14.11 Quelques corrections d'exercices

Exercice 1 :

Soient X et Y 2 variables aléatoires discrètes telles que $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}$
Montrer que $Z = \sup(X, Y)$ est une variable aléatoire réelle

$\Rightarrow$ Il est clair, qu'à priori, $Z(\Omega) = \mathbb{N}$

$\Rightarrow$ Soit $k \in \mathbb{N}$. Il faut démontrer que l'événement $\{Z = k\} \in \mathcal{F}$.
C'est quoi $\{Z = k\}$?.. Il suffit de l'écrire :

$$\{Z = k\} = (\{X = k\} \cap \{Y \leqslant k-1\}) \cup (\{X \leqslant k-1\} \cap \{Y = k\})$$

X et Y étant des variables aléatoires réelles , alors $\{X = k\} \in \mathcal{F}$, $\{Y = k\} \in \mathcal{F}$, $\{Y \leqslant k-1\} \in \mathcal{F}$ et $\{X \leqslant k-1\} \in \mathcal{F}$
$\mathcal{F}$ étant stable par réunion et intersections, $\{Z = k\} \in \mathcal{F}$.

Z est donc une variable aléatoire réelle

Exercice 3 :

Dans un jeu de 32 cartes, on tire au hasard 4 cartes, et simultanément. On appelle X l'application qui à chaque tirage associe le nombre de cœurs qu'il contient.
Définir un espace de probabilité tel que X soit une variable aléatoire réelle , et étudier la loi de probabilité de X

$\Rightarrow$ Il faut tout d'abord l'espace fondamental. Ici, c'est le classique Ω :

$$\Omega = \{\text{Les sous ensembles à 4 éléments pris parmi les } 32\}$$

Et donc $\text{Card}\,\Omega = \binom{32}{4} = \mathrm{C}_{32}^4$

$\Rightarrow$ Donnons, maintenant ; la loi de X

- $\star$ Tout d'abord $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$
- $\star$ Ensuite, étudions l'événement $\{X = k\}$.
  Ceci veut dire que si nous avons k coeurs dans notre main, il y en a $4-k$ qui ne sont pas des coeurs. Et donc $\text{Card}\,(\{X = k\}) = \binom{8}{k} \times \binom{24}{4-k} = \mathrm{C}_8^k \times \mathrm{C}_{24}^{4-k}$

  Et donc $\mathbf{P}(\{X = k\}) = \dfrac{\binom{8}{k} \times \binom{24}{4-k}}{\binom{32}{4}} = \dfrac{\mathrm{C}_8^k \times \mathrm{C}_{24}^{4-k}}{\mathrm{C}_{32}^4}$

Comme $\displaystyle\sum_{k=0}^{4} \mathbf{P}(\{X = k\}) = 1$, nous avons :

$$\sum_{k=0}^{4} \frac{\mathrm{C}_8^k \times \mathrm{C}_{24}^{4-k}}{\mathrm{C}_{32}^4} = 1 \Longleftrightarrow \sum_{k=0}^{4} \mathrm{C}_8^k \times \mathrm{C}_{24}^{4-k} = \mathrm{C}_{32}^4$$

Exercice 4 :

Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n. On tire simultanément trois jetons de cette urne.
Soit X l'application qui à un tirage associe le plus grand des trois nombres figurant sur les jetons tirés.
Définir un espace de probabilité tel que X soit une variable aléatoire réelle , et étudier la loi de probabilité de X

Définir la loi de X, c'est donner $X(\Omega)$, et, pour $k \in X(\Omega)$ évaluer $\mathbf{P}(\{X = k\})$

$\Rightarrow$ Il faut tout d'abord l'espace fondamental. Ici, c'est le classique Ω :

$$\Omega = \{\text{Les sous ensembles à 3 éléments pris parmi } n\}$$

Et donc $\text{Card}\,\Omega = \binom{n}{3} = \mathrm{C}_n^3$

$\Rightarrow$ Clairement $X(\Omega) = \{3, 4, 5, \cdots, n\}$

$\Rightarrow$ Etudions l'événement $\{X = k\}$
Ceci veut dire que si nous avons k comme le plus grand numéro des 3 tirés, il y a 2 autres qui sont tirés parmi les $k-1$ jetons qui sont de numéro inférieur. Et donc Card $(\{X = k\}) = \binom{k-1}{2} = \mathrm{C}_{k-1}^2$

Et donc $\mathbf{P}(\{X = k\}) = \dfrac{\binom{k-1}{2}}{\binom{n}{3}} = \dfrac{\mathrm{C}_{k-1}^2}{\mathrm{C}_n^3}$

De l'égalité $\displaystyle\sum_{k=0}^{4} \mathbf{P}(\{X = k\}) = 1$, nous avons : $\displaystyle\sum_{k=3}^{n} \mathrm{C}_{k-1}^2 = \mathrm{C}_n^3$

Exercice 5 :

Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les réels $p_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$ peuvent être les coefficients d'une loi de probabilité.

Il suffit de montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} p_n$ converge et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} p_n = 1$.

Etudions alors les sommes partielles $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$

Nous démontrons facilement que $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$ de telle sorte que :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

Donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$; et donc la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} p_n$ converge et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} p_n = 1$

Exercice 6 :

Une urne contient 30 boules indiscernables au toucher. Il y a exactement 10 boules rouges.
On tire 6 boules, successivement, et avec remise dans cette urne (on tire une boule, on la regarde dans le blanc des yeux, on note sa couleur, et on la remet dans l'urne ; on itère cette opération 6 fois)
Déterminer la probabilité des événements suivants :

1. *Il y a au moins une boule rouge*
2. *Il y a exactement une boule rouge*

Dans quel type de problématique sommes-nous ?
A chaque tirage, il y a une probabilité de $\dfrac{1}{3}$ de tirer une boule rouge *(succès)* et donc de $\dfrac{2}{3}$ de tirer une boule d'une autre couleur que rouge *(échec)*
On tire donc 6 fois de rang, et la loi probabilité d'avoir k boules rouges dans ces 6 tirages est une loi binômiale $\mathcal{B}\left(6; \dfrac{1}{3}\right)$

1. L'événement « il y a au moins une boule rouge » est l'événement contraire de « n'avoir aucune boule rouge »

En posant $\{X=0\}$ l'événement « n'avoir aucune boule rouge », nous avons

$$\mathbf{P}(\{X=0\}) = \binom{6}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^6 = \frac{64}{729} \approx 0,087$$

Donc, $\mathbf{P}\left(\overline{\{X=0\}}\right) = 1 - \frac{64}{729} = \frac{665}{729} \approx 0,912$

2. L'événement « il y a exactement une boule rouge » est donc donné par $\{X=1\}$ et

$$\mathbf{P}(\{X=1\}) = \binom{6}{1}\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^5 = 6\times\frac{192}{729} = \frac{64}{243} \approx 0,263$$

Exercice 7 :

*Dans une première version de ces **exercices corrigés**, je n'avais pas corrigé l'exercice qui suit. Finalement, voici, quand même, un corrigé succinct*

Une urne contient 10 boules, dont 4 blanches et 6 noires

1. *On en tire 5 **sans remise**. Trouver la loi de la variable aléatoire réelle égale au nombre de boules blanches tirées.* Soit Ω l'espace fondamental lié à cette épreuve. Alors,

$$\Omega = \{\text{Les sous ensembles à 5 éléments pris parmi 10}\}$$

Soit X la variable aléatoire réelle donnant le nombre de boules blanches tirées. Alors $X(\Omega) = \{0,1,2,3,4\}$.
D'autre part, si je tire k boules blanches, j'aurai donc tiré $5-k$ boules d'une autre couleur. et donc :

$$\mathbf{P}(\{X=k\}) = \frac{\binom{4}{k}\binom{6}{5-k}}{\binom{10}{5}}$$

Une fois de plus, comme $\sum_{k=0}^{4}\mathbf{P}(\{X=k\}) = 1$, nous avons :

$$\sum_{k=0}^{4}\mathbf{P}(\{X=k\}) = 1 \Longleftrightarrow \sum_{k=0}^{4}\frac{\binom{4}{k}\binom{6}{5-k}}{\binom{10}{5}} = 1 \Longleftrightarrow \binom{4}{k}\binom{6}{5-k} = \binom{10}{5}$$

2. *On en tire 5 **avec remise**. Trouver la loi de la variable aléatoire réelle égale au nombre de boules blanches tirées.*

Ici, c'est, bien entendu, une loi binômiale $\mathcal{B}\left(5;\frac{2}{5}\right)$ et donc $\mathbf{P}(\{X=k\}) = \binom{5}{k}\left(\frac{2}{5}\right)^k\left(\frac{3}{5}\right)^{5-k}$

L'INTÉRÊT DE CET EXERCICE RÉSIDE AUSSI DANS LE FAIT QUE, SI NOUS AVONS LA MÊME URNE CONTENANT LES MÊMES BOULES, L'ÉPREUVE EST DIFFÉRENTE DANS CHAQUE CAS ET L'ESPACE FONDAMENTAL Ω EST DONC DIFFÉRENT DANS CHAQUE CAS.

Exercice 8 :

*Une urne contient n boules dont a boules blanches et $n-a$ boules noires. On tire, de cette urne, une boule, **avec remise**, jusqu'à l'apparition d'une boule blanche.*
On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule blanche. Montrer que X est géométrique de paramètre $\frac{a}{n}$

⇒ Premièrement, $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$

⇒ Ensuite, l'événement $\{X = k\}$ signifie que lors des $k-1$ premiers tirages, il n'y a eu que des boules noires de tirées ; et donc, très simplement :

$$\mathbf{P}(\{X = k\}) = \left(\frac{n-a}{n}\right)^{k-1} \times \frac{a}{n} = \left(1 - \frac{a}{n}\right)^{k-1} \times \frac{a}{n}$$

X est donc bien une variable aléatoire réelle géométrique de paramètre $\dfrac{a}{n}$

Exercice 10 :

Soit $\{\Omega, \mathbb{F}, \mathbf{P}\}$ un espace probabilisé et $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle discrète de fonction de répartition F_X définie par :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } 0 \leqslant x < 1 \\ \dfrac{2}{3} & \text{si } 1 \leqslant x < 2 \\ \dfrac{11}{12} & \text{si } 2 \leqslant x < 3 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 3 \end{cases}$$

1. *Construction du graphe de F_X*

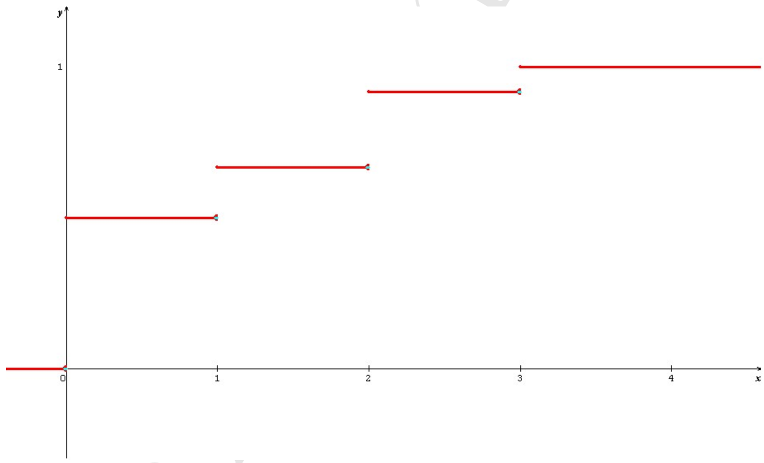

FIGURE 14.4 – Le graphe de la fonction de répartition

2. *Donner $\mathbf{P}\left(\left\{X > \frac{1}{2}\right\}\right)$*

   En passant à l'événement contraire, il est connu que : $\overline{\left\{X > \frac{1}{2}\right\}} = \left\{X \leqslant \frac{1}{2}\right\}$, et donc :

$$\mathbf{P}\left(\left\{X > \frac{1}{2}\right\}\right) = 1 - \mathbf{P}\left(\left\{X \leqslant \frac{1}{2}\right\}\right) = 1 - F_X\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

3. *Donner $\mathbf{P}(\{2 < X \leqslant 4\})$*

   En cours, il a été vu que : $\mathbf{P}(\{2 < X \leqslant 4\}) = F_X(4) - F_X(2)$; donc, ici,

$$\mathbf{P}(\{2 < X \leqslant 4\}) = 1 - \frac{11}{12} = \frac{1}{12}$$

4. *Donner* $\mathbf{P}(\{X=1\})$

   Nous avons toujours : $\{X \leqslant 1\} = \{X=1\} \cup \{X<1\}$, et donc $\mathbf{P}(\{X \leqslant 1\}) = \mathbf{P}(\{X=1\}) + \mathbf{P}(\{X<1\})$, d'où :
   $$\mathbf{P}(\{X \leqslant 1\}) - \mathbf{P}(\{X<1\}) = \mathbf{P}(\{X=1\})$$
   Comme $\mathbf{P}(\{X \leqslant 1\}) = \dfrac{2}{3}$ et $\mathbf{P}(\{X<1\}) = \dfrac{1}{2}$, nous obtenons que $\boxed{\mathbf{P}(\{X=1\}) = \dfrac{1}{6}}$

Exercice 13 :

Soit $\{\Omega; \mathcal{F}; \mathbf{P}\}$ *un espace probabilisé,* X *et* Y*, 2 variables aléatoires réelles discrètes définies sur* Ω *telles que, pour tout* $\omega \in \Omega$*,* $X(\omega) \geqslant Y(\omega)$*. Démontrer que* $\mathbb{E}(X) \geqslant \mathbb{E}(Y)$

On appelle $Z = X - Y$. Z est une variable aléatoire réelle et pour tout $\omega \in \Omega$, $Z(\omega) \geqslant 0$, et donc d'après 14.6.10, nous avons $\mathbb{E}(Z) \geqslant 0$, c'est à dire $\mathbb{E}(X-Y) \geqslant 0$.
D'où, $\mathbb{E}(X) \geqslant \mathbb{E}(Y)$

Exercice 14 :

Soit $\alpha > 1$*, réel. On considère* $\zeta(\alpha) = \displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ *qui est une série de Riemann convergente.*
Soit $\{\Omega; \mathcal{F}; \mathbf{P}\}$ *un espace probabilisé et* $X_\alpha : \Omega \longrightarrow \mathbb{N}^*$ *une variable aléatoire réelle telle que* $\mathbf{P}(\{X_\alpha = n\}) = \dfrac{1}{\zeta(\alpha)} \times \dfrac{1}{n^\alpha}$

1. *Vérifier que* $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \mathbf{P}(\{X_\alpha = n\}) = 1$

   Voilà une question qui pose peu de difficultés :
   $$\sum_{n \geqslant 1} \mathbf{P}(\{X_\alpha = n\}) = \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{\zeta(\alpha)} \times \frac{1}{n^\alpha} = \frac{1}{\zeta(\alpha)} \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha} = \frac{\zeta(\alpha)}{\zeta(\alpha)} = 1$$

2. *Démontrer que* X_α *admet des moments d'ordre* $s \in \mathbb{N}$ *si et seulement si* $s < \alpha - 1$*.*

   Nous avons $M_s(X_\alpha) = \displaystyle\sum_{n \geqslant 1} n^s \mathbf{P}(\{X_\alpha = n\}) = \frac{1}{\zeta(\alpha)} \sum_{n \geqslant 1} n^s \times \frac{1}{n^\alpha}$

   Etudions la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} n^s \times \frac{1}{n^\alpha}$. Or :
   $$\sum_{n \geqslant 1} n^s \times \frac{1}{n^\alpha} = \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^{\alpha - s}} \text{ qui converge pour } \alpha - s > 1$$
   Comme $\alpha - s > 1 \iff s < \alpha - 1$, X_α admet des moments d'ordre $s \in \mathbb{N}$ si et seulement si $s < \alpha - 1$ et nous avons alors $M_s(X_\alpha) = \dfrac{\zeta(\alpha - s)}{\zeta(\alpha)}$

Exercice 15 :

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$*, une fonction bornée. On appelle* $M = \sup\limits_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$*. Montrer que*
$$\sum_{x \in X(\Omega)} |f(x)| \mathbf{P}(\{X = x\}) \leqslant M$$

Pas très sorcier, puisque pour tout $x \in X(\Omega)$, nous avons $|f(x)| \leqslant M$ et donc
$$|f(x)| \mathbf{P}(\{X = x\}) \leqslant M \mathbf{P}(\{X = x\})$$

et, en passant aux sommations et en remarquant que $\sum_{x\in X(\Omega)} \mathbf{P}(\{X=x\})=1$:

$$\sum_{x\in X(\Omega)} |f(x)|\,\mathbf{P}(\{X=x\}) \leqslant \sum_{x\in X(\Omega)} M\mathbf{P}(\{X=x\}) = M\sum_{x\in X(\Omega)} \mathbf{P}(\{X=x\}) = M$$

Ce que nous voulions.

Exercice 16 :

Soit X une variable aléatoire réelle qui suit une loi géométrique de paramètre $p\in\,]0;1[$, c'est à dire que $X(\Omega)=\mathbb{N}^*$ et $\mathbf{P}(\{X=n\})=p(1-p)^{n-1}$
Soit $m\in\mathbb{N}^*$ et on pose $Y=\min(X,m)$, c'est à dire que Y est du type $Y=\varphi\circ X$ où $\varphi(x)=\min(x,m)$

1. *Donner la loi de Y*

   La loi de la variable aléatoire réelle Y est toujours la donnée de $Y(\Omega)$ et des valeurs $\mathbf{P}(\{Y=y\})$ où $y\in Y(\Omega)$

   ▷ Qu'est donc $Y(\Omega)$?
   Ici, Y ne pourra pas aller au-delà de m, et donc $Y(\Omega)=\{1,2,3,\cdots,m\}$

   ▷ Recherchons, maintenent, $\mathbf{P}(\{Y=k\})$ pour $k\in\{1,2,3,\cdots,m\}$

   ⋆ Pour $1\leqslant k\leqslant m-1$, nous avons $\{Y=k\}=\{X=k\}$ et donc

   $$\mathbf{P}(\{Y=k\})=\mathbf{P}(\{X=k\})=p(1-p)^{k-1}$$

   ⋆ Etudions, maintenant, l'événement $\{Y=m\}$. Alors :

   $$\{Y=m\}=\{X\geqslant m\}=\bigcup_{k\geqslant m}\{X=k\}$$

   Et donc : $\mathbf{P}(\{Y=m\})=\sum_{k\geqslant m}\mathbf{P}(\{X=k\})=\sum_{k\geqslant m}p(1-p)^{k-1}$

   Tentons de simplifier l'expression :

   $$\begin{aligned}\mathbf{P}(\{Y=m\}) &= \sum_{k\geqslant m}p(1-p)^{k-1}\\ &= p(1-p)^{m-1}\sum_{k\geqslant m}(1-p)^{k-1-m+1}\\ &= p(1-p)^{m-1}\sum_{k\geqslant 0}(1-p)^{k}\\ &= p(1-p)^{m-1}\times\frac{1}{1-(1-p)}\\ &= (1-p)^{m-1}\end{aligned}$$

   Et donc, nous avons $\mathbf{P}(\{Y=k\})=p(1-p)^{k-1}$ si $1\leqslant k\leqslant m-1$ et $\mathbf{P}(\{Y=m\})=(1-p)^{m-1}$

2. *Calculer $\mathbb{E}(Y)$*

   Bien entendu, nous avons $\mathbb{E}(Y)=\sum_{k=1}^{m-1}kp(1-p)^{k-1}+m(1-p)^{m-1}$

   Le plus difficile sera de calculer $\sum_{k=1}^{m-1}kp(1-p)^{k-1}=p\sum_{k=1}^{m-1}k(1-p)^{k-1}$

   ▷ Pour commencer, pour $x\in\mathbb{R}$ et $0<x<1$, nous avons $\theta(x)=\sum_{k=0}^{m-1}x^k=\dfrac{1-x^m}{1-x}$.

   Considérons, maintenant, la dérivée de θ

   $$\theta'(x)=\sum_{k=0}^{m-1}kx^{k-1}=\sum_{k=1}^{m-1}kx^{k-1}=\left(\frac{1-x^m}{1-x}\right)'=\frac{(m-1)x^m-mx^{m-1}+1}{(1-x)^2}$$

Et donc, pour conclure $\displaystyle\sum_{k=1}^{m-1} kx^{k-1} = \frac{(m-1)\,x^m - mx^{m-1} + 1}{(1-x)^2}$

▷ En remplaçant x par $1-p$, nous avons :

$$\sum_{k=1}^{m-1} k\,(1-p)^{k-1} = \frac{(m-1)\,(1-p)^m - m\,(1-p)^{m-1} + 1}{p^2}$$

De telle sorte que $\displaystyle\sum_{k=1}^{m-1} kp\,(1-p)^{k-1} = p\sum_{k=1}^{m-1} k\,(1-p)^{k-1} = \frac{(m-1)\,(1-p)^m - m\,(1-p)^{m-1} + 1}{p}$

▷ Calculons, maintenant, $\mathbb{E}\,(Y)$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\,(Y) &= \sum_{k=1}^{m-1} kp\,(1-p)^{k-1} + m\,(1-p)^{m-1} \\
&= \frac{(m-1)\,(1-p)^m - m\,(1-p)^{m-1} + 1}{p} + m\,(1-p)^{m-1} \\
&= \frac{(m-1)\,(1-p)^m - m\,(1-p)^{m-1} + 1 + mp\,(1-p)^{m-1}}{p} \\
&= \frac{(m-1)\,(1-p)^m - m\,(1-p)^{m-1}\,(1-p) + 1}{p} \\
&= \frac{(m-1)\,(1-p)^m - m\,(1-p)^m + 1}{p} \\
&= \frac{1-(1-p)^m}{p}
\end{aligned}$$

Nous avons donc $\mathbb{E}\,(Y) = \dfrac{1-(1-p)^m}{p}$

Exercice 17 :

1. *Quelle est la variance d'une variable aléatoire réelle certaine ? Réciproquement, soit X une variable aléatoire réelle discrète et finie dont la variance est nulle. Montrer que X est une variable aléatoire réelle constante.*

   ▷ La variance d'une variable aléatoire réelle certaine
   Supposons que pour tout $\omega \in \Omega$, nous ayions $X\,(\omega) = \lambda$; donc $\mathbb{E}\,(X) = \lambda$ et $\mathbb{E}\left(X^2\right) = \lambda^2$.
   D'où $\sigma^2\,(X) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - (\mathbb{E}\,(X))^2 = \lambda^2 - \lambda^2 = 0$

   ▷ Supposons que X soit une variable aléatoire réelle de variance nulle
   Si $\sigma^2\,(X) = 0$, alors $\mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}\,(X))^2\right] = 0$.
   Soit Z la variable aléatoire réelle définie par $Z = (X - \mathbb{E}\,(X))^2$; alors $Z \geqslant 0$ et $\mathbb{E}\,(Z) = 0$; donc, d'après 14.6.10, Z est la variable aléatoire réelle nulle, c'est à dire $Z = 0$, ce qui est équivalent à écrire que $X = \mathbb{E}\,(X)$.
   X est donc une variable aléatoire réelle constante, pour X variable aléatoire réelle discrète :

   Nous avons donc montré l'équivalence :

   $$\sigma^2\,(X) = 0 \Longleftrightarrow X \text{ est une variable aléatoire réelle constante}$$

2. *Soit $\{\Omega; \mathcal{F}; \mathbf{P}\}$ un espace probabilisé et $A \in \mathcal{F}$. On considère $1_A : \Omega \longrightarrow \{0,1\}$, la fonction indicatrice de l'ensemble A. Donner la variance $\sigma^2\,(1_A)$ de 1_A*

   Question qui a peu d'intérêt, puisque la fonction indicatrice est une loi de Bernouilli de paramètre $\mathbf{P}\,(A)$. Nous avons donc :

   $$\sigma^2\,(1_A) = \mathbf{P}\,(A)\,(1 - \mathbf{P}\,(A)) = \mathbf{P}\,(A)\,\mathbf{P}\left(\overline{A}\right)$$

3. *Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons l'inégalité $|x| \leqslant \dfrac{1+x^2}{2}$. Déduire de cette inégalité que si X est une variable aléatoire réelle telle que $\mathbb{E}\left(X^2\right)$ existe, alors $\mathbb{E}\,(X)$ existe.*

   Le seul intérêt de cette question est de redémontrer 14.6.14 dans un cas très particulier

▷ Montrons que $|x| \leqslant \dfrac{1+x^2}{2}$

Nous avons déjà démontré, dans des cours antérieurs *(L_0 en particulier)* que, pour tout $y \in \mathbb{R}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons :

$$2|xy| \leqslant x^2 + y^2 \Longleftrightarrow |xy| \leqslant \frac{x^2+y^2}{2}$$

L'inégalité demandée est réalisée pour $y = 1$

▷ Pour toute variable aléatoire réelle X, nous avons aussi $|X| \leqslant \dfrac{1+X^2}{2}$.

Ainsi, si $\mathbb{E}\left(X^2\right)$ existe, alors $\mathbb{E}\left(\dfrac{1+X^2}{2}\right)$ aussi et donc $\mathbb{E}(|X|)$.

En traduisant en termes de série, on dira alors que la série $\displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} |x| \, \mathbf{P}(\{X = x\})$ converge et que, donc, la série $\displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} x\mathbf{P}(\{X = x\})$ est absolument convergente, donc convergente et $\mathbb{E}(X)$ existe.

Et nous concluons que si $\mathbb{E}(|X|)$ esixte, alors $\mathbb{E}(X)$ aussi

Exercice 18 :

Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \{-4,\ -3,\ 1,\ 2\}$ et dont la loi est donnée par le tableau :

x_i	-4	-3	1	2
$\mathbb{P}(X = x_i)$	$0,10$	$0,15$	$0,65$	$0,10$

1. *Calculez l'espérance et la variance de X*

(a) Calcul de l'espérance

Le calcul de l'espérance est très simple :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= -4\mathbb{P}(\{X=-4\}) + (-3)\,\mathbb{P}(\{X=-3\}) + 1\mathbb{P}(\{X=+1\}) + 2\mathbb{P}(\{X=+2\}) \\
&= -4 \times 0,10 - 3 \times 0,15 + 1 \times 0,65 + 2 \times 0,10 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Nous avons $\mathbb{E}(X) = 0$. C'est donc une variable aléatoire centrée.

(b) Calcul de la variance

Pour calculer la variance, nous allons utiliser la formule de Koënig (Voir 14.7.2) : $\sigma^2(X) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - (\mathbb{E}(X))^2$. Calculons $\mathbb{E}\left(X^2\right)$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(X^2\right) &= (-4)^2\,\mathbb{P}(\{X=-4\}) + (-3)^2\,\mathbb{P}(\{X=-3\}) + 1^2\mathbb{P}(\{X=+1\}) + 2^2\mathbb{P}(\{X=+2\}) \\
&= 16 \times 0,10 + 9 \times 0,15 + 1 \times 0,65 + 4 \times 0,10 \\
&= 4
\end{aligned}$$

Donc, $\sigma^2(X) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - (\mathbb{E}(X))^2 = 4 - 0 = 4$

2. *Définissez la fonction de répartition de X*

On appelle F_X la fonction de répartition de X ; nous avons : $F_X(x) = \mathbb{P}(\{X \leqslant x\})$. Définissons maintenant F_X :

Si $x < -4$, alors $F_X(x) = 0$
Si $-4 \leqslant x < -3$, alors $F_X(x) = \mathbb{P}(\{X=-4\}) = 0,10$
Si $-3 \leqslant x < 1$, alors $F_X(x) = \mathbb{P}(\{X=-4\}) + \mathbb{P}(\{X=-3\}) = 0,25$
Si $1 \leqslant x < 2$, alors $F_X(x) = \mathbb{P}(\{X=-4\}) + \mathbb{P}(\{X=-3\}) + \mathbb{P}(\{X=1\}) = 0,90$
Si $2 \leqslant x$, alors $F_X(x) = \mathbb{P}(\{X=-4\}) + \mathbb{P}(\{X=-3\}) + \mathbb{P}(\{X=1\}) + \mathbb{P}(\{X=2\}) = 1$

3. *Soit $\varphi : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par :*

$$\left\{\begin{array}{lcl} \varphi : \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ h & \overset{\varphi}{\longmapsto} & \varphi(h) = \mathbb{P}(\{|X| \leqslant h\}) \end{array}\right.$$

Définissez la fonction φ

Avant toute chose, on va définir ce qu'est l'ensemble $\{|X| \leqslant h\}$. Nous avons : $\{|X| \leqslant h\} = \{-h \leqslant X \leqslant h\}$. Ce qui va nous donner :

$$\begin{array}{rl} h \in [0\ 1[: & \{-h \leqslant X \leqslant h\} = \emptyset \\ h \in [1\ 2[: & \{-h \leqslant X \leqslant h\} = \{X = 1\} \\ h \in [2\ 3[: & \{-h \leqslant X \leqslant h\} = \{X = 1\} \cup \{X = 2\} \\ h \in [3\ 4[: & \{-h \leqslant X \leqslant h\} = \{X = 1\} \cup \{X = 2\} \cup \{X = -3\} \\ h \geqslant 4: & \{-h \leqslant X \leqslant h\} = \{X = 1\} \cup \{X = 2\} \cup \{X = -3\} \cup \{X = -4\} \end{array}$$

D'où, l'expression de φ

$$\begin{array}{rl} h \in [0\ 1[: & \varphi(h) = 0 \\ h \in [1\ 2[: & \varphi(h) = 0,65 \\ h \in [2\ 3[: & \varphi(h) = 0,75 \\ h \in [3\ 4[: & \varphi(h) = 0,90 \\ h \geqslant 4: & \varphi(h) = 1 \end{array}$$

Exercice 20 :

Soit $\{\Omega; \mathcal{F}; \mathbf{P}\}$ un espace probabilisé et $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, une variable aléatoire réelle discrète

1. *On suppose que X suit une loi binômiale $\mathcal{B}\left(10, \frac{1}{2}\right)$. Trouver un majorant de la probabilité de l'événement $\{X \neq 5\} \cap \{X \neq 4\} \cap \{X \neq 6\}$*

   Nous allons utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchébichev $\mathbf{P}(\{|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant \varepsilon\}) \leqslant \dfrac{\sigma^2(X)}{\varepsilon^2}$.

   Ici, X est une variable aléatoire réelle binômiale $\mathcal{B}\left(10, \frac{1}{2}\right)$ de moyenne $\mathbb{E}(X) = 5$ et de variance $\sigma^2(X) = \dfrac{10}{4} = 2,5$

   L'événement $\{X \neq 5\} \cap \{X \neq 4\} \cap \{X \neq 6\}$ peut se traduire par $\{|X - 5| \geqslant 2\} \Longleftrightarrow \{|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant 2\}$

   Nous avons donc $\mathbf{P}(\{|X - 5| \geqslant 2\}) \leqslant \dfrac{2,5}{4} = 0,625$

2. *Qu'en est-il si nous supposons, cette fois-ci que X suit une loi binômiale $\mathcal{B}\left(100, \frac{1}{2}\right)$ pour l'événement $\{X \neq 50\} \cap \{X \neq 51\} \cap \{X \neq 49\}$*

   Comme tout à l'heure, nous avons $\mathbb{E}(X) = 50$ et $\sigma^2(X) = \dfrac{100}{4} = 25$.

   L'événement $\{X \neq 50\} \cap \{X \neq 51\} \cap \{X \neq 49\}$ est l'événement $\{|X - 50| \geqslant 2\}$ et donc :

$$\mathbf{P}(\{|X - 50| \geqslant 2\}) \leqslant \frac{25}{4} = 6,25$$

   Il est évident que cette dernière inégalité n'apporte rien !!

Cet exercice est l'illustration du fait que les inégalités, en probabibilité, sont très larges et peu efficaces, finalement.

Exercice 21 :

On lance une fois un dé non pipé.

1. *X est la variable aléatoire égale au nombre de points du dé amené par le seul lancer.*

(a) *Quelle est la loi de X ?*

C'est très simple :
— $X(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
— $\mathbf{P}(\{X = k\}) = \frac{1}{6}$
X suit une loi uniforme sur l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

(b) *Quelle est la valeur moyenne de X ?*

— La valeur moyenne de X est donnée par $\mathbb{E}(X)$ Comme X suit une loi uniforme sur $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, nous avons : $\mathbb{E}(X) = \frac{7}{2}$
— Il est facile de retrouver ce résultat :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) = & \ 1 \times \mathbf{P}(\{X = 1\}) + 2 \times \mathbf{P}(\{X = 2\}) + 3 \times \mathbf{P}(\{X = 3\}) + 4 \times \mathbf{P}(\{X = 4\}) + 5 \times \mathbf{P}(\{X = 5\}) + \\ = & \ \frac{1}{6}(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) \\ = & \ \frac{21}{6} = \frac{7}{2}\end{aligned}$$

2. *On suppose qu'on reçoit 15 euros si on obtient 1, rien si on obient 2, 3 ou 4, et 6 euros si on obtient 5 ou 6. Soit G la variable aléatoire égale au gain de ce jeu.*

(a) *Quelle est la loi de G ?*

— Premièrement, nous avons $G(\Omega) = \{0, 6, 15\}$
— Ensuite, nous avons $\{G = 0\} = \{2, 3, 4\}$, et donc $\mathbf{P}(\{G = 0\}) = \frac{1}{2}$, puis $\{G = 6\} = \{5, 6\}$ et donc $\mathbf{P}(\{G = 6\}) = \frac{1}{3}$; enfin, $\{G = 15\} = \{1\}$, et donc $\mathbf{P}(\{G = 15\}) = \frac{1}{6}$

(b) *Que vaut le gain moyen ?*

Le gain moyen est donné par l'espérance de G. Nous avons donc

$$\mathbb{E}(G) = 0 \times \mathbf{P}(\{G = 0\}) + 6 \times \mathbf{P}(\{G = 6\}) + 15 \times \mathbf{P}(\{G = 15\}) = \frac{9}{2}$$

3. *On suppose maintenant qu'on reçoit 27 euros si on obtient un 1 et rien sinon. Préférez-vous jouer au jeu de la question 2 ou à celui-ci ? Pourquoi ?*

Si nous appelons G' la variable aléatoire égale au gain dans le nouveau jeu, nous avons :
— $G'(\Omega) = \{0, 27\}$
— Et $\mathbf{P}(\{G' = 0\}) = \frac{5}{6}$, $\mathbf{P}(\{G' = 25\}) = \frac{1}{6}$
— $\mathbb{E}(G) = \frac{25}{6}$
Je préférerais jouer au jeu de la question 2, sans problème, parce que :
— La probabilité de gagner quelque chose est plus grande : $\frac{1}{2}$ au lieu de $\frac{1}{6}$
— Et l'espérance de gain est plus importante !

4. *On demande maintenant de miser 3 euros pour jouer au jeu de la question 2 dans lequel les gains ont été divisés par 2. Quel est l'espérance de votre gain net ?*

On appelle G_1 la variable aléatoire correspondant au nouveau jeu. Alors, il faut tenir compte qu'on donne 3 Euros pour jouer, et que les gains ont été divisés par 2. On peut alors écrire que : $G_1 = \frac{1}{2}G - 3$. L'espérance du gain net est donc donnée par :

$$\mathbb{E}(G_1) = \mathbb{E}\left(\frac{1}{2}G - 3\right)$$

La linéarité de l'espérance nous donne :

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{2}G - 3\right) = \frac{1}{2}\mathbb{E}(G) - 3 = \frac{1}{2} \times \frac{9}{2} - 3 = -\frac{3}{4}$$

Donc,

$$\boxed{\mathbb{E}\left(G_1\right) = -\frac{3}{4}}$$

L'espérance de gain est donc plutôt une espérance de perte de 0,75 Euros ! !

Exercice 22 :

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire, aléatoirement, k boules en une seule prise.

(a) *Quel est l'espace fondamental et en donner le cardinal.*

En appelant Ω l'espace fondamental, ici, clairement :

$$\Omega = \{\text{L'ensemble des sous-ensembles à } k \text{ éléments pris parmi } n\}$$

Et, clairement, $\boxed{\text{card}\left(\Omega\right) = \mathrm{C}_n^k}$

(b) *On note X la variable aléatoire réelle donnant le numéro de la plus petite boule tirée.*

i. *Quelles sont les valeurs prises par X ?*

Si on prend k boules, le plus petit numéro tiré sera donc 1, et le plus grand sera celui donné par le tirage des k dernières boules juste avant n, c'est à dire $n-(k-1)$

Donc, $\boxed{X\left(\Omega\right) = \{1, \ldots, n-k+1\}}$

ii. *Pour $i \in X\left(\Omega\right)$, donner $\mathbf{P}\left(\{X = i\}\right)$*

L'événement $\{X = i\}$ signifie que le plus petit numéro parmi les k boules tirées est i. Ce qui signifie que les autres $k-1$ boules sont tirées parmi les boules portant les numéros $i+1$ à n, c'est à dire parmi les $n-i$ boules portant des numéros plus grands que i. Il y a C_{n-i}^{k-1} façons de tirer $k-1$ boules parmi les $n-i$ boules.

Donc, $\boxed{\mathbf{P}\left(\{X = i\}\right) = \dfrac{\mathrm{C}_{n-i}^{k-1}}{\mathrm{C}_n^k}}$

(c) *Donner $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-k+1} \mathrm{C}_{n-i}^{k-1}$*

X étant une variable aléatoire, d'après le cours, nous avons : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-k+1} \mathbf{P}\left(\{X = i\}\right) = 1$, c'est à dire :

$$\sum_{i=1}^{n-k+1} \frac{\mathrm{C}_{n-i}^{k-1}}{\mathrm{C}_n^k} = 1$$

Or,

$$\sum_{i=1}^{n-k+1} \frac{\mathrm{C}_{n-i}^{k-1}}{\mathrm{C}_n^k} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n-k+1} \mathrm{C}_{n-i}^{k-1}}{\mathrm{C}_n^k}$$

Et donc,

$$\frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n-k+1} \mathrm{C}_{n-i}^{k-1}}{\mathrm{C}_n^k} = 1 \iff \sum_{i=1}^{n-k+1} \mathrm{C}_{n-i}^{k-1} = \mathrm{C}_n^k$$

Les 2 exercices suivants, s'ils sont simples, permettent de comprendre et détudier les variables aléatoires réelles du type $\varphi \circ X$ où X est une variable aléatoire réelle quelconque

Exercice 24 :

X est une variable aléatoire réelle discrète dont la loi est définie par le tableau suivant :

k	-1	0	1	2
$\mathbf{P}(\{X=k\})$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$

1. *Calculer $\mathbb{E}(X)$, la moyenne de X, ainsi que $\sigma^2(X)$, la variance de X*

   ⇒ La moyenne de X est donc $\mathbb{E}(X) = -1 \times \frac{1}{4} + 0 \times \frac{1}{8} + 1 \times \frac{1}{8} + 2 \times \frac{1}{2} = \frac{7}{8}$

   ⇒ Nous utilisons la formule $\sigma^2(X) = \left(X^2\right) - \left((X)\right)^2$. Il reste donc à calculer $\left(X^2\right)$

   $$\mathbb{E}\left(X^2\right) = 1 \times \frac{1}{4} + 0 \times \frac{1}{8} + 1 \times \frac{1}{8} + 4 \times \frac{1}{2} = \frac{19}{8}$$

   D'où $\sigma^2(X) = \frac{19}{8} - \frac{49}{64} = \frac{103}{64}$

2. *Soit la variable aléatoire réelle $Y = X^2$ Quelle est la loi de probabilité de Y ?*

   Assez facile ; $Y(\Omega) = \{0, 1, 4\}$ et l'événement $\{Y = 1\} = \{X = 1\} \cup \{X = -1\}$. D'où :

   $$\begin{cases} \mathbf{P}(\{Y=0\}) = \mathbf{P}(\{X=0\}) = \frac{1}{8} \\ \mathbf{P}(\{Y=1\}) = \mathbf{P}(\{X=-1\}) + \mathbf{P}(\{X=1\}) = \frac{3}{8} \\ \mathbf{P}(\{Y=4\}) = \mathbf{P}(\{X=2\}) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

   Pour la petite histoire, $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}\left(X^2\right) = \frac{19}{8}$

Exercice 25 :

On considère un dé cubique truqué, de telle sorte que la probabilité d'obtenir la face numérotée k est proportionnelle à k (on suppose que les faces sont numérotées de 1 à 6).
Soit X la variable aléatoire associée au lancer de ce dé.

1. *Déterminer la loi de X et calculer son espérance.*

   ⇒ La loi de X

   Nous devons avoir $\sum_{k=1}^{6} k\lambda = 1 \iff \lambda \sum_{k=1}^{6} k = 1 \iff \lambda = \frac{1}{21}$ Et donc :

   $$\begin{array}{lll} \mathbf{P}(\{X=1\}) = \frac{1}{21} & \mathbf{P}(\{X=2\}) = \frac{2}{21} & \mathbf{P}(\{X=3\}) = \frac{1}{7} \\ \mathbf{P}(\{X=4\}) = \frac{4}{21} & \mathbf{P}(\{X=5\}) = \frac{5}{21} & \mathbf{P}(\{X=6\}) = \frac{2}{7} \end{array}$$

   ⇒ D'où le calcul de $\mathbb{E}(X)$

   $$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{21} + \frac{4}{21} + \frac{3}{7} + \frac{16}{21} + \frac{20}{21} + \frac{12}{7} = \frac{86}{21}$$

2. *On pose $Y = \frac{1}{X}$. Déterminer la loi de Y et son espérance.*

   ⇒ La loi de Y

   ⋆ Tout d'abord $Y(\Omega) = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}\right\}$

   ⋆

$$\mathbf{P}(\{Y=1\}) = \mathbf{P}(\{X=1\}) = \frac{1}{21} \qquad \mathbf{P}\left(\left\{Y=\frac{1}{2}\right\}\right) = \mathbf{P}(\{X=2\}) = \frac{2}{21}$$
$$\mathbf{P}\left(\left\{Y=\frac{1}{3}\right\}\right) = \mathbf{P}(\{X=3\}) = \frac{1}{7} \qquad \mathbf{P}\left(\left\{Y=\frac{1}{4}\right\}\right) = \mathbf{P}(\{X=4\}) = \frac{4}{21}$$
$$\mathbf{P}\left(\left\{Y=\frac{1}{5}\right\}\right) = \mathbf{P}(\{X=5\}) = \frac{5}{21} \qquad \mathbf{P}\left(\left\{Y=\frac{1}{6}\right\}\right) = \mathbf{P}(\{X=6\}) = \frac{2}{7}$$

$\Rightarrow$ D'où le calcul de $\mathbb{E}(Y)$

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{21} + \frac{1}{2}\times\frac{2}{21} + \frac{1}{3}\times\frac{1}{7} + \frac{1}{4}\times\frac{4}{21} + \frac{1}{5}\times\frac{5}{21} + \frac{1}{6}\times\frac{2}{7} = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}$$

Ainsi, $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}\left(\frac{1}{X}\right) = \frac{2}{7}$.

On remarquera que $\mathbb{E}(X) \neq \mathbb{E}\left(\frac{1}{X}\right)$

Exercice 26 :

On lance trois fois de suite un dé cubique à 6 faces.

1. *Quel est l'espace de probabilité* $\{\Omega; \mathcal{F}; \mathbf{P}\}$ *lié à cette expérience ?*

   Pas de difficultés, ici :

   $$\Omega = \{(i,j,k) \text{ où } 1 \leqslant i \leqslant 6; 1 \leqslant j \leqslant 6; 1 \leqslant k \leqslant 6\} = \{1,2,3,4,5,6\}^3$$

   Et donc Card $\Omega = 6^3$

2. *Soit* X *le nombre de valeurs distinctes obtenues pour un lancer : par exemple* $X(2;6;1) = 3$ *et* $X(4;4;2) = 2$*. Quelle est la loi de* X *?*

   $\Rightarrow$ Ici, l'exercice est un peu plus difficile. Il tient plus du dénombrement que des probabilités.
   Il est clair que $X(\Omega) = \{1,2,3\}$

   $\Rightarrow$ Etudions l'événement $\{X=1\}$.
   Les éléments de l'événement $\{X=1\}$ sont les tirages qui ne comportent qu'un seul numéro ; ils sont donc du type

   $$\{X=1\} = \{(a,a,a) \text{ avec } 1 \leqslant a \leqslant 6\}$$

   Et donc Card $(\{X=1\}) = 6$ et nous avons $\mathbf{P}(\{X=1\}) = \frac{6}{216} = \frac{1}{36}$

   $\Rightarrow$ Etudions l'événement $\{X=2\}$.
   L'événement $\{X=2\}$ correspond aux tirages qui comportent 2 numéros ; ils sont donc du type

   $$\{X=2\} = \{(a,b,b) \text{ avec } 1 \leqslant a \leqslant 6; 1 \leqslant b \leqslant 6\}$$

   Nous extrayons donc 2 numéros parmi les 6, et il y a $\binom{6}{2} = 15$ façons de le faire ; une fois ces 2 numéros choisis, ils permutent comme ils le souhaitent dans le triplet. Il y a $3! = 6$ permutations possibles.

   Et donc Card $(\{X=2\}) = \binom{6}{2}\times 3! = 15\times 6 = 90$ et nous avons $\mathbf{P}(\{X=2\}) = \frac{90}{216} = \frac{5}{12}$

   $\Rightarrow$ Etudions l'événement $\{X=3\}$.
   Le raisonnement est très semblable.
   L'événement $\{X=3\}$ rassemble les tirages qui comportent 3 numéros : ; ils sont donc du type

   $$\{X=2\} = \{(a,b,c) \text{ avec } 1 \leqslant a \leqslant 6; 1 \leqslant b \leqslant 6; 1 \leqslant c \leqslant 6\}$$

   Nous extrayons donc 3 numéros parmi les 6, et il y a $\binom{6}{3} = 20$ façons de le faire ; une fois ces 3 numéros choisis, ils permutent comme ils le souhaitent dans le triplet. Il y a $3! = 6$ permutations possibles.

   Et donc Card $(\{X=3\}) = \binom{6}{3}\times 3! = 20\times 6 = 120$ et nous avons $\mathbf{P}(\{X=3\}) = \frac{120}{216} = \frac{5}{9}$

Exercice 28 :

Soit U une urne contenant n boules numérotées de 1 à n . On en tire p successivement, avec remise à chaque tirage.
On appelle X la variable aléatoire réelle égale au plus grand des numéros des boules ainsi tirées.
Pour $k \in \{1, \dots, n\}$, donner $\mathbf{P}(\{X \leqslant k\})$, puis $\mathbf{P}(\{X = k\})$

⇒ Tout d'abord, il n'est pas totalement stupide de définir l'espace fondamental Ω
Revenons sur l'expérience :
- ⋆ On tire une première boule et on note son numéro ; ce numéro est compris entre 1 et n ; la boule est remise dans l'urne.
- ⋆ Lorsque nous tirons la seconde boule, le numéro est toujours compris entre 1 et n
- ⋆ Et ainsi de suite jusqu'au p-ième tirage

Chaque expérience représente donc une application de l'ensemble $\{1, 2, \cdots, p\}$ dans l'ensemble $\{1, 2, \cdots, n\}$. Et donc :

$$\Omega = \{\text{Application de l'ensemble } \{1, 2, \cdots, p\} \text{ dans l'ensemble } \{1, 2, \cdots, n\}\}$$

Et donc, $\text{Card } \Omega = n^p$

⇒ Maintenant, c'est quoi l'événement $\{X \leqslant k\}$; ce sont tous les tirages tels que le plusgrand numéro soit inférieur ou égal à k. C'est donc l'ensemble des applications de l'ensemble $\{1, 2, \cdots, p\}$ dans l'ensemble $\{1, 2, \cdots, k\}$ et donc $\text{Card } \{X \leqslant k\} = k^p$.
D'où, $\mathbf{P}(\{X \leqslant k\}) = \dfrac{k^p}{n^p} = \left(\dfrac{k}{n}\right)^p$

⇒ Ensuite $\{X \leqslant k\} = \{X \leqslant k-1\} \cup \{X = k\}$ et donc :

$$\mathbf{P}(\{X \leqslant k\}) = \mathbf{P}(\{X \leqslant k-1\}) + \mathbf{P}(\{X = k\}) \iff \mathbf{P}(\{X = k\}) = \mathbf{P}(\{X \leqslant k\}) - \mathbf{P}(\{X \leqslant k-1\})$$

D'où, $\mathbf{P}(\{X = k\}) = \left(\dfrac{k}{n}\right)^p - \left(\dfrac{k-1}{n}\right)^p = \dfrac{k^p - (k-1)^p}{n^p}$

Exercice 29 :

Soit $\{\Omega, \mathbb{F}, \mathbf{P}\}$ un espace probabilisé. Soit $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle.
Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on considère la fonction numérique

$$\varphi(\lambda) = \mathbb{E}\left[(X - \lambda)^2\right]$$

Démontrer que le minimum de φ est atteint en $\lambda = \mathbb{E}(X)$ et en donner une interprétation.

⇒ Nous avons :

$$\mathbb{E}\left[(X - \lambda)^2\right] = \mathbb{E}\left[X^2 - 2\lambda X + \lambda^2\right]$$

Nous allons utiliser la linéarité de l'espérance vue en 14.6.17, nous avons :

$$\mathbb{E}\left[(X - \lambda)^2\right] = \mathbb{E}\left(X^2\right) - 2\lambda \mathbb{E}(X) + \lambda^2$$

⇒ Ainsi, $\varphi(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}\left(X^2\right)$ est un polynôme du second degré en λ. φ admet un minimum en $\lambda_0 = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-2\mathbb{E}(X)}{2} = \mathbb{E}(X)$

⇒ Le minimum est donc $\varphi(\lambda_0) = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}(X))^2\right] = \sigma^2(X)$

Interprétation : L'expression $\mathbb{E}\left[(X - \lambda)^2\right]$ représente la distance « *au sens des moindres carrés* » entre la variable aléatoire réelle X et une constante λ et la distance la plus petite est obtenue lorsque $\lambda = \mathbb{E}(X)$ et cette distance est $\sigma^2(X)$.
La variance $\sigma^2(X)$ représente donc la dispersion de X autour de $\mathbb{E}(X)$

Exercice 30 :

On place un hamster dans une cage. Il se trouve face à 5 portillons dont un seul lui permet de sortir de la cage. A chaque essai infructueux, il reçoit une décharge électrique et on le replace à l'endroit initial.

1. *On suppose que le hamster ne soit pas doué d'apprentissage et qu'il choisisse donc de façon équiprobable entre les 5 solutions à chaque nouvel essai, déterminer la probabilité des événements :*

   En fait, il a donc, à chaque essai, une probabilité de $\frac{1}{5}$ de réussir et de $\frac{4}{5}$ d'échouer.

   ▷ *Le hamster sort au premier essai.*

   C'est simple, cette probabilité est de $\frac{1}{5}$

   ▷ *Le hamster sort au troisième essai.*

   Ceci veut dire qu'il il y a eu un échec au premier essai, au second essai, et une réussite au troisième. Donc, cette probabilité est donnée par $\frac{1}{5} \times \left(\frac{4}{5}\right)^2$

   Très généralement, si X est la variable aléatoire réelle telle que $X = k$ si le hamster sort au k-ième essai. Nous avons donc $\mathbf{P}\left(\{X = k\}\right) = \frac{1}{5} \times \left(\frac{4}{5}\right)^{k-1}$.

   X suit donc une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{5}$ et donc d'espérance $\mathbb{E}\left(X\right) = 5$.

   S'il n'a pas de mémoire, le hamster sort *en moyenne* au 5° essai.

2. *Le hamster mémorise maintenant les essais infructueux et choisit de façon équiprobable entre les portillons qu'il n'a pas encore essayés. On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre d'essais effectués.*

   ▷ *Quelles valeurs peut prendre X ?*

   Assez clairement $X\left(\Omega\right) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

   ▷ *Déterminer sa loi de probabilité, et tracer sa fonction de répartition.*

   ⇒ <u>La loi de X</u>

   ⋆ Si $X = 1$, ceci veut dire qu'il a réussi dès le premier essai, et donc $\mathbf{P}\left(\{X = 1\}\right) = \frac{1}{5}$

   ⋆ Pour $X = 2$, ceci signifie qu'il a raté son premier essai (il avait 4 chances sur 5 de le rater), qu'il n'avait plus qu'à choisire ntre 4 portes, et qu'il avait 1 chance sur 4 de trouver la bonne sortie.
   Donc, $\mathbf{P}\left(\{X = 2\}\right) = \frac{4}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{5}$

   ⋆ Pour $X = 3$, nous avons $\mathbf{P}\left(\{X = 3\}\right) = \frac{4}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{5}$

   ⋆ Et donc, nous retrouverons aussi $\mathbf{P}\left(\{X = 3\}\right) = \mathbf{P}\left(\{X = 3\}\right) = \frac{1}{5}$

   X suit donc une loi uniforme sur $X\left(\Omega\right) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

   ⇒ <u>La fonction de répartition de X</u>

   ▷ Si$x < 1$, alors $\mathbf{P}\left(\{X \leqslant x\}\right) = F_X\left(x\right) = 0$

   ▷ Si $1 \leqslant x < 2$, alors $\mathbf{P}\left(\{X \leqslant x\}\right) = F_X\left(x\right) = \mathbf{P}\left(\{X = 1\}\right) = \frac{1}{5}$

   ▷ Si $2 \leqslant x < 3$, alors $\mathbf{P}\left(\{X \leqslant x\}\right) = F_X\left(x\right) = \mathbf{P}\left(\{X = 1\}\right) + \mathbf{P}\left(\{X = 2\}\right) = \frac{2}{5}$

   ▷ Si $3 \leqslant x < 4$, alors $\mathbf{P}\left(\{X \leqslant x\}\right) = F_X\left(x\right) = \mathbf{P}\left(\{X = 1\}\right) + \mathbf{P}\left(\{X = 2\}\right) + \mathbf{P}\left(\{X = 3\}\right) = \frac{3}{5}$

   ▷ Si $4 \leqslant x < 5$, alors

   $$\mathbf{P}\left(\{X \leqslant x\}\right) = F_X\left(x\right) = \mathbf{P}\left(\{X = 1\}\right) + \mathbf{P}\left(\{X = 2\}\right) + \mathbf{P}\left(\{X = 3\}\right) + \mathbf{P}\left(\{X = 4\}\right) = \frac{4}{5}$$

   ▷ Si $x \geqslant 5$, alors

   $$\mathbf{P}\left(\{X \leqslant x\}\right) = F_X\left(x\right) = \mathbf{P}\left(\{X = 1\}\right) + \mathbf{P}\left(\{X = 2\}\right) + \mathbf{P}\left(\{X = 3\}\right) + \mathbf{P}\left(\{X = 4\}\right) + \mathbf{P}\left(\{X = 5\}\right) = 1$$

   D'où le graphe :

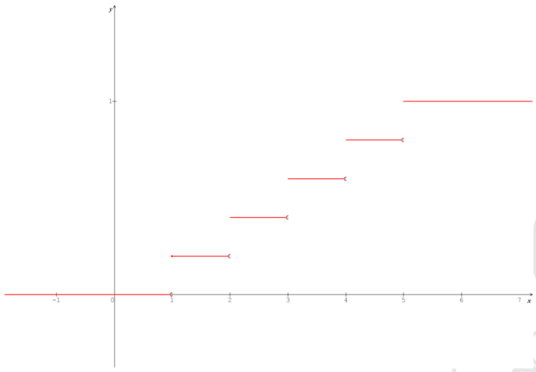

FIGURE 14.5 – Le graphe de la fonction de répartition

▷ *Déterminer $\mathbb{E}(X)$ et l'interpréter.*

Et de manière évidente $\mathbb{E}(X) = \dfrac{1}{5} \times (1+2+3+4+5) = 3$
Ainsi, si le hamster sort « *en moyenne* » au bout de 3 essai, nous pourrons déclarer que notre hamster est doué de mémoire.

Exercice 31 :

Voilà un exercice qui n'a rien de difficile
Une roulette contient 36 cases numérotées de 1 à 36, dont 18 sont rouges, et 18 sont noires, plus une case numérotée 0 de couleur verte.
Un joueur qui mise sur la couleur rouge ou noire gagne 2 fois sa mise si la couleur sort.
Si ce joueur mise sur un numéro de 1 à 36 qui sort, il gagne 36 fois sa mise.
Toute mise sur le 0 est interdite.

1. *Le joueur mise au hasard a Euros sur une couleur ; soit X_1 son gain. Trouver la loi de X_1, puis calculer l'espérance et la variance de X_1*

   ⇒ La loi de X_1
   Si nous donnons a€ et que nous récupérons $2a$€, nous n'aurons gagné que a€. Et si nous donnons a€ nous aurons perdu a€. D'où : $X_1(\Omega) = \{-a; +a\}$
   Et nous avons $\mathbf{P}(\{X_1 = -a\}) = \dfrac{19}{37}$ et $\mathbf{P}(\{X_1 = a\}) = \dfrac{18}{37}$

   ⇒ Espérance et variance de X_1
   - ⋆ D'où $\mathbb{E}(X_1) = -a \times \dfrac{19}{37} + a \times \dfrac{18}{37} = \dfrac{-a}{37}$
     Ainsi, nous perdons, « *en moyenne* », $\dfrac{a}{37}$€
   - ⋆ Pour établir la variance, nous calculons $\mathbb{E}\left(X_1^2\right) = a^2 \times \dfrac{19}{37} + a^2 \times \dfrac{18}{37} = a^2$
     D'où $\sigma^2(X_1) = a^2 - \left(\dfrac{a}{37}\right)^2 = \dfrac{1369a^2 - a^2}{1369} = \dfrac{1368a^2}{1369}$

2. *Le joueur mise au hasard a Euros sur l'un des numéros de 1 à 36 ; soit X_2 son gain. Trouver la loi de X_2, puis calculer l'espérance et la variance de X_2*

   ⇒ La loi de X_2
   Si nous donnons a€ et que nous récupérons $36a$€, nous n'aurons gagné que $35a$€. Et si nous donnons a€ nous aurons perdu a€. D'où :

   $$X_2(\Omega) = \{-a; +35a\}$$

   Et nous avons $\mathbf{P}(\{X_21 = -a\}) = \dfrac{36}{37}$ et $\mathbf{P}(\{X_2 = 35a\}) = \dfrac{1}{37}$

   ⇒ Espérance et variance de X_2

- $\star$ D'où $\mathbb{E}\left(X_2\right) = -a \times \dfrac{36}{37} + 35a \times \dfrac{1}{37} = \dfrac{-a}{37}$

  Ainsi, nous perdons, « *en moyenne* », $\dfrac{a}{37}$€
- $\star$ Pour établir la variance, nous calculons $\mathbb{E}\left(X_2^2\right) = a^2 \times \dfrac{35}{37} + 1225a^2 \times \dfrac{1}{37} = \dfrac{1260a^2}{37}$

  D'où $\sigma^2\left(X_1\right) = \dfrac{1260a^2}{37} - \left(\dfrac{a}{37}\right)^2 = \dfrac{1369a^2 - a^2}{1369} = \dfrac{1\ 724\ 939a^2}{1369}$

3. *Si vous aviez a Euros à miser, le feriez vous sur un numéro ou une couleur ?*

   L'espérance de perdre est la même, mais la variance, c'est à dire la dispersion est très différente, et plus importante pour X_2.

   Donc, pour ma part, je jouerais sur les couleurs.

Exercice 36 :

Le groupe AB est présent chez 0,6% des individus.
Lors d'une collecte de sang, combien faudrait-il faire de prélèvements pour que la probabilité de trouver au moins un flacon AB soit supérieure à 0.99 ?

Supposons que nous ayions besoin de n individus pour que la probabilité d'avoir un prélèvement du groupe AB supérieure à $0,99$.
Si X est la variable aléatoire réelle qui compte le nombre d'individus du groupe AB dans le groupe des n personnes, X suit une loi binômiale $\mathcal{B}\left(n, 6 \times 10^{-3}\right)$.
Nous cherchons donc $\mathbf{P}\left(\{X \geqslant 1\}\right)$, et nous souhaitons que $\mathbf{P}\left(\{X \geqslant 1\}\right) \geqslant 0,99$.
Or, $\{X \geqslant 1\} = \overline{\{X < 1\}} = \{X = 0\}$ et donc $\mathbf{P}\left(\{X \geqslant 1\}\right) = 1 - \mathbf{P}\left(\{X = 0\}\right)$.
Comme $\mathbf{P}\left(\{X \geqslant 1\}\right) \geqslant 0,99 \Longleftrightarrow 1 - \mathbf{P}\left(\{X = 0\}\right) \geqslant 0,99 \Longleftrightarrow \mathbf{P}\left(\{X = 0\}\right) \leqslant 0,01 = 10^{-2}$
Or, $\mathbf{P}\left(\{X = 0\}\right) = \mathrm{C}_n^0 \left(6 \times 10^{-3}\right)^0 \left(1 - 6 \times 10^{-3}\right)^n = \left(1 - 6 \times 10^{-3}\right)^n$.
Nous avons :

$$\left(1 - 6 \times 10^{-3}\right)^n \leqslant 10^{-2} \Longleftrightarrow n \log\left(1 - 6 \times 10^{-3}\right) \leqslant -2 \log 10 = -2 \Longleftrightarrow n \geqslant \frac{-2}{\log 0,994} = 765,22$$

Il faut donc au moins 766 prélèvements pour que la probabilité de trouver au moins un flacon AB soit supérieure à 0,99

Exercice 37 :

La société « Le Hasard » met à la disposition de ses clients internautes un jeu en ligne dont la page d'écran affiche une grille à 4 lignes et 4 colonnes.
Après une mise initiale de 2 Euros du joueur, une fonction aléatoire place au hasard, et successivement, quatre jetons $\diamondsuit$ dans 4 cases différentes.
La partie est gagnée si les quatre jetons sont alignés et le gagnant remporte 10 fois sa mise. Dans le cas contraire, la mise initiale est perdue pour le joueur.

	A	B	C	D
1	$\diamondsuit$			
2	$\diamondsuit$	$\diamondsuit$		
3				$\diamondsuit$
4				

On définit les événements H,V, D et N suivants :
- $H = \{$*Les quatre jetons sont alignés horizontalement*$\}$
- $V = \{$*Les quatre jetons sont alignés verticalement*$\}$
- $D = \{$*Les quatre jetons sont alignés en diagonale*$\}$
- $N = \{$*Les quatre jetons ne sont pas alignés*$\}$

1. *Justifiez qu'il y a 1820 positionnements possibles des 4 jetons*

   Cette question ne pose aucune difficulté. Poser les 4 jetons $\diamondsuit$ dans 4 cases différentes, c'est faire un sous-ensemble de 4 éléments dans un ensemble de 16 éléments.
   Il y a donc $C_{16}^4 = \binom{16}{4} = 1820$ tels sous-ensembles. Il y a donc 1820 positionnements possibles des jetons.

2. *Déterminez $\mathbf{P}(H)$, $\mathbf{P}(V)$ et $\mathbf{P}(D)$*

   Cette question n'est pas bien plus difficile !!
   - $\star$ **Horizontalement,** il n'y a que 4 possibilités, et donc $\mathbf{P}(H) = \dfrac{4}{1820} = \dfrac{1}{455}$
   - $\star$ **Verticalement,** il n'y a aussi que 4 possibilités, et donc $\mathbf{P}(V) = \dfrac{4}{1820} = \dfrac{1}{455}$
   - $\star$ **En diagonale,** il n'y a plus que 2 possibilités, et donc $\mathbf{P}(D) = \dfrac{2}{1820} = \dfrac{1}{910}$

3. *En déduire $\mathbf{P}(N)$*

   Les seules possibilités d'alignement sont en diagonale, horizontalement ou verticalement. Et donc :

   $$\mathbf{P}(N) = 1 - \mathbf{P}(H) - \mathbf{P}(V) - \mathbf{P}(D) = 1 - \frac{1}{182} = \frac{181}{182}$$

4. *On appelle Z la variable aléatoire égale au* **gain de la société** *lorsqu'une grille est jouée.*

   (a) *Quelle est la loi de Z ?*

   Les valeurs prises par Z sont donc $Z(\Omega) = \{+2; -18\}$.
   Si le joueur perd, alors la société encaisse 2€ et donc $\mathbf{P}(\{Z = 2\}) = \dfrac{181}{182}$.
   Si le joueur gagne, alors la société donne au joueur 10 fois sa mise, c'est à dire 20 € ; en fait, elle ne débourse que 18 € puisqu'elle a encaissé auparavant 2 €. et donc $\mathbf{P}(\{Z = -18\}) = \dfrac{1}{182}$

   (b) *Quelle est l'espérance de gain de la société à chaque grille jouée ?*

   L'espérance de gain de la société est donnée par :

   $$\mathbb{E}(Z) = 2 \times \frac{181}{182} - 18 \times \frac{1}{182} = \frac{172}{91} \approx 1,89$$

   Heureuse société

Exercice 38 :

Soit X une variable aléatoire réelle . On suppose que X admet une espérance $\mathbb{E}(X) = m$ et une variance $\sigma^2(X) = \sigma^2$. On fixe $\alpha > 0$.

1. *Soit $\lambda \geqslant 0$. Démontrer que $\mathbf{P}(\{X - m \geqslant \alpha\}) = \mathbf{P}(\{X - m + \lambda \geqslant \alpha + \lambda\})$.*

   Pour commencer, nous considérons l'ensemble $\{X - m \geqslant \alpha\}$.
   Soit $\lambda \geqslant 0$; nous avons :

   $$\omega \in \{X - m \geqslant \alpha\} \Longleftrightarrow X(\omega) - m \geqslant \alpha \Longleftrightarrow X(\omega) - m + \lambda \geqslant \alpha + \lambda \Longleftrightarrow \omega \in \{X - m + \lambda \geqslant \alpha + \lambda\}$$

   Et nous avons donc $\{X - m \geqslant \alpha\} = \{X - m + \lambda \geqslant \alpha + \lambda\}$, d'où $\mathbf{P}(\{X - m \geqslant \alpha\}) = \mathbf{P}(\{X - m + \lambda \geqslant \alpha + \lambda\})$.

2. *Vérifier que $\mathbb{E}\left((X - m + \lambda)^2\right) = \sigma^2 + \lambda^2$.*

   Il suffit de passer aux calculs :

   $$\begin{aligned}\mathbb{E}\left((X - m + \lambda)^2\right) &= \mathbb{E}\left[(X - m)^2 + \lambda^2 + 2\lambda(X - m)\right] \\ &= \mathbb{E}\left[(X - m)^2\right] + \lambda^2 + 2\lambda\mathbb{E}(X - m)\end{aligned}$$

   Or, $\mathbb{E}\left[(X - m)^2\right] = \sigma^2$ et $\mathbb{E}(X - m) = 0$
   Donc, $\mathbb{E}\left((X - m + \lambda)^2\right) = \sigma^2 + \lambda^2$

3. *Montrer que, pour tout $\lambda > 0$, $\mathbf{P}(\{X-m \geqslant \alpha\}) \leqslant \dfrac{\sigma^2+\lambda^2}{\alpha^2+\lambda^2+2\lambda\alpha}$.*

Soit donc $\lambda > 0$.
Comme nous l'avons vu ci-dessus, $X(\omega) - m \geqslant \alpha \Longleftrightarrow X(\omega) - m + \lambda \geqslant \alpha + \lambda$.
Comme $\alpha > 0$ et $\lambda > 0$, alors $\alpha + \lambda > 0$, et donc :

$$\left\{(X-m+\lambda)^2 \geqslant (\alpha+\lambda)^2\right\} = \{X-m+\lambda \geqslant \alpha+\lambda\} = \{X-m \geqslant \alpha\}$$

Et donc, $\mathbf{P}(\{X-m \geqslant \alpha\}) = \mathbf{P}\left(\left\{(X-m+\lambda)^2 \geqslant (\alpha+\lambda)^2\right\}\right)$
En utilisant l'inégalité de Markov vue en 14.8.1, nous avons :

$$\mathbf{P}\left(\left\{(X-m+\lambda)^2 \geqslant (\alpha+\lambda)^2\right\}\right) \leqslant \frac{\mathbb{E}\left((X-m+\lambda)^2\right)}{(\alpha+\lambda)^2}$$

Or, d'après la question précédente, $\mathbb{E}\left((X-m+\lambda)^2\right) = \sigma^2+\lambda^2$ et donc

$$\mathbf{P}\left(\left\{(X-m+\lambda)^2 \geqslant (\alpha+\lambda)^2\right\}\right) \leqslant \frac{\sigma^2+\lambda^2}{(\alpha+\lambda)^2}$$

De là, nous tirons $\mathbf{P}(\{X-m \geqslant \alpha\}) \leqslant \dfrac{\sigma^2+\lambda^2}{(\alpha+\lambda)^2} = \dfrac{\sigma^2+\lambda^2}{\alpha^2+\lambda^2+2\lambda\alpha}$

Ce que nous voulions

4. *En déduire que $\mathbf{P}(\{X-m \geqslant \alpha\}) \leqslant \dfrac{\sigma^2}{\alpha^2+\sigma^2}$.*

On considère la fonction $\varphi : \mathbb{R}^{*+} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} \varphi : \mathbb{R}^{*+} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \lambda & \longmapsto & \varphi(\lambda) = \dfrac{\sigma^2+\lambda^2}{(\alpha+\lambda)^2} \end{cases}$$

Nous avons donc $\mathbf{P}(\{X-m \geqslant \alpha\}) \leqslant \varphi(\lambda)$
Nous allons étudier les variations de φ

$$\begin{aligned} \varphi'(\lambda) &= \frac{2\lambda(\alpha+\lambda)^2 - 2(\alpha+\lambda)\left(\sigma^2+\lambda^2\right)}{(\alpha+\lambda)^4} \\ &= \frac{(\alpha+\lambda)\left[2\lambda(\alpha+\lambda) - 2\left(\sigma^2+\lambda^2\right)\right]}{(\alpha+\lambda)^4} \\ &= \frac{2\lambda(\alpha+\lambda) - 2\left(\sigma^2+\lambda^2\right)}{(\alpha+\lambda)^3} \\ &= \frac{2\lambda\alpha + 2\lambda^2 - 2\sigma^2 - 2\lambda^2}{(\alpha+\lambda)^3} \\ &= \frac{2\lambda\alpha - 2\sigma^2}{(\alpha+\lambda)^3} \\ &= \frac{2\left(\lambda\alpha - \sigma^2\right)}{(\alpha+\lambda)^3} \end{aligned}$$

Donc,

$$\varphi'(\lambda) = 0 \Longleftrightarrow \lambda\alpha - \sigma^2 = 0 \Longleftrightarrow \lambda = \frac{\sigma^2}{\alpha}$$

Ainsi, si $0 \leqslant \lambda \leqslant \dfrac{\sigma^2}{\alpha}$, alors $\varphi'(\lambda) \leqslant 0$ et si $\lambda \geqslant \dfrac{\sigma^2}{\alpha}$, alors $\varphi'(\lambda) \geqslant 0$, et donc φ admet un maximum en $\lambda_0 = \dfrac{\sigma^2}{\alpha}$ et donc, pour tout $\lambda \geqslant 0$, $\varphi(\lambda) \leqslant \varphi\left(\dfrac{\sigma^2}{\alpha}\right)$.

Il faut donc, maintenant, calculer $\varphi\left(\dfrac{\sigma^2}{\alpha}\right)$.

$$\begin{aligned}
\varphi\left(\frac{\sigma^2}{\alpha}\right) &= \frac{\sigma^2+\frac{\sigma^4}{\alpha^2}}{\left(\alpha+\frac{\sigma^2}{\alpha}\right)^2}\\
&= \frac{\alpha^2\sigma^2+\sigma^4}{\left(\alpha^2+\sigma^2\right)^2}\\
&= \frac{\sigma^2\left(\alpha^2+\sigma^2\right)}{\left(\alpha^2+\sigma^2\right)^2}\\
&= \frac{\sigma^2}{\alpha^2+\sigma^2}
\end{aligned}$$

Ainsi, nous avons $\mathbf{P}\left(\{X-m \geqslant \alpha\}\right) \leqslant \varphi(\lambda) \leqslant \dfrac{\sigma^2}{\alpha^2+\sigma^2}$

Nous avons bien $\mathbf{P}\left(\{X-m \geqslant \alpha\}\right) \leqslant \dfrac{\sigma^2}{\alpha^2+\sigma^2}$.

5. *Démontrer que $\mathbf{P}\left(\{|X-m| \geqslant \alpha\}\right) \leqslant \dfrac{2\sigma^2}{\alpha^2+\sigma^2}$. Quand obtient-on une meilleure inégalité que l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev ?*

   Nous avons $\{|X-m| \geqslant \alpha\} = \{X-m \geqslant \alpha\} \cup \{m-X \geqslant \alpha\}$ et donc

$$\mathbf{P}\left(\{|X-m| \geqslant \alpha\}\right) = \mathbf{P}\left(\{X-m \geqslant \alpha\}\right) + \mathbf{P}\left(\{m-X \geqslant \alpha\}\right)$$

   Nous avons $\mathbf{P}\left(\{X-m \geqslant \alpha\}\right) \leqslant \dfrac{\sigma^2}{\alpha^2+\sigma^2}$ et $\mathbf{P}\left(\{m-X \geqslant \alpha\}\right) \leqslant \dfrac{\sigma^2}{\alpha^2+\sigma^2}$ et donc

$$\mathbf{P}\left(\{|X-m| \geqslant \alpha\}\right) \leqslant \frac{2\sigma^2}{\alpha^2+\sigma^2}$$

   Quand obtient-on une meilleure inégalité que l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev ?

   Cette inégalité est meilleure que l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev si $\dfrac{2\sigma^2}{\alpha^2+\sigma^2} \leqslant \dfrac{\sigma^2}{\alpha^2}$. Or :

$$\begin{aligned}
\frac{2\sigma^2}{\alpha^2+\sigma^2} \leqslant \frac{\sigma^2}{\alpha^2} &\iff 2\sigma^2\alpha^2 \leqslant \sigma^2\left(\alpha^2+\sigma^2\right)\\
&\iff 2\sigma^2\alpha^2 \leqslant \sigma^2\alpha^2+\sigma^4\\
&\iff \sigma^2\alpha^2 \leqslant \sigma^4\\
&\iff \alpha^2 \leqslant \sigma^2\\
&\iff \alpha \leqslant \sigma
\end{aligned}$$

   Nous obtenons donc une meilleure inégalité lorsque $\alpha \leqslant \sigma$

Exercice 39 :

1. *On lance une piece jusqu'à ce que « pile »* ***apparaisse une seconde fois****. p est la probabilité d'apparition de « pile ». On suppose l'indépendance de tous les lancers. Soit X le nombre de lancers nécessaires.*
   Démontrez que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}\left(\{X=n\}\right) = (n-1)\,p^2\,(1-p)^{n-2}$

   Pour commencer, nous avons $X(\Omega) = \mathbb{N} \setminus \{0;1\}$.
   L'événement $\{X=n\}$ veut dire que la seconde apparition de « *pile* » se trouve au n-ième lancer, et donc que le premier lancer se trouve dans les $(n-1)$ premiers lancers ; il y a donc $(n-1)$ façons de placer le premier « *pile* » avant le second. Nous avons donc :

$$\mathbf{P}\left(\{X=n\}\right) = (n-1)\,p \times (1-p)^{n-1} \times p = (n-1)\,p^2\,(1-p)^{n-1}$$

2. *On lance une piece jusqu'à ce que « pile » **apparaisse** k **fois**. p est la probabilité d'apparition de « pile ». On suppose l'indépendance de tous les lancers. Soit X le nombre de lancers nécessaires pour que « pile » apparaisse k fois.*
Démontrez que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}(\{X = n\}) = \mathrm{C}_{n-1}^{k-1} p^k (1-p)^{n-k}$

   Soit X, la variable aléatoire réelle qui donne le nombre de lancers nécessaires pour obtenir k « *pile* ».
   Le raisonnement est semblable à celui que nous venons de tenir. Il faut donc placer $(k-1)$ « *pile* » dans $(n-1)$ premiers tirages. Il y a donc $\mathrm{C}_{n-1}^{k-1} = \binom{n-1}{k-1}$ façons de placer ces $(k-1)$ « *pile* », et donc :

$$\mathbf{P}(\{X = n\}) = \mathrm{C}_{n-1}^{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-1-(k-1)} \times p = \mathrm{C}_{n-1}^{k-1} p^k (1-p)^{n-k} = \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k}$$

Exercice 40 :

1. *Soit X, une variable aléatoire réelle à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que*

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \left(\mathbf{P}(\{X = n\}) = \frac{4}{n} \mathbf{P}(\{X = n-1\}) \right)$$

   Quelle est la loi de X ? Donner alors son espérance et sa variance.

   Nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\{X = 1\}) &= 4\mathbf{P}(\{X = 0\}) \\ \mathbf{P}(\{X = 2\}) &= \frac{4}{2}\mathbf{P}(\{X = 1\}) \\ \mathbf{P}(\{X = 3\}) &= \frac{4}{3}\mathbf{P}(\{X = 2\}) \\ \mathbf{P}(\{X = 4\}) &= \frac{4}{4}\mathbf{P}(\{X = 3\}) \\ &\vdots \\ \mathbf{P}(\{X = n-1\}) &= \frac{4}{n-1}\mathbf{P}(\{X = n-2\}) \\ \mathbf{P}(\{X = n\}) &= \frac{4}{n}\mathbf{P}(\{X = n-1\}) \end{aligned}$$

   En multipliant termes à termes, et en simplifiant, nous obtenons :

$$\mathbf{P}(\{X = n\}) = \frac{4^n}{n!} \mathbf{P}(\{X = 0\})$$

   Maintenant, il faut que $\sum_{n \geqslant 0} \mathbf{P}(\{X = n\}) = 1$. Or :

$$\sum_{n \geqslant 0} \mathbf{P}(\{X = n\}) = \sum_{n \geqslant 0} \frac{4^n}{n!} \mathbf{P}(\{X = 0\}) = \mathbf{P}(\{X = 0\}) \sum_{n \geqslant 0} \frac{4^n}{n!} = \mathbf{P}(\{X = 0\}) e^4$$

   Ainsi, $\sum_{n \geqslant 0} \mathbf{P}(\{X = n\}) = 1 \Longleftrightarrow \mathbf{P}(\{X = 0\}) e^4 = 1 \Longleftrightarrow \mathbf{P}(\{X = 0\}) = e^{-4}$

   D'où $\mathbf{P}(\{X = n\}) = \dfrac{4^n e^{-4}}{n!}$.
   X suit donc une loi de Poisson de paramètre 4. Nous avons donc $\mathbb{E}(X) = \sigma^2(X) = 4$

2. *Soit X, une variable aléatoire réelle à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. Déterminer la loi de X sachant que*

$$(\exists p \in]0; +1[) (\forall n \in \mathbb{N}^*) (\mathbf{P}(\{X = n\}) = p\mathbf{P}(\{X \geqslant n\}))$$

   Nous allons résoudre cette question en tatonnant, pour terminer par un raisonnement par récurrence

⇒ Bien entendu que nous avons $\mathbf{P}(\{X \geqslant 0\}) = 1$ et que, comme $\mathbf{P}(\{X = 0\}) = p\mathbf{P}(\{X \geqslant 0\})$, nous avons $\mathbf{P}(\{X = 0\}) = p$

⇒ Regardons, maintenant $\mathbf{P}(\{X = 1\})$.
Nous avons $\mathbf{P}(\{X = 1\}) = p\mathbf{P}(\{X \geqslant 1\})$. Bon, une fois ceci posé, cela ne nous avance pas !!...Cependant :

$$\{X \geqslant 0\} = \{X = 0\} \cup \{X \geqslant 1\}$$

Et donc $1 = \mathbf{P}(\{X = 0\}) + \mathbf{P}(\{X \geqslant 1\}) \Longleftrightarrow \mathbf{P}(\{X \geqslant 1\}) = 1 - p$, et donc

$$\mathbf{P}(\{X = 1\}) = p(1-p)$$

⇒ Allons plus loin, maintenant en nous intéressant à $\mathbf{P}(\{X = 2\})$
Nous avons $\{X \geqslant 0\} = \{X = 0\} \cup \{X = 1\} \cup \{X \geqslant 2\}$ et donc

$$\mathbf{P}(\{X \geqslant 0\}) = \mathbf{P}(\{X = 0\}) + \mathbf{P}(\{X = 1\}) + \mathbf{P}(\{X \geqslant 2\}) \Longleftrightarrow \mathbf{P}(\{X \geqslant 2\}) = 1 - p - p(1-p) = (1-p)^2$$

Et donc $\mathbf{P}(\{X = 2\}) = p(1-p)^2$

Nous allons donc démontrer, par récurrence, que $\mathbf{P}(\{X \geqslant n\}) = (1-p)^n$ et donc que $\mathbf{P}(\{X = n\}) = p(1-p)^n$

⋆ C'est vrai pour $n = 0$, puisque $\mathbf{P}(\{X \geqslant 0\}) = 1 = (1-p)^0$

⋆ Supposons que $\mathbf{P}(\{X \geqslant n\}) = (1-p)^n$

⋆ Démontrons, à l'ordre $n+1$ que $\mathbf{P}(\{X \geqslant n+1\}) = (1-p)^{n+1}$
Nous avons $\{X \geqslant n\} = \{X = n\} \cup \{X \geqslant n+1\}$, et donc

$$\begin{gathered} \mathbf{P}(\{X \geqslant n\}) = \mathbf{P}(\{X = n\}) + \mathbf{P}(\{X \geqslant n+1\}) \\ \Longleftrightarrow \\ \mathbf{P}(\{X \geqslant n+1\}) = \mathbf{P}(\{X \geqslant n\}) - \mathbf{P}(\{X = n\}) \\ \Longleftrightarrow \\ \mathbf{P}(\{X \geqslant n+1\}) = (1-p)^n - p(1-p)^n \\ \Longleftrightarrow \\ \mathbf{P}(\{X \geqslant n+1\}) = (1-p)^{n+1} \end{gathered}$$

Nous avons donc $\mathbf{P}(\{X \geqslant n+1\}) = (1-p)^{n+1}$ et donc $\mathbf{P}(\{X = n+1\}) = p(1-p)^{n+1}$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons $\mathbf{P}(\{X = n\}) = p(1-p)^n$. X est donc une variable aléatoire réelle qui suit une loi géométrique de paramètre p

Exercice 41 :

Soit X, une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ.
Utiliser l'inégalité de Bienaymé Tchebichev pour montrer que

$$\mathbf{P}\left(\left\{X \leqslant \frac{\lambda}{2}\right\}\right) \leqslant \frac{4}{\lambda} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{P}(\{X \geqslant 2\lambda\}) \leqslant \frac{1}{\lambda}$$

Si nous y réfléchissons bien, ce n'est pas un exercice qui pose tant de difficultés.

⇒ **Faisons des considérations générales**
Retour à 14.8.3 ; l'inégalité de Bienaymé Tchebichev s'écrit :

$$\mathbf{P}(\{|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant \varepsilon\}) \leqslant \frac{\sigma^2(X)}{\varepsilon^2}$$

Regardons de plus près l'ensemble $\{|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant \varepsilon\}$. Nous avons :

$$\begin{aligned} \{|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant \varepsilon\} &= \{X - \mathbb{E}(X) \geqslant \varepsilon\} \cup \{X - \mathbb{E}(X) \leqslant -\varepsilon\} \\ &= \{X \geqslant \varepsilon + \mathbb{E}(X)\} \cup \{X \leqslant \mathbb{E}(X) - \varepsilon\} \end{aligned}$$

De là, nous tirons

$$\mathbf{P}(\{X \geqslant \varepsilon + \mathbb{E}(X)\}) \leqslant \mathbf{P}(\{|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant \varepsilon\}) \leqslant \frac{\sigma^2(X)}{\varepsilon^2}$$

et

$$\mathbf{P}\left(\{X \leqslant \mathbb{E}(X) - \varepsilon\}\right) \leqslant \mathbf{P}\left(\{|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant \varepsilon\}\right) \leqslant \frac{\sigma^2(X)}{\varepsilon^2}$$

⇒ **Revenons, maintenant, à l'énoncé initial**

X étant une variable aléatoire réelle de Poisson, nous avons $\mathbb{E}(X) = \sigma^2(X) = \lambda$ et l'inégalité de Bienaymé Tchebichev s'écrit alors :

$$\mathbf{P}\left(\{|X - \lambda| \geqslant \varepsilon\}\right) \leqslant \frac{\lambda^2}{\varepsilon^2}$$

Et en reprenant ce qui aété vu ci-dessus, nous avons

$$\mathbf{P}\left(\{|X - \lambda| \geqslant \lambda\}\right) \leqslant \frac{\lambda^2}{\varepsilon^2}$$

⋆ Pour $\varepsilon = \lambda$,

$$\mathbf{P}\left(\{X \geqslant \lambda + \lambda\}\right) \leqslant \frac{\lambda}{\lambda^2} \Longleftrightarrow \mathbf{P}\left(\{X \geqslant 2\lambda\}\right) \leqslant \frac{1}{\lambda}$$

Et une première inégalité de démontrée

⋆ Maintenant, pour $\varepsilon = \dfrac{\lambda}{2}$, nous avons :

$$\mathbf{P}\left(\left\{X \leqslant \lambda - \frac{\lambda}{2}\right\}\right) \leqslant \frac{4\lambda}{\lambda^2} \Longleftrightarrow \mathbf{P}\left(\left\{X \leqslant \frac{\lambda}{2}\right\}\right) \leqslant \frac{4}{\lambda}$$

Et la seconde inégalité est ainsi démontrée

Les 2 inégalités demandées sont donc démontrées.

Exercice 42 :

Soit N, une variable aléatoire réelle qui suit une loi de Poisson de paramètre λ avec $\lambda > 0$. Calculer $\mathbb{E}\left(\dfrac{1}{N+1}\right)$

Soit $\varphi : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ par $\varphi(x) = \dfrac{1}{x+1}$ et alors $\mathbb{E}\left(\dfrac{1}{N+1}\right) = \mathbb{E}(\varphi \circ N)$. Or :

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{N+1}\right) = \mathbb{E}(\varphi \circ N) = \sum_{n \geqslant 0} \varphi(n)\, \mathbf{P}\left(\{X = n\}\right)$$

Et maintenant, mettons nous aux calculs!!

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\varphi \circ N) = \sum_{n \geqslant 0} \varphi(n)\, \mathbf{P}\left(\{X = n\}\right) = & \sum_{n \geqslant 0} \frac{1}{n+1} \times \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} \\
= & \; e^{-\lambda} \sum_{n \geqslant 0} \frac{\lambda^n}{(n+1)!} \\
= & \; e^{-\lambda} \times \frac{1}{\lambda} \sum_{n \geqslant 0} \frac{\lambda^{n+1}}{(n+1)!} \\
= & \; \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} \sum_{n \geqslant 1} \frac{\lambda^n}{n!} \\
= & \; \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} \left(\sum_{n \geqslant 0} \frac{\lambda^n}{n!} - 1 \right) \\
= & \; \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} \left(e^{\lambda} - 1\right) \\
= & \; \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda}
\end{aligned}$$

D'où $\mathbb{E}\left(\dfrac{1}{N+1}\right) = \dfrac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda}$

Exercice 43 :

Soit X une variable aléatoire réelle discrète définie sur un espace probabilisé $\{\Omega; \mathcal{F}; \mathbf{P}\}$. On suppose que pour tout réel $t \geqslant 0$, la variable aléatoire réelle e^{-tX} possède une espérance. Démontrer que :

$$(\forall t \geqslant 0)\ \left(\mathbf{P}\left(\{X \leqslant 0\}\right) \leqslant \mathbb{E}\left(e^{-tX}\right)\right)$$

Exercice, certes un peu subtil, qui nécessite une certaine attention, mais, finalement, pas très difficile.
Si nous appelons $\varphi(x) = e^{-tx}$, où t est un paramètre positif ($t \geqslant 0$), nous avons $\mathbb{E}\left(e^{-tX}\right) = \mathbb{E}(\varphi \circ X)$.
Nous avons donc :

$$\mathbb{E}\left(e^{-tX}\right) = \sum_{x_n \in X(\Omega)} e^{-tx_n} \mathbf{P}\left(\{X = x_n\}\right)$$

Or :

$$\sum_{x_n \in X(\Omega)} e^{-tx_n} \mathbf{P}\left(\{X = x_n\}\right) = \sum_{\substack{x_n \in X(\Omega) \\ x_n \leqslant 0}} e^{-tx_n} \mathbf{P}\left(\{X = x_n\}\right) + \sum_{\substack{x_n \in X(\Omega) \\ x_n > 0}} e^{-tx_n} \mathbf{P}\left(\{X = x_n\}\right)$$

De là, nous tirons $\mathbb{E}\left(e^{-tX}\right) \geqslant \displaystyle\sum_{\substack{x_n \in X(\Omega) \\ x_n \leqslant 0}} e^{-tx_n} \mathbf{P}\left(\{X = x_n\}\right)$

Si $t \geqslant 0$ et $x_n \leqslant 0$, alors $-tx_n \geqslant 0$ et $e^{-tx_n} \geqslant 1$. D'où $e^{-tx_n} \mathbf{P}\left(\{X = x_n\}\right) \geqslant \mathbf{P}\left(\{X = x_n\}\right)$ et, donc

$$\mathbb{E}\left(e^{-tX}\right) \geqslant \sum_{\substack{x_n \in X(\Omega) \\ x_n \leqslant 0}} \mathbf{P}\left(\{X = x_n\}\right)$$

Pour terminer, $\displaystyle\sum_{\substack{x_n \in X(\Omega) \\ x_n \leqslant 0}} \mathbf{P}\left(\{X = x_n\}\right) = \mathbf{P}\left(\{X \leqslant 0\}\right)$

D'où nous obtenons l'inégalité $\mathbf{P}\left(\{X \leqslant 0\}\right) \leqslant \mathbb{E}\left(e^{-tX}\right)$.
Ce que nous voulions

Exercice 44 :

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $\{\Omega; \mathcal{F}; \mathbf{P}\}$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$

1. *Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}\left(\{X > k\}\right) = \sum_{k=1}^{n} k\mathbf{P}\left(\{X = k\}\right) + (n+1)\mathbf{P}\left(\{X > n\}\right)$

   Alors, que dire ? ? De manière générale, pour $k \in \mathbb{N}$ avec $0 \leqslant k \leqslant n$, nous avons $\{X > k\} = \{X = k+1\} \cup \{X = k+2\} \cup \cdots \cup \{X = n\} \cup \{X \geqslant n+1\}$. De là, nous écrivons :

$$\left\{\begin{array}{rcccccc}
\mathbf{P}\left(\{X > 0\}\right) = & \mathbf{P}\left(\{X = 1\}\right) + & \mathbf{P}\left(\{X = 2\}\right) + & \cdots + & \mathbf{P}\left(\{X = n\}\right) + & \mathbf{P}\left(\{X \geqslant n+1\}\right) & \\
\mathbf{P}\left(\{X > 1\}\right) = & & \mathbf{P}\left(\{X = 2\}\right) + & \cdots + & \mathbf{P}\left(\{X = n\}\right) + & \mathbf{P}\left(\{X \geqslant n+1\}\right) & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots\ \ \vdots & & \vdots & \vdots \\
\mathbf{P}\left(\{X > n-1\}\right) = & & & & \mathbf{P}\left(\{X = n\}\right) + & \mathbf{P}\left(\{X \geqslant n+1\}\right) & \\
\mathbf{P}\left(\{X > n\}\right) = & & & & & \mathbf{P}\left(\{X \geqslant n+1\}\right) &
\end{array}\right.$$

   Et donc, en additionnant, nous obtenons :

$$\sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}\left(\{X > k\}\right) = \mathbf{P}\left(\{X = 1\}\right) + 2\mathbf{P}\left(\{X = 2\}\right) + 3\mathbf{P}\left(\{X = 3\}\right) + \cdots + n\mathbf{P}\left(\{X = n\}\right) + (n+1)\mathbf{P}\left(\{X \geqslant n+1\}\right)$$

   C'est à dire $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}\left(\{X > k\}\right) = \sum_{k=1}^{n} k\mathbf{P}\left(\{X = k\}\right) + (n+1)\mathbf{P}\left(\{X > n\}\right)$

2. *On suppose que la série* $\sum\limits_{k\geqslant 0} \mathbf{P}(\{X > k\})$ *converge.*

   (a) *Démontrer que, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{k=1}^{n} k\mathbf{P}(\{X = k\}) \leqslant \sum\limits_{k\geqslant 0} \mathbf{P}(\{X > k\})$

   Dans la question précédente, nous avons montré que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avions

   $$\sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}(\{X > k\}) = \sum_{k=1}^{n} k\mathbf{P}(\{X = k\}) + (n+1)\mathbf{P}(\{X > n\})$$

   d'où nous pouvons déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$

   $$\sum_{k=1}^{n} k\mathbf{P}(\{X = k\}) \leqslant \sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}(\{X > k\})$$

   La série $\sum\limits_{k\geqslant 0} \mathbf{P}(\{X > k\})$ est une série à termes positifs et convergente. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons :

   $$\sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}(\{X > k\}) \leqslant \sum_{k\geqslant 0} \mathbf{P}(\{X > k\})$$

   Ainsi, nous avons l'inégalité, vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{k=1}^{n} k\mathbf{P}(\{X = k\}) \leqslant \sum\limits_{k\geqslant 0} \mathbf{P}(\{X > k\})$

   (b) *En déduire que la variable aléatoire réelle* X *admet une espérance.*

   La variable aléatoire réelle X admet une espérance, si et seulement si la série $\sum\limits_{k\geqslant 1} k\mathbf{P}(\{X = k\})$ est convergente.

   Or la suite des sommes partielles $\sum\limits_{k=1}^{n} k\mathbf{P}(\{X = k\})$ est une suite à termes positifs, croissante et majorée par $\sum\limits_{k\geqslant 0} \mathbf{P}(\{X > k\})$ donc convergente.

   Donc $\mathbb{E}(X)$ existe

3. *On suppose, maintenant, que la variable aléatoire réelle* X *admet une espérance.*

   (a) *Montrer que pour tout* $n \geqslant 1$ *nous avons* $(n+1)\mathbf{P}(\{X > n\}) \leqslant \sum\limits_{k\geqslant n+1} k\mathbf{P}(\{X = k\})$

   Nous avons $\{X > n\} = \{X \geqslant n+1\} = \bigcup\limits_{k\geqslant n+1} \{X = k\}$ et donc $\mathbf{P}(\{X > n\}) = \sum\limits_{k\geqslant n+1} \mathbf{P}(\{X = k\})$

   Et donc, puisque $n+1 \leqslant k$:

   $$\begin{aligned} (n+1)\mathbf{P}(\{X > n\}) = &\ (n+1)\left(\sum_{k\geqslant n+1} \mathbf{P}(\{X = k\})\right) \\ = &\ \sum_{k\geqslant n+1} (n+1)\mathbf{P}(\{X = k\}) \leqslant \sum_{k\geqslant n+1} k\mathbf{P}(\{X = k\}) \end{aligned}$$

   (b) *En déduire que la série* $\sum\limits_{k\geqslant 0} \mathbf{P}(\{X > k\})$ *est convergente et que* $\mathbb{E}(X) = \sum\limits_{k\geqslant 0} \mathbf{P}(\{X > k\})$

   Comme $\mathbb{E}(X)$ existe, la série $\sum\limits_{k\geqslant 1} k\mathbf{P}(\{X = k\})$ est convergente et $\mathbb{E}(X) = \sum\limits_{k\geqslant 1} k\mathbf{P}(\{X = k\})$

L'expression $\sum_{k\geqslant n+1} k\mathbf{P}(\{X=k\})$ apparaît comme le reste de la série $\sum_{k\geqslant 1} k\mathbf{P}(\{X=k\})$ et donc $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k\geqslant n+1} k\mathbf{P}(\{X=k\}) = 0$

Comme nous venons de montrer que $(n+1)\mathbf{P}(\{X>n\}) \leqslant \sum_{k\geqslant n+1} k\mathbf{P}(\{X=k\})$, nous avons aussi $\lim_{n\to+\infty} (n+1)\mathbf{P}(\{X>n\}) = 0$

Dans la question 1, nous avions :

$$\sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}(\{X>k\}) = \sum_{k=1}^{n} k\mathbf{P}(\{X=k\}) + (n+1)\mathbf{P}(\{X>n\})$$

Et en passant aux limites

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}(\{X>k\})\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} k\mathbf{P}(\{X=k\})\right) + \lim_{n\to+\infty}\left((n+1)\mathbf{P}(\{X>n\})\right)$$

C'est à dire $\sum_{k\geqslant 0} \mathbf{P}(\{X>k\}) = \mathbb{E}(X)$

Ce que nous voulions