14.5 Fonctions de répartition

14.5.1 Définition

Soit $\{\Omega;\mathcal{F};\mathbf{P}\}$ un espace probabilisé et $X:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$, une variable aléatoire réelle.
On appelle fonction de répartition de X, la fonction $F:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ définie par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} F:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & F(x)=\mathbf{P}(\{X\leqslant x\}) \end{array}\right.$$

Remarque 15 :

1. La fonction de répartition, pour plus de précision est souvent notée F_X
2. Comme déjà énoncé, $\{X\leqslant x\}$ est une écriture racoourcie pour $\{\omega\in\Omega$ tel que $X(\omega)\leqslant x\}$ qui est bien un élément de la tribu $\mathcal{F}$, compte tenu de la définition générale des variables aléatoires réelles puisque $\{\omega\in\Omega$ tel que $X(\omega)\leqslant x\}=X^{-1}(]-\infty,x])$ et nous pouvons donc calculer $\mathbf{P}(\{X\leqslant x\})$

14.5.2 Proposition

Soit $\{\Omega;\mathcal{F};\mathbf{P}\}$ un espace probabilisé et $X:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$, une variable aléatoire réelle , et soit $F_X:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ sa fonction de répartition.
Alors

1. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $0\leqslant F_X(x)\leqslant +1$
2. F_X est croissante
3. En tout point $x\in\mathbb{R}$, F_X possède une limite à droite et une limite à gauche.
4. La fonction de répartition F_X est continue à droite en tout point $x_0\in\mathbb{R}$
5. La fonction de répartition F_X est telle que $\lim\limits_{x\to+\infty}F_X(x)=1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}F_X(x)=0$

Démonstration

1. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $0\leqslant F_X(x)\leqslant +1$
   Evidemment, puisque la fonction de répartition F_X est définie à partir d'une probabilité
2. F_X est croissante
   $\Rightarrow$ Soient $x\in\mathbb{R}$ et $x'\in\mathbb{R}$ tels que $x\leqslant x'$; alors, $\{X\leqslant x\}\subset\{X\leqslant x'\}$.
   En effet, soit $\omega\in\{X\leqslant x\}$, alors, $X(\omega)\leqslant x$ et, comme $x\leqslant x'$, alors, $X(\omega)\leqslant x'$, et donc $\omega\in\{X\leqslant x'\}$.
   En conclusion, $\{X\leqslant x\}\subset\{X\leqslant x'\}$
   $\Rightarrow$ Donc, $\mathbf{P}(\{X\leqslant x\})\leqslant\mathbf{P}(\{X\leqslant x'\})$, c'est à dire $F_X(x)\leqslant F_X(x')$
   La fonction de répartition est donc bien une fonction croissante.
3. En tout point $x\in\mathbb{R}$, F_X possède une limite à droite et une limite à gauche.
   On a vu en L_1, que toute fonction monotone admettant en tout point de son domaine de définition, une limite à droite et une limite à gauche.
   Une fonction de répartition F_X est une fonction monotone croissante et admet donc une limite à droite et une limite à gauche.
4. La fonction de répartition F_X est continue à droite en tout point $x_0\in\mathbb{R}$
   Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels, décroissante et telle que $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=x_0$. Ceci veut donc dire que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n>x_0$
   Soit, maintenant, A_n, l'événement $A_n=\{x_0<X\leqslant u_n\}$
   $\Rightarrow$ **Nous avons** $\mathbf{P}(A_n)=F_X(u_n)-F_X(x_0)$
   - ▷ L'événement $A_n=\{x_0<X\leqslant u_n\}$ est exactement $\{x_0<X\leqslant u_n\}=\{x_0<X\}\cap\{X\leqslant u_n\}$, c'est à dire que $A_n=\{x_0<X\leqslant u_n\}=\overline{\{X\leqslant x_0\}}\cap\{X\leqslant u_n\}$
   - ▷ Comme $x_0<u_n$, nous avons $\{X\leqslant x_0\}\subset\{X\leqslant u_n\}$

▷ D'après les propriétés élémentaires des probabilités,

$$\mathbf{P}\left(\overline{\{X \leqslant x_0\}} \cap \{X \leqslant u_n\}\right) = \mathbf{P}\left(\{X \leqslant u_n\}\right) - \mathbf{P}\left(\{X \leqslant x_0\}\right)$$

C'est à dire $\mathbf{P}(A_n) = \mathbf{P}(\{x_0 < X \leqslant u_n\}) = F_X(u_n) - F_X(x_0)$

Ce que nous voulions

⇒ **Nous avons** $A_{n+1} \subset A_n$

Soit $\omega \in A_{n+1}$; alors, $x_0 < X(\omega) \leqslant u_{n+1}$, et comme $u_{n+1} \leqslant u_n$, nous avons aussi $x_0 < X(\omega) \leqslant u_n$, c'est à dire $\omega \in A_n$.

Donc, $A_{n+1} \subset A_n$

⇒ Maintenant, d'après 12.3.4 $\mathbf{P}\left(\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{P}(A_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} (F_X(u_n) - F_X(x_0))$

⇒ **Nous avons** $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset$

Supposons le contraire et soit $\omega \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$; alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\omega \in A_n$, et, toujours pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_0 < X(\omega) \leqslant u_n$

Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres réels, décroissante et telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = x_0$, il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que, si $n \geqslant N$, alors :

$$x_0 < u_n < \frac{x_0 + X(\omega)}{2} < X(\omega)$$

Et ainsi, si $n \geqslant N$, nous avons $X(\omega) \notin A_n$.

Il y a donc contradiction et $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset$

⇒ Donc $\mathbf{P}\left(\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = 0$, et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (F_X(u_n) - F_X(x_0)) = 0$.

Ce qui signifie que $\lim\limits_{n\to+\infty} (F_X(u_n) = F_X(x_0))$ et que, donc, F_X est continue, à droite, en x_0

5. La fonction de répartition F_X est telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$

⇒ **On démontre que** $\lim\limits_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels, décroissante et telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Appelons B_n, l'événement $B_n = \{X \leqslant u_n\}$ et alors $\mathbf{P}(B_n) = F_X(u_n)$

▷ Tout d'abord, nous avons, sûrement $B_{n+1} \subset B_n$ puisque si $\omega \in B_{n+1}$, alors $X(\omega) \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$ et donc $\omega \in B_n$

▷ D'où, toujours d'après 12.3.4, $\mathbf{P}\left(\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{P}(B_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} F_X(u_n)$

▷ Et nous avons $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} B_n = \emptyset$.

En effet, supposons le contraire et soit $\omega \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} B_n$; alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\omega \in B_n$, et ceci veut donc dire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ $X(\omega) \leqslant u_n$.

Or, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N$, alors $u_n < X(\omega)$ et donc, si $n \geqslant N$, alors $\omega \notin B_n$, ce qui contredit avec l'hypothèse de départ.

Donc, $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} B_n = \emptyset$

Et nous retrouvons $\mathbf{P}\left(\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{P}(B_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} F_X(u_n) = 0$

D'où $\lim\limits_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$

⇒ **On démontre que** $\lim\limits_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$

Je vais faire une démonstration plus rapide parce que, sinon sembleble, elle est similaire aux deux précédentes

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels, croissante et telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Appelons C_n, l'événement $C_n = \{X \leqslant u_n\}$ et alors $\mathbf{P}(C_n) = F_X(u_n)$

▷ Tout d'abord, nous avons, sûrement $C_n \subset C_{n+1}$ puisque si $\omega \in C_n$, alors $X(\omega) \leqslant u_n \leqslant u_{n+1}$ et donc $\omega \in C_{n+1}$

- ▷ Cette fois ci d'après 12.3.3, $\mathbf{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(C_n) = \lim_{n\to+\infty} F_X(u_n)$
- ▷ Et nous avons $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n = \Omega$.
  - ⋆ Clairement, nous avons $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n \subset \Omega$
  - ⋆ Réciproquement, soit $\omega \in \Omega$; alors $X(\omega) \in \mathbb{R}$, et comme $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N$, alors $u_n \geqslant X(\omega)$ et donc, si $n \geqslant N$, alors $\omega \in C_n$ et donc $\omega \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$.

  Ce qui nous autorise à conclure que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n = \Omega$

  Et nous retrouvons $\mathbf{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n\right) = \mathbf{P}(\Omega) = \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(C_n) = \lim_{n\to+\infty} F_X(u_n) = 1$

  D'où $\lim_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$

Remarque 16 :

1. Pour démontrer la proposition 14.5.2, nous avons utilisé des techniques de **théorie de la mesure**, puisqu'en fait, une probabilité est aussi une mesure.
2. Pour compléter nous avons aussi démontré dans la proposition 14.5.2, que pour $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ nous avons $\mathbf{P}(\{a < X \leqslant b\}) = F_X(b) - F_X(a)$
3. Il faut noter que la proposition 14.5.2 est vraie pour toutes sortes de variables aléatoires réelles , discrètes ou non. La proposition ci-après n'est valable que pour les variables aléatoires réelles discrètes

14.5.3 Proposition : cas des variables aléatoires réelles discrètes

Soit $\{\Omega; \mathcal{F}; \mathbf{P}\}$ un espace probabilisé et $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, une variable aléatoire réelle discrète.
On suppose donc $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ avec $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n \leqslant \ldots$
Soit $F_X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sa fonction de répartition.
Alors

1. F_X est constante sur $[x_i; x_{i+1}[$
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1} \Longrightarrow F_X(x) = \sum_{j=1}^{i} \mathbf{P}(\{X = x_j\})$, résultat qui s'exprime aussi ainsi :
$$F_X(x) = \mathbf{P}(\{X \leqslant x\}) = \sum_{x_i \leqslant x \text{ et } x_i \in X(\Omega)} \mathbf{P}(\{X = x_i\})$$
3. Nous avons $\mathbf{P}(\{X = x_i\}) = F_X(x_i) - F_X(x_{i-1})$

Démonstration

1. **Démonstration du point 1**

   Soient $x \in \mathbb{R}$ et $x' \in \mathbb{R}$ tels que $x_i \leqslant x < x' < x_{i+1}$.
   Nous avons :
$$]-\infty; x'] =]-\infty; x] \cup]x; x']$$
   Des propriétés vues dans la proposition 14.2.1, nous avons :
$$X^{-1}(]-\infty; x']) = X^{-1}(]-\infty; x]) \cup X^{-1}(]x; x'])$$
   C'est à dire que
$$F_X(x') = F_X(x) \cup \mathbf{P}\left(X^{-1}(]x; x'])\right)$$
   Or, $X(\Omega) \cap]x; x'] = \emptyset$, donc $\mathbf{P}\left(X^{-1}(]x; x'])\right) = 0$, c'est à dire $F_X(x') = F_X(x)$

2. **Montrons que pour tout** $x \in \mathbb{R}$**,** $x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1} \Longrightarrow F_X(x) = \sum_{j=1}^{i} \mathbf{P}(\{X = x_j\})$

   En effet, $\{X \leqslant x\} = \{X = x_1\} \cup \{X = x_2\} \cup \cdots \cup \{X = x_i\}$
   Et comme, si $k \neq j$, nous avons $\{X = x_k\} \cap \{X = x_j\} = \emptyset$, nous avons le résultat.
3. **Montrons que nous avons** $\mathbf{P}(\{X = x_i\}) = F_X(x_i) - F_X(x_{i-1})$
   En effet,

$$\{X \leqslant x_i\} = \bigcup_{j=1}^{i} \{X = x_j\} = \bigcup_{j=1}^{i-1} \{X = x_j\} \cup \{X = x_i\} = \{X \leqslant x_{i-1}\} \cup \{X = x_i\}$$

   Alors, $F_X(x_i) = \mathbf{P}(\{X \leqslant x_{i-1}\}) + \mathbf{P}(\{X = x_i\}) = F_X(x_{i-1}) + \mathbf{P}(\{X = x_i\})$
   Et donc $\mathbf{P}(\{X = x_i\}) = F_X(x_i) - F_X(x_{i-1})$
   D'où le résultat

Remarque 17 :

Pour toutes **les variables aléatoires réelles discrètes telles que** $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x \leqslant x_1 \Longrightarrow F_X(x) = 0$
2. En écrivant $\mathbf{P}(\{X = x_i\}) = F_X(x_i) - F_X(x_{i-1})$, nous montrons que la fonction de répartition définit bien la loi de X

Exemple 7 :

Exemple du jet d'un dé à 6 faces

On lance un dé à 6 faces, équilibré ; on construit la variable aléatoire réelle $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ égale au numéro sorti lors du lancer ; on a donc $X(\Omega) = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ et, pour $k = 1, \ldots, 6$, $\mathbf{P}(\{X = k\}) = \frac{1}{6}$; on veut donc construire sa fonction de répartition

$$F_X(x) = \mathbf{P}(\{X \leqslant x\})$$

et nous avons donc, si $x < 1$ alors $F_X(x) = \mathbf{P}(\{X \leqslant x\}) = 0$.
De plus, si $x \in [1; 2[$, l'événement $\{X \leqslant x\}$ est l'événement $\{X = 1\}$ et donc,

$$F_X(x) = \mathbf{P}(\{X \leqslant x\}) = \mathbf{P}(\{X = 1\}) = \frac{1}{6}$$

De même, si $x \in [2; 3[$, l'événement $\{X \leqslant x\}$ est l'événement $\{X = 1\} \cup \{X = 2\}$ et donc,

$$F_x(x) = \mathbf{P}(\{X \leqslant x\}) = \mathbf{P}(\{X = 1\} \cup \{X = 2\}) = \mathbf{P}(\{X = 1\}) + \mathbf{P}(\{X = 2\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

Pour terminer, nous avons donc : si $x \in [3; 4[$ alors, $F_X(x) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$, si $x \in [4; 5[$, alors $F_X(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$, si $x \in [5; 6[$ alors $F_X(x) = \frac{2}{3} + \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$, et si $x \geqslant 6$ alors $F_X(x) = \frac{5}{6} + \frac{1}{6} = 1$.
Les résultats sont exposés dans le tableau ci-après :

x	$x < 1$	$x \in [1, 2[$	$x \in [2, 3[$	$x \in [3, 4[$	$x \in [4, 5[$	$x \in [5, 6[$	$x \geqslant 6$
$F(x)$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{6}$	1

D'où le graphe 14.3 qui est, dans notre cas une fonction étagée ou en escalier [2].

2. Pour les fonctions étagées ou en escalier, vous reférer à un cours d'intégration

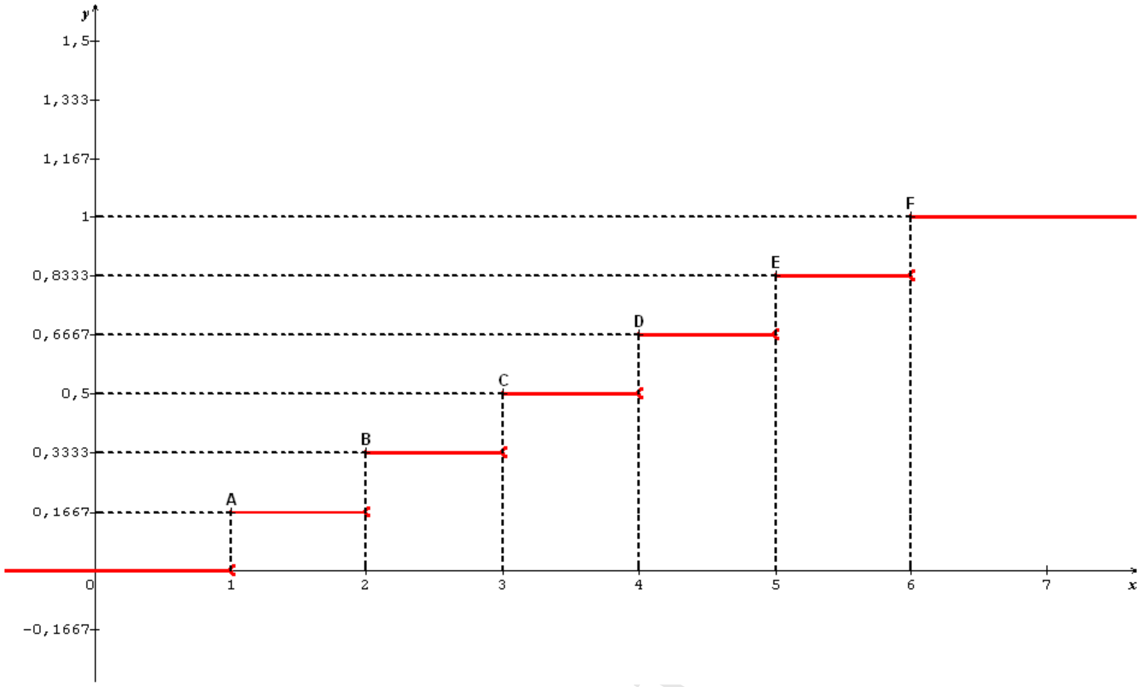

FIGURE 14.3 – Le graphe de la fonction de répartition du lancer de dés

Exercice 10 :

Soit $\{\Omega, \mathbb{F}, \mathbf{P}\}$ un espace probabilisé et $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle discrète de fonction de répartition F_X définie par :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } 0 \leqslant x < 1 \\ \dfrac{2}{3} & \text{si } 1 \leqslant x < 2 \\ \dfrac{11}{12} & \text{si } 2 \leqslant x < 3 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 3 \end{cases}$$

1. Construire le graphe de F_X
2. Donner $\mathbf{P}\left(\left\{X > \dfrac{1}{2}\right\}\right)$
3. Donner $\mathbf{P}(\{2 < X \leqslant 4\})$
4. Donner $\mathbf{P}(\{X = 1\})$