14.10 Travaux dirigés

14.10.1 Applications directes du cours

Exercice 21 :

On lance une fois un dé non pipé.

1. X est la variable aléatoire égale au nombre de points du dé amené par le seul lancer.
   (a) Quelle est la loi de X ?
   (b) Quelle est la valeur moyenne de X ?
2. On suppose qu'on reçoit 15 euros si on obtient 1, rien si on obient 2, 3 ou 4, et 6 euros si on obtient 5 ou 6. Soit G la variable aléatoire égale au gain de ce jeu.
   (a) Quelle est la loi de G ?
   (b) Que vaut le gain moyen ?
3. On suppose maintenant qu'on reçoit 27 euros si on obtient un 1 et rien sinon. Préférez-vous jouer au jeu de la question 2 ou à celui-ci ? Pourquoi ?
4. On demande maintenant de miser 3 euros pour jouer au jeu de la question 2 dans lequel les gains ont été divisés par 2. Quel est l'espérance de votre gain net ?

Exercice 22 :

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire, aléatoirement, k boules en une seule prise.

1. Quel est l'espace fondamental et en donner le cardinal.
2. On note X la variable aléatoire réelle donnant le numéro de la plus petite boule tirée.
   (a) Quelles sont les valeurs prises par X ?
   (b) Pour $i \in X(\Omega)$, donner $\mathbf{P}(\{X = i\})$
3. Donner $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-k+1} \mathrm{C}_{n-i}^{k-1}$

Exercice 23 :

Le comité de sécurité d'une entreprise a collecté l'information qui suit concernant le nombre d'accidents du travail par jour, sur une période de 250 jours.

Nombre d'accidents par jour	Nombre de jours
0	34
1	68
2	68
3	45
4	24
5	9
6	2

1. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X définie par le « Nombre d'accidents en une journée » ainsi que sa fonction de répartition.
2. Quelle est la probabilité d'observer moins de 3 accidents en une journée ?
3. Le responsable du comité de sécurité précise qu'il y a 95 chances sur 100 qu'il se produise au plus 3 accidents en une journée. Cette affirmation est-elle juste ?
4. Quelles sont les chances sur 100 d'observer plus de 4 accidents en une journée ?
5. Calculer l'espérance mathématique et la variance de la variable X. Les interpréter.

Exercice 24 :

X est une variable aléatoire réelle discrète dont la loi est définie par le tableau suivant :

k	-1	0	1	2
$\mathbf{P}(\{X=k\})$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$

1. Calculer $\mathbb{E}(X)$, la moyenne de X, ainsi que $\sigma^2(X)$, la variance de X
2. Soit la variable aléatoire réelle $Y = X^2$ Quelle est la loi de probabilité de Y ?

Exercice 25 :

On considère un dé cubique truqué, de telle sorte que la probabilité d'obtenir la face numérotée k est proportionnelle à k (on suppose que les faces sont numérotées de 1 à 6).
Soit X la variable aléatoire associée au lancer de ce dé.

1. Déterminer la loi de X et calculer son espérance.
2. On pose $Y = \dfrac{1}{X}$. Déterminer la loi de Y et son espérance.

Exercice 26 :

On lance trois fois de suite un dé cubique à 6 faces.

1. Quel est l'espace de probabilité $\{\Omega; \mathcal{F}; \mathbf{P}\}$ lié à cette expérience ?
2. Soit X le nombre de valeurs distinctes obtenues pour un lancer : par exemple $X(2;6;1) = 3$ et $X(4;4;2) = 2$. Quelle est la loi de X ?

Exercice 27 :

X est une variable aléatoire réelle définie sur l'espace probabilisé $\{\Omega; \mathcal{F}; \mathbf{P}\}$ telle que $X(\Omega) = \{1, \ldots, n\}$, c'est à dire que X prend des valeurs entières comprises entre 1 et n.

1. Montrer que pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, nous avons $\{X \leqslant k-1\} \subset \{X \leqslant k\}$
2. Montrer que $\mathbf{P}(\{X=k\}) = \mathbf{P}(\{X \leqslant k\}) - \mathbf{P}(\{X \leqslant k-1\})$
3. On suppose $\mathbf{P}(\{X \leqslant k\}) = \dfrac{\lambda k(k-1)}{2n}$; quelle valeur donner à λ pour que $\mathbf{P}$ soit une probabilité ?
4. En déduire $\mathbf{P}(\{X=k\})$
5. Donner l'espérance mathématique de X

Exercice 28 :

Soit U une urne contenant n boules numérotées de 1 à n . On en tire p successivement, avec remise à chaque tirage.
On appelle X la variable aléatoire réelle égale au plus grand des numéros des boules ainsi tirées.
Pour $k \in \{1, \ldots, n\}$, donner $\mathbf{P}(\{X \leqslant k\})$, puis $\mathbf{P}(\{X=k\})$

Exercice 29 :

Chez STM, on a établi, sur une longue période, que le nombre de personnes absentes par semaine peut être modélisé par la loi suivante :

Nombre de personnes absentes x_i	$\mathbf{P}[X=x_i]$
0	0.05
1	0.09
2	0.15
3	0.34
4	0.21
5	0.12
6	0.03
7	0.01

1. Déterminer le taux moyen d'absentéisme.
2. Calculer la variance et l'écart-type de X.
3. S'il en coûte à l'entreprise 80 euros pour chaque absence, déterminer le coût moyen hebdomadaire ainsi que la variance du coût.

14.10.2 Exercices à travailler

Exercice 30 :

Soit $\{\Omega, \mathbb{F}, \mathbf{P}\}$ un espace probabilisé. Soit $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle.
Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on considère la fonction numérique

$$\varphi(\lambda) = \mathbb{E}\left[(X-\lambda)^2\right]$$

Démontrer que le minimum de φ est atteint en $\lambda = \mathbb{E}(X)$ et en donner une interprétation.

Exercice 31 :

On place un hamster *(jovial)* dans une cage. Il se trouve face à 5 portillons dont un seul lui permet de sortir de la cage. A chaque essai infructueux, il reçoit une décharge électrique et on le replace à l'endroit initial.

1. On suppose que le hamster ne soit pas doué d'apprentissage et qu'il choisisse donc de façon équiprobable entre les 5 solutions à chaque nouvel essai, déterminer la probabilité des événements :
   — Le hamster sort au premier essai.
   — Le hamster sort au troisième essai.
   — Le hamster sort au septième essai.
2. Le hamster mémorise maintenant les essais infructueux et choisit de façon équiprobable entre les portillons qu'il n'a pas encore essayés. On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre d'essais effectués.
   — Quelles valeurs peut prendre X ?
   — Déterminer sa loi de probabilité, et tracer sa fonction de répartition.
   — Déterminer $\mathbb{E}(X)$ et l'interpréter.

Exercice 32 :

Il y a certainement, parmi vous des spécialistes du casino, et cet exercice ne représente pas la réalité du jeu dans un tel établissement : ce n'est pas important.
Une roulette contient 36 cases numérotées de 1 à 36, dont 18 sont rouges, et 18 sont noires, plus une case numérotée 0 de couleur verte.
Un joueur qui mise sur la couleur rouge ou noire gagne 2 fois sa mise si la couleur sort.
Si ce joueur mise sur un numéro de 1 à 36 qui sort, il gagne 36 fois sa mise.
Toute mise sur le 0 est interdite.

1. Le joueur mise au hasard a Euros sur une couleur ; soit X_1 son gain. Trouver la loi de X_1, puis calculer l'espérance et la variance de X_1
2. Le joueur mise au hasard a Euros sur l'un des numéros de 1 à 36 ; soit X_2 son gain. Trouver la loi de X_2, puis calculer l'espérance et la variance de X_2
3. Si vous aviez a Euros à miser, le feriez vous sur un numéro ou une couleur ?

Exercice 33 :

Dans une entreprise, un contrôle visuel est effectué sur des plaques de laiton pour y détecter d'éventuelles tâches de cuivre, d'oxydation ou autres défectuosités apparentes. Selon le service d'Assurance-Qualité, il y a, en moyenne 1,7 défauts par plaque. En supposant que le nombre de défauts par plaque est distribué selon une loi de Poisson :

1. Quelle est l'expression de la loi de probabilité régissant le nombre de défauts par plaque et quelles sont les valeurs possibles de cette variable aléatoire ?
2. Sur 150 plaques contrôlées, quel serait vraisemblablement le nombre de plaques ne présentant aucun défaut ?
3. Quelle est la probabilité d'observer plus de 2 défauts par plaque ?

Exercice 34 :

Dans un hôpital parisien, il arrive en moyenne 1,25 personne à la minute aux urgences entre 9h et 12h. On prend pour variable aléatoire X le nombre de personnes observées à la minute à l'entrée de ce service et on admet que cette variable aléatoire obéit à une loi de Poisson.

1. k étant un entier naturel, déterminer la loi de probabilité qu'en une minute il arrive k personnes.
2. Déterminer les probabilités pour qu'en une minute il arrive :
   — 2 personnes.
   — 4 personnes et plus.
   — 3 personnes au moins.

Exercice 35 :

Un sac contient 10 jetons dont 4 rouges et 6 blancs.
On les extrait, un à un, sans remise.
On appelle X le rang du premier jeton rouge tiré.

1. Donner la loi de X, puis, calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\sigma^2(X)$
2. Reprendre la question précédente, en supposant que les tirages ont lieu avec remise.

Exercice 36 :

Le groupe AB est présent chez 0,6% des individus.
Lors d'une collecte de sang, combien faudrait-il faire de prélèvements pour que la probabilité de trouver au moins un flacon AB soit supérieure à 0.99 ?

Exercice 37 :

La société « Le Hasard » met à la disposition de ses clients internautes un jeu en ligne dont la page d'écran affiche une grille à 4 lignes et 4 colonnes.
Après une mise initiale de 2 Euros du joueur, une fonction aléatoire place au hasard, et successivement, quatre jetons $\diamondsuit$ dans 4 cases différentes.
La partie est gagnée si les quatre jetons sont alignés et le gagnant remporte 10 fois sa mise. Dans le cas contraire, la mise initiale est perdue pour le joueur.

	A	B	C	D
1	$\diamondsuit$			
2	$\diamondsuit$	$\diamondsuit$		
3				$\diamondsuit$
4				

On définit les événements H,V, D et N suivants :
— $H = \{$Les quatre jetons sont alignés horizontalement$\}$
— $V = \{$Les quatre jetons sont alignés verticalement$\}$
— $D = \{$Les quatre jetons sont alignés en diagonale$\}$
— $N = \{$Les quatre jetons ne sont pas alignés$\}$

1. Justifiez qu'il y a 1820 positionnements possibles des 4 jetons
2. Déterminez $\mathbf{P}(H)$, $\mathbf{P}(V)$ et $\mathbf{P}(D)$
3. En déduire $\mathbf{P}(N)$

4. On appelle Z la variable aléatoire égale au **gain de la société** lorsqu'une grille est jouée.
   (a) Quelle est la loi de Z ?
   (b) Quelle est l'espérance de gain de la société à chaque grille jouée ?

14.10.3 Exercices plus difficiles

Exercice 38 :

Une variante de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev
Soit X une variable aléatoire réelle . On suppose que X admet une espérance $\mathbb{E}(X) = m$ et une variance $\sigma^2(X) = \sigma^2$. On fixe $\alpha > 0$.

1. Soit $\lambda \geqslant 0$. Démontrer que $\mathbf{P}(\{X - m \geqslant \alpha\}) = \mathbf{P}(\{X - m + \lambda \geqslant \alpha + \lambda\})$.
2. Vérifier que $\mathbb{E}\left((X - m + \lambda)^2\right) = \sigma^2 + \lambda^2$.
3. Montrer que, pour tout $\lambda > 0$, $\mathbf{P}(\{X - m \geqslant \alpha\}) \leqslant \dfrac{\sigma^2 + \lambda^2}{\alpha^2 + \lambda^2 + 2\lambda\alpha}$.
4. En déduire que $\mathbf{P}(\{X - m \geqslant \alpha\}) \leqslant \dfrac{\sigma^2}{\alpha^2 + \sigma^2}$.
5. Démontrer que $\mathbf{P}(\{|X - m| \geqslant \alpha\}) \leqslant \dfrac{2\sigma^2}{\alpha^2 + \sigma^2}$. Quand obtient-on une meilleure inégalité que l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev ?

Exercice 39 :

1. On lance une piece jusqu'à ce que « pile » **apparaisse une seconde fois**. p est la probabilité d'apparition de « pile ». On suppose l'indépendance de tous les lancers. Soit X le nombre de lancers nécessaires.
   Démontrez que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}(\{X = n\}) = (n-1)\,p^2\,(1-p)^{n-2}$
2. On lance une piece jusqu'à ce que « pile » **apparaisse** k **fois**. p est la probabilité d'apparition de « pile ». On suppose l'indépendance de tous les lancers. Soit X le nombre de lancers nécessaires pour que « pile » apparaisse k fois.
   Démontrez que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}(\{X = n\}) = \mathrm{C}_{n-1}^{k-1} p^k (1-p)^{n-k}$

Exercice 40 :

Recherche de lois

1. Soit X, une variable aléatoire réelle à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que
$$(\forall n \in \mathbb{N}^*)\left(\mathbf{P}(\{X = n\}) = \frac{4}{n}\mathbf{P}(\{X = n-1\})\right)$$
   Quelle est la loi de X ? Donner alors son espérance et sa variance.
2. Soit X, une variable aléatoire réelle à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. Déterminer la loi de X sachant que
$$(\exists p \in \,]0; +1[)\,(\forall n \in \mathbb{N}^*)\,(\mathbf{P}(\{X = n\}) = p\mathbf{P}(\{X \geqslant n\}))$$

Exercice 41 :

Soit X, une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ .
Utiliser l'inégalité de Bienaymé Tchebichev pour montrer que
$$\mathbf{P}\left(\left\{X \leqslant \frac{\lambda}{2}\right\}\right) \leqslant \frac{4}{\lambda} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{P}(\{X \geqslant 2\lambda\}) \leqslant \frac{1}{\lambda}$$

Exercice 42 :

Soit N, une variable aléatoire réelle qui suit une loi de Poisson de paramètre λ avec $\lambda > 0$. Calculer $\mathbb{E}\left(\dfrac{1}{N+1}\right)$

Exercice 43 :

Soit X une variable aléatoire réelle discrète définie sur un espace probabilisé $\{\Omega; \mathcal{F}; \mathbf{P}\}$. On suppose que pour tout réel $t \geqslant 0$, la variable aléatoire réelle e^{-tX} possède une espérance. Démontrer que :

$$(\forall t \geqslant 0)\left(\mathbf{P}\left(\{X \leqslant 0\}\right) \leqslant \mathbb{E}\left(e^{-tX}\right)\right)$$

Exercice 44 :

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $\{\Omega; \mathcal{F}; \mathbf{P}\}$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}\left(\{X > k\}\right) = \sum_{k=1}^{n} k\mathbf{P}\left(\{X = k\}\right) + (n+1)\,\mathbf{P}\left(\{X > n\}\right)$
2. On suppose que la série $\displaystyle\sum_{k \geqslant 0} \mathbf{P}\left(\{X > k\}\right)$ converge.
   (a) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\mathbf{P}\left(\{X = k\}\right) \leqslant \sum_{k \geqslant 0} \mathbf{P}\left(\{X > k\}\right)$
   (b) En déduire que la variable aléatoire réelle X admet une espérance.
3. On suppose, maintenant, que la variable aléatoire réelle X admet une espérance.
   (a) Montrer que pour tout $n \geqslant 1$ nous avons $\displaystyle(n+1)\,\mathbf{P}\left(\{X > n\}\right) \leqslant \sum_{k \geqslant n+1} k\mathbf{P}\left(\{X = k\}\right)$
   (b) En déduire que la série $\displaystyle\sum_{k \geqslant 0} \mathbf{P}\left(\{X > k\}\right)$ est convergente et que $\displaystyle\mathbb{E}\left(X\right) = \sum_{k \geqslant 0} \mathbf{P}\left(\{X > k\}\right)$