13.6 Exercices corrigés

Nos ne corrigerons ici que certains exercices

Exercice 3 :

Un questionnaire à choix multiples propose m réponses pour chaque question. Soit p la probabilité qu'un étudiant connaisse la réponse à une question donnée. S'il ignore la réponse, il choisit au hasard l'une des réponses proposées. Quelle est pour le correcteur la probabilité qu'un étudiant connaisse vraiment la bonne réponse lorsqu'il l'a donnée ?

Notons :

$$B = \{\text{L'étudiant donne la bonne réponse}\} \text{ et } C = \{\text{L'étudiant connaît la bonne réponse}\}$$

Nous avons, tout de suite $\mathbf{P}(C) = p$, $\mathbf{P}(B/C) = 1$ et $\mathbf{P}\left(B/\overline{C}\right) = \dfrac{1}{m}$

En fait, nous cherchons $\mathbf{P}(C/B)$.

Nous avons :

$$\mathbf{P}(C/B) = \frac{\mathbf{P}(C \cap B)}{\mathbf{P}(B)} = \frac{\mathbf{P}(B/C) \times \mathbf{P}(C)}{\mathbf{P}(B/C) \times \mathbf{P}(C) + \mathbf{P}\left(B/\overline{C}\right) \times \mathbf{P}\left(\overline{C}\right)} = \frac{p}{p + \frac{1-p}{m}} = \frac{mp}{mp + 1 - p}$$

Exercice 4 :

Un test sanguin a une probabilité de 0.95 de détecter un certain virus lorsque celui ci est effectivement présent. Il donne néanmoins un faux résultat positif pour 1% des personnes non infectées. Si 0.5% de la population est porteuse du virus, quelle est la probabilité qu'une personne ait le virus sachant qu'elle a un test positif ?

C'est un exercice très classique dont nous retrouverons le thème dans d'autres exercices

Notons $V = \{\text{La personne testée est porteuse du virus}\}$ et $P = \{\text{Le test est positif}\}$

On cherche donc $\mathbf{P}(V|P)$

D'après l'énoncé, on sait que :

$$\mathbf{P}(V) = 0.005 \quad \mathbf{P}(P|V) = 0.95 \quad \mathbf{P}\left(P|\overline{V}\right) = 0.01$$

On en déduit :

$$\mathbf{P}(V|P) = \frac{\mathbf{P}(V \cap P)}{\mathbf{P}(P)} = \frac{\mathbf{P}(P|V) \times \mathbf{P}(V)}{\mathbf{P}(P|V) \times \mathbf{P}(V) + \mathbf{P}\left(P|\overline{V}\right) \times \mathbf{P}\left(\overline{V}\right)} = \frac{0.95 \times 0.005}{0.95 \times 0.005 + 0.01 \times 0.995} \approx 0.323$$

Exercice 5 :

Soit $\{\Omega; \mathcal{F}; \mathbf{P}\}$ un espace probabolisé, $A \in \mathcal{F}$ et $B \in \mathcal{F}$ tels que $\mathbf{P}(A) \neq 0$ et $\mathbf{P}(B) \neq 0$
Montrez que les trois égalités suivantes sont équivalentes :

1. $\mathbf{P}(B|A) = \mathbf{P}(B)$
2. $\mathbf{P}(A|B) = \mathbf{P}(A)$
3. $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$

1. **Démontrons que** $\mathbf{P}(B|A) = \mathbf{P}(B) \Longleftrightarrow \mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$
   - ⋆ Supposons $\mathbf{P}(B|A) = \mathbf{P}(B)$

     Alors $\mathbf{P}(B|A) = \dfrac{\mathbf{P}(B \cap A)}{\mathbf{P}(A)} = \mathbf{P}(B) \Longrightarrow \mathbf{P}(B \cap A) = \mathbf{P}(B) \times \mathbf{P}(A)$
   - ⋆ Réciproquement, supposons $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$

     Alors, $\mathbf{P}(B|A) = \dfrac{\mathbf{P}(B \cap A)}{\mathbf{P}(A)} = \dfrac{\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)}{\mathbf{P}(A)} = \mathbf{P}(B)$

   Nous avons donc $\mathbf{P}(B|A) = \mathbf{P}(B) \Longleftrightarrow \mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$
2. Nous montrerions de la même manière que $\mathbf{P}(A|B) = \mathbf{P}(A) \Longleftrightarrow \mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$
3. **Montrons maintenant que** $\mathbf{P}(B|A) = \mathbf{P}(B) \Longleftrightarrow \mathbf{P}(A|B) = \mathbf{P}(A)$

- ⋆ Supposons $\mathbf{P}(B|A) = \mathbf{P}(B)$

  Alors $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$ et $\mathbf{P}(A|B) = \dfrac{A \cap B}{\mathbf{P}(B)} = \dfrac{\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)}{\mathbf{P}(B)} = \mathbf{P}(A)$

  Donc, si $\mathbf{P}(B|A) = \mathbf{P}(B)$, alors $\mathbf{P}(A|B) = \mathbf{P}(B)$
- ⋆ Démontrer que si $\mathbf{P}(A|B) = \mathbf{P}(A)$ alors $\mathbf{P}(B|A) = \mathbf{P}(B)$ est semblable

Nous avons donc $\mathbf{P}(B|A) = \mathbf{P}(B) \Longleftrightarrow \mathbf{P}(A|B) = \mathbf{P}(A)$

En conclusion, les 3 égalités sont équivalentes

Exercice 8 :

On considère des nombres décimaux a et b appartenant à l'intervalle $]0,1[$, tels que $10a$ et $10b$ sont des nombres entiers. Une urne rouge contient $10a$ boules rouges et $10(1-a)$ boules noires et une urne noire contient $10b$ boules rouges et $10(1-b)$ boules noires.
Les boules étant indiscernables les unes des autres, on effectue une suite de tirages au hasard d'une boule dans l'une des deux urnes selon les règles suivantes :

- *Le premier tirage a lieu dans l'une des deux urnes prise au hasard* (On admet l'équiprobabilité.)
- *Après chaque tirage dans une urne, la boule est remise dans la même urne ;*
- *Pour tout nombre entier naturel n, le $n+1$-ième tirage a lieu dans l'urne de la couleur de la boule tirée au n-ième tirage.*

Pour tout nombre entier strictement positif n, on désigne par R_n l'évènement

« *On tire une boule rouge au n-ième tirage* »

Et par N_n l'évènement

« *On tire une boule noire au n-ième tirage* »

.

1. *Calculer les probabilités $\mathbf{P}(R_1)$ et $\mathbf{P}(N_1)$*

   R_1 est l'événement : $R_1 = \{$On tire une boule rouge au premier tirage $\}$. D'où vient cette boule rouge ? Cette boule rouge vient de l'urne rouge ou bien de l'urne noire.
   On appelle $UR = \{$On tire une boule dans l'urne rouge $\}$ et $UN = \{$On tire une boule dans l'urne noire$\}$, nous avons :
   $$R_1 = R_1 \cap (UR \cup UN) = (R_1 \cap UR) \cup (R_1 \cap UN)$$
   C'est à dire, en passant au probabilité :
   $$\mathrm{P}(R_1) = \mathrm{P}(R_1 \cap UR) + \mathrm{P}(R_1 \cap UN) = \mathrm{P}(R_1|UR)\,\mathrm{P}(UR) + \mathrm{P}(R_1|UN)\,\mathrm{P}(UN)$$
   Sans le dire, nous avons redémontré la formule des probabilités totales.
   Numériquement, $\mathrm{P}(UR) = \mathrm{P}(UN) = \dfrac{1}{2}$, $\mathrm{P}(R_1|UR) = \dfrac{10a}{10} = a$ et $\mathrm{P}(R_1|UN) = \dfrac{10b}{10} = b$, et donc
   $$\boxed{\mathrm{P}(R_1) = \frac{a+b}{2}}$$
   De la même manière,
   $$\mathrm{P}(N_1) = \mathrm{P}(N_1|UR)\,\mathrm{P}(UR) + \mathrm{P}(N_1|UN)\,\mathrm{P}(UR)$$
   Numériquement, $\mathrm{P}(N_1|UR) = \dfrac{10(1-a)}{10} = 1-a$ et $\mathrm{P}(N_1|UN) = \dfrac{10(1-b)}{10} = 1-b$, et donc
   $$\boxed{\mathrm{P}(R_1) = 1 - \frac{a+b}{2}}$$
   En fait, et c'est totalement évident, $R_1 = \overline{N_1}$

2. *Expliquer pourquoi, pour tout entier naturel n strictement supérieur à 1,nous avons :*

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P}(R_n) \\ \mathbf{P}(N_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 1-a & 1-b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{P}(R_{n-1}) \\ \mathbf{P}(N_{n-1}) \end{pmatrix}$$

On appelle UR_n, l'événement : $UR_n = \{$On tire une boule dans l'urne rouge au n-ième tirage$\}$ et UN_n, l'événement : $UN_n = \{$On tire une boule dans l'urne noire au n-ième tirage$\}$.
En rappelant les conditions du tirage exposées dans l'énoncé :

> Pour tout nombre entier naturel n, le n-ième tirage a lieu dans l'urne de la couleur de la boule tirée au $n-1$-ième tirage.

Ainsi, si nous tirons une boule dans l'urne rouge au n-ième tirage, ceci signifie qu'au $n-1$ième tirage, nous avons obtenu une boule rouge, et donc : $\mathrm{P}(UR_n) = \mathrm{P}(R_{n-1})$; de même, $\mathrm{P}(UN_n) = \mathrm{P}(N_{n-1})$
Nous pouvons utiliser la formule des probabilités totales :

$$\mathrm{P}(R_n) = \mathrm{P}(R_n \cap UR_n) + \mathrm{P}(R_n \cap UN_n) = \mathrm{P}(R_n|UR_n)\,\mathrm{P}(UR_n) + \mathrm{P}(R_n|UN_n)\,\mathrm{P}(UN_n)$$

Evaluons $\mathrm{P}(R_n|UR_n)$:
On sait qu'on tire une boule dans l'urne rouge. Quelle est la probabilité pour obtenir une boule rouge dans cette urne ? Cette quantité a déjà été calculée :$\mathrm{P}(R_n|UR_n) = a$; de même, $\mathrm{P}(R_n|UN_n) = b$; de telle sorte que :

$$\mathrm{P}(R_n) = a\mathrm{P}(R_{n-1}) + b\mathrm{P}(N_{n-1})$$

N_n est l'événement contraire de R_n, et donc $\mathrm{P}(N_n) = 1 - \mathrm{P}(R_n)$, d'où

$$\mathrm{P}(N_n) = 1 - (a\mathrm{P}(R_{n-1}) + b\mathrm{P}(N_{n-1}))$$

De $\mathrm{P}(N_{n-1}) + \mathrm{P}(R_{n-1}) = 1$, nous tirons :

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(N_n) &= 1 - (a\mathrm{P}(R_{n-1}) + b\mathrm{P}(N_{n-1})) \\ &= \mathrm{P}(N_{n-1}) + \mathrm{P}(R_{n-1}) - (a\mathrm{P}(R_{n-1}) + b\mathrm{P}(N_{n-1})) \\ &= (1-a)(R_{n-1}) + (1-b)\,\mathrm{P}(N_{n-1}) \end{aligned}$$

En synthèse, nous avons :

$$\begin{cases} \mathrm{P}(R_n) = & a\mathrm{P}(R_{n-1}) + b\mathrm{P}(N_{n-1}) \\ \mathrm{P}(N_n) = & (1-a)(R_{n-1}) + (1-b)\,\mathrm{P}(N_{n-1}) \end{cases}$$

Ce qui se traduit tout à fait bien, matriciellement, par :

$$\boxed{\begin{pmatrix} \mathbf{P}(R_n) \\ \mathbf{P}(N_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 1-a & 1-b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{P}(R_{n-1}) \\ \mathbf{P}(N_{n-1}) \end{pmatrix}}$$

Exercice 9 :

Le gérant d'un magasin d'informatique a reçu un lot de boites de CD-ROM. 5% de ces boîtes sont abîmées. Le gérant estime que :

— *60% des boîtes abîmées contiennent au moins un CD-ROM défectueux.*
— *98% des boîtes non abîmées ne contiennent aucun CD-ROM défectueux.*

Un client achète une boite du lot. On désigne par A l'événement : « La boite est abimée » et par B l'événement « La boite achetée contient au moins un disque défectueux ».

1. *Donner les probabilités de*

   → $\mathbf{P}(A)$ *et* $\mathrm{P}(\overline{A})$

   Il est clair, que d'après l'énoncé, $\mathbf{P}(A) = 0,05$ et donc que $\mathrm{P}(\overline{A}) = 0,95$

→ $\mathbf{P}(B|A)$

On sait que la boite est abimée ; il y a donc 60% de chances pour qu'elle contienne un CD-ROM défectueux. Donc $\mathbf{P}(B|A) = 0,6$

→ $\mathbf{P}\left(B|\overline{A}\right)$

Cette fois ci, on sait que la boite n'est pas abimée et que 98% de ces boites ne contiennent aucun CD défectueux. Nous avons donc $\mathbf{P}\left(B|\overline{A}\right) = 0,02$

→ $\mathbf{P}\left(\overline{B}|A\right)$

La probabilité conditionnelle est une probabilité. Donc $\mathbf{P}\left(\overline{B}|A\right) = 1 - \mathbf{P}(B|A)$, c'est à dire que $\mathbf{P}\left(\overline{B}|A\right) = 1 - 0,6 = 0,4$

→ $\mathbf{P}\left(\overline{B}|\overline{A}\right)$

De la même manière, $\mathbf{P}\left(\overline{B}|\overline{A}\right) = 1 - \mathbf{P}\left(B|\overline{A}\right) = 0,98$

2. *Le client constate qu'un des CD-ROM acheté est défectueux. Quelle est a la probabilité pour qu'il ait acheté une boite abimée ?*

On doit calculer $\mathbf{P}(A|B)$ que jusqu'ici, on n'a pas calculé. Or, en utlisant la formule de Bayes, on a le résultat.
Redémontrons cette formule.
Nous avons $\mathbf{P}(A|B) = \dfrac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)} = \dfrac{\mathbf{P}(B|A)\,\mathbf{P}(A)}{\mathbf{P}(B)}$
Nous connaissons $\mathbf{P}(B|A)$ et $\mathbf{P}(A)$, mais nous ne connaissons pas $\mathbf{P}(B)$. Or,

$$B = B \cap \left(A \cup \overline{A}\right) = (B \cap A) \cup \left(B \cap \overline{A}\right)$$

Et donc,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(B) &= \mathbf{P}(B \cap A) + \mathbf{P}\left(B \cap \overline{A}\right)\\ &= \mathbf{P}(B|A)\,\mathbf{P}(A) + \mathbf{P}\left(B|\overline{A}\right)\mathbf{P}\left(\overline{A}\right)\\ &= 0,03 + 0,190 = 0,193\end{aligned}$$

C'est la formule des probabilités totales D'où $\mathbf{P}(A|B) = \dfrac{\mathbf{P}(B|A)\,\mathbf{P}(A)}{\mathbf{P}(B)} = \dfrac{0,03}{0,193} = 0,155$

Exercice 10 :

Une compagnie d'assurance répartit ses clients en trois classes de risques :

— *$R1$ est la classe des « bons risques »*
— *$R2$ est la classe des « risques moyens »*
— *$R3$ est la classe des « mauvais risques »*

Les effectifs de ces trois classes représentent

— *20% de la population totale pour la classe $R1$*
— *50% pour la classe $R2$*
— *30% pour la classe $R3$*

Les statistiques indiquent que les probabilités d'avoir un accident au cours de l'année pour une personne de l'une de ces trois classes sont respectivement de 0,05, 0,15 et 0,30.

1. *Quelle est la probabilité qu'une personne choisie au hasard dans la population ait un accident dans l'année ?*

On appelle A, l'événement $A = \{$ Avoir un accident$\}$. D'après l'énoncé, nous avons :

$$\mathbf{P}(A|R1) = 0,05 \qquad \mathbf{P}(A|R2) = 0,15 \qquad \mathbf{P}(A|R3) = 0,30$$

Ce qu'on cherche, c'est, en fait : $\mathbf{P}(A)$; or :

$$A = A \cap (R1 \cup R2 \cup R3) = (A \cap R1) \cup (A \cap R2) \cup (A \cap R3)$$

Donc $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A \cap R1) + \mathbf{P}(A \cap R2) + \mathbf{P}(A \cap R3)$. Or, pour $i = 1, 2, 3$, $\mathbf{P}(A \cap Ri) = \mathbf{P}(A|Ri) \times \mathbf{P}(Ri)$, de telle sorte que :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(A) &= \mathbf{P}(A|R1) \times \mathbf{P}(R1) + \mathbf{P}(A|R2) \times \mathbf{P}(R2) + \mathbf{P}(A|R3) \times \mathbf{P}(R3)\\ &= 0,05 \times 0,2 + 0,15 \times 0,50 + 0,30 \times 0,30\\ &= 0,175\end{aligned}$$

Donc, $\boxed{\mathbf{P}(A) = 0,175}$

2. *Si M.Martin n'a pas eu d'accident cette année, quelle est la probabilité qu'il soit un bon risque (qu'il appartienne à la classe $R1$) ?*

   Il faut, cette fois ci calculer $\mathbf{P}\left(R1|\overline{A}\right)$. Or, d'après la formule de Bayes,

$$\mathbf{P}\left(R1|\overline{A}\right) = \frac{\mathbf{P}\left(R1 \cap \overline{A}\right)}{\mathbf{P}\left(\overline{A}\right)} = \frac{\mathbf{P}\left(\overline{A}|R1\right) \times \mathbf{P}(R1)}{\mathbf{P}\left(\overline{A}\right)} = \frac{0,95 \times 0,2}{1 - 0,175} = 0,230$$

   Donc, $\boxed{\mathbf{P}\left(R1|\overline{A}\right) = 0,230}$

Exercice 14 :

Voici un exercice qui n'est pas très difficile ; l'objectif de cet exercice est de montrer que la probabilité conditionnelle $\mathbf{P}_A$ est une probabilité comme une autre, et qu'il n'est pas indécent de s'intéresser à la probabilité conditionnelle liée à cette probabilité $\mathbf{P}_A$

Ce sera aussi l'occasion de mettre en pratique les définitions de probabilité conditionnelle. C'est donc un exercice très proche du cours

Soit $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}\}$ un espace probabilisé

1. *Soit $A \in \mathcal{F}$ tel que $\mathbf{P}(A) > 0$; On appelle $\mathbf{P}_A$ la probabilité conditionnelle sachant A.*
   Soit $B \in \mathcal{F}$ tel que $\mathbf{P}_A(B) > 0$; démontrer que $\mathbf{P}_A(X/B) = \dfrac{\mathbf{P}_A(X \cap B)}{\mathbf{P}_A(B)} = \mathbf{P}(X/B \cap A)$

   C'est donc très simple :

   $\Rightarrow$ Nous avons $\mathbf{P}_A(X \cap B) = \dfrac{\mathbf{P}(X \cap B \cap A)}{\mathbf{P}(A)}$

   $\Rightarrow$ Et $\mathbf{P}_A(B) = \dfrac{\mathbf{P}(B \cap A)}{\mathbf{P}(A)}$

   Donc

$$\mathbf{P}_A(X/B) = \frac{\mathbf{P}_A(X \cap B)}{\mathbf{P}_A(B)} = \frac{\mathbf{P}(X \cap B \cap A)}{\mathbf{P}(A)} \times \frac{\mathbf{P}(A)}{\mathbf{P}(B \cap A)} = \frac{\mathbf{P}(X \cap B \cap A)}{\mathbf{P}(A \cap B)} = \mathbf{P}(X/B \cap A)$$

2. *Démontrer que pour tout événement $A \in \mathcal{F}$, $B \in \mathcal{F}$ et $C \in \mathcal{F}$*

$$\mathbf{P}(A \cap B/C) = \mathbf{P}(A/C) \times \mathbf{P}(B/A \cap C)$$

   Nous avons $\mathbf{P}(A \cap B/C) = \dfrac{\mathbf{P}(A \cap B \cap C)}{\mathbf{P}(C)}$.

   Nous avons, et de manière classique :

$$\mathbf{P}(A \cap B \cap C) = \mathbf{P}(B \cap (A \cap C)) = \mathbf{P}(A \cap C) \times \mathbf{P}(B/(A \cap C))$$

   Et donc :

$$\mathbf{P}(A \cap B/C) = \frac{\mathbf{P}(A \cap C) \times \mathbf{P}(B/(A \cap C))}{\mathbf{P}(C)} = \frac{\mathbf{P}(A \cap C)}{\mathbf{P}(C)} \times \mathbf{P}(B/(A \cap C)) = \mathbf{P}(A/C)\,\mathbf{P}(B/A \cap C)$$

   Ce que nous voulions

Exercice 16 :

Un joueur a le choix entre les deux paris suivants :

1°pari : *Jeter 6 dés, et gagner s'il "sort" au moins un as*

2°pari : *Jeter 12 dés, et gagner s'il "sort" au moins deux as*

Calculez la probabilité de gagner dans chaque cas, les issues possibles étant supposées équiprobables.

1. Nous allons appeler Ω_1 l'espace fondamental lié au premier pari.
   Très facilement, nous avons Card $\Omega = 6^6$
   On appelle A l'événement $A = \{$On obtient au moins un as$\}$; il est beaucoup plus facile de considérer l'événement contraire $\overline{A} = \{$On n'obtient aucun as$\}$.
   Nous avons Card $\overline{A} = 5^6$, et donc $\mathbf{P}\left(\overline{A}\right) = \dfrac{5^6}{6^6}$, d'où $\mathbf{P}\left(A\right) = 1 - \left(\dfrac{5}{6}\right)^6 \approx 0,665$
2. Itérons la démarche pour le second pari :
   Si nous appelons Ω_2 l'espace fondamental lié au second pari. Nous avons Card $\Omega = 6^{12}$
   On appelle A l'événement $A = \{$On obtient au moins un as$\}$, l'événement contraire $\overline{A} = \{$On n'obtient aucun as$\}$,
   nous avons Card $\overline{A} = 5^{12}$, et donc $\mathbf{P}\left(\overline{A}\right) = \dfrac{5^{12}}{6^{12}}$, d'où $\mathbf{P}\left(A\right) = 1 - \left(\dfrac{5}{6}\right)^{12} \approx 0,887$

Si nous poussons un peu plus loin l'étude, si nous lançons n dés, nous avons $\mathbf{P}\left(A\right) = 1 - \left(\dfrac{5}{6}\right)^n$; comme $0 < \dfrac{5}{6} < 1$, nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \left(\dfrac{5}{6}\right)^n = 1$; ainsi, plus il y a de dés, plus nous avons de chance que A se réalise

Exercice 18 :

Le roi vient d'une famille de 2 enfants ; quelle est la probabilité pour que l'autre enfant soit sa soeur ?

Si nous appelons Ω, l'espace fondamental, nous avons $\Omega = \{(G, G)\,; (G, F)\,; (F, G)\,, (F, F)\}$
Le roi étant, à priori, un garçon, nous restreignons l'espace fondamental Ω, à un autre espace fondamental $\Omega_1 = \{(G, G)\,; (G, F)\,; (F, G)\}$.
La probabilité pour que l'autre enfant soit sa soeur est donc de $\dfrac{2}{3}$
C'est le principe des probabilités conditionnelles que de réduire l'espace fondamental ; ce que nous avons fait ici, sans passer par la définition

Exercice 20 :

Une population d'une ville compte 48% d'hommes et 52% de femmes ; on sait que 5% des hommes et 3% des femmes sont atteint d'une maladie M.

C'est un exercice totalement classique !! Ici, l'espace fondamental Ω est constitué des habitants de la ville.
Appelons H l'ensemble des hommes de cette ville et $F = \overline{H}$ celui des femmes ; nous avons $\mathbf{P}\left(H\right) = 0,48$ et $\mathbf{P}\left(F\right) = 0,52 = 1 - \mathbf{P}\left(H\right)$.
Soit M l'ensemble des personnes malades de la maladie M. D'après l'énoncé, nous avons $\mathbf{P}\left(H \cap M\right) = 0,05$ et $\mathbf{P}\left(F \cap M\right) = 0,03$

1. *Quelle est la proportion de personnes de la ville atteint de la maladie M ?*

   Il faut, en fait, calculer $\mathbf{P}\left(M\right)$
   Nous avons $M = M \cap \Omega = M \cap (H \cup F) = (M \cap H) \cup (M \cap F)$. D'où :
   $$\mathbf{P}\left(M\right) = \mathbf{P}\left((M \cap H) \cup (M \cap F)\right) = \mathbf{P}\left(M \cap H\right) + \mathbf{P}\left(M \cap F\right) = 0,08$$
2. *On prend une personne au hasard, et on constate qu'elle est atteinte de la maladie M ; quelle est la probabilité pour que ce soit une femme ?*

   Il faut donc calculer $\mathbf{P}\left(F/M\right)$.
   C'est assez simple :
   $$\mathbf{P}\left(F/M\right) = \frac{\mathbf{P}\left(M \cap F\right)}{\mathbf{P}\left(M\right)} = \frac{0.03}{0.08} = \frac{3}{8} = 0,375$$

Exercice 21 :

La firme Computex a déposé auprès du ministère de l'Education Nationale deux cahiers de charge séparés pour la fourniture de mobilier informatique et de micro-ordinateurs. L'entreprise estime à 60% ses chances d'obtenir le contrat de fourniture de mobilier informatique. Si ce contrat lui est alloué, la firme évalue ses chances à 2 sur 3 d'obtenir le contrat des micro-ordinateurs. Toutefois, si le contrat de fourniture de mobilie informatique lui échappe, elle estime quand même à 30% ses chances de se voir octroyer le contrat des micro-ordinateurs.

On appelle MI l'événement $MI = \{\text{Obtenir le marché du mobilier informatique}\}$ et O, l'évenement $O = \{\text{Obtenir le marché des micro-ordinateurs}\}$

D'après lénoncé, nous avons $\mathbf{P}(MI) = 0,6$, $\mathbf{P}(O/MI) = \dfrac{2}{3}$ et $\mathbf{P}\left(O/\overline{MI}\right) = 0,3$

1. *Quelle est la probabilité pour que Computex obtienne les deux contrats ?*

   Ici, il faut calculer $\mathbf{P}(O \cap MI)$

   Or, $\mathbf{P}(O/MI) = \dfrac{\mathbf{P}(O \cap MI)}{\mathbf{P}(MI)}$ et donc $\mathbf{P}(O \cap MI) = \mathbf{P}(O/MI) \times \mathbf{P}(MI) = 0,6 \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{5} = 0,2$

2. *Quelle est la probabilité que Computex n'obtienne que le contrat des microordinateurs ?*

   Il faut, évaluer, ici $\mathbf{P}\left(O \cap \overline{MI}\right)$

   Comme tout à l'heure, $\mathbf{P}\left(O \cap \overline{MI}\right) = \mathbf{P}\left(O/\overline{MI}\right) \times \mathbf{P}\left(\overline{MI}\right) = \dfrac{2}{3} \times 0,4 = \dfrac{4}{15}$

3. *Quelle est la probabilité que Computex obtienne le contrat des micro-ordinateurs (qu'il ait obtenu ou non le contrat de fourniture de mobilier informatique) ?*

   Il faut donc calculer $\mathbf{P}(O)$

   C'est facile : $O = (O \cap MI) \cup \left(O \cap \overline{MI}\right)$, et donc

   $$\mathbf{P}(O) = \mathbf{P}(O \cap MI) + \mathbf{P}\left(O \cap \overline{MI}\right) = \frac{1}{5} + \frac{4}{15} = \frac{7}{15}$$

4. *Computex vient d'annoncer qu'il a obtenu le marché des micro-ordinateurs. Quelle est la probabilité qu'il ait obtenu celui du mobilier informatique ?*

   Il faut donc calculer $\mathbf{P}(MI/O)$. Or :

   $$\mathbf{P}(MI/O) = \frac{\mathbf{P}(MI \cap O)}{\mathbf{P}(O)} = \frac{0,2 \times 7}{15} = \frac{7}{75}$$

Exercice 22 :

Dans une population on sait que la probabilité de naissance d'un garçon est de 0,52, que par ailleurs que 2% des filles et 1% des garçons présentent une luxation congénitale de la hanche.

1. *On note F l'évènement $F = \{\text{Naissance d'une fille}\}$ et L l'évènement $L = \{\text{Avoir une luxation de la hanche}\}$. Les évènements F et L sont-ils indépendants ?*

   Nous posons, pour commencer $G = \{\text{Naissance d'un garçon}\} = \overline{F}$. Ré-écrivons les hypothèses ; nous avons :

   ⋆ $\mathbf{P}(F) = 0,48$ ⋆ $\mathbf{P}(G) = 0,52$ ⋆ $\mathbf{P}(L/G) = 0,01$ ⋆ $\mathbf{P}(L/F) = 0,02$

   Pour montrer que F et L sont indépendants, il nous faut montrer que $\mathbf{P}(F \cap L) = \mathbf{P}(F)\,\mathbf{P}(L)$. Or, nous ne connaissons pas $\mathbf{P}(L)$, ni $\mathbf{P}(F \cap L)$. il nous faut donc les calculer.

   $\Rightarrow$ Nous avons $\mathbf{P}(F \cap L) = \mathbf{P}(L/F) \times \mathbf{P}(F)$ et donc $\mathbf{P}(F \cap L) = 0,02 \times 0,48 = 0,0096$

   $\Rightarrow$ Nous avons $L = L \cap (F \cup G) = (L \cap F) \cup (L \cap G)$, et donc $\mathbf{P}(L) = \mathbf{P}(L \cap F) + \mathbf{P}(L \cap G)$
   Nous connaissons $\mathbf{P}(F \cap L)$, il nous faut, maintenant, connaître $\mathbf{P}(F \cap G)$

   Comme tout à l'heure, nous avons $\mathbf{P}(F \cap G) = \mathbf{P}(L/G) \times \mathbf{P}(G) = 0,01 \times 0,52 = 0,0052$

   D'où $\mathbf{P}(L) = 0,0052 + 0,0096 = 0,0148$

Donc, $\mathbf{P}(F \cap L) = 0,0096$ et $\mathbf{P}(F) \times \mathbf{P}(L) = 0,42 \times 0,0148 = 0,006216$
Les 2 évènements F et L ne sont clairement pas indépendants ?

2. *Calculer la probabilité pour qu'un nouveau-né présentant une luxation soit une fille.*

   Nous devons donc calculer $\mathbf{P}(F/L)$. Or, ceci ne pose pas grande difficulté :

$$\mathbf{P}(F/L) = \frac{\mathbf{P}(F \cap L)}{\mathbf{P}(L)} = \frac{0,0096}{0,0148} = \frac{24}{37} \approx 0,6486$$

Exercice 23 :

Un système composé de n modules est dit être un $k \lhd n$ système si et seulement si le système fonctionne si au moins k ($k \leqslant n$) modules sur les n sont en état de fonctionner. On suppose que tous les modules fonctionnent de manière indépendante les uns des autres avec la même probabilité p.
Calculer la probabilité pour qu'un système $k \lhd n$ fonctionne

$\Rightarrow$ La probabilité pourqu'il y ait exactement j machine à fonctionner est donnée par

$$\mathrm{C}_n^j p^j (1-p)^{n-j} = \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j}$$

Ainsi, la probabilité pour que le système fonctionne est donc :

$$\sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} = 1 - \sum_{j=0}^{k-1} \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j}$$

$\Rightarrow$ Une autre façon de voir le problème est de considérer les machines qui ne marchent pas.
Ainsi, la probabilité pourqu'il y ait exactement j machine à ne pas fonctionner est donnée par

$$\mathrm{C}_n^j (1-p)^j p^{n-j} = \binom{n}{j} (1-p)^j p^{n-j}$$

Ainsi, pour que le système fonctionne, il faut qu'il y ait au plus $k-1$ modules à ne pas fonctionner.
Donc, la probabilité pour que le système $k \lhd n$ fonctionne est donc donné par :

$$\sum_{j=0}^{k-1} \binom{n}{j} (1-p)^j p^{n-j} = p^n \sum_{j=0}^{k-1} \binom{n}{j} \left(\frac{1}{p} - 1\right)^j$$

Exercice 24 :

La probabilité pour qu'une machine tombe en panne au cours d'un mois est $p = 0,06$; une entreprise possède 10 machines de ce type. Quelle est la probabilité pour qu'au cours du prochain mois :

1. *Toutes les machines tombent en panne*
2. *Au moins 2 machines tombent en panne*

C'est une nouvelle fois, une application classique de la loi binômiale

1. **La probabilité pour que toutes les machines tombent en panne**

   Cette probabilité est simple ; elle est $P = (0.06)^{10} = 6 \times 10^{-14}$

2. **La probabilité pour que au moins 2 machines tombent en panne**

   Nous allons nous intéresser à l'événement contraire.
   L'événement contraire est donné par : « Il y a au plus 1 machine qui est en panne », c'est à dire 0 ou 1. Cette propabilité est donc :

$$P = \binom{10}{0}(0,06)^0(1-0,06)^{10} + \binom{10}{1}(0,06)^1(1-0,06)^9 = 0,5386 + 10 \times 0,06 \times 0,5730 = 0,8824$$

Exercice 25 :

Critiquer le raisonnement suivant :
En lançant une fléchette, j'ai une chance sur deux d'atteindre la cible, donc, en lançant la fléchette deux fois, j'atteindrai la cible à coup sûr.

On suppose le joueur lance 2 fois sa fléchette. Il y a deux façons de résoudre cette question

$\Rightarrow$ La première en considérant l'espace fondamental :

$$\Omega = \{(G,G)\,;(G,P)\,;(P,G)\,;(P,P)\}$$

La première composante représentant le résultat du premier lancer et la seconde composante, celui du second lancer. D'après l'énoncé, il y a équiprobabilité pour chaque couple. Donc :

$$\text{Atteindre la cible à coup sûr} = \{(G,G)\,;(G,P)\,;(P,G)\}$$

Et $\mathbf{P}\,(\text{Atteindre la cible à coup sûr}) = \dfrac{3}{4}$
Le raisonnement est donc faux ! !

$\Rightarrow$ Une autre façon de faire est de considérer que chaque lancer est une épreuve de Bernouilli « Echec »« Succes » de paramètre $\dfrac{1}{2}$.
La loi de deux lancers consécutifs est donc une loi binômiale. L'évenement « Atteindre la cible à coup sûr » est donné par :

$$\{\text{Atteindre la cible exactement 2 fois}\} \cup \{\text{Atteindre la cible exactement 1 fois}\}$$

Donc :

$$\mathbf{P}\,(\text{Atteindre la cible à coup sûr}) = \binom{2}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \binom{2}{1}\left(\frac{1}{2}\right)\times\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$$

$\Rightarrow$ Il eût été possible aussi d'utiliser l'événement contraire

Exercice 26 :

On lance 2 dés distincts numérotés de 1 à 6 ; soient x_1 et x_2 les nombres fournis par ces 2 dés

On peut d'ores et déjà s'intéresser à l'espace fondamental lié à cet expérience :

$$\Omega = \{(x_1, x_2) \text{ où } 1 \leqslant x_1 \leqslant 6 \text{ et } 1 \leqslant x_2 \leqslant 6\}$$

Dans ce schéma, x_1 est le résultat du premier dé, et x_2 celui du second.
Nous différencions donc les dés Evidemment, Card $\Omega = 36$

1. *Calculez $\mathbf{P}\,(\{x_1 + x_2 = 5\})$ et $\mathbf{P}\,(\{x_1 + x_2 = 7\})$*
   - ⋆ L'événement $\{x_1 + x_2 = 5\}$ est donné par :

     $$\{x_1 + x_2 = 5\} = \{(1,4)\,;(4,1)\,;(2,3)\,;(3,2)\}$$

     Et donc $\mathbf{P}\,(\{x_1 + x_2 = 5\}) = \dfrac{4}{36} = \dfrac{1}{9}$
   - ⋆ De même, l'événement $\{x_1 + x_2 = 7\}$ est donné par :

     $$\{x_1 + x_2 = 7\} = \{(1,6)\,;(6,1)\,;(2,5)\,;(5,2)\,;(3,4)\,;(4,3)\}$$

     Et donc $\mathbf{P}\,(\{x_1 + x_2 = 7\}) = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$
2. *Si on lance les 2 dés 3 fois de suite, quelle est la probabilité pour que $y = x_1 + x_2$ prenne au moins une fois la valeur 5 et une fois la valeur 7*

   Définissons l'espace fondamental lié à cette expérience. Ici, nous pouvons choisir :

   $$\Omega = \{(L_1, L_2, L_3) \text{ où } 2 \leqslant L_1 \leqslant 12; 2 \leqslant L_2 \leqslant 12 \text{ et } 1 \leqslant L_3 \leqslant 6\}$$

Ici, L_1 est le résultat du premier lancer des 2 dés, L_2 celui du second et L_3 celui du troisième.
Il faut remarquer qu'il n'y a pas équiprobabilité, puisque, par exemple $\mathbf{P}((7,7,7)) = \dfrac{1}{6^3}$ et $\mathbf{P}((5,5,5)) = \dfrac{1}{9^3}$.
Il faut maintenant définir l'événement {Au moins une fois la valeur 5 et une fois la valeur 7} ; nous allons en faire le recensement :

- ⋆ Tout d'abord, exactement 2 fois la valeur 5 :

$$\{\text{Exactement 2 fois la valeur 5 et une fois la valeur 7}\} = \{(5,5,7)\,;(5,7,5)\,;(7,5,5)\}$$

Et nous avons, de manière simple :

$$\mathbf{P}(\{\text{Exactement une fois la valeur 5 et une fois la valeur 7}\}) = 3 \times \left(\frac{1}{9}\right)^2 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{162}$$

- ⋆ Ensuite, exactement 1 fois la valeur 5 :

$$\{\text{Exactement 1 fois la valeur 5 et une fois la valeur 7}\}$$
$$=$$
$$\{(5,\{\text{autre chose que 5 ou 7}\},7)\,;(\{\text{autre chose que 5 ou 7}\},7,5)\,;\cdots;(7,5,\{\text{autre chose que 5 ou 7}\})\}$$

Or, $\mathbf{P}(\{\text{autre chose que 5 ou 7}\}) = 1 - \left(\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{6}\right) = \dfrac{13}{18}$

Et donc $\mathbf{P}((5,\{\text{autre chose que 5 ou 7}\},7)) = \dfrac{13}{18} \times \dfrac{1}{9} \times \dfrac{1}{6}$

D'où

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\{\text{Exactement 1 fois la valeur 5 et une fois la valeur 7}\}) &= 6 \times \mathbf{P}((5,\{\text{autre chose que 5 ou 7}\},7)) \\ &= \frac{13}{18} \times \frac{1}{9}\end{aligned}$$

Et donc :

$$\mathbf{P}(\{\text{Au moins une fois la valeur 5 et une fois la valeur 7}\}) = \frac{1}{162} + \frac{13}{18} \times \frac{1}{9} = \frac{7}{81}$$

Exercice 27 :

1. *On lance deux dés cubiques numérotés de 1 à 6, et nous considérons la somme amenée par ce lancer. On appelle A l'événement $A = \{$La somme amenée est 6$\}$, et B l'événement $B = \{$La somme amenée est 7$\}$. Donner $\mathbf{P}(A)$ et $\mathbf{P}(B)$*

   Les questions de cet exercice sont celles de celui qui précède ! L'espace fondamental est donc

   $$\Omega = \{(i,j) \text{ où } 1 \leqslant i \leqslant 6 \text{ et } 1 \leqslant j \leqslant 6\}$$

   Nous avons donc Card $\Omega = 36$
   - ⋆ $A = \{(1,5)\,;(5,1)\,;(2,4)\,;(4,2)\,;(3,3)\}$ et donc $\mathbf{P}(A) = \dfrac{5}{36}$
   - ⋆ $B = \{(1,6)\,;(6,1)\,;(2,5)\,;(5,2)\,;(3,4)\}$ et donc $\mathbf{P}(A) = \dfrac{5}{36}$

2. *Lénaïg et Erwann jouent au jeu suivant :*

   On lance 2 dés cubiques ; pour gagner, Lénaïg doit obtenir 6 exactement, et pour gagner, Erwann doit obtenir 7 exactement. Si aucun des deux n'a gagné, on recommence à jouer
   C'est Lénaïg qui commence à jouer (ce qui veut dire Lénaïg joue à tous les lancers impairs, et que Erwann joue à tous les lancers pairs).
   Les lancers sont bien entendu supposés tous indépendants les uns des autres.

   On appelle A_k l'événement :$A_k = \{$ Lénaïg gagne au k-ième lancer$\}$ et B_k l'événement : $B_k = \{$Erwann gagne au k-ième lancer$\}$

En écrivant les événements A_k et B_k sous forme d'intersection et de complémentation, calculer $\mathbf{P}(A_k)$ et $\mathbf{P}(B_k)$

Soit L_k l'événement $L_k = \{\text{Lénaïg obtient 6 au } k - \text{ième lancer}\}$. Alors, $\mathbf{P}(L_k) = \dfrac{5}{36}$

Soit E_k l'événement $E_k = \{\text{Erwann obtient 7 au } k - \text{ième lancer}\}$. Alors, $\mathbf{P}(E_k) = \dfrac{5}{36}$.

→ Recherche de $\mathbf{P}(A_k)$

Nous avons

$$A_k = \overline{L_1} \cap \overline{E_1} \cap \overline{L_2} \cap \overline{E_2} \cap \cdots \overline{L_{k-1}} \cap \overline{E_{k-1}} \cap L_k$$

Et donc

$$\mathbf{P}(A_k) = (1 - \mathbf{P}(L_1))(1 - \mathbf{P}(E_1))(1 - \mathbf{P}(L_2))(1 - \mathbf{P}(E_2)) \times \cdots (1 - \mathbf{P}(L_{k-1}))(1 - \mathbf{P}(E_{k-1}))\mathbf{P}(L_k)$$

C'est à dire : $\mathbf{P}(A_k) = \left(1 - \dfrac{5}{36}\right)^{2k-2} \times \dfrac{5}{36} = \left(\dfrac{31}{36}\right)^{2k-2} \times \dfrac{5}{36} = \dfrac{5}{36} \times \left(\dfrac{36}{31}\right)^2 \times \left(\dfrac{31}{36}\right)^{2k}$

→ Recherche de $\mathbf{P}(B_k)$

La démarche pour cette question est semblable, même s'il y a quelques différences.
Nous avons

$$B_k = \overline{L_1} \cap \overline{E_1} \cap \overline{L_2} \cap \overline{E_2} \cap \cdots \overline{L_{k-1}} \cap \overline{E_{k-1}} \cap \overline{L_k} \cap E_k$$

Et donc

$$\mathbf{P}(B_k) = (1 - \mathbf{P}(L_1))(1 - \mathbf{P}(E_1)) \times \cdots \times (1 - \mathbf{P}(L_{k-1}))(1 - \mathbf{P}(E_{k-1}))(1 - \mathbf{P}(L_k))\mathbf{P}(E_k)$$

C'est à dire :

$$\mathbf{P}(B_k) = \left(1 - \frac{5}{36}\right)^{2k-1} \times \frac{5}{36} = \left(\frac{31}{36}\right)^{2k-1} \times \frac{5}{36} = \frac{5}{36} \times \frac{36}{31} \times \left(\frac{31}{36}\right)^{2k} = \frac{5}{31} \times \left(\frac{31}{36}\right)^{2k}$$

3. *Ecrire les événements « Lénaïg gagne » et « Erwann gagne »*

L'événement « Lénaïg gagne » peut s'écrire : il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que A_k soit réalisé qui peut donc s'écrire $\bigcup\limits_{k \in \mathbb{N}^*} A_k$.
De même, l'événement « Erwann gagne » s'écrit $\bigcup\limits_{k \in \mathbb{N}^*} B_k$

4. *En déduire $\mathbf{P}(\{\text{Lénaïg gagne}\})$ et $\mathbf{P}(\{\text{Erwann gagne}\})$*

⋆ Nous avons donc $\mathbf{P}(\{\text{Lénaïg gagne}\}) = \mathbf{P}\left(\bigcup\limits_{k \in \mathbb{N}^*} A_k\right)$. Or :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} A_k\right) &= \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \mathbf{P}(A_k) \\
&= \frac{5}{36} \times \left(\frac{36}{31}\right)^2 \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \left(\frac{31}{36}\right)^{2k} \\
&= \frac{5}{36} \times \left(\frac{36}{31}\right)^2 \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \left(\left(\frac{31}{36}\right)^2\right)^k \\
&= \frac{5}{36} \times \left(\frac{36}{31}\right)^2 \times \frac{\left(\frac{31}{36}\right)^2}{1 - \left(\frac{31}{36}\right)^2} \\
&= \frac{5}{36} \times \frac{36^2}{36^2 - 31^2} \\
&= \frac{5 \times 36}{67 \times 5} = \frac{36}{67} \approxeq 0,5373
\end{aligned}$$

⋆ De même, $\mathbf{P}\left(\{\text{Erwann gagne}\}\right) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} B_k\right)$. Or :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} B_k\right) &= \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \mathbf{P}(B_k)\\ &= \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{5}{31}\times\left(\frac{31}{36}\right)^{2k} = \frac{5}{31}\times\sum_{k\in\mathbb{N}^*}\left(\left(\frac{31}{36}\right)^2\right)^k\\ &= \frac{5}{31}\times\frac{\frac{31^2}{36^2}}{1-\frac{31^2}{36^2}} = \frac{5}{31}\times\frac{31^2}{36^2}\times\frac{36^2}{36^2-31^2}\\ &= \frac{5\times 31^2\times 36^2}{31\times 36^2\times 67\times 5} = \frac{31}{67} \approxeq 0,462686\end{aligned}$$

Nous remarquons que $\mathbf{P}\left(\{\text{Lénaïg gagne}\}\right) = 1-\mathbf{P}\left(\{\text{Erwann gagne}\}\right)$. Etonnant, non ?

Exercice 28 :

Un laboratoire a mis au point un alcool-test. Les premiers résultats sont les suivants :

⇒ *2% des personnes contrôlées par la police sont réellement en état d'ébriété*

⇒ *95 fois sur 100 l'alcool-test s'est révélé positif, alors qu'une personne était réellement en état d'ébriété.*

⇒ *95 fois sur 100 l'alcool-test s'est révélé négatif, alors qu'une personne n'était pas en état d'ébriété*

Ré-écrivons les hypothèses du problème. Appelons :

$$E = \{\text{Etre en état d'ébriété}\} \text{ et } P = \{\text{Le test est positif}\}$$

Nous avons, d'après l'énoncé :

$$\mathbf{P}(E) = 0,02 \quad \mathbf{P}(P/E) = 0,95 \quad \mathbf{P}\left(\overline{P}/\overline{E}\right) = 0,95$$

1. *Une personne est contrôlée par la police ; quelle est la probabilité pour que le test soit positif ?*

   Nous devons donc calculer $\mathbf{P}(P)$.
   A nouveau ; décomposons P. Nous avons $P = P\cap\left(E\cup\overline{E}\right) = (P\cap E)\cup\left(P\cap\overline{E}\right)$, et donc $\mathbf{P}(P) = \mathbf{P}(P\cap E)+\mathbf{P}\left(P\cap\overline{E}\right)$
   ⋆ Or $\mathbf{P}(P\cap E) = \mathbf{P}(P/E)\times\mathbf{P}(E) = 0,95\times 0,02 = 0,019$
   ⋆ De même $\mathbf{P}\left(P\cap\overline{E}\right) = \mathbf{P}\left(P/\overline{E}\right)\times\mathbf{P}\left(\overline{E}\right)$. La probabilité conditionnelle est une véritable probabilité, et donc $\mathbf{P}\left(P/\overline{E}\right) = 1-\mathbf{P}\left(\overline{P}/\overline{E}\right) = 1-0,95 = 0,05$
   Ainsi, $\mathbf{P}(P) = \mathbf{P}(P/E)\times\mathbf{P}(E)+\mathbf{P}\left(P/\overline{E}\right)\times\mathbf{P}\left(\overline{E}\right) = 0,019+0,05 = 0,069$

2. *Calculez la probabilité pour qu'une personne ne soit pas en état d'ébriété sachant que le test est positif.*

   Nous devons donc calculer $\mathbf{P}\left(\overline{E}/P\right)$. En fait, nous avons :

   $$\mathbf{P}\left(\overline{E}/P\right) = \frac{\mathbf{P}\left(\overline{E}\cap P\right)}{\mathbf{P}(P)} = \frac{\mathbf{P}\left(P/\overline{E}\right)\times\mathbf{P}\left(\overline{E}\right)}{\mathbf{P}(P)} = \frac{0,05\times 0,98}{0,069} \approxeq 0,7101$$

   C'est énooooOOOooorme

3. *Calculez la probabilité pour qu'une personne soit en état d'ébriété sachant que le test est négatif.*

   Sans être la même question que précédemment, la méthode est la même. Nous devons donc calculer $\mathbf{P}\left(E/\overline{P}\right)$. En fait, nous avons :

   $$\mathbf{P}\left(E/\overline{P}\right) = \frac{\mathbf{P}\left(E\cap\overline{P}\right)}{\mathbf{P}\left(\overline{P}\right)} = \frac{\mathbf{P}\left(\overline{P}/E\right)\times\mathbf{P}(E)}{\mathbf{P}\left(\overline{P}\right)} = \frac{0,05\times 0,02}{1-0,069} \approxeq 0,0010$$

   Ce qui est rassurant !!

Exercice 29 :

On lance n dés non pipés ; A_n est l'événement : $A_n = \{$Le total des numéros amenés est pair$\}$; montrer que la suite $(\mathbf{P}(A_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite constante.

Nous allons démontrer ce résultat par récurrence sur n

$\Rightarrow$ **Pour $n = 1$**

Il n'y a qu'un seul dé, et $A_1 = \{2, 4, 6\}$ et donc $\mathbf{P}(A_1) = \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow$ **Supposons, maintenant, que $\mathbf{P}(A_n) = \dfrac{1}{2}$**

$\Rightarrow$ **Etudions, maintenant, A_{n+1}**

Nous avons, maintenant, $n+1$ dés et séparons les n premiers dés, du dernier. Appelons B_{n+1}, l'événement $B_{n+1} = \{$Le dernier dé amène un nombre pair$\}$. Alors :

$$A_{n+1} = A_{n+1} \cap \left(B_{n+1} \cup \overline{B_{n+1}}\right) = (A_{n+1} \cap B_{n+1}) \cup \left(A_{n+1} \cap \overline{B_{n+1}}\right)$$

Et ainsi,

$$\mathbf{P}(A_{n+1}) = \mathbf{P}(A_{n+1} \cap B_{n+1}) + \mathbf{P}\left(A_{n+1} \cap \overline{B_{n+1}}\right) = \mathbf{P}(A_{n+1}/B_{n+1}) \times \mathbf{P}(B_{n+1}) + \mathbf{P}\left(A_{n+1}/\overline{B_{n+1}}\right) \times \mathbf{P}\left(\overline{B_{n+1}}\right)$$

⋆ Etudions $\mathbf{P}(A_{n+1}/B_{n+1})$.
On sait que B_{n+1} est réalisé, c'est à dire que le $n+1$-ième dé amène un nombre pair. Pour que A_{n+1} soit réalisé, il faut donc que les n premiers dés amènent une somme paire aussi et donc,

$$\mathbf{P}(A_{n+1}/B_{n+1}) = \mathbf{P}(A_n) = \frac{1}{2}$$

⋆ Maintenant, $\mathbf{P}\left(A_{n+1}/\overline{B_{n+1}}\right)$.
On sait que $\overline{B_{n+1}}$ est réalisé, c'est à dire que le $n+1$-ième dé amène une somme impaire. Pour qu'alors A_{n+1} soit réalisé, il faut donc que les n premiers dés amènent une somme imppaire aussi et donc,

$$\mathbf{P}\left(A_{n+1}/\overline{B_{n+1}}\right) = \mathbf{P}\left(\overline{A_n}\right) = \frac{1}{2}$$

D'où $\mathbf{P}(A_{n+1}) = \mathbf{P}(A_{n+1}/B_{n+1}) \times \mathbf{P}(B_{n+1}) + \mathbf{P}\left(A_{n+1}/\overline{B_{n+1}}\right) \times \mathbf{P}\left(\overline{B_{n+1}}\right) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$

Donc $\mathbf{P}(A_{n+1}) = \dfrac{1}{2}$ et la suite $(\mathbf{P}(A_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite constante.

Exercice 30 :

On s'intéresse à la transmission d'un information binaire, c'est à dire d'une information ne pouvant prendre que 2 valeurs : 0 ou 1
On admet que le procédé de transmission entre 2 individus A et B (ou encore, entre 2 "stations" A et B) est tel que, lorsque A émet une valeur de l'information à destination de B, B reçoive cette information avec la probabilité p, et donc l'autre information avec la probabilité $q = 1 - p$; on a, bien entendu, $p \in]0, 1[$.
Soit $n \in \mathbb{N}$
On considère $n+1$ individus successifs : $i_0, i_1, \ldots, i_n$
L'information émise par i_0 à destination de i_1 est elle-même transmise par i_1 à i_2, et ainsi de suite jusqu'à i_n.
Pour $k \in \{1, \cdots, n\}$, on note A_k l'événement

$$A_k = \{\text{L'individu } i_k \text{ reçoit la même information que celle émise par } i_0\}$$

et p_k est la probabilité $\mathbf{P}(A_k)$; on pose $p_0 = 1$

1. *En écrivant $A_{k+1} = A_{k+1} \cap \left(A_k \cup \overline{A_k}\right)$, exprimer p_{k+1} en fonction de p_k*

   Ici, tout est donné!!
   De $A_{k+1} = A_{k+1} \cap \left(A_k \cup \overline{A_k}\right)$, nous pouvons écrire $A_{k+1} = (A_{k+1} \cap A_k) \cup \left(A_{k+1} \cap \overline{A_k}\right)$ et donc

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(A_{k+1}) = {} & \mathbf{P}(A_{k+1} \cap A_k) + \mathbf{P}\left(A_{k+1} \cap \overline{A_k}\right) \\
= {} & \mathbf{P}(A_{k+1}/A_k)\,\mathbf{P}(A_k) + \mathbf{P}\left(A_{k+1}/\overline{A_k}\right)\mathbf{P}\left(\overline{A_k}\right) \\
= {} & \mathbf{P}(A_{k+1}/A_k)\,p_k + \mathbf{P}\left(A_{k+1}/\overline{A_k}\right)(1 - p_k)
\end{aligned}$$

⋆ Etude de $\mathbf{P}(A_{k+1}/A_k)$
On sait que l'événement A_k est réalisé, c'est à dire que L'individu i_k reçoit la même information que celle émise
L'événement A_{k+1} signifie que l'individu i_{k+1} reçoit l'information émise par l'individu i_0 et que donc i_{k+1} reçoit l'information émise par l'individu i_k.
Ainsi, $\mathbf{P}(A_{k+1}/A_k) = p$

⋆ Etude de $\mathbf{P}\left(A_{k+1}/\overline{A_k}\right)$
Une fois l'exposé ci-dessus réalisé, il est aisé de voir que l'événement A_k n'est pas réalisé, c'est à dire que L'individu i_k n'a pas reçu la même information que celle émise par i_0 ; L'événement A_{k+1} signifie que l'individu i_{k+1} reçoit l'information émise par l'individu i_0 et que donc i_{k+1} n'a pas reçu l'information émise par l'individu i_k.
Ainsi, $\mathbf{P}\left(A_{k+1}/\overline{A_k}\right) = 1 - p$

Et donc

$$\mathbf{P}(A_{k+1}) = \mathbf{P}(A_{k+1}/A_k)\, p_k + \mathbf{P}\left(A_{k+1}/\overline{A_k}\right)(1-p_k) = p \times p_k + (1-p)(1-p_k) = (2p-1)\, p_k + (1-p)$$

2. *En déduire l'expression de p_n en fonction de n et p.*

Nous avons, d'après la question précédente $p_{k+1} = (2p-1)\, p_k + (1-p)$.
D'où

$$\begin{aligned} p_n = & \quad (2p-1)^n \left(p_0 - \frac{1-p}{1-(2p-1)}\right) + \frac{1-p}{1-(2p-1)} \\ = & \quad (2p-1)^n \left(p_0 - \frac{1-p}{2-2p}\right) + \frac{1-p}{2-2p} \\ = & \quad (2p-1)^n \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \\ = & \quad \frac{1}{2}(2p-1)^n + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Nous avons donc $p_n = \dfrac{1}{2}(2p-1)^n + \dfrac{1}{2}$

3. *Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$. Que conclure ?*

Comme $0 < p < 1$, nous avons $-1 < 2p-1 < 1$ et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (2p-1)^n = 0$; d'où nous déduisons que $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = \dfrac{1}{2}$
Ceci sous-entend que, quels que soient les moyens utilisés pour faire parvenir un signal d'un point à un autre, et si les individus sont nombreux, la probabilité que le dernier individu reçoive le même signal que celui émit par le premier est toujours de $\dfrac{1}{2}$

Exercice 31 :

Monsieur IKCX, possède depuis plusieurs années un téléphone portable. Il étudie l'évolution de sa consommation sur plusieurs mois. Pour $n \in \mathbb{N}$, on appelle A_n l'événement

$$A_n = \{\text{Monsieur IKCX dépasse son forfait au mois N° } n\}$$

Nous avons, pour $n > 1$:

$$\begin{cases} \mathbf{P}(\{A_n/A_{n-1}\}) = \dfrac{1}{5} \\ \mathbf{P}\left(\{A_n/\overline{A_{n-1}}\}\right) = \dfrac{2}{5} \\ \mathbf{P}(\{A_1\}) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Nous posons ensuite $\mathbf{P}(\{A_n\}) = a_n$ et $V_n = \begin{pmatrix} a_n \\ 1 - a_n \end{pmatrix}$

1. *Démontrer que $V_{n+1} = MV_n$ où M est la matrice $M = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$.*

   Nous avons donc $a_{n+1} = \mathbf{P}(\{A_{n+1}\})$. Comme d'habitude, nous avons :

   ⋆ $A_{n+1} = A_{n+1} \cap \left(A_n \cup \overline{A_n}\right) = (A_{n+1} \cap A_n) \cup \left(A_{n+1} \cap \overline{A_n}\right)$
   D'où nous tirons, comme à chaque fois :

   $$\mathbf{P}(A_{n+1}) = \mathbf{P}(A_{n+1} \cap A_n) + \mathbf{P}\left(A_{n+1} \cap \overline{A_n}\right) = \mathbf{P}(A_{n+1}/A_n)\,\mathbf{P}(A_n) + \mathbf{P}\left(A_{n+1}/\overline{A_n}\right)\mathbf{P}\left(\overline{A_n}\right)$$

   D'où nous tirons :
   $$a_{n+1} = \frac{1}{5}a_n + \frac{2}{5}(1 - a_n)$$

   ⋆ $\overline{A_{n+1}} = \overline{A_{n+1}} \cap \left(A_n \cup \overline{A_n}\right) = \left(\overline{A_{n+1}} \cap A_n\right) \cup \left(\overline{A_{n+1}} \cap \overline{A_n}\right)$
   D'où nous tirons, comme à chaque fois :

   $$\mathbf{P}\left(\overline{A_{n+1}}\right) = \mathbf{P}\left(\overline{A_{n+1}} \cap A_n\right) + \mathbf{P}\left(\overline{A_{n+1}} \cap \overline{A_n}\right) = \mathbf{P}\left(\overline{A_{n+1}}/A_n\right)\mathbf{P}(A_n) + \mathbf{P}\left(\overline{A_{n+1}}/\overline{A_n}\right)\mathbf{P}\left(\overline{A_n}\right)$$

   D'où nous tirons :
   $$1 - a_{n+1} = \frac{4}{5}a_n + \frac{3}{5}(1 - a_n)$$

   Nous avons donc :
   $$V_{n+1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5}a_n + \frac{2}{5}(1 - a_n) \\ \frac{4}{5}a_n + \frac{3}{5}(1 - a_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_n \\ 1 - a_n \end{pmatrix}$$

   Nous avons donc bien $V_{n+1} = MV_n$ où M est la matrice $M = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$

2. *Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $V_n = M^{n-1}V_1$*

   C'est une question très simple qui se démontre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$

   ⇒ C'est vrai pour $n = 1$
   En effet, si nous posons $M^0 = \mathrm{Id}_2$, nous avons, bien sûr $V_1 = \mathrm{Id}_2 V_1 \iff V_1 = M^0 V_1$

   ⇒ Supposons que nous ayions $V_n = M^{n-1}V_1$

   ⇒ Etudions maintenant V_{n+1}
   Nous avons donc :

   $$V_{n+1} = MV_n = M\left(M^{n-1}V_1\right) = \left(M \times M^{n-1}\right)V_1 = M^n V_1$$

   Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $V_n = M^{n-1}V_1$

3. *On pose $P = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ avec $a + b = 1$; Résoudre l'équation $P = M \times P$*

   Nous avons

   $$\begin{aligned} P = M \times P \iff & \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \\ \iff & \begin{cases} a = & \frac{1}{5}a + \frac{2}{5}b \\ b = & \frac{4}{5}a + \frac{3}{5}b \\ 1 = & a + b \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} 2a - b = & 0 \\ a + b = & 1 \end{cases} \\ \iff & a = \frac{1}{3} \text{ et } b = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

4. *D'après la question 1 nous avons la relation :* $a_{n+1} = \dfrac{-1}{5}a_n + \dfrac{2}{5}$
   Donner $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ *; faire le lien avec la question 3*

   Nous avons $a_n = \left(\dfrac{-1}{5}\right)^{n-1}\left(a_1 - \dfrac{\frac{2}{5}}{1-\frac{2}{5}}\right) + \dfrac{\frac{2}{5}}{1-\frac{2}{5}} = \dfrac{1}{6} \times \left(\dfrac{-1}{5}\right)^{n-1} + \dfrac{1}{3}$

   Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \dfrac{1}{3}$

   Donc, lorsque n devient très grand, la probabilité pour que M. IKCX dépasse son forfait est de $\dfrac{1}{3}$; c'est la probabilité stationnaire.

Exercice 32 :

Une pièce de monnaie amène « pile » avec la probabilité p et « face » avec la probabilité $q = 1 - p$; on lance indéfiniment cette pièce, et les lancers successifs sont indépendants.

1. *A_n est l'événement : $A_n = \{$« pile » sort pour la 1ère fois au n-ième lancer$\}$. Calculer* $\left(\mathbf{P}\left(A_n\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$

   On appelle $X_k = \{$« pile » sort au k-ième lancer$\}$. Nous avons $\mathbf{P}\left(X_k\right) = p$
   Simplement, nous avons $A_n = \overline{X_1} \cap \overline{X_2} \cap \cdots \overline{X_{n-1}} \cap X_n$.
   De l'indépendance, nous avons $\mathbf{P}\left(A_n\right) = \left(\prod\limits_{k=1}^{n-1} \mathbf{P}\left(\overline{X_k}\right)\right)\mathbf{P}\left(X_n\right) = (1-p)^{n-1}p$

   Donc, $\mathbf{P}\left(A_n\right) = (1-p)^{n-1}p$
2. *Soit B l'événement : $B = \{$On obtient « pile »$\}$ Montrer que cet événement est quasi-certain*

   B est réalisé s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que A_k soit réalisé. Donc $B = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}^*} A_k$ et donc :

   $$\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} A_k\right) = \sum_{k\geqslant 1}\mathbf{P}\left(A_k\right) = \sum_{k\geqslant 1}(1-p)^{k-1}p = p\sum_{k\geqslant 0}(1-p)^k = \frac{p}{1-(1-p)} = 1$$

   Donc, $\mathbf{P}(B) = 1$ et B est un événement quasi certain
3. *Soit C l'événement :*

   $$C = \{\text{On obtient « pile » pour la première fois au bout d'un nombre pair de lancers}\}$$

   Montrer que $C = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} A_{2k}$ et calculez $\mathbf{P}(C)$

   L'événement C est réalisé s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que l'événement A_{2k} est réalisé.
   Et donc $C = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}^*} A_{2k}$. Alors

   $$\begin{aligned}
   \mathbf{P}(C) &= \mathbf{P}\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} A_{2k}\right) \\
   &= \sum_{k\geqslant 1}\mathbf{P}\left(A_{2k}\right) \\
   &= \sum_{k\geqslant 1} p(1-p)^{2k-1} \\
   &= \frac{p}{1-p}\sum_{k\geqslant 1}\left[(1-p)^2\right]^k \\
   &= \frac{p}{1-p} \times \frac{(1-p)^2}{1-(1-p)^2} \\
   &= \frac{p(1-p)}{1-(1-p)^2} = \frac{p(1-p)}{2p-p^2} = \frac{1-p}{2-p}
   \end{aligned}$$

   D'où $\mathbf{P}(C) = \dfrac{1-p}{2-p}$

4. *Soit D l'événement :*

$$D = \{\text{On obtient « pile » pour la première fois au bout d'un nombre de lancers multiple de 3}\}$$

Calculez $\mathbf{P}(D)$

Le raisonnement à tenir est le même que le précédent. Donc $D = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}^*} A_{3k}$. Alors

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(D) &= \mathbf{P}\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} A_{3k}\right) \\
&= \sum_{k\geqslant 1} \mathbf{P}(A_{3k}) \\
&= \sum_{k\geqslant 1} p(1-p)^{3k-1} \\
&= \frac{p}{1-p}\sum_{k\geqslant 1}\left[(1-p)^3\right]^k \\
&= \frac{p}{1-p} \times \frac{(1-p)^3}{1-(1-p)^3} \\
&= \frac{p(1-p)^2}{1-(1-p^3+3p^2-3p)} = \frac{(1-p)^2}{p^2-3p+3}
\end{aligned}$$

D'où $\mathbf{P}(D) = \dfrac{(1-p)^2}{p^2-3p+3}$

5. *Les événements C et D sont-ils indépendants ?*

Les événements C et D sont indépendants si et seulement si $\mathbf{P}(C\cap D) = \mathbf{P}(C)\times\mathbf{P}(D)$

C'est quoi l'événement $C\cap D$?

C'est l'événement « On obtient « pile » pour la première fois au bout d'un nombre pair de lancers et d'un nombre de lancers multiple de 3 »

Ainsi, $C\cap D = \{$On obtient « pile » pour la première fois au bout d'un nombre de lancers multiple de 6$\}$

Donc, $C\cap D = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}^*} A_{6k}$. Alors :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(C\cap D) &= \mathbf{P}\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} A_{6k}\right) \\
&= \sum_{k\geqslant 1} \mathbf{P}(A_{6k}) \\
&= \sum_{k\geqslant 1} p(1-p)^{6k-1} \\
&= \frac{p}{1-p}\sum_{k\geqslant 1}\left[(1-p)^6\right]^k \\
&= \frac{p}{1-p} \times \frac{(1-p)^6}{1-(1-p)^6} \\
&= \frac{(1-p)^5}{1-(1-p)^6}
\end{aligned}$$

Donc $\mathbf{P}(C\cap D) = \dfrac{(1-p)^5}{1+(1-p)+(1-p)^2+(1-p)^3+(1-p)^4+(1-p)^5}$

$\mathbf{P}(C)\times\mathbf{P}(D) = \dfrac{1}{2-p}\times\dfrac{1}{p^2-3p+3} = \dfrac{1}{6-p^3-p^2-9p}$.

Comme $\dfrac{(1-p)^5}{1+(1-p)+(1-p)^2+(1-p)^3+(1-p)^4+(1-p)^5} \neq \dfrac{1}{6-p^3-p^2-9p}$, nous avons $\mathbf{P}(C\cap D)\neq\mathbf{P}(C)\times\mathbf{P}(D)$

Les événements C et D ne sont donc pas indépendants

Comment démontrer $\mathbf{P}(C \cap D) \neq \mathbf{P}(C) \times \mathbf{P}(D)$?

C'est juste une histoire de calculs...fastidieux.

Posons $q = 1 - p$

Alors $\mathbf{P}(C) = \dfrac{q}{1+q}$,$\mathbf{P}(D) = \dfrac{q^2}{1+q+q^2}$, et pour terminer, $\mathbf{P}(C \cap D) = \dfrac{q^5}{1+q+q^2+q^3+q^4+q^5}$.

La question devient alors : quand avons nous :

$$\frac{q}{1+q} \times \frac{q^2}{1+q+q^2} = \frac{q^3}{(1+q)(1+q+q^2)} = \frac{q^5}{1+q+q^2+q^3+q^4+q^5}$$

Cette dernière égalité étant équivalente à

$$\begin{gathered}\frac{1}{(1+q)(1+q+q^2)} = \frac{q^2}{1+q+q^2+q^3+q^4+q^5} \text{ puisque } q \neq 0 \\ \Longleftrightarrow \\ q^2(1+q)\left(1+q+q^2\right) = 1+q+q^2+q^3+q^4+q^5 \\ \Longleftrightarrow \\ q^2+2q^3+2q^4+q^5 = 1+q+q^2+q^3+q^4+q^5 \\ \Longleftrightarrow \\ q^3+q^4 = 1+q \Longleftrightarrow q^3(1+q) = 1+q \\ \Longleftrightarrow \\ (1+q)\left(q^3-1\right) = 0\end{gathered}$$

Ce qui n'est possible que si $q = 1$, c'est à dire $p = 0$, ce qui est impossible

Exercice 33 :

On effectue des tirages dans une urne contenant initialement a boules blanches et b boules noires de la façon suivante :

On remet à chaque fois la boule tirée à laquelle on ajoute c boules de même couleur

1. *Calculer la probabilité pour obtenir la* ***première*** *boule blanche au n-ième tirage*

   Comme proposé, nous posons $N_j = \{\text{On amène une boule noire au } j\text{-ème tirage}\}$ et si A_n est l'événement « On obtient la première boule blanche au n-ième tirage ».

   Il est clair que nous avons $A_n = N_1 \cap N_2 \cap \cdots \cap N_{n-1} \cap \overline{N_n}$

   Comme le tirage au moment k est fixé par résultats antérieurs, il est apparaît bon d'utiliser la formule des probabilités totales généralisée :

   $$\mathbf{P}(A_n) = \mathbf{P}(N_1) \times \mathbf{P}(N_2/N_1) \times \mathbf{P}(N_3/N_1 \cap N_2) \times \cdots \times \mathbf{P}\left(\overline{N_n}/N_1 \cap N_2 \cap \ldots N_{n-1}\right)$$

   Si les tirages 1 à $k-1$ amènent des boules noires, sachant qu'à chaque tirage, on ajoute c boules noires, juste avant le k-ième tirage, nous aurons ajouté $(k-1)c$ boules noires, de telle sorte que nous avons $b+(k-1)c$ boules noires. Il y a donc, dans l'urne, avant le k-ième tirage, $a+b+(k-1)c$ boules dont a boules blanches. Donc :

   $$\mathbf{P}(N_k/N_1 \cap N_2 \cap \ldots N_{k-1}) = \frac{b+(k-1)c}{a+b+(k-1)c}$$

   D'autre part, $\mathbf{P}(N_1) = \dfrac{b}{a+b}$ et $\mathbf{P}\left(\overline{N_n}/N_1 \cap N_2 \cap \ldots N_{n-1}\right) = \dfrac{a}{a+b+(n-1)c}$. Donc :

   $$\begin{aligned}\mathbf{P}(A_n) &= \frac{b}{a+b} \times \frac{b+c}{a+b+c} \times \cdots \times \frac{b+(n-2)c}{a+b+(n-2)c} \times \frac{a}{a+b+(n-1)c} \\ &= \frac{a}{a+b+(n-1)c} \times \prod_{k=0}^{n-2} \frac{b+kc}{a+b+kc}\end{aligned}$$

2. $\Rightarrow$ *Soit C_m l'événement $C_m = \{$Les m premiers tirages amènent m boules noires$\}$. Exprimer C_m en fonction des N_j et donner $\mathbf{P}(C_m)$ sous forme de somme.*

   Nous avons $C_m = \bigcap_{k=1}^{m} N_k$. La difficulté, ici, est que les événements $(N_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$ ne sont pas indépendants. Nous allons donc utiliser les probabilités conditionnelles. Donc :

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{m} N_k\right) = \mathbf{P}(N_1) \times \mathbf{P}(N_2/N_1) \times \mathbf{P}(N_3/N_1 \cap N_2) \times \cdots \times \mathbf{P}(N_m/N_1 \cap N_2 \cap \ldots N_{m-1})$$

   Et donc, $\mathbf{P}(C_m) = \prod_{k=0}^{m-1} \dfrac{b+kc}{a+b+kc}$

   $\Rightarrow$ *Démontrer que $\lim_{m\to+\infty} \ln(\mathbf{P}(C_m)) = -\infty$*

   Nous avons $\ln(\mathbf{P}(C_m)) = \ln\left(\prod_{k=0}^{m-1} \dfrac{b+kc}{a+b+kc}\right) = \sum_{k=0}^{n} \ln\left(\dfrac{b+kc}{a+b+kc}\right)$

   Rechercher $\lim_{m\to+\infty} \ln(\mathbf{P}(C_m))$, c'est étudier la convergence de la série $\sum_{k\geqslant 0} \ln\left(\dfrac{b+kc}{a+b+kc}\right)$.

   Nous avons $\dfrac{b+kc}{a+b+kc} = \dfrac{a+b+kc}{a+b+kc} - \dfrac{a}{a+b+kc} = 1 - \dfrac{a}{a+b+kc}$

   En $+\infty$, nous avons $\ln\left(\dfrac{b+kc}{a+b+kc}\right) = \ln\left(1 - \dfrac{a}{a+b+kc}\right) \underset{+\infty}{\approx} \dfrac{-a}{kc}$

   La série $\sum_{k\geqslant 1} \dfrac{-a}{kc}$ étant divergente, la série $\sum_{k\geqslant 0} \ln\left(\dfrac{b+kc}{a+b+kc}\right)$ est, elle aussi, divergente.

   Comme, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, nous avons $\dfrac{b+kc}{a+b+kc} < 1$, nous avons $\ln\left(\dfrac{b+kc}{a+b+kc}\right) < 0$ et donc $\sum_{k\geqslant 0} \ln\left(\dfrac{b+kc}{a+b+kc}\right) = -\infty$.

   En d'autres termes, $\lim_{m\to+\infty} \ln(\mathbf{P}(C_m)) = -\infty$

3. *Soit C l'événement $C = \{$Il n'apparaît que des boules noires$\}$. Exprimer C en fonction des $(C_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ puis, conclure que $\mathbf{P}(C) = 0$.*

   Clairement, si l'événement C est réalisé, alors, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, C_m est réalisé, et nous avons $C = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} C_m$.

   D'autre part, la suite d'événements $(C_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante, puisque si C_{m+1} est réalisé, ce qui veut dire que lors des $m+1$ premiers tirages, nous ne tirons que des boules noires, alors, en particulier, les m premiers tirages ne voient que des boules noires, et donc $C_{m+1} \subset C_m$

   D'après la proposition 12.3.4, nous avons $\mathbf{P}(C) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} C_m\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(C_m)$

   Nous venons de montrer que $\lim_{m\to+\infty} \ln(\mathbf{P}(C_m)) = -\infty$. Comme $\mathbf{P}(C_m) = e^{\ln(\mathbf{P}(C_m))}$, nous avons $\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(C_m) = 0$

   L'événement C est donc quasi-impossible.

4. *Quelle est la valeur de $\sum_{n\geqslant 1} \mathbf{P}(A_n)$. Interpréter ce résultat*

   Nous appelons A l'événement « Il apparaît une boule blanche »

   Nous avons $A = \overline{C}$ et donc $\mathbf{P}(A) = 1$.

   D'autre part, nous avons $A = \bigcup_{k\geqslant 1} A_k$, et de manière évidente, les événements $(A_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ sont 2 à 2 incompatibles. Donc,

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{k\geqslant 1} A_k\right) = \sum_{n\geqslant 1} \mathbf{P}(A_n) = 1$$

   Il est donc presque certain que l'un des événements A_k se produira.

Exercice 34 :

Un joueur joue une série de manches indépendantes (Dés, « Pile ou Face », etc....)

▷ *A chaque manche, il gagne 1€ avec la probabilité p et perd 1 € avec la probabilité $1-p$*

▷ *Le jeu s'arrête lorsque le joueur a gagné N € ou lorsqu'il est ruiné.*

Nous notons u_k la probabilité qu'a le joueur d'être ruiné lorsqu'il possède k € au départ

1. *On suppose $p \neq \dfrac{1}{2}$*

(a) *Calculer u_0 et u_N*

Nous commençons par des cas particuliers ; u_k est la probabilité qu'a le joueur d'être ruiné lorsqu'il possède k € au départ

⋆ Si le joueur n'a que 0€lorsqu'il commence à jouer, il est déjà ruiné ! ! Et donc $u_0 = 1$

⋆ Par le même raisonnement, si le joueur a N€ lorsqu'il commence à jouer, il doit s'arrêter avant de commencer ; et il n'est pas ruiné ! ! Et donc $u_N = 0$

(b) *Montrer que $u_k = pu_{k+1} + (1-p)\,u_{k-1}$*

Nous appelons E_k, l'événement :$E_k = \{$Le joueur est ruiné avec un capital initial de k€$\}$; nous avons $\mathbf{P}(E_k) = u_k$

A est l'événement $A = \{$Le joueur gagne la première manche$\}$; alors

$$E_k = E_k \cap \left(A \cup \overline{A}\right) = \left(E_k \cap A\right) \cup \left(E_k \cap \overline{A}\right)$$

Et donc

$$\mathbf{P}(E_k) = \mathbf{P}(E_k \cap A) + \mathbf{P}\left(E_k \cap \overline{A}\right) = \mathbf{P}(E_k/A)\,\mathbf{P}(A) + \mathbf{P}\left(E_k/\overline{A}\right)\mathbf{P}\left(\overline{A}\right)$$

Il est clair que $\mathbf{P}(A) = p$ et que $\mathbf{P}\left(\overline{A}\right) = 1-p$

⋆ Etude de $\mathbf{P}(E_k/A)$

Le joueur est parti avec k€, mais nous savons qu'il a remporté la première manche et il a donc, maintenant, dans son escarcelle, $k+1$€ et donc, $\mathbf{P}(E_k/A) = u_{k+1}$

⋆ Avec ce même raisonnement, nous avons $\mathbf{P}\left(E_k/\overline{A}\right) = u_{k-1}$

D'où nous tirons :

$$\mathbf{P}(E_k) = \mathbf{P}(E_k/A)\,\mathbf{P}(A) + \mathbf{P}\left(E_k/\overline{A}\right)\mathbf{P}\left(\overline{A}\right) = pu_k + (1-p)\,u_{k-1} \iff u_k = pu_{k+1} + (1-p)\,u_{k-1}$$

(c) *En déduire que $u_k = \dfrac{\left(\frac{1-p}{p}\right)^k - \left(\frac{1-p}{p}\right)^N}{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^N}$*

→ La relation $u_k = pu_{k+1} + (1-p)\,u_{k-1} \iff pu_{k+1} - u_k + (1-p)\,u_{k-1} = 0$ est une relation linéaire qui définit bien la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

L'équation caractéristique est donnée par $pr^2 - r + (1-p) = 0$ de discriminant $\Delta = 1 - 4p(1-p) = 4p^2 - 4p + 1 = (2p-1)^2$

Comme $p \neq \dfrac{1}{2}$, nous avons $\Delta > 0$ et il existe donc 2 racines q_1 et q_2 à l'équation caractéristique.

$$q_1 = \frac{1 + (2p-1)}{2p} = 1 \quad q_2 = \frac{1 - (2p-1)}{2p} = \frac{2-2p}{2p} = \frac{1-p}{p}$$

→ Ainsi, pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifiant $pu_{k+1} - u_k + (1-p)\,u_{k-1} = 0$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$ tels que $u_n = \lambda q_1^n + \mu q_2^n = \lambda + \mu\left(\dfrac{1-p}{p}\right)^n$

→ Il faut, maintenant, préciser les valeurs de λ et μ. Nous avons que $u_0 = 1$ et $u_N = 0$, nous pouvons alors poser :

$$\left\{\begin{array}{rl} \lambda+\mu = & 1 \\ \lambda+\mu\left(\dfrac{1-p}{p}\right)^N = & 0 \end{array}\right.$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\left\{\begin{array}{rl} \lambda+\mu = & 1 \\ 1-\mu+\mu\left(\dfrac{1-p}{p}\right)^N = & 0 \end{array}\right.$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\mu = \frac{1}{1-\left(\dfrac{1-p}{p}\right)^N} \qquad \lambda = -\frac{\left(\dfrac{1-p}{p}\right)^N}{1-\left(\dfrac{1-p}{p}\right)^N}$$

→ D'où,
$$u_k = -\frac{\left(\dfrac{1-p}{p}\right)^N}{1-\left(\dfrac{1-p}{p}\right)^N} + \frac{\left(\dfrac{1-p}{p}\right)^k}{1-\left(\dfrac{1-p}{p}\right)^N} = \frac{\left(\dfrac{1-p}{p}\right)^k - \left(\dfrac{1-p}{p}\right)^N}{1-\left(\dfrac{1-p}{p}\right)^N}$$

(d) *Que se passe-t-il lorsque N tend vers $+\infty$*

⇒ Si $p < \dfrac{1}{2}$, ce qui veut dire que le joueur est défavorisé, nous avons alors $1-p > \dfrac{1}{2}$ et donc $\dfrac{1-p}{p} > 1$ et nous en déduisons que $\lim\limits_{N\to+\infty}\left(\dfrac{1-p}{p}\right)^N = +\infty$ et donc $\lim\limits_{N\to+\infty}\dfrac{\left(\frac{1-p}{p}\right)^k - \left(\frac{1-p}{p}\right)^N}{1-\left(\frac{1-p}{p}\right)^N} = 1$, c'est à dire $\lim\limits_{N\to+\infty} u_k = 1$

Ce qui veut dire, que, dans ce cas, si le joueur, partant d'une somme de k €, attend d'avoir N€ pour s'arrêter, a de plus en plus de chances d'être ruiné.

⇒ Si, cette fois ci $p > \dfrac{1}{2}$, nous avons alors $1-p < \dfrac{1}{2}$ et donc $\dfrac{1-p}{p} < 1$ et nous en déduisons que $\lim\limits_{N\to+\infty}\left(\dfrac{1-p}{p}\right)^N = 0$ et donc $\lim\limits_{N\to+\infty}\dfrac{\left(\frac{1-p}{p}\right)^k - \left(\frac{1-p}{p}\right)^N}{1-\left(\frac{1-p}{p}\right)^N} = \left(\dfrac{1-p}{p}\right)^k$, c'est à dire $\lim\limits_{N\to+\infty} u_k = \left(\dfrac{1-p}{p}\right)^k$

2. *Reprendre les questions précédentes avec $p = \dfrac{1}{2}$*

Cette fois-ci, le jeu est équitable.

→ Nous avons toujours la relation $u_k = pu_{k+1} + (1-p)\,u_{k-1} \Longleftrightarrow \dfrac{1}{2}u_{k+1} - u_k + \dfrac{1}{2}u_{k-1} = 0$.

L'équation caractéristique est donnée par $\dfrac{1}{2}r^2 - r + \dfrac{1}{2} = 0$ de discriminant $\Delta = 0$

Vous obtenons donc $q = 1$ comme racine double

→ Ainsi, pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifiant $\dfrac{1}{2}u_{k+1} - u_k + \dfrac{1}{2}u_{k-1} = 0$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$ tels que $u_n = \lambda + \mu n$

→ Il faut, maintenant, préciser les valeurs de λ et μ. Nous avons que $u_0 = 1$ et $u_N = 0$, nous pouvons alors poser :

$$\left\{\begin{array}{rl} \lambda = & 1 \\ \lambda+\mu N = & 0 \end{array}\right.$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\mu = \frac{-1}{N} \qquad \lambda = 1$$

→ D'où, dans le cas où $p = \dfrac{1}{2}$ $u_k = 1 - \dfrac{k}{N}$

→ Et donc $\lim\limits_{N \to +\infty} u_k = 1$

Ce qui veut dire que le joueur a de plus en plus de chances d'être ruiné, avec un jeu équitable, s'il attend d'amasser N€ pour N assez grand.

Exercice 35 :

Une urne U_1 contient une boule noire et cinq boules blanches.
Une urne U_2 contient quatre boules noires et deux boules blanches.
On tire une boule au hasard d'une des deux urnes. On note la couleur de la boule et on la replace dans l'urne.
Si la boule est blanche on effectue un autre tirage dans la même urne, sinon on tire une seconde boule dans l'autre urne.
On répète cette expérience une infinité de fois.
Soient A_n l'événement :

$$A_n = \{\text{Le } n\text{-ième tirage a lieu dans l'urne } U_1\}$$

et B_n l'événement :

$$B_n = \{\text{Le } n\text{-ième tirage amène une boule blanche}\}$$

1. (a) *Calculer les probabilités conditionnelles $\mathbf{P}(A_n/A_{n-1})$ et $\mathbf{P}\left(A_n/\overline{A_{n-1}}\right)$*

→ Calcul de $\mathbf{P}(A_n/A_{n-1})$
Nous savons qu'au tirage d'ordre $(n-1)$, nous avons fait un tirage dans l'urne U_1. La probabilité qu'au tirage d'ordre n nous puisions une boule à nouveau dans l'urne U_1 et donc nous avons $\mathbf{P}(A_n/A_{n-1}) = \dfrac{5}{6}$

→ Calcul de $\mathbf{P}\left(A_n/\overline{A_{n-1}}\right)$
Cette fois ci, nous savons que l'événement $\overline{A_{n-1}}$ est réalisé, et donc qu'au tirage d'ordre $(n-1)$, le tirage se fait dans l'urne U_2 et que le n-ième tirage se fera dans l'urne U_1. La question est donc de donner la probabilité de tirer une boule noire dans l'urne U_2, et donc $\mathbf{P}\left(A_n/\overline{A_{n-1}}\right) = \dfrac{2}{3}$

(b) *Soit $p_n = \mathbf{P}(A_n)$. Etablir une relation de récurrence entre p_n et p_{n-1} et en déduire p_n*

Comme d'habitude, nous écrivons :

$$A_n = A_n \cap \Omega = A_n \cap \left(A_{n-1} \cup \overline{A_{n-1}}\right) = (A_n \cap A_{n-1}) \cup \left(A_n \cap \overline{A_{n-1}}\right)$$

D'où

$$\mathbf{P}(A_n) = \mathbf{P}(A_n \cap A_{n-1}) + \mathbf{P}\left(A_n \cap \overline{A_{n-1}}\right) = \mathbf{P}(A_n/A_{n-1})\,\mathbf{P}(A_{n-1}) + \mathbf{P}\left(A_n/\overline{A_{n-1}}\right)\mathbf{P}\left(\overline{A_{n-1}}\right)$$

C'est à dire $p_n = \dfrac{5}{6}p_{n-1} + \dfrac{2}{3}(1 - p_{n-1}) \Longleftrightarrow p_n = \dfrac{1}{6}p_{n-1} + \dfrac{2}{3}$

La suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite du type $p_n = ap_{n-1} + b$, et d'après les études précédentes, nous avons :

$$p_n = \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}\left(p_1 - \frac{4}{5}\right) + \frac{4}{5}$$

C'est quoi p_1 ?... C'est la probabilité pour que le premier tirage se passe dans l'urne U_1, et nous avons donc $p_1 = \dfrac{1}{2}$

Et donc, pour conclure, $p_n = \left(\dfrac{1}{6}\right)^{n-1}\left(-\dfrac{3}{10}\right) + \dfrac{4}{5}$

2. *Soit $q_n = \mathbf{P}(B_n)$*

(a) *Exprimer q_n en fonction de p_n*

Comme $q_n = \mathbf{P}(B_n)$, nous allons nous intéresser à l'événement B_n. Nous avons, en effet, et comme d'habitude :

$$B_n = B_n \cap \Omega = B_n \cap \left(A_n \cup \overline{A_n}\right) = (B_n \cap A_n) \cup \left(B_n \cap \overline{A_n}\right)$$

Et donc, comme à chaque fois :

$$\mathbf{P}(B_n) = \mathbf{P}(B_n \cap A_n) + \mathbf{P}\left(B_n \cap \overline{A_n}\right) = \mathbf{P}(B_n/A_n)\,\mathbf{P}(A_n) + \mathbf{P}\left(B_n/\overline{A_n}\right)\mathbf{P}\left(\overline{A_n}\right)$$

→ Calcul de $\mathbf{P}(B_n/A_n)$
On sait que l'on "pioche" dans l'urne U_1, et donc quelle est la probabilité pour que l'on ait une boule blanche ? C'est simple ! ! Nous avons $\mathbf{P}(B_n/A_n) = \dfrac{5}{6}$

→ Calcul de $\mathbf{P}\left(B_n/\overline{A_n}\right)$

Avec le même raisonnement, nous avons $\mathbf{P}\left(B_n/\overline{A_n}\right) = \dfrac{1}{3}$

D'où nous avons $q_n = \dfrac{5}{6}p_n + \dfrac{1}{3}(1 - p_n) = \dfrac{1}{2}p_n + \dfrac{1}{3}$

(b) *Calculer q_n*

De $q_n = \dfrac{1}{2}p_n + \dfrac{1}{3}$, nous tirons que $q_n = \left(-\dfrac{3}{20}\right)\left(\dfrac{1}{6}\right)^{n-1} + \dfrac{11}{15}$

Exercice 36 :

Cet exercice vient en complément de la proposition 12.3.8 sur **le lemme de BOREL-CANTELLI**

1. *Dans cette proposition, nous affirmions que, si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements d'un espace probabilisé $\{\Omega; \mathcal{F}; \mathbf{P}\}$ tels que la série $\sum_{n\geqslant 0} \mathbf{P}(A_n)$ converge, et si*

$$B = \{\textit{Une infinité d'événements } A_n \textit{ se réalisent}\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(\bigcup_{p\geqslant n} A_p\right)$$

alors, $\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\left(\bigcup_{p\geqslant n} A_p\right)\right) = 0$
En d'autres termes, $\mathbf{P}$-presque sûrement, seuls un nombre fini d'événements A_n se produisent, autrement dit $\mathbf{P}\left(\overline{B}\right) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\left(\bigcap_{p\geqslant n} \overline{A_p}\right)\right) = 1$

2. *Nous allons compléter la proposition 12.3.8 en supposant maintenant que les événements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont mutuellement indépendants, et que la série $\sum_{n\geqslant 0} \mathbf{P}(A_n)$ diverge, c'est à dire $\lim_{n\to+\infty} \sum_{p=0}^{n} \mathbf{P}(A_n) = +\infty$*

Ré-écrivons ce que veut dire que les événements de la suite d'événements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont mutuellement indépendants :

A toute suite finie $A_{n_1}, A_{n_2}, \cdots, A_{n_p}$ d'événements extraits de la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, nous avons

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{p} A_{n_k}\right) = \prod_{k=1}^{p} \mathbf{P}(A_{n_k})$$

(a) *On appelle $E_n = \bigcap_{p\geqslant n} \overline{A_p}$, c'est à dire que $\overline{B} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$; montrer que la suite des événements $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, c'est à dire que $E_n \subset E_{n+l}$, et en déduire que $\mathbf{P}\left(\overline{B}\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(E_n)$*

→ Montrons que $E_n \subset E_{n+l}$

Nous allons montrer que, de manière générale, si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'ensembles, alors la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $Y_n = \bigcap_{p\geqslant n} X_p$ est une suite croissante, c'est à dire, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $Y_n \subset Y_{n+1}$.

En effet, nous avons $Y_n = \bigcap_{p\geqslant n} X_p = \left(\bigcap_{p\geqslant n+1} X_p\right) \cap X_n = Y_{n+1} \cap X_n$

Ainsi, si $\omega \in Y_n$, alors $\omega \in Y_{n+1} \cap X_n$ et donc $\omega \in Y_{n+1}$

Et nous avons donc $Y_n \subset Y_{n+1}$

Ainsi, de la manière dont est construite la suite $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$, elle est donc croissante, et donc nous avons $E_n \subset E_{n+l}$

→ Montrons que $\mathbf{P}\left(\overline{B}\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(E_n)$

Comme nous avons $\overline{B} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$. La suite $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant croissante, d'après 12.3.3 :

$$\mathbf{P}\left(\overline{B}\right) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(E_n)$$

Ce que nous voulions

(b) *Démontrer que* $\mathbf{P}\left(\bigcap_{p\geqslant n} \overline{A_p}\right) = \mathbf{P}(E_n) = \lim_{N\to+\infty} \prod_{p=n}^{N} \mathbf{P}\left(\overline{A_p}\right)$

Soit $n \in \mathbb{N}$, fixé

Pour $N \in \mathbb{N}$, nous appelons $F_N = \bigcap_{p=n}^{N} \overline{A_p}$

⋆ Nous avons $F_{N+1} \subset F_N$

Il faut donc montrer que la suite $(F_N)_{N\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante ; nous avons, en effet :

$$F_{N+1} = \bigcap_{p=n}^{N+1} \overline{A_p} = \left(\bigcap_{p=k}^{k=N} \overline{A_p}\right) \cap \overline{A_{N+1}} = F_N \cap \overline{A_{N+1}}$$

Ainsi, si $\omega \in F_{N+1}$, alors $\omega \in F_N \cap \overline{A_{N+1}}$ et donc $\omega \in F_N$

La suite $(F_N)_{N\in\mathbb{N}^*}$ est donc décroissante.

⋆ Nous avons aussi $\bigcap_{N\in\mathbb{N}} F_N = \bigcap_{p\geqslant n} \overline{A_p}$

Il n'est pas inintéressant de voir ce que deviennent les premiers indices pour comprendre ce qui se passe :

$$F_0 = \overline{A_k} \quad F_1 = \overline{A_k} \cap \overline{A_{k+1}} \quad F_N = \overline{A_k} \cap \overline{A_{k+1}} \cap \cdots \cap \overline{A_{k+N}}$$

Et donc, $\bigcap_{N\in\mathbb{N}} F_N = \bigcap_{p\geqslant n} \overline{A_p}$

⋆ Nous avons donc, d'après 12.3.4, $\mathbf{P}\left(\bigcap_{p\geqslant n} \overline{A_p}\right) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{N\in\mathbb{N}} F_N\right) = \lim_{N\to+\infty} \mathbf{P}(F_N)$ et donc, $\mathbf{P}(E_n) = \lim_{N\to+\infty} \mathbf{P}(F_N)$

⋆ Or, les événements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant mutuellement indépendants :

$$\mathbf{P}(F_N) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{p=k}^{N} \overline{A_p}\right) = \prod_{p=k}^{N} \mathbf{P}\left(\overline{A_p}\right)$$

⋆ D'où $\mathbf{P}\left(\bigcap_{p\geqslant k} \overline{A_p}\right) = \mathbf{P}(E_n) = \lim_{N\to+\infty} \mathbf{P}(F_N) = \lim_{N\to+\infty} \prod_{p=k}^{N} \mathbf{P}\left(\overline{A_p}\right)$

Ce que nous voulions

(c) *Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $0 \leqslant x < 1$ nous avons $\ln(1-x) \leqslant -x$; en déduire que :*

$$\lim_{N\to+\infty}\left[\ln\left(\prod_{p=n}^{N}\mathbf{P}\left(\overline{A_p}\right)\right)\right] = \lim_{N\to+\infty}\ln\left(\mathbf{P}\left(F_N\right)\right) = -\infty$$

$\Rightarrow$ Pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $0 \leqslant x < 1$ nous avons $\ln(1-x) \leqslant -x$
C'est une question simple, du niveau L_0.
Soit $\Phi : [0;1[\longrightarrow \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in [0;1[$, nous avons $\Phi(x) = \ln(1-x) + x$. De là, la dérivée de Φ donne $\Phi'(x) = \dfrac{-1}{1-x} + 1 = \dfrac{-x}{1-x}$.
Donc, pour tout $x \in [0;1[$, nous avons $\Phi'(x) \leqslant 0$, c'est à dire que Φ est décroissante.
Ainsi, $x \in [0;1[$, nous avons $\Phi(x) \leqslant \Phi(0) \Longleftrightarrow \ln(1-x) + x \leqslant 0 \Longleftrightarrow \ln(1-x) \leqslant -x$

$\Rightarrow$ Montrons que $\lim\limits_{N\to+\infty}\left[\ln\left(\prod\limits_{p=n}^{N}\mathbf{P}\left(\overline{A_p}\right)\right)\right] = -\infty$

$\star$ Nous avons $\mathbf{P}\left(\overline{A_p}\right) = 1 - \mathbf{P}(A_p)$ et

$$\ln\left(\prod_{p=n}^{N}\mathbf{P}\left(\overline{A_p}\right)\right) = \sum_{p=n}^{N}\ln\left(\mathbf{P}\left(\overline{A_p}\right)\right) = \sum_{p=n}^{N}\ln\left(1-\mathbf{P}(A_p)\right)$$

$\star$ Comme $\ln(1-x) \leqslant -x$, nous avons $\ln(1-\mathbf{P}(A_p)) \leqslant -\mathbf{P}(A_p)$, de telle sorte que $\sum\limits_{p=n}^{N}\ln(1-\mathbf{P}(A_p)) \leqslant -\sum\limits_{p=n}^{N}\mathbf{P}(A_p)$

$\star$ Par hypothèse, la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}\mathbf{P}(A_n)$ diverge, donc, $\lim\limits_{N\to+\infty} -\sum\limits_{p=n}^{N}\mathbf{P}(A_p) = -\infty$, c'est à dire que $\lim\limits_{N\to+\infty}\sum\limits_{p=n}^{N}\ln(1-\mathbf{P}(A_p)) = -\infty$ et donc, comme $\ln\left(\prod\limits_{p=n}^{N}\mathbf{P}\left(\overline{A_p}\right)\right) = \sum\limits_{p=n}^{N}\ln(1-\mathbf{P}(A_p))$, nous avons $\lim\limits_{N\to+\infty}\left[\ln\left(\prod\limits_{p=n}^{N}\mathbf{P}\left(\overline{A_p}\right)\right)\right] = -\infty$, c'est à dire $\lim\limits_{N\to+\infty}\ln(\mathbf{P}(F_N)) = -\infty$

Ce que nous voulions

(d) *Conclure que $\lim\limits_{N\to+\infty}\mathbf{P}(F_N) = 0$, puis que $\mathbf{P}\left(\overline{B}\right) = 0$*

De $\lim\limits_{N\to+\infty}\ln(\mathbf{P}(F_N)) = -\infty =$, nous déduisons que $\lim\limits_{N\to+\infty}\mathbf{P}(F_N) = 0$. Comme $\mathbf{P}(E_n) = \lim\limits_{N\to+\infty}\mathbf{P}(F_N)$, nous avons donc $\mathbf{P}(E_n) = 0$

Nous avons vu que $\overline{B} = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n$ et donc $\mathbf{P}\left(\overline{B}\right) \leqslant \sum\limits_{n\in\mathbb{N}}\mathbf{P}(E_n) = 0$.

D'où, nous avons $\mathbf{P}\left(\overline{B}\right) = 0$ et $\mathbf{P}(B) = 1$

3. **Application à un problème de « Pile ou Face »**
On lance une pièce de monnaie indéfiniment. La probabilité pour amener « PILE » est p et celle d'amener « FACE » est $q = 1 - p$

(a) *Soit $n \in \mathbb{N}^*$; on note A_n l'événement $A_n = \{$« PILE » apparaît au n-ième lancer$\}$ Donner $\mathbf{P}(A_n)$ et en déduire que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\mathbf{P}(A_n)$ diverge. Conclure que « PILE » apparaît une infinité de fois de façon quasi-certaine.*

Les lancers sont indépendants, et les événements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont indépendants.

De plus, $\mathbf{P}(A_n) = p$ et donc, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\mathbf{P}(A_n)$ est divergente.

D'après le second point du lemme de Borel-Cantelli, « PILE » apparaît une infinité de fois de façon quasi-certaine. *(Il en est de même de « FACE » d'ailleurs)*

(b) *Soit $m \in \mathbb{N}^*$. On note E_n l'événement :*

$$E_n = \{\text{Les lancers } nm+1 \text{ à } nm+m \text{ amènent des PILE uniquement}\}$$

Donner $\mathbf{P}(E_n)$ et en déduire que la série $\sum_{n \geqslant 1} \mathbf{P}(E_n)$ diverge. Conclure que la séquence des m « PILE » consécutifs apparaît une infinité de fois.

⇒ Calcul de $\mathbf{P}(E_n)$
L'événement E_n peut s'écrire :

$$\begin{aligned} E_n = &\ A_{nm+1} \cap A_{nm+2} \cap A_{nm+3} \cap \cdots \cap A_{nm+m} \\ = &\ \bigcap_{k=1}^{m} A_{nm+k} \end{aligned}$$

Comme les événements $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont indépendants, nous avons

$$\mathbf{P}(E_n) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{m} A_{nm+k}\right) = \prod_{k=1}^{m} \mathbf{P}(A_{nm+k}) = p^m$$

⇒ La série $\sum_{n \geqslant 1} \mathbf{P}(E_n)$ diverge
C'est assez évident, puisque p^m est constant ; si nous regardons les sommes partielles, $\sum_{k=1}^{n} p^m$, nous avons $\sum_{k=1}^{n} p^m = np^m$ et $\lim_{n \to +\infty} np^m = +\infty$

⇒ Conclure que la séquence des m « PILE » consécutifs apparaît une infinité de fois.
Nous sommes dans le cas du lemme de Borel-Cantelli ; donc la séquence de m « PILE » consécutifs apparaît une infinité de fois.

4. **Application au mouvement d'une particule**
L'espace $\mathbb{R}^3$ est rapporté à un repère orthonormé $\left\{O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right\}$ et on considère une particule qui se déplace dans cet espace ; on tente de repérer sa position, à temps entiers.
⇒ *En $t = 0$, elle est à l'origine O*
⇒ *En $t = n$, elle se trouve en $M_n = (x_n, y_n, z_n)$ à coordonnées entières.*
⇒ *En $t = n+1$, elle se trouve en $M_{n+1} = (x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1})$ où x_{n+1} est obtenu à partir de x_n en faisant varier x_n de $+1$ ou de -1 et, de même pour les 2 autres coordonnées.*
⇒ *La particule se retrouve donc de façon équiprobable à l'un des 8 sommets du cube dont $M_n = (x_n, y_n, z_n)$ est le centre, les mouvements successifs de la particules étants indépendants*

(a)
▷ *Soit E_n l'événement : $E_n = \{\text{La particule est dans le plan } yOz \text{ au temps } t = 2n\}$*
▷ *Soit F_n l'événement : $F_n = \{\text{La particule est dans le plan } xOz \text{ au temps } t = 2n\}$*
▷ *Soit G_n l'événement : $G_n = \{\text{La particule est dans le plan } xOy \text{ au temps } t = 2n\}$*
Calculer $\mathbf{P}(E_n)$, $\mathbf{P}(F_n)$ et $\mathbf{P}(G_n)$

Nous allons résoudre cette question en calculant seulement $\mathbf{P}(E_n)$, les autres calculs étant les mêmes.
Si la particule est dans le plan yOz à $t = 2n$, ceci signifie que l'abscisse x_{2n} de la particule est $x_{2n} = 0$.
Ceci signifie donc que **l'abscisse** de la particule a varié n fois en $+1$ et n fois en -1. A chaque déplacement il y a une probabilité de $\frac{1}{2}$ que l'abscisse se déplace en $+1$ ou en -1 ; et il y a $\mathrm{C}_{2n}^{n} = \binom{2n}{n}$ façon de placer le déplacement $+1$ parmi les $2n$ déplacements. Nous avons donc :

$$\mathbf{P}(E_n) = \mathrm{C}_{2n}^{n} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} = \binom{2n}{n} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$$

Le raisonnement pour $\mathbf{P}(F_n)$ et $\mathbf{P}(G_n)$ est totalement semblable, et nous avons $\mathbf{P}(E_n) = \mathbf{P}(F_n) = \mathbf{P}(G_n)$

(b) *Soit A_n l'événement : $A_n = \{$La particule est en O au temps $t = 2n\}$ Calculer $\mathbf{P}(A_n)$*

Etre à l'origine c'est être, à la fois, dans les 3 plans yOz, xOz et xOy. Donc, $A_n = E_n \cap F_n \cap G_n$. De l'indépendance des événements,

$$\mathbf{P}(A_n) = \mathbf{P}(E_n \cap F_n \cap G_n) = \mathbf{P}(E_n) \times \mathbf{P}(F_n) \times \mathbf{P}(G_n) = \left[\binom{2n}{n} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\right]^3$$

(c) *On pose $v_n = \sqrt{n}\binom{2n}{n}\frac{1}{4^n}$ pour $n \geqslant 1$*

Il faut remarquer, ici, que $v_n = \sqrt{n}\mathbf{P}(E_n) \iff \mathbf{P}(E_n) = \dfrac{v_n}{\sqrt{n}}$

Comme $\mathbf{P}(A_n) = (\mathbf{P}(E_n))^3$, nous avons $\mathbf{P}(A_n) = \dfrac{(v_n)^3}{n^{\frac{3}{2}}}$

Nous introduisons, ici, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ pour étudier $\mathbf{P}(A_n)$

i. *Calculer $w_n = \ln\left(\dfrac{v_{n+1}}{v_n}\right)$*

⇒ Commençons par évaluer le rapport $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}$

$$\begin{aligned}
\frac{v_{n+1}}{v_n} &= \frac{\sqrt{n+1}\mathrm{C}_{2n+2}^{n+1}}{\sqrt{n}\mathrm{C}_{2n}^{n}} \times \frac{4^n}{4^{n+1}} \\
&= \frac{\sqrt{n+1}}{4\sqrt{n}} \times \frac{(2n+2)!n!n!}{(n+1)!\,(n+1)!\,(2n)!} \\
&= \frac{\sqrt{n+1}}{4\sqrt{n}} \times \frac{(2n+2)\,(2n+1)}{(n+1)\,(n+1)} \\
&= \frac{\sqrt{n+1}}{4\sqrt{n}} \times \frac{2\,(2n+1)}{(n+1)} \\
&= \frac{\sqrt{n+1}}{2\sqrt{n}} \times \frac{2n+1}{n+1} \\
&= \frac{2n+1}{2\sqrt{n\,(n+1)}}
\end{aligned}$$

⇒ Etudions, maintenant w_n

$$w_n = \ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right) = \ln\left(\frac{2n+1}{2\sqrt{n\,(n+1)}}\right) = \ln\left(1 + \left(\frac{2n+1}{2\sqrt{n\,(n+1)}} - 1\right)\right)$$

ii. *Montrer que $w_n \underset{+\infty}{\approx} \dfrac{1}{8n^2}$; en déduire que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} w_n$ converge, puis que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.*

⇒ Nous avons $w_n \underset{+\infty}{\approx} \dfrac{1}{8n^2}$

On appelle $u_n = \dfrac{2n+1}{2\sqrt{n\,(n+1)}} - 1$, ce qui veut dire que $w_n = \ln(1 + u_n)$.

⋆ Nous avons :

$$\frac{2n+1}{2\sqrt{n\,(n+1)}} = \frac{2n+1}{2n\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = \frac{1+\frac{1}{2n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}$$

Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n+1}{2\sqrt{n\,(n+1)}} = \lim\limits_{n\to+\infty} = \dfrac{1+\frac{1}{2n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = 1$, d'où nous tirons que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et que donc $w_n \underset{+\infty}{\approx} u_n$

⋆ *Nous allons rechercher un équivalent de u_n en $+\infty$*

Pour commencer,

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{2n+1}{2\sqrt{n(n+1)}} - 1 \\ &= \frac{2n+1-2\sqrt{n(n+1)}}{2\sqrt{n(n+1)}} \\ &= \frac{\left(2n+1-2\sqrt{n(n+1)}\right)\left(2n+1+2\sqrt{n(n+1)}\right)}{2\sqrt{n(n+1)}\left(2n+1+2\sqrt{n(n+1)}\right)} \\ &= \frac{(2n+1)^2-4n(n+1)}{2(2n+1)\sqrt{n(n+1)}+4n(n+1)} \\ &= \frac{4n^2+4n+1-4n^2-4n}{(4n+2)\left(n\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)+4n^2+4n} \\ &= \frac{1}{(4n^2+2n)\sqrt{1+\frac{1}{n}}+4n^2+4n} \\ &= \frac{1}{4n^2\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)+2n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+2\right)} \end{aligned}$$

D'après ce calcul, nous avons $u_n = \dfrac{1}{4n^2\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)+2n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+2\right)}$, et, en $+\infty$, nous avons $u_n \underset{+\infty}{\approx} \dfrac{1}{8n^2}$, et comme $w_n \underset{+\infty}{\approx} u_n$, par transitivité, nous avons $w_n \underset{+\infty}{\approx} \dfrac{1}{8n^2}$

$\Rightarrow$ La série $\sum\limits_{n\geqslant 0} w_n$ converge

La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{8n^2}$ est une série de Riemann convergente. Comme, en $+\infty$, nous avons $w_n \underset{+\infty}{\approx} \dfrac{1}{8n^2}$, nous en déduisons que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} w_n$ converge

$\Rightarrow$ Montrons que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge

Par construction de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$, nous avons $w_n = \ln v_{n+1} - \ln v_n$, et en nous intéressant aux suites partielles de la série convergente $\sum\limits_{n\geqslant 0} w_n$, nous avons :

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} w_n == \sum_{n=1}^{N} \ln v_{n+1} - \ln v_n = \ln v_{N+1} - \ln v_1$$

Si S est la somme de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} w_n$, nous avons $\lim\limits_{N\to+\infty} S_N = S$, et donc, de $\ln v_{N+1} = S_N + \ln v_1$, nous avons $v_{N+1} = v_1 e^{S_N}$ et donc $\lim\limits_{N\to+\infty} v_N = v_1 e^S = l$

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc.

iii. *On pose $l = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$; montrer que $\mathbf{P}(A_n) \underset{+\infty}{\approx} \dfrac{l^3}{n^{\frac{3}{2}}}$*

Nous avons établi que $\mathbf{P}(A_n) = \dfrac{(v_n)^3}{n^{\frac{3}{2}}}$, et nous avons donc bien $\mathbf{P}(A_n) \underset{+\infty}{\approx} \dfrac{l^3}{n^{\frac{3}{2}}}$

iv. *En utilisant le lemme de Borel-Cantelli, montrer que, $\mathbf{P}$-presque sûrement, seul un nombre fini d'événements A_n se produisent. Interpréter le résultat pour la particule.*

Comme $\mathbf{P}(A_n) \underset{+\infty}{\approx} \dfrac{l^3}{n^{\frac{3}{2}}}$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \mathbf{P}(A_n)$ dont le terme général est équivalent à celui d'une série de Riemann convergente est donc convergente.

D'après le lemme de Borel-Cantelli, comme la série $\sum_{n\geqslant 1} \mathbf{P}(A_n)$ est convergente, seuls un nombre fini d'événement A_n se réalisent, c'est à dire que $\mathbf{P}$-presque sûrement, la trajectoire de la particule ne reviendra à l'origine qu'unn ombre fini de fois.