14.4 Variables aléatoires discrètes classiques

14.4.1 Loi uniforme

Soit $\{\Omega ; \mathcal{F} ; \mathbf{P}\}$ un espace probabilisé et $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, une variable aléatoire réelle .
On dit que X, suit une loi uniforme si $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ et $\mathbf{P}(\{X = x_k\}) = \dfrac{1}{n}$

Remarque 9 :

1. Dans ce cas de loi uniforme, X est une variable aléatoire réelle discrète, finie.
2. Nous avons $\text{Card } X(\Omega) = n$ et pour tout $x \in X(\Omega)$, $\mathbf{P}(\{X = x\}) = \dfrac{1}{\text{Card } X(\Omega)}$
3. Un exemple classique de cette loi uniforme est la situation suivante :
   On considère une urne $\mathcal{U}$ qui contient n boules numérotées de 1 à n. On tire une boule au hasard de cette urne et X désigne le numéro de la boule tirée. Bien entendu :

   ⋆ $X(\Omega) = \{1, 2, 3, \cdots, n\}$ ⋆ Et $\mathbf{P}(\{X = k\}) = \dfrac{1}{n}$

14.4.2 Loi de Bernouilli

Soit $\{\Omega ; \mathcal{F} ; \mathbf{P}\}$ un espace probabilisé et $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, une variable aléatoire réelle .
On dit que X, suit une loi de Bernouilli de paramètre p si $X(\Omega) = \{0; 1\}$ et $\mathbf{P}(\{X = 1\}) = p$

Remarque 10 :

1. Une variable aléatoire réelle qui suit une loi de Bernouilli est donc une loi discrète, finie, à valeurs entières.
2. On a évidemment $\mathbf{P}(\{X = 0\}) = 1 - p$
3. Exemple de telles situations : le lancer d'une pièce de monnaie et **tous les cas de « réussite-échec »**
4. Soit $\{\Omega ; \mathcal{F} ; \mathbf{P}\}$ un espace probabilisé et $A \subset \mathcal{F}$.
   On définit la fonction indicatrice 1_A par

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 1_A : \Omega & \longrightarrow & \{0, 1\} \\ \omega & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{l} 0 \text{ si } \omega \notin A \\ 1 \text{ si } \omega \in A \end{array} \right. \end{array} \right.$$

   1_A est une loi de Bernouilli de paramètre $\mathbf{P}(\{1_A = 1\}) = \mathbf{P}(A)$. A désigne, ici, le sous ensemble de Ω pour lequel il y a toujours « succès ».
5. Une autre écriture de la loi de Bernouilli, très utilisée dans la partie statistiques est donnée par :

$$\mathbf{P}(\{X = x\}) = p^x (1 - p)^{1-x}$$

   où, bien entendu, $x \in \{0, 1\}$

14.4.3 Loi binomiale

Soit $\{\Omega ; \mathcal{F} ; \mathbf{P}\}$ un espace probabilisé et $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, une variable aléatoire réelle
On dit que X, suit une loi binomiale de paramètre n et p dite loi $\mathcal{B}(n, p)$ si

1. $X(\Omega) = \{0; 1; \ldots; n - 1; n\}$
2. $\mathbf{P}(\{X = k\}) = \mathrm{C}_n^k p^k (1 - p)^{n-k} = \dbinom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$

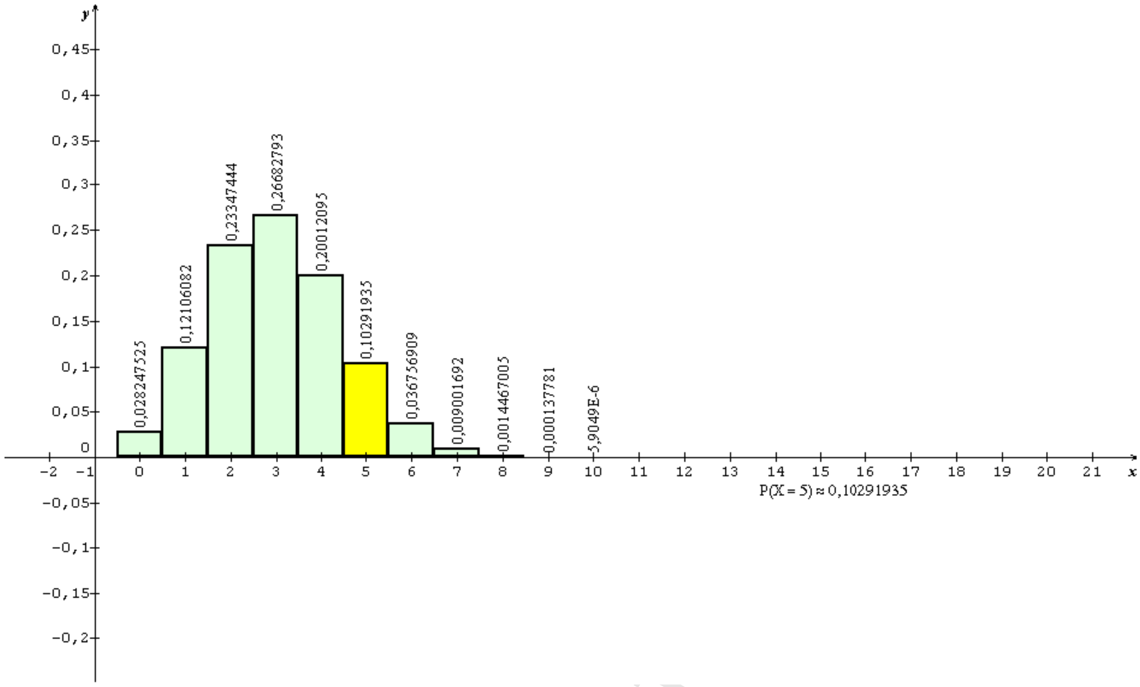

FIGURE 14.1 – L'histogramme d'une loi binômiale de paramètre $n = 10$ et $p = 0,3$

Remarque 11 :

1. Une variable aléatoire réelle qui suit une loi binômiale est une variable aléatoire réelle discrète, finie, à valeurs entières.

2. Première remarque à démontrer, c'est que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}(\{X = k\}) = 1$.

   Cette démonstration n'est pas difficile ; en effet :

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}(\{X = k\}) & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k p^k (1-p)^{n-k} \\ & = & (p + (1-p))^n \ \text{(Binôme de Newton)} \\ & = & 1 \end{array}$$

3. C'est la loi d'une variable aléatoire égale au nombre de succès dans la répétition de n épreuves de Bernouilli.

   On choisit $\Omega = \{S; E\}^n = \{\omega = (y_1, \ldots, y_n) \text{ où } y_i = S \text{ ou } y_i = E\}$.
   On construit donc $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ où $X(\omega)$ est le nombre de S dans ω

Exercice 6 :

Une urne contient 30 boules indiscernables au toucher. Il y a exactement 10 boules rouges.
On tire 6 boules, successivement, et avec remise dans cette urne *(on tire une boule, on la regarde dans le blanc des yeux, on note sa couleur, et on la remet dans l'urne ; on itère cette opération 6 fois)*
Déterminer la probabilité des événements suivants :

1. Il y a au moins une boule rouge
2. Il y a exactement une boule rouge

14.4.4 Loi hypergéométrique

Soit $\{\Omega;\mathcal{F};\mathbf{P}\}$ un espace probabilisé et $X:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$, une variable aléatoire réelle
On dit que X, suit une loi hypergéométrique de paramètre (n,a,b) où $n\in\mathbb{N}^*$, $a\in\mathbb{N}^*$, $b\in\mathbb{N}^*$ et $n\leqslant a+b$ si et seulement si

$$\begin{cases} X(\Omega)=\{\max(0;n-b)\ ;\ \min(a;n)\} \\ \mathbf{P}(\{X=k\})=\dfrac{\mathrm{C}_a^k\mathrm{C}_b^{n-k}}{\mathrm{C}_{a+b}^n} \end{cases}$$

Remarque 12 :

1. Comme pour la loi binômiale, une variable aléatoire réelle qui suit une loi hypergéométrique est une variable aléatoire réelle discrète, finie, à valeurs entières.
2. Première remarque à démontrer, et elle est importante, c'est que $\displaystyle\sum_{k\in X(\Omega)}\mathbf{P}(\{X=k\})=1$

   En fait, le résultat vient de l'identité, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_a^k\mathrm{C}_b^{n-k}=\mathrm{C}_{a+b}^n$
3. Cette situation se rencontre dans les problèmes de proportion

Exercice 7 :

Une urne contient 10 boules, dont 4 blanches et 6 noires

1. On en tire 5 **sans remise**. Trouver la loi de la variable aléatoire réelle égale au nombre de boules blanches tirées.
2. On en tire 5 **avec remise**. Trouver la loi de la variable aléatoire réelle égale au nombre de boules blanches tirées.

14.4.5 Loi géométrique

*Voici un exemple où les valeurs prises par la variable aléatoire réelle X sont **dénombrables et non finies.***

Soit $\{\Omega;\mathcal{F};\mathbf{P}\}$ un espace probabilisé et $X:\Omega\to\mathbb{R}$, une variable aléatoire réelle.
On dit que X, suit une loi géométrique de paramètre p si et seulement si

1. $X(\Omega)=\mathbb{N}^*$
2. $\mathbf{P}(\{X=k\})=p(1-p)^{k-1}$

Remarque 13 :

1. Il faut, bien entendu vérifier que $\displaystyle\sum_{k\in X(\Omega)}\mathbf{P}(\{X=k\})=1$.

   La démonstration est, ici, plutôt simple, c'est la somme de la **série géométrique** $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}^*}p(1-p)^{k-1}$.

   En effet, comme $0<p<1$, nous avons aussi $0<1-p<1$ et :

$$\sum_{k\in\mathbb{N}^*}p(1-p)^{k-1}=p\sum_{k\in\mathbb{N}^*}(1-p)^{k-1}=p\times\frac{1}{1-(1-p)}=p\times\frac{1}{p}=1$$

2. Au jeu de « **pile ou face** » répété indéfiniment, X désignant **le rang** du premier succès suit une loi géométrique. La loi géométrique modélise donc un temps d'attente discret.

Exercice 8 :

Une urne contient n boules dont a boules blanches et $n-a$ boules noires. On tire, de cette urne, une boule, **avec remise**, jusqu'à l'apparition d'une boule blanche.
On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule blanche. Montrer que X est géométrique de paramètre $\dfrac{a}{n}$

14.4.6 Loi de Poisson

Soit $\{\Omega; \mathcal{F}; \mathbf{P}\}$ un espace probabilisé et $X : \Omega \to \mathbb{R}$, une variable aléatoire réelle.
On dit que X, suit une loi de Poisson de paramètre λ si et seulement si

$$\begin{cases} X(\Omega) = \mathbb{N} \\ \mathbf{P}(\{X = k\}) = \dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \end{cases}$$

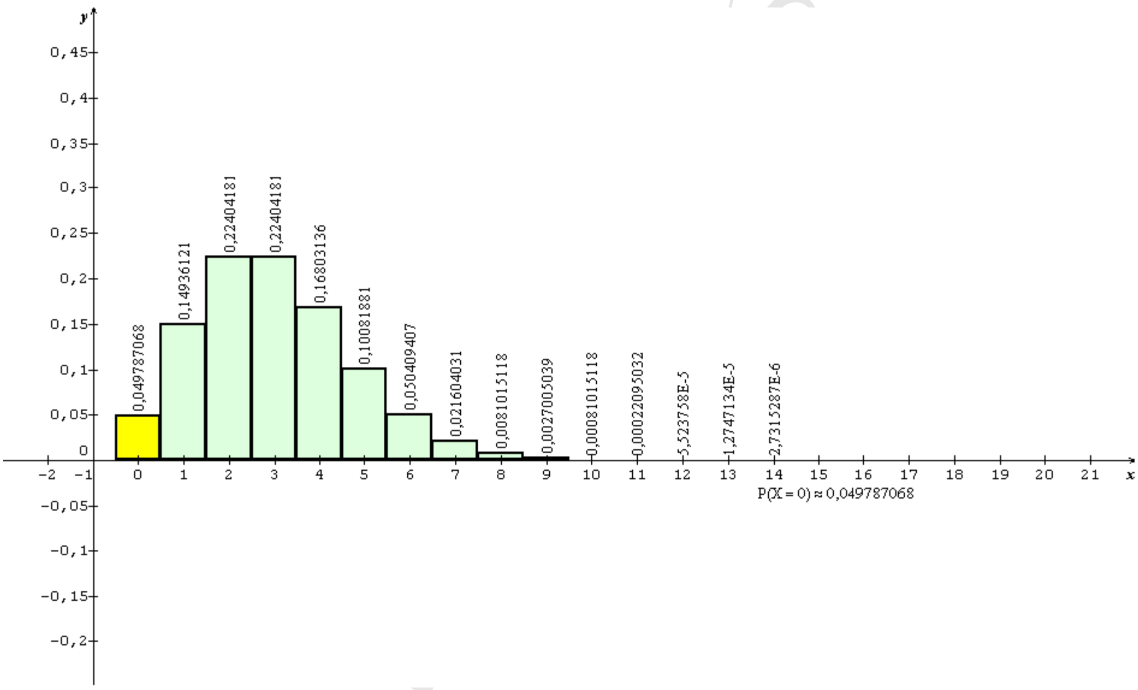

Figure 14.2 – L'histogramme d'une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 3$

Remarque 14 :

1. Voici un second exemple où les valeurs prises par la variable aléatoire réelle X sont **dénombrables et non finies.**
2. Il faut, bien entendu vérifier que $\displaystyle\sum_{k \in X(\Omega)} \mathbf{P}(\{X = k\}) = 1$.

   Une fois de plus, ici c'est plutôt simple, c'est la somme d'une série liée à la **série exponentielle** :

Nous avons $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{\lambda^{k}}{k\,!} = e^{\lambda}$. Donc :

$$\begin{aligned}
\sum_{k\in X(\Omega)} \mathbf{P}\left(\{X=k\}\right) &= \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbf{P}\left(\{X=k\}\right)\\
&= \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{\lambda^{k} e^{-\lambda}}{k\,!}\\
&= e^{-\lambda} \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{\lambda^{k}}{k\,!}\\
&= e^{-\lambda} \times e^{\lambda}\\
&= 1
\end{aligned}$$

Exercice 9 :

Les ingénieurs d'une fabrique d'horlogerie admettent que le nombre de défauts sur le boîtier d'une montre suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 4$.
On choisit une montre au hasard à la sortie d'une chaîne de montage. Calculez les probabilités des événements suivants :

1. Il n'y a aucun défaut
2. Le nombre de défauts est compris, au sens large, entre 4 et 8