement
3. Si A est indépendant de lui-même, alors $\mathbf{P}(A) = 1$ ou $\mathbf{P}(A) = 0$
4. Si A et$B$ sont tels que $\mathbf{P}(A) = 0$ et $\mathbf{P}(B) = 0$, alors $\mathbf{P}(A \cup B) = 0$
5. Si A et$B$ sont indépendants et disjoints, alors $\mathbf{P}(A) = 0$ ou $\mathbf{P}(B) = 0$.

Exercice 14 :

Soit $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}\}$ un espace probabilisé

1. Soit $A \in \mathcal{F}$ tel que $\mathbf{P}(A) > 0$; On appelle $\mathbf{P}^A$ la probabilité conditionnelle sachant A.
   Soit $B \in \mathcal{F}$ tel que $\mathbf{P}^A(B) > 0$; démontrer que $\mathbf{P}^A(X/B) = \dfrac{\mathbf{P}^A\left(X \bigcap B\right)}{\mathbf{P}^A(B)} = \mathbf{P}(X/B \cap A)$
2. Démontrer que pour tout événement $A \in \mathcal{F}$, $B \in \mathcal{F}$ et $C \in \mathcal{F}$

$$\mathbf{P}(A \cap B/C) = \mathbf{P}(A/C)\,\mathbf{P}(B/A \cap C)$$

Exercice 15 :

$\{\Omega; \mathbb{F}; \mathbf{P}\}$ est un espace probabilisé, et A et B 2 événements de probabilité respective $\mathbf{P}(A)$ et $\mathbf{P}(B)$.

1. Calculer la probabilité de $\mathbf{P}\left(\left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(\overline{A} \cap B\right)\right)$, en fonction de $\mathbf{P}(A)$, $\mathbf{P}(B)$ et $\mathbf{P}(A \cap B)$
2. On suppose $\mathbf{P}(B) \neq 0$; montrer que $\mathbf{P}(A/B) + \mathbf{P}\left(\overline{A}/B\right) = 1$

Exercice 16 :

Un joueur a le choix entre les deux paris suivants :

1°pari : Jeter 6 dés, et gagner s'il "sort" au moins un as

2°pari : Jeter 12 dés, et gagner s'il "sort" au moins deux as

Calculez la probabilité de gagner dans chaque cas, les issues possibles étant supposées équiprobables.

Exercice 17 :

Assume that E and F are two events with positive probabilities. Show that if $\mathbf{P}(E|F) = \mathbf{P}(E)$, then $\mathbf{P}(F|E) = \mathbf{P}(F)$

Exercice 18 :

Le roi vient d'une famille de 2 enfants ; quelle est la probabilité pour que l'autre enfant soit sa soeur ?

Exercice 19 :

Let $\Omega = \{a, b, c, d, e, f, \}$. Assume that $\mathbf{P}(a) = \mathbf{P}(b) = 1/8$ and $\mathbf{P}(c) = \mathbf{P}(d) = \mathbf{P}(e) = \mathbf{P}(f) = 3/16$. Let A, B, and C be the events $A = \{d, e, a\}$, $B = \{c, e, a\}$, $C = \{c, d, a\}$.
Show that $\mathbf{P}(A \cap B \cap C) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)\mathbf{P}(C)$ but no two of these events are independent.

Exercice 20 :

Une population d'une ville compte 48% d'hommes et 52% de femmes ; on sait que 5% des hommes et 3% des femmes sont atteint d'une maladie M.

1. Quelle est la proportion de personnes de la ville atteint de la maladie M ?
2. On prend une personne au hasard, et on constate qu'elle est atteinte de la maladie M ; quelle est la probabilité pour que ce soit une femme ?

Exercice 21 :

La firme Computex a déposé auprès du ministère de l'Education Nationale deux cahiers de charge séparés pour la fourniture de mobilier informatique et de micro-ordinateurs. L'entreprise estime à 60% ses chances d'obtenir le contrat de fourniture de mobilier informatique. Si ce contrat lui est alloué, la firme évalue ses chances à 2 sur 3 d'obtenir le contrat des micro-ordinateurs. Toutefois, si le contrat de fourniture de mobilier informatique lui échappe, elle estime quand même à 30% ses chances de se voir octroyer le contrat des micro-ordinateurs.

1. Quelle est la probabilité pour que Computex obtienne les deux contrats ?
2. Quelle est la probabilité que Computex n'obtienne que le contrat des microordinateurs ?
3. Quelle est la probabilité que Computex obtienne le contrat des micro-ordinateurs (qu'il ait obtenu ou non le contrat de fourniture de mobilier informatique) ?
4. Computex vient d'annoncer qu'il a obtenu le marché des micro-ordinateurs. Quelle est la probabilité qu'il ait obtenu celui du mobilier informatique ?

Exercice 22 :

Dans une population on sait que la probabilité de naissance d'un garçon est de 0,52, que par ailleurs que 2% des filles et 1% des garçons présentent une luxation congénitale de la hanche.

1. On note F l'évènement $F = \{\text{Naissance d'une fille}\}$ et L l'évènement $L = \{\text{Avoir une luxation de la hanche}\}$. Les évènements F et L sont-ils indépendants ?
2. Calculer la probabilité pour qu'un nouveau-né présentant une luxation soit une fille.

Exercice 23 :

Un système composé de n modules est dit être un $k \lhd n$ système si et seulement si le système fonctionne si au moins k $(k \leqslant n)$ modules sur les n sont en état de fonctionner.
On suppose que tous les modules fonctionnent de manière indépendante les uns des autres avec la même probabilité p.

1. Calculer la probabilité pour qu'un système $2 \lhd 4$ fonctionne
2. Même question pour un système $3 \lhd 5$
3. Généraliser pour un système $k \lhd n$

Exercice 24 :

La probabilité pour qu'une machine tombe en panne au cours d'un mois est $p = 0,06$; une entreprise possède 10 machines de ce type. Quelle est la probabilité pour qu'au cours du prochain mois,

1. Toutes les machines tombent en panne
2. Au moins 2 machines tombent en panne

Exercice 25 :

Critiquer le raisonnement suivant :
En lançant une fléchette, j'ai une chance sur deux d'atteindre la cible, donc, en lançant la fléchette deux fois, j'atteindrai la cible à coup sûr.

Exercice 26 :

On lance 2 dés distincts numérotés de 1 à 6 ; soient x_1 et x_2 les nombres fournis par ces 2 dés

1. Calculez $\mathbf{P}(\{x_1 + x_2 = 5\})$ et $\mathbf{P}(\{x_1 + x_2 = 7\})$
2. Si on lance les 2 dés 3 fois de suite, quelle est la probabilité pour que $y = x_1 + x_2$ prenne au moins une fois la valeur 5 et une fois la valeur 7

Exercice 27 :

1. On lance deux dés cubiques numérotés de 1 à 6, et nous considérons la somme amenée par ce lancer. On appelle A l'événement $A = \{\text{La somme amenée est } 6\}$, et B l'événement $B = \{\text{La somme amenée est } 7\}$.
   Donner $\mathbf{P}(A)$ et $\mathbf{P}(B)$
2. Lénaïg et Erwann jouent au jeu suivant :

   > On lance 2 dés cubiques ; pour gagner, Lénaïg doit obtenir 6 exactement, et pour gagner, Erwann doit obtenir 7 exactement.
   > Si aucun des deux n'a gagné, on recommence à jouer
   > C'est Lénaïg qui commence à jouer *(ce qui veut dire Lénaïg joue à tous les lancers impairs, et que Erwann joue à tous les lancers pairs).*
   > Les lancers sont bien entendu supposés tous indépendants les uns des autres.

   On appelle A_k l'événement :$A_k = \{$ Lénaïg gagne au *k-ième* lancer$\}$ et B_k l'événement : $B_k = \{$Erwann gagne au *k-ième* lancer$\}$
   En écrivant les événements A_k et B_k sous forme d'intersection et de complémentation, calculer $\mathbf{P}(A_k)$ et $\mathbf{P}(B_k)$
3. Ecrire les événements $\{$Lénaïg gagne$\}$ et $\{$Erwann gagne$\}$
4. En déduire $\mathbf{P}(\{\text{Lénaïg gagne}\})$ et $\mathbf{P}(\{\text{Erwann gagne}\})$

Exercice 28 :

Un laboratoire a mis au point un alcool-test. Les premiers résultats sont les suivants :
— 2% des personnes contrôlées par la police sont réellement en état d'ébriété
— 95 fois sur 100 l'alcool-test s'est révélé positif, alors qu'une personne était réellement en état d'ébriété.
— 95 fois sur 100 l'alcool-test s'est révélé négatif, alors qu'une personne n'était pas en état d'ébriété

1. Une personne est contrôlée par la police ; quelle est la probabilité pour que le test soit positif ?
2. Calculez la probabilité pour qu'une personne ne soit pas en état d'ébriété sachant que le test est positif.
3. Calculez la probabilité pour qu'une personne soit en état d'ébriété sachant que le test est négatif.

Exercice 29 :

On lance n dés non pipés ; A_n l'événement : $A_n = \{\text{Le total des numéros amenés est pair}\}$; montrer que la suite $(\mathbf{P}(A_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite constante.

Exercice 30 :

1. On considère les suites numériques réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = au_n + b \end{cases}$$

avec $a \neq 1$

(a) Démontrez que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = u_n - \dfrac{b}{1-a}$ est une suite géométrique de raison a

(b) En déduire que

$$u_n = a^n\left(u_0 - \frac{b}{1-a}\right) + \frac{b}{1-a}$$

2. On s'intéresse à la transmission d'un information binaire, c'est à dire d'une information ne pouvant prendre que 2 valeurs : 0 ou 1

On admet que le procédé de transmission entre 2 individus A et B *(ou encore, entre 2 "stations" A et B)* est tel que, lorsque A émet une valeur de l'information à destination de B, B reçoive cette information avec la probabilité p, et donc l'autre information avec la probabilité $q = 1-p$; on a, bien entendu, $p \in]0,1[$.
Soit $n \in \mathbb{N}$
On considère $n+1$ individus successifs : $i_0, i_1, \ldots, i_n$
L'information émise par i_0 à destination de i_1 est elle-même transmise par i_1 à i_2, et ainsi de suite jusqu'à i_n.
Pour $k \in \{1, \cdots, n\}$, on note A_k l'événement

$$A_k = \{\text{L'individu } i_k \text{ reçoit la même information que celle émise par } i_0\}$$

et p_k est la probabilité $\mathbf{P}(A_k)$; on pose $p_0 = 1$

(a) En écrivant $A_{k+1} = A_{k+1} \cap \left(A_k \cup \overline{A_k}\right)$, exprimer p_{k+1} en fonction de p_k

(b) En déduire l'expression de p_n en fonction de n et p.

(c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$. Que conclure ?

Exercice 31 :

Chaîne de Markov [1]

Monsieur IKCX, possède depuis plusieurs années un téléphone portable. Il étudie l'évolution de sa consommation sur plusieurs mois. Pour $n \in \mathbb{N}$, on appelle A_n l'événement

$$A_n = \{\text{Monsieur IKCX dépasse son forfait au mois N° } n\}$$

Nous avons, pour $n > 1$:

$$\begin{cases} \mathbf{P}(\{A_n/A_{n-1}\}) = \dfrac{1}{5} \\ \mathbf{P}\left(\{A_n/\overline{A_{n-1}}\}\right) = \dfrac{2}{5} \\ \mathbf{P}(\{A_1\}) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Nous posons ensuite $\mathbf{P}(\{A_n\}) = a_n$ et $V_n = \begin{pmatrix} a_n \\ 1-a_n \end{pmatrix}$

1. Les chaînes de Markov seront mieux étudiées dans le chapitre **??**

1. Démontrer que $V_{n+1} = MV_n$ où M est la matrice $M = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$. M est appelée **matrice stochastique** ou **matrice de transition**
2. Démontrer que $V_n = M^{n-1}V_1$
3. On pose $P = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ avec $a+b=1$; Résoudre l'équation $P = M \times P$; on dit que P est le vecteur de probabilité invariant par M
4. D'après la question 1 nous avons la relation : $a_{n+1} = \dfrac{-1}{5}a_n + \dfrac{2}{5}$
   Donner $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$; faire le lien avec la question 3

Exercice 32 :

Une pièce de monnaie amène " pile " avec la probabilité p et " face " avec la probabilité $q = 1-p$; on lance indéfiniment cette pièce, et les lancers successifs sont indépendants.

1. A_n est l'événement : $A_n = \{$"pile" sort pour la 1ère fois au n-ième lancer$\}$; Calculer $(\mathbf{P}(A_n))_{n\in\mathbb{N}}$
2. Soit B l'événement : $B = \{$On obtient "pile"$\}$ Montrer que cet événement est quasi-certain
3. Soit C l'événement :
   $$C = \{\text{On obtient "pile" pour la première fois au bout d'un nombre pair de lancers}\}$$
   Montrer que $C = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} A_{2k}$ et calculez $\mathbf{P}(C)$
4. Soit D l'événement :
   $$D = \{\text{On obtient "pile" pour la première fois au bout d'un nombre de lancers multiple de 3}\}$$
   Calculez $\mathbf{P}(D)$
5. Les événements C et D sont-ils indépendants ?

Exercice 33 :

On effectue des tirages dans une urne contenant initialement a boules blanches et b boules noires de la façon suivante :

On remet à chaque fois la boule tirée à laquelle on ajoute c boules de même couleur

1. Calculer la probabilité pour obtenir la **première** boule blanche au n-ième tirage *(utiliser l'événement $N_j = \{$On amène une boule noire au j-ème tirage$\}$)*
2. Soit C_m l'événement $C_m = \{$Les m premiers tirages amènent m boules noires$\}$. Exprimer C_m en fonction des N_j et donner $\mathbf{P}(C_m)$ sous forme de somme.
   Démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(\mathbf{P}(C_m)) = -\infty$
3. Soit C l'événement $C = \{$Il n'apparaît que des boules noires$\}$. Exprimer C en fonction des $(C_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ puis, conclure que $\mathbf{P}(C) = 0$.
4. Quelle est la valeur de $\sum\limits_{n\geqslant 1} \mathbf{P}(A_n)$. Interpréter ce résultat

Exercice 34 :

La ruine du joueur

Un joueur joue une série de manches indépendantes *(Dés, « Pile ou Face », etc....)*

- ▷ A chaque manche, il gagne 1€ avec la probabilité p et perd 1 € avec la probabilité $1-p$
- ▷ Le jeu s'arrête lorsque le joueur a gagné N € ou lorsqu'il est ruiné.

Nous notons u_k la probabilité qu'a le joueur d'être ruiné lorsqu'il possède k € au départ

1. On suppose $p \neq \dfrac{1}{2}$
   (a) Calculer u_0 et u_N
   (b) Montrer que $u_k = pu_{k+1} + (1-p)\, u_{k-1}$
   (c) En déduire que $u_k = \dfrac{\left(\frac{1-p}{p}\right)^k - \left(\frac{1-p}{p}\right)^N}{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^N}$
   (d) Que se passe-t-il lorsque N tend vers $+\infty$
2. Reprendre les questions précédentes avec $p = \dfrac{1}{2}$

Exercice 35 :

Voici un exercice classique qui ne devrait poser aucune difficulté
Une urne U_1 contient une boule noire et cinq boules blanches.
Une urne U_2 contient quatre boules noires et deux boules blanches.
On tire une boule au hasard d'une des deux urnes. On note la couleur de la boule et on la replace dans l'urne.
Si la boule est blanche on effectue un autre tirage dans la même urne, sinon on tire une seconde boule dans l'autre urne.
On répète cette expérience une infinité de fois.
Soient A_n l'événement :

$$A_n = \{\text{Le } n\text{-ième tirage a lieu dans l'urne } U_1\}$$

et B_n l'événement :

$$B_n = \{\text{Le } n\text{-ième tirage amène une boule blanche}\}$$

1. (a) Calculer les probabilités conditionnelles $\mathbf{P}\left(A_n / A_{n-1}\right)$ et $\mathbf{P}\left(A_n / \overline{A_{n-1}}\right)$
   (b) Soit $p_n = \mathbf{P}\left(A_n\right)$. Etablir une relation de récurrence entre p_n et p_{n-1} et en déduire p_n
2. Soit $q_n = \mathbf{P}\left(B_n\right)$
   (a) Exprimer q_n en fonction de p_n
   (b) Calculer q_n

Exercice 36 :

Cet exercice vient en complément de la proposition 12.3.8 sur **le lemme de BOREL-CANTELLI**

1. Dans cette proposition, nous affirmions que, si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements d'un espace probabilisé $\{\Omega ; \mathcal{F} ; \mathbf{P}\}$ tels que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \mathbf{P}\left(A_n\right)$ converge, et si

$$B = \{\text{Une infinité d'événements } A_n \text{ se réalisent}\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(\bigcup_{p\geqslant n} A_p\right)$$

   alors, $\mathbf{P}\left(B\right) = \mathbf{P}\left(\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \left(\bigcup\limits_{p\geqslant n} A_p\right)\right) = 0$
   En d'autres termes, **P**-presque sûrement, seuls un nombre fini d'événements A_n se produisent, autrement dit $\mathbf{P}\left(\overline{B}\right) = \mathbf{P}\left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \left(\bigcap\limits_{p\geqslant n} \overline{A_p}\right)\right) = 1$
2. Nous allons compléter la proposition 12.3.8 en supposant maintenant que les événements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont mutuellement indépendants, et que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \mathbf{P}\left(A_n\right)$ diverge, c'est à dire $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{p=0}^{n} \mathbf{P}\left(A_n\right) = +\infty$

(a) On appelle $E_n = \bigcap_{p \geqslant n} \overline{A_p}$, c'est à dire que $\overline{B} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$; montrer que la suite des événements $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, c'est à dire que $E_n \subset E_{n+l}$, et en déduire que $\mathbf{P}\left(\overline{B}\right) = \lim_{n \to +\infty} \mathbf{P}(E_n)$

(b) Démontrer que $\mathbf{P}\left(\bigcap_{p \geqslant n} \overline{A_p}\right) = \mathbf{P}(E_n) = \lim_{N \to +\infty} \prod_{p=n}^{N} \mathbf{P}\left(\overline{A_p}\right)$

(c) Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $0 \leqslant x < 1$ nous avons $\ln(1-x) \leqslant -x$; en déduire que :

$$\lim_{N \to +\infty} \left[\ln\left(\prod_{p=n}^{N} \mathbf{P}\left(\overline{A_p}\right)\right)\right] = \lim_{N \to +\infty} \ln\left(\mathbf{P}(F_N)\right) = -\infty$$

(d) Conclure que $\lim_{N \to +\infty} \prod_{p=n}^{N} \mathbf{P}\left(\overline{A_p}\right) = 0$, puis que $\mathbf{P}\left(\overline{B}\right) = 0$

On vient de montrer que si les événements $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont mutuellement indépendants, et que la série $\sum_{n \geqslant 0} \mathbf{P}(A_n)$ diverge, alors $\mathbf{P}\left(\bigcap_{p \in \mathbb{N}} \left(\bigcup_{n \geqslant p} A_n\right)\right) = 1$, c'est à dire, que $\mathbf{P}$-presque sûrement, une infinité d'événements A_n se produisent.

3. **Application à un problème de « Pile ou Face »**

On lance une pièce de monnaie indéfiniment. La probabilité pour amener « PILE » est p et celle d'amener « FACE » est $q = 1 - p$

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$; on note A_n l'événement $A_n = \{$« PILE » apparaît au n-ième lancer$\}$ Donner $\mathbf{P}(A_n)$ et en déduire que la série $\sum_{n \geqslant 1} \mathbf{P}(A_n)$ diverge

Conclure que « PILE » apparaît une infinité de fois de façon quasi-certaine.

(b) Soit $m \in \mathbb{N}^*$ On note E_n l'événement :

$$E_n = \{\text{Les lancers } nm+1 \text{ à } nm+m \text{ amènent des PILE uniquement}\}$$

Donner $\mathbf{P}(E_n)$ et en déduire que la série $\sum_{n \geqslant 1} \mathbf{P}(E_n)$ diverge. Conclure que la séquence des m « PILE » consécutifs apparaît une infinité de fois.

4. **Application au mouvement d'une particule**

L'espace $\mathbb{R}^3$ est rapporté à un repère orthonormé $\left\{O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right\}$ et on considère une particule qui se déplace dans cet espace ; on tente de repérer sa position, à temps entiers.

⇒ En $t = 0$, elle est à l'origine O

⇒ En $t = n$, elle se trouve en $M_n = (x_n, y_n, z_n)$ à coordonnées entières.

⇒ En $t = n+1$, elle se trouve en $M_{n+1} = (x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1})$ où x_{n+1} est obtenu à partir de x_n en faisant varier x_n de $+1$ ou de -1 et, de même pour les 2 autres coordonnées.

⇒ La particule se retrouve donc de façon équiprobable à l'un des 8 sommets du cube dont $M_n = (x_n, y_n, z_n)$ est le centre, les mouvements successifs de la particules étants indépendants

(a) ▷ Soit E_n l'événement : $E_n = \{$La particule est dans le plan yOz au temps $t = 2n\}$
▷ Soit F_n l'événement : $F_n = \{$La particule est dans le plan xOz au temps $t = 2n\}$
▷ Soit G_n l'événement : $G_n = \{$La particule est dans le plan xOy au temps $t = 2n\}$
Calculer $\mathbf{P}(E_n)$, $\mathbf{P}(F_n)$ et $\mathbf{P}(G_n)$

(b) Soit A_n l'événement : $A_n = \{$La particule est en O au temps $t = 2n\}$ Calculer $\mathbf{P}(A_n)$

(c) On pose $v_n = \sqrt{n}\binom{2n}{n}\dfrac{1}{4^n}$ pour $n \geqslant 1$

i. Calculer $w_n = \ln\left(\dfrac{v_{n+1}}{v_n}\right)$

ii. Montrer que $w_n \underset{+\infty}{\approx} \dfrac{1}{8n^2}$; en déduire que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} w_n$ converge, puis que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

iii. On pose $l = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$; montrer que $\mathbf{P}(A_n) \underset{+\infty}{\approx} \dfrac{l^3}{n^{\frac{3}{2}}}$

iv. En utilisant le lemme de Borel-Cantelli, montrer que, $\mathbf{P}$-presque sûrement, seul un nombre fini d'événements A_n se produisent. Interpréter le résultat pour la particule.