14.3 Variables aléatoires discrètes

14.3.1 Définition

Soit $\{\Omega; \mathcal{F}\}$ un espace probabilisable et $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, une variable aléatoire réelle
On dit que X est une variable aléatoire réelle discrète si $X(\Omega)$ est un ensemble discret, c'est à dire si $X(\Omega)$ est l'ensemble des éléments d'une suite.
Autrement dit : $X(\Omega) = \left\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right\}$

Remarque 6 :

En fait, une variable aléatoire réelle X est discrète si :

1. $X(\Omega)$ est un ensemble fini, c'est à dire si $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ où $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n$, c'est à dire que les données sont rangées par ordre croissant : $x_i \leqslant x_{i+1}$
2. $X(\Omega)$ est un ensemble formé d'une suite strictement croissante $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ où $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n \leqslant \ldots$, c'est à dire que les données sont rangées par ordre croissant : $x_i \leqslant x_{i+1}$

Exemple 4 :

Exemples de variables aléatoires réelles discrètes

1. Dans le cas du lancer de deux dés, la variable aléatoire réelle S est une variable aléatoire réelle discrète, à valeurs dans $F = \{2, 3, \cdots, 11, 12\}$
2. Dans un jeu de 32 cartes, une « **main** » est un sous-ensemble de 8 cartes. X désigne le nombre d'as dans chaque main. X est une variable aléatoire réelle discrète à valeurs dans $\{0, 1, 2, 3, 4\}$

14.3.2 Proposition

Soit $\{\Omega; \mathcal{F}\}$ un espace probabilisable et $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, une application quelconque. On suppose que $X(\Omega)$ est discret

1. X est une variable aléatoire si et seulement si pour tout $x \in X(\Omega)$, $X^{-1}(\{x\}) \in \mathcal{F}$
2. **Notation :** pour $x \in \mathbb{R}$, on note $\{X = x\} = X^{-1}(\{x\}) = \{\omega \in \Omega \text{ tel que } X(\omega) = x\}$

Démonstration

On pose $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$

1. **On suppose X variable aléatoire**
   Pour $x_n \in X(\Omega)$, soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $x_{n-1} < a < x_n < b < x_{n+1}$;
   Alors, $\{x_n\} = [a; x_n] \cap [x_n; b]$, et, d'après les propriétés revues dans la proposition 14.2.1
   $$X^{-1}(\{x_n\}) = X^{-1}([a; x_n] \cap [x_n; b]) = X^{-1}([a; x_n]) \cap X^{-1}([x_n; b])$$
   Donc, comme X est une variable aléatoire réelle , et d'après les propriétés de variable aléatoire réelle vues en 14.2.3 $X^{-1}\{x_n\} = \{X = x_n\} \in \mathcal{F}$
2. **On suppose que pour tout $x \in X(\Omega)$, $X^{-1}\{x\} \in \mathcal{F}$**
   Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$; nous allons montrer que $X^{-1}(I) \in \mathcal{F}$
   (a) Nous avons : $X^{-1}(I) = X^{-1}(I \cap X(\Omega))$
   Démontrons le
   i. Soit $\omega \in X^{-1}(I)$, alors $X(\omega) \in I$, et, évidemment, $X(\omega) \in X(\Omega)$ si bien que $X(\omega) \in I \cap X(\Omega)$
   Donc $\omega \in X^{-1}(I \cap X(\Omega))$; d'où $X^{-1}(I) \subset X^{-1}(I \cap X(\Omega))$
   ii. Soit $\omega \in X^{-1}(I \cap X(\Omega))$, alors $X(\omega) \in I \cap X(\Omega)$; en particulier $X(\omega) \in I$, et donc $\omega \in X^{-1}(I)$
   On a donc $X^{-1}(I \cap X(\Omega)) \subset X^{-1}(I)$

Nous en concluons que $X^{-1}(I) = X^{-1}(I \cap X(\Omega))$

(b) Comme, par hypothèse, $X(\Omega)$ est dénombrable, $I \cap X(\Omega)$ l'est aussi [1]

On peut donc écrire $I \cap X(\Omega) = \bigcup\limits_{k \in K} \{x_k\}$ où $K \subset \mathbb{N}$

Donc, $X^{-1}(I \cap X(\Omega)) = X^{-1}\left(\bigcup\limits_{k \in K} \{x_k\}\right) = \bigcup\limits_{k \in K} X^{-1}(\{x_k\})$

D'après l'hypothèse, $X^{-1}\{x\} \in \mathcal{F}$, donc, $X^{-1}(I \cap X(\Omega)) \in \mathcal{F}$, c'est à dire $X^{-1}(I) \in \mathcal{F}$

Remarque 7 :

Nous avons aussi : $\{X = x\} = \{X \geqslant x\} \cap \{X \leqslant x\}$

Exemple 5 :

Exercice résolu

Soit $\{\Omega; \mathcal{F}\}$ un espace probabilisable. On a admis que si $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, $Y : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ sont deux variables aléatoires réelles alors $X + Y$ est une variable aléatoire réelle

Montrer ce résultat dans le cas où X et Y sont à valeurs entières, c'est à dire dans le cas où $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}$.

Démonstration

Soit donc $X : \Omega \to \mathbb{N}$ et $Y : \Omega \to \mathbb{N}$ deux variables aléatoires.

Soit $k \in \mathbb{N}$, et on va démontrer que l'événement $\{X + Y = k\} \in \mathcal{F}$

Nous avons : $\{X + Y = k\} = \bigcup\limits_{p=0}^{k} (\{X = p\} \cap \{Y = k - p\})$;

Des propriétés de variables aléatoires, nous avons : $\{X = p\} \in \mathcal{F}$ et $\{Y = k - p\} \in \mathcal{F}$; des propriétés de tribu de $\mathcal{F}$, on en déduit que $\{X = p\} \cap \{Y = k - p\} \in \mathcal{F}$, puis que $\bigcup\limits_{p=0}^{k} (\{X = p\} \cap \{Y = k - p\}) \in \mathcal{F}$.

En conclusion, nous avons bien $\{X + Y = k\} \in \mathcal{F}$, c'est à dire que $X + Y$ est une variable aléatoire réelle

Exercice 1 :

Soient X et Y 2 variables aléatoires discrètes telles que : $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}$

Montrer que $Z = \sup(X, Y)$ est une variable aléatoire réelle

14.3.3 Loi d'une variable aléatoire réelle discrète

Soit $\{\Omega; \mathcal{F}; \mathbf{P}\}$ un espace probabilisé et $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, une variable aléatoire réelle discrète

La loi de probabilité de X est définie par :

1. Des valeurs prises par X, c'est à dire $X(\Omega)$
2. La suite de nombres $(\mathbf{P}(\{X = x_n\}))_{n \in \mathbb{N}}$

14.3.4 Proposition

Soit $\{\Omega; \mathcal{F}; \mathbf{P}\}$ un espace probabilisé et $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, une variable aléatoire réelle discrète.

Alors, $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{P}(\{X = x_n\}) = 1$

1. Si I est un intervalle borné, $I \cap X(\Omega)$ est un ensemble fini

Démonstration

Supposons que $X(\Omega) = \{x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots\}$ avec $x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_n \cdots$, nous avons $X(\Omega) = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \{x_n\}$ et donc :

$$\nu(X(\Omega)) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \{X = x_n\}\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \mathbf{P}(\{X = x_n\})$$

Comme $\nu(X(\Omega)) = 1$, nous avons $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \mathbf{P}(\{X = x_n\}) = 1$

Remarque 8 :

1. Si X est une variable aléatoire discrète, la loi de X est donnée et entièrement déterminée par la donnée, pour tout $x \in X(\Omega)$ de $\nu(\{x\}) = \mathbf{P}(\{X = x\})$
   Et nous devons avoir : $\sum\limits_{x\in X(\Omega)} \mathbf{P}(\{X = x\}) = 1$
2. Lorsque $X(\Omega) = \mathbb{N}$, nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{P}(\{X = n\}) = 0$ puisque la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{P}(\{X = n\})$ est convergente, et que nous avons même $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{P}(\{X = n\}) = 1$

Exemple 6 :

Exercice résolu
On reprend l'exemple de l'introduction, et nous cherchons la loi de S.
S est la somme amenée par les deux dés, c'est à dire qu'à chaque couple $(i, j) \in \Omega$, on fait correspondre $S[(i, j)] = i + j$.
Nous cherchons donc à préciser la loi de S

1. **Un élément de la loi de S est $S(\Omega)$**
   Nous avons, évidemment, $S(\Omega) = \{2, 3, \ldots, 12\}$.
2. **Un second élément de la loi de S est $\nu(\{k\}) = \mathbf{P}(\{S = k\})$**
   Il faut donc rechercher $\nu(\{k\}) = \mathbf{P}(\{S = k\})$, pour $k = 2, 3, \ldots, 12$

   Par exemple : $\nu(\{2\}) = \mathbf{P}(\{S = 2\}) = \mathbf{P}\left(S^{-1}(\{2\})\right) = \mathbf{P}(\{(1, 1)\}) = \dfrac{1}{36}$

   De même, $\nu(\{4\}) = \mathbf{P}(\{S = 4\}) = \mathbf{P}\left(S^{-1}(\{4\})\right) = \mathbf{P}(\{(1, 3), (3, 1), (2, 2)\}) = \dfrac{3}{36} = \dfrac{1}{12}$.

   <u>**On construit ainsi le tableau :**</u>

$\nu(\{2\})$	$\nu(\{3\})$	$\nu(\{4\})$	$\nu(\{5\})$	$\nu(\{6\})$	$\nu(\{7\})$
$\mathbf{P}(\{S = 2\})$		$\mathbf{P}(\{S = 4\})$			
$\dfrac{1}{36}$		$\dfrac{1}{12}$			

$\nu(\{8\})$	$\nu(\{9\})$	$\nu(\{10\})$	$\nu(\{11\})$	$\nu(\{12\})$

   Complétez le !

Exercice 2 :

Soit X une variable aléatoire discrète dont les valeurs possibles sont 0, 1, 2, 3 et 4.

1. Dire laquelle parmi ces distributions de masse correspond à une loi de probabilité :

	x	0	1	2	3	4
a)	$\mathbf{P}[X = x]$	0.3	0.2	0.1	0.05	0.05
b)	$\mathbf{P}[X = x]$	0.4	0.1	0.1	0.1	0.3
c)	$\mathbf{P}[X = x]$	0.4	0.1	0.2	0.1	0.3

2. Pour la loi de probabilité retenue en 1), calculer $\mathbf{P}[2 \leqslant X \leqslant 4]$ et $\mathbf{P}[X \neq 0]$.
3. Si $\mathbf{P}[X = x] = 5(k - x)$ pour $x = 0; 1, \ldots 4$, y a-t-il des valeurs de k qui permettent de définir $\mathbf{P}[X = x]$ comme une distribution de probabilités *(ou loi de probabilité)* ?

Exercice 3 :

Dans un jeu de 32 cartes, on tire au hasard 4 cartes, et simultanément. On appelle X l'application qui à chaque tirage associe le nombre de cœurs qu'il contient.
Définir un espace de probabilité tel que X soit une variable aléatoire réelle , et étudier la loi de probabilité de X

Exercice 4 :

Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n. On tire simultanément trois jetons de cette urne.
Soit X l'application qui à un tirage associe le plus grand des trois nombres figurant sur les jetons tirés.
Définir un espace de probabilité tel que X soit une variable aléatoire réelle , et étudier la loi de probabilité de X

Exercice 5 :

Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les réels $p_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$ peuvent être les coefficients d'une loi de probabilité.