Chapitre 14

Variables aléatoires discrètes

Ce chapitre est une véritable introduction . Nous y étudierons de préférence les variables aléatoires réelles discrètes, mais plusieurs résultats seront vrais pour toutes les variables aléatoires réelles

14.1 Introduction

On considère l'espace fondamental $\Omega = \{(i,j) \text{ où } 1 \leqslant i \leqslant 6 \text{ et} 1 \leqslant j \leqslant 6\}$.
Cet ensemble modélise le lancer de deux dés.

⇒ On s'intéresse à la somme amenée par le jet des deux dés, c'est à dire qu'on considère l'application :

$$\begin{cases} S : \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (i,j) & \longmapsto & S[(i,j)] = i+j \end{cases}$$

Nous avons, évidemment, $S(\Omega) = \{2, 3, \dots, 12\}$
On s'intéresse aux ensembles réciproques, par exemple :

$$S^{-1}(\{2\}) = \{\omega \in \Omega \text{ tels que } S(\omega) = 2\} = \{(1,1)\}$$

Ou encore $S^{-1}(\{4\}) = \{(1,3), (3,1), (2,2)\}$.
Nous pouvons lier S, $S(\Omega)$ à la probabilité $\mathbf{P}$ en construisant une fonction ν définie par exemple par :

$$\nu(\{2\}) = \mathbf{P}\left(S^{-1}(\{2\})\right) = \mathbf{P}(\{(1,1)\}) = \frac{1}{36}$$

Et pourquoi pas, plus généralement, pour tout $x \in S(\Omega)$,

$$\nu(\{x\}) = \mathbf{P}\left(S^{-1}(\{x\})\right) = \mathbf{P}(\{\omega \in \Omega \text{ tels que } S(\omega) = x\})$$

Et nous aurions donc $\nu(\{4\}) = \dfrac{3}{36} = \dfrac{1}{12}$

⇒ Toujours pour le jet de 2 dés, on peut aussi s'intéresser à l'application :

$$\begin{cases} M : \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (i,j) & \longmapsto & M[(i,j)] = \max\{i;j\} \end{cases}$$

Nous avons, cette fois ci $M(\Omega) = \{1, 2, 3, \dots, 6\}$
Cette fois ci,

$$M^{-1}(\{3\}) = \{\omega \in \Omega \text{ tels que } M(\omega) = 3\} = \{(1,3);(3,1);(2,3);(3,2);(3,3)\}$$

Et dons $\mathbf{P}\left(M^{-1}(\{3\})\right) = \dfrac{5}{36}$

Dans l'étude des variables aléatoires réelles , nous noterons $\mathbf{P}\left(S^{-1}(\{x\})\right) = \mathbf{P}(\{S = x\})$, et donc $\mathbf{P}\left(M^{-1}(\{3\})\right) = \mathbf{P}(\{M = 3\})$

14.2 Définition générale de variable aléatoire réelle

14.2.1 Rappels

Ces résultats sont admis ; ils ont déjà été exposés en L_0. La démonstration pourra être refaite à titre d'exercice

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application quelconque. On appelle $\mathcal{P}(F)$ l'ensemble des parties de F.
Pour tout $A \in \mathcal{P}(F)$, on note comme d'habitude,

$$f^{-1}(A) = \{x \in E \text{ tel que } f(x) \in A\}$$

Alors,

1. $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ et $f^{-1}(F) = E$
2. Pour tout $A \in \mathcal{P}(F)$, $f^{-1}\left(\overline{A}\right) = \overline{f^{-1}(A)}$
3. Pour tout $A \in \mathcal{P}(F)$ et tout $B \in \mathcal{P}(F)$, nous avons :
   (a) $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$
   (b) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$
   (c) $A \subset B \Longrightarrow f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$

Remarque 1 :

Pour une fonction $f : E \longrightarrow F$, ce que nous avons avec la fonction réciproque, nous ne l'avons pas forcément avec la fonction directe.

14.2.2 Définition

Soit $\{\Omega; \mathcal{F}\}$ un espace probabilisable et $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une application quelconque.
X est appelée variable aléatoire réelle si et seulement si pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'événement

$$A = \{\omega \in \Omega \text{ tels que } X(\omega) \leqslant a\}$$

est un élément de la tribu $\mathcal{F}$

Remarque 2 :

Il va sans dire que, comme $A \in \mathcal{F}$, on peut calculer $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(\{\omega \in \Omega \text{ tels que } X(\omega) \leqslant a\})$

14.2.3 Proposition

Soit $\{\Omega; \mathcal{F}\}$ un espace probabilisable et $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle . Alors :

1. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\{\omega \in \Omega \text{ tels que } X(\omega) > a\} \in \mathcal{F}$
2. Pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $b \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\{\omega \in \Omega \text{ tels que } a < X(\omega) \leqslant b\} \in \mathcal{F}$
3. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\{\omega \in \Omega \text{ tels que } X(\omega) \geqslant a\} \in \mathcal{F}$
4. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\{\omega \in \Omega \text{ tels que } X(\omega) < a\} \in \mathcal{F}$
5. Pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $b \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\{\omega \in \Omega \text{ tels que } a \leqslant X(\omega) < b\} \in \mathcal{F}$
6. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\{\omega \in \Omega \text{ tels que } X(\omega) = a\} \in \mathcal{F}$
7. Pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $b \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\{\omega \in \Omega \text{ tels que } a \leqslant X(\omega) \leqslant b\} \in \mathcal{F}$
8. Pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $b \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\{\omega \in \Omega \text{ tels que } a < X(\omega) < b\} \in \mathcal{F}$

Démonstration

Soit $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, une variable aléatoire réelle .

1. D'après la définition 14.2.2, nous avons $A = \{\omega \in \Omega \text{ tels que } X(\omega) \leqslant a\} \in \mathcal{F}$, et donc par définition des tribus $\overline{A} \in \mathcal{F}$.
   Or, et en considérant 14.2.1 $\overline{A} = \{\omega \in \Omega \text{ tels que } X(\omega) > a\} \in \mathcal{F}$; d'où le résultat
2. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$; alors :
   $$\{\omega \in \Omega \text{ tels que } a < X(\omega) \leqslant b\} = \{\omega \in \Omega \text{ tels que } a < X(\omega)\} \cap \{\omega \in \Omega \text{ tels que } X(\omega) \leqslant b\}$$
   → Par définition, $\{\omega \in \Omega \text{ tels que } X(\omega) \leqslant b\} \in \mathcal{F}$
   → Par démonstration, $\{\omega \in \Omega \text{ tels que } a < X(\omega)\} \in \mathcal{F}$
   → D'après les propriétés de tribu de $\mathcal{F}$, nous avons $\{\omega \in \Omega \text{ tels que } a < X(\omega) \leqslant b\} \in \mathcal{F}$
3. Soit $A = \{\omega \in \Omega \text{ tels que } X(\omega) \geqslant a\}$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $A_n = \left\{\omega \in \Omega \text{ tels que } X(\omega) > a - \dfrac{1}{n}\right\}$; nous avons $A = \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}^*} A_n$
   → Pour commencer, nous avons $A \subset \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}^*} A_n$

   En effet, si $\omega \in A$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons $X(\omega) \geqslant a > a - \dfrac{1}{n}$ et donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\omega \in A_n$ et donc $\omega \in \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}^*} A_n$.

   D'où nous tirons $A \subset \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}^*} A_n$

   → Ensuite, $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}^*} A_n \subset A$

   Soit $\omega \in \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}^*} A_n$; alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X(\omega) > a - \dfrac{1}{n}$. Supposons que $\omega \notin A$, ce qui veut dire que $\omega \in \overline{A}$ et que $X(\omega) < a$.

   Il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $X(\omega) < a - \dfrac{1}{n_0} < a$ et donc, pour tout $n \geqslant n_0$, $\omega \notin A_n$, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse où $\omega \in \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}^*} A_n$

   Donc $\omega \in A$ et donc $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}^*} A_n \subset A$

   Par démonstration, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A_n \in \mathcal{F}$, et donc, d'après la proposition 12.2.7, nous avons $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}^*} A_n \in \mathcal{F}$, et donc, en particulier $A \in \mathcal{F}$
4. Nous venons de démontrer que si $A = \{\omega \in \Omega \text{ tels que } X(\omega) \geqslant a\}$, alors $A \in \mathcal{F}$; d'après les propriétés de tribu, $\overline{A} \in \mathcal{F}$; comme $\overline{A} = \{\omega \in \Omega \text{ tels que } X(\omega) < a\}$, nous avons $\{\omega \in \Omega \text{ tels que } X(\omega) < a\} \in \mathcal{F}$
5. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$; Alors
   $$\{\omega \in \Omega \text{ tels que } a \leqslant X(\omega) < b\} = \{\omega \in \Omega \text{ tels que } a \leqslant X(\omega)\} \cap \{\omega \in \Omega \text{ tels que } X(\omega) < b\}$$
   Or :
   → $\{\omega \in \Omega \text{ tels que } a \leqslant X(\omega)\} \in \mathcal{F}$ par définition de variable aléatoire réelle
   → Nous avons démontré que :$\{\omega \in \Omega \text{ tels que } X(\omega) < b\} \in \mathcal{F}$
   D'après les propriétés de stabilité par intersection de la tribu $\mathcal{F}$, nous avons $\{\omega \in \Omega \text{ tels que } a \leqslant X(\omega) < b\} \in \mathcal{F}$
6. Pour continuer, nous avons :
   $$\{\omega \in \Omega \text{ tels que } X(\omega) = a\} = \{\omega \in \Omega \text{ tels que } X(\omega) \leqslant a\} \cap \{\omega \in \Omega \text{ tels que } X(\omega) \geqslant a\}$$
   → $\{\omega \in \Omega \text{ tels que } X(\omega) \leqslant a\} \in \mathcal{F}$ par définition de variable aléatoire réelle
   → Comme nous avons démontré que :$\{\omega \in \Omega \text{ tels que } X(\omega) \geqslant a\} \in \mathcal{F}$
   D'après les propriétés de stabilité par intersection de la tribu $\mathcal{F}$, nous avons $\{\omega \in \Omega \text{ tels que } X(\omega) = a\} \in \mathcal{F}$

La démonstration des autres points est similaire et est laissée en exercices

Remarque 3 :

1. Nous retiendons donc ceci :

   Soit $\{\Omega; \mathcal{F}\}$ un espace probabilisable et $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle .
   Quel que soit l'intervalle $I \subset \mathbb{R}$, $X^{-1}(I) = \{\omega \in \Omega$ tels que $X(\omega) \in I\}$ est un élément de la tribu $\mathcal{F}$

2. En fait, pour démontrer que X est une variable aléatoire réelle , il faut et il suffit de démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons $X^{-1}(]-\infty; x]) \in \mathcal{F}$, car tout intervalle $I \subset \mathbb{R}$ peut s'écrire comme réunion, intersection, complémentaires d'intervalles de telle sorte.

14.2.4 Notations

1. Pour $B \subset \mathbb{R}$, on note $\{X \in B\} = X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega$ tels que $X(\omega) \in B\}$
2. De même, on note $\{X \leqslant x\} = X^{-1}(]-\infty; x]) = \{\omega \in \Omega$ tel que$X(\omega) \leqslant x\}$
3. Pour $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, on note aussi

$$\{a \leqslant X \leqslant b\} = X^{-1}([a; b]) = \{\omega \in \Omega \text{ tel que } a \leqslant X(\omega) \leqslant b\}$$

Remarque 4 :

1. On a bien $\{X \in B\} \in \mathcal{F}$, $\{X \leqslant x\} \in \mathcal{F}$, $\{a \leqslant X \leqslant b\} \in \mathcal{F}$
2. Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $\{\Omega; \mathcal{F}; \mathbf{P}\}$. Nous avons, pour $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$:

$\{a < X < b\} =$	$\{X > a\} \cap \{X < b\}$
$\{a \leqslant X < b\} =$	$\{X \geqslant a\} \cap \{X < b\}$
$\{a < X \leqslant b\} =$	$\{X > a\} \cap \{X \leqslant b\}$
$\{a \leqslant X \leqslant b\} =$	$\{X \geqslant a\} \cap \{X \leqslant b\}$

Exemple 1 :

Des exemples de variables aléatoires réelles

1. On jette une pièce n fois ; alors, l'espace fondamental est donné par les n-uplets de la forme $(P, F, F, P, \ldots, F, P, F, P)$, c'est à dire que l'espace fondamental est le produit cartésien $\Omega = (\{P, F\})^n$.

   On peut considérer la variable aléatoire réelle X, qui à à $\omega \in \Omega$, fait correspondre $X(\omega) = k$ où k est **le nombre d'apparitions de** F. X est une variable aléatoire.

   X prend toutes les valeurs de 0 à n, et on écrit $X(\Omega) = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$
2. E est un jeu de 52 cartes duquel on en tire 5 *(cartes)* ; X est la variable aléatoire, qui, à chaque tirage $\omega \in \Omega$, désigne par $X(\omega)$ le **nombre d'as** dans le tirage ω. Les valeurs prises par X vont donc de 0 à 4 ; on écrit : $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$
3. Une variable aléatoire réelle X est dite **certaine** si c'est une application constante de Ω dans $\mathbb{R}$, c'est à dire que pour tout $\omega \in \Omega$, $X(\omega) = k$ avec $k \in \mathbb{R}$. Dans ces cas, nous avons $\{X = k\} = \Omega$ et $\{X \neq k\} = \emptyset$
4. Soit $\{\Omega; \mathcal{F}; \mathbf{P}\}$ un espace probabilisé et $A \in \mathcal{F}$. La **fonction indicatrice de l'ensemble** A notée 1_A définie par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 1_A : \Omega & \longrightarrow & \{0,1\} \\ \omega & \longmapsto & 1_A(\omega) = \left\{\begin{array}{l} 1 \text{ si } \omega \in A \\ 0 \text{ si } \omega \notin A \end{array}\right. \end{array}\right.$$

   1_A est une variable aléatoire réelle

   Nous avons donc $\{1_A = 1\} = A$ et $\{1_A = 0\} = \overline{A}$
5. Soit $\{\Omega; \mathcal{F}\}$ un espace probabilisable et $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, $Y : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ deux variables aléatoires réelles

$\Rightarrow$ On peut définir la somme S de X et Y, pour tout $\omega \in \Omega$ par :

$$S(\omega) = X(\omega) + Y(\omega)$$

$\Rightarrow$ De même, il est possible de définir le produit P de X et Y, pour tout $\omega \in \Omega$ par :

$$P(\omega) = X(\omega) \times Y(\omega)$$

$\Rightarrow$ On peut aussi définir Z, le plus grand de X et Y, c'est à dire $Z = \sup(X, Y)$. Comment définir Z pour tout $\omega \in \Omega$? :

$$Z(\omega) = \sup(X(\omega), Y(\omega)) = \begin{cases} X(\omega) & \text{si } X(\omega) \geqslant Y(\omega) \\ Y(\omega) & \text{si } Y(\omega) \geqslant X(\omega) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ De même, on peut aussi définir T, le plus petit de X et Y, c'est à dire $T = \inf(X, Y)$. Comment définir T pour tout $\omega \in \Omega$? :

$$T(\omega) = \inf(X(\omega), Y(\omega)) = \begin{cases} X(\omega) & \text{si } X(\omega) \leqslant Y(\omega) \\ Y(\omega) & \text{si } Y(\omega) \leqslant X(\omega) \end{cases}$$

14.2.5 Propriétés

Soit $\{\Omega; \mathcal{F}\}$ un espace probabilisable et $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, $Y : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ deux variables aléatoires réelles

1. L'addition $S = X + Y$ est une variable aléatoire réelle
2. Le produit $P = X \times Y$ est une variable aléatoire réelle
3. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, λX est une variable aléatoire réelle
4. $\sup(X, Y)$ et $\inf(X, Y)$ sont des variables aléatoires réelles
5. Pour toute variable aléatoire réelle $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ et toute fonction continue $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction $g \circ X$ est une variable aléatoire réelle

Démonstration

Pour tout ce cours, nous admettons cette proposition. Nous l'admettrons aussi pour le cas discret.

Exemple 2 :

Si $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est une variable aléatoire réelle et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue

1. Si $g(x) = e^x$; la fonction $Y = g \circ X = e^X$ est une variable aléatoire réelle .
2. Si $g(x) = x^2$; la fonction $Y = g \circ X = X^2$ est une variable aléatoire réelle .
3. Si $g(x) = x^k$; la fonction $Y = g \circ X = X^k$ est une variable aléatoire.

Nous retrouverons les variables aléatoires réelles e^X, X^2 et X^k lorsque nous nous intéresserons aux moments des variables aléatoires réelles .

Exemple 3 :

1. Deux magasins A et B d'une chaîne ont un flux de clients égal respectivement à X et Y pour un mois donné. $X + Y$ représente alors le flux de clients sur l'ensemble des deux magasins pour le mois considéré.
2. On efectue une série infinie de lancers à **PILE** ou **FACE** avec une pièce de monnaie. On note X_k la variable aléatoire réelle qui vaut 1 si le k-ième lancer amène **PILE** et 0 s'il amène **FACE**.

   La variable aléatoire réelle $Y = \sum_{k=1}^{n} X_k$ représente (ou compte) le nombre de fois où **PILE** apparaît lors des n premiers lancers.

3. Des fournisseurs $F_1, F_2, \dots, F_n$, reçoivent respectivement $X_1, X_2, \dots, X_n$ clients. La variable aléatoire réelle $C = \sum_{k=1}^{n} X_k$ représente la nombre total de clients qui se rendent chez les fournisseurs $F_1, F_2, \dots, F_n$
4. Un mobile décrit une trajectoire du plan de façon aléatoire. Le plan rapporté à un système d'axes orthonormé (Ox, Oy) , on note X_n et Y_n les coordonnées du mobile à l'instant $t = n$. La variable aléatoire réelle $D_n = X_n^2 + Y_n^2$ représente le carré de la distance euclidienne du mobile à l'origine O à l'instant $t = n$.
   De même, $S_n = X_n \times Y_n$ est l'aire du rectangle dont 2 sommets opposés sont O et la position M_n du mobile à l'instant $t = n$.

14.2.6 Définition

Soit $\{\Omega; \mathcal{F}; \mathbf{P}\}$ un espace probabilisé et $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, une variable aléatoire réelle
On appelle Loi de probabilité de X, la donnée :

1. Des valeurs prises par X, c'est à dire $X(\Omega)$
2. De l'application $\nu : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \longrightarrow [0;1]$ où $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est la tribu des boréliens de $\mathbb{R}$, définie par :

$$\begin{cases} \nu : \mathcal{B}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & [0;1] \\ \quad B & \longmapsto & \nu(B) = \mathbf{P}\left(X^{-1}(B)\right) = \mathbf{P}(\{X \in B\}) \end{cases}$$

Remarque 5 :

1. La tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ des boréliens de $\mathbb{R}$ est la plus petite tribu contenant tous les ouverts de $\mathbb{R}$; cette tribu a été définie page 428
2. C'est bien parce que X est une variable aléatoire réelle que $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ et que nous pouvons définir $\mathbf{P}\left(X^{-1}(B)\right)$ et donc $\nu(B)$

14.2.7 Proposition

Soit $\{\Omega; \mathcal{F}; \mathbf{P}\}$ un espace probabilisé et $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, une variable aléatoire réelle
L'application $\nu : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \longrightarrow [0;1]$ est bien une probabilité sur l'espace probabilisable $\{\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$
On dit que ν est la probabilité image de $\mathbf{P}$ par X, notée parfois $X(\mathbf{P})$ ou $\mathbf{P}_X$

Démonstration

Nous devons démontrer que $\nu(\mathbb{R}) = 1$ et que si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ deux à deux disjoints alors, $\nu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu(A_n)$

1. Montrons que $\nu(\mathbb{R}) = 1$
   Nous avons $\nu(\mathbb{R}) = \mathbf{P}(\{X \in \mathbb{R}\}) = \mathbf{P}\left(X^{-1}(\mathbb{R})\right) = \mathbf{P}(\Omega) = 1$.
   Et donc, $\nu(\mathbb{R}) = 1$
2. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de boréliens de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ deux à deux disjoints. Alors :

$$\nu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \mathbf{P}\left(X^{-1}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)\right)$$

   D'après les rappels de logique 14.2.1, nous avons :

$$X^{-1}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X^{-1}(A_n)$$

D'autre part, comme si $i \neq j$ alors $A_i \cap A_j = \emptyset$, nous avons aussi $X^{-1}(A_i) \cap X^{-1}(A_j) = \emptyset$, de telle sorte que

$$\mathbf{P}\left(X^{-1}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{P}\left(X^{-1}(A_n)\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu(A_n)$$

Nous avons donc $\nu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu(A_n)$

Et ν est bien une probabilité sur $\{\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$