14.6 Moments d'une variable aléatoire réelle discrète

14.6.1 Définition dans le cas fini

Soit $\{\Omega; \mathcal{F}; \mathbf{P}\}$ un espace probabilisé et $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, une variable aléatoire réelle discrète **prenant des valeurs finies.**
On suppose donc $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ avec $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n$

1. La moyenne ou espérance mathématique de X est le nombre

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{P}(\{X = x_i\})}$$

2. Pour $s \in \mathbb{N}^*$, on appelle moment d'ordre s de X, le nombre

$$\boxed{M_k(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^s \mathbf{P}(\{X = x_i\})}$$

Exemple 8 :

1. L'espérance d'une loi de Bernouilli de paramètre p :

$$\mathbb{E}(X) = 0 \times \mathbf{P}(\{X = 0\}) + 1 \times \mathbf{P}(\{X = 1\}) = 0 \times (1 - p) + 1 \times p = p$$

   L'espérance d'une loi de Bernouilli est donc égale au paramètre p
2. L'espérance de la fonction indicatrice 1_A est donnée par :

$$\mathbb{E}(1_A) = 0 \times \mathbf{P}(\{1_A = 0\}) + 1 \times \mathbf{P}(\{1_A = 1\}) = 0 \times \mathbf{P}(\overline{A}) + 1 \times \mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A)$$

3. Le moment d'ordre 2 d'une loi de Bernouilli de paramètre p est donné par :

$$M_2(X) = 0^2 \times \mathbf{P}(\{X = 0\}) + 1^2 \times \mathbf{P}(\{X = 1\}) = 0 \times (1 - p) + 1 \times p = p$$

Exercice 11 :

Une variable aléatoire X prend les valeurs 0, 2 et 4 avec les probabilités respectives $\dfrac{21}{32}$, $\dfrac{6}{32}$ et $\dfrac{5}{32}$.
Calculer l'espérance de X et son moment d'ordre 2.

Remarque 18 :

1. Dans le cas où $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ est fini, $\mathbb{E}(X)$ apparaît comme le barycentre [3] du système pondéré $\{(x_i, \mathbf{P}(\{X = x_i\}))\ i = 1, \ldots, n\}$
2. Une variable aléatoire réelle d'espérance nulle est appelée centrée.

3. Ou centre de gravité

14.6.2 Définition dans le cas infini dénombrable

Soit $\{\Omega; \mathcal{F}; \mathbf{P}\}$ un espace probabilisé et $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, une variable aléatoire réelle discrète.
On suppose donc $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ avec $x_1 < x_2 < \ldots < x_n < \ldots$

1. On dit que X admet une espérance mathématique (ou une moyenne) si la série numérique $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n \mathbf{P}(\{X = x_n\})$ converge absolument, c'est à dire si la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n| \mathbf{P}(\{X = x_n\})$ converge.
   On note alors
   $$\boxed{\mathbb{E}(X) = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n \mathbf{P}(\{X = x_n\})}$$
   Le nombre $\mathbb{E}(X)$ est appelé espérance ou moyenne de X
2. De même, on dit que X admet un moment d'ordre $s \in \mathbb{N}^*$ si la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n^s \mathbf{P}(\{X = x_n\})$ est absolument convergente, c'est à dire si la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n|^s \mathbf{P}(\{X = x_n\})$ converge.
   On appelle alors moment d'ordre s de X, le nombre
   $$\boxed{M_k(X) = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n^s \mathbf{P}(\{X = x_n\})}$$

Remarque 19 :

Même dans le cas discret, infini, une variable aléatoire réelle d'espérance nulle est appelée centrée.

14.6.3 Proposition

Soit $\{\Omega; \mathcal{F}; \mathbf{P}\}$ un espace probabilisé
On appelle variable aléatoire réelle certaine, une variable aléatoire réelle $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que, pour tout $\omega \in \Omega$, $X(\omega) = \lambda$.
Alors, la moyenne d'une variable aléatoire réelle certaine est λ, c'est à dire $\mathbb{E}(X) = \lambda$

Démonstration

Nous avons $\mathbb{E}(X) = \lambda \mathbf{P}(\{X = \lambda\})$.
Remarquons que $\{X = \lambda\} = \Omega$ puisque X est une variable aléatoire réelle certaine, et donc $\mathbb{E}(X) = \lambda$

Exercice 12 :

Quels sont les moments d'ordre s d'une variable aléatoire réelle certaine ?

Remarque 20 :

Il existe des variables aléatoires réelles qui n'admettent pas d'espérance.

Soit $\{\Omega; \mathcal{F}; \mathbf{P}\}$ un espace probabilisé et $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{N}^*$ une variable aléatoire réelle telle que $\mathbf{P}(\{X = n\}) = \dfrac{1}{n(n+1)}$. On sait déjà que $\sum_{n \geqslant 1} \dfrac{1}{n(n+1)} = 1$

Cette variable aléatoire réelle n'admet pas d'espérance, puisque

$$\sum_{n \geqslant 1} n \times \mathbf{P}(\{X = n\}) = \sum_{n \geqslant 1} \frac{n}{n(n+1)} = \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n+1}$$

La série $\sum_{n \geqslant 1} \dfrac{1}{n+1}$ est une série divergente, et donc $\mathbb{E}(X)$ n'existe pas.

14.6.4 Proposition

Soit $\{\Omega; \mathcal{F}; \mathbf{P}\}$ un espace probabilisé et $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle discète
On suppose Ω dénombrable, c'est à dire $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \cdots, \omega_n, \cdots\}$ avec $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3 < \cdots < \omega_n < \cdots$
et que $\mathbb{E}(X)$ existe
Alors, $\mathbb{E}(X) = \sum_{n \geqslant 1} X(\omega_i) \mathbf{P}(\{\omega_i\})$

Démonstration

Nous allons noter $X(\Omega) = \{x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots, \}$ avec $x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_n, \cdots,$

- ▷ Si $\mathbb{E}(X)$ existe, alors la série $\sum_{k \in \mathbb{N}^*} |x_k| \mathbf{P}(\{X = x_k\})$ converge et donc, $\mathbb{E}(X) = \sum_{k \in \mathbb{N}^*} x_k \mathbf{P}(\{X = x_k\})$
- ▷ L'événement $\{X = x_k\}$ est donné par :

$$\{X = x_k\} = \{\omega \in \Omega \text{ tels que } X(\omega) = x_k\} = \{\omega_{k_1}, \omega_{k_2}, \omega_{k_3}, \cdots, \omega_{k_p}, \cdots\} = \bigcup_{p \in \mathbb{N}^*} \{\omega_{k_p}\}$$

De telle sorte que $\mathbf{P}(\{X = x_k\}) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{p \in \mathbb{N}^*} \{\omega_{k_p}\}\right) = \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \mathbf{P}\left(\{\omega_{k_p}\}\right)$

- ▷ Comme, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, nous avons $X\left(\omega_{k_p}\right) = x_k$, nous avons :

$$x_k \mathbf{P}(\{X = x_k\}) = \sum_{k \in \mathbb{N}^*} x_k \mathbf{P}\left(\{\omega_{k_p}\}\right) = \sum_{p \in \mathbb{N}^*} X\left(\omega_{k_p}\right) \mathbf{P}\left(\{\omega_{k_p}\}\right)$$

Et donc,

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k \in \mathbb{N}^*} x_k \mathbf{P}(\{X = x_k\}) = \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \left(\sum_{p \in \mathbb{N}^*} X\left(\omega_{k_p}\right) \mathbf{P}\left(\{\omega_{k_p}\}\right)\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} X(\omega_n) \mathbf{P}(\{\omega_n\})$$

Ce que nous voulions

Remarque 21 :

1. Bien entendu, cette proposition n'est valable que lorsque Ω est dénombrable ; c'est d'ailleurs le cas le plus général de ce cours.
2. Si Ω est dénombrable, c'est à dire si $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \cdots, \omega_n, \cdots\}$, alors $\mathbb{E}(X)$ existe si et seulement si la série $\sum_{n \geqslant 1} X(\omega_i) \mathbf{P}(\{\omega_i\})$ converge absolument

14.6.5 Proposition

Soit $\{\Omega; \mathcal{F}; \mathbf{P}\}$ un espace probabilisé. On suppose Ω dénombrable, c'est à dire $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \cdots, \omega_n, \cdots\}$ avec $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3 < \cdots < \omega_n < \cdots$
Soient $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ et $Y : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ 2 variables aléatoires réelles discrètes telles que $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}(Y)$ existent
Alors, $\mathbb{E}(X+Y)$ existe et $\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$

Démonstration

- ▷ Si $\mathbb{E}(X)$ existe, alors la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} |X(\omega_n)| \mathbf{P}(\{\omega_n\})$ converge ; de même, $\mathbb{E}(Y)$ existe, alors la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} |Y(\omega_n)| \mathbf{P}(\{\omega_n\})$ converge
- ▷ Maintenant,

$$\begin{aligned} |(X+Y)(\omega_n)| \mathbf{P}(\{\omega_n\}) = &\ |X(\omega_n) + Y(\omega_n)| \mathbf{P}(\{\omega_n\}) \\ \leqslant &\ (|X(\omega_n)| + |Y(\omega_n)|) \mathbf{P}(\{\omega_n\}) = |X(\omega_n)| \mathbf{P}(\{\omega_n\}) + |Y(\omega_n)| \mathbf{P}(\{\omega_n\}) \end{aligned}$$

- Les séries $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} |X(\omega_n)|\, \mathbf{P}(\{\omega_n\})$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} |Y(\omega_n)|\, \mathbf{P}(\{\omega_n\})$ étant convergentes, il en est de même de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} |(X+Y)(\omega_n)|\, \mathbf{P}(\{\omega_n\})$, et donc $\mathbb{E}(X+Y)$ existe
- Et, pour terminer :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X+Y) &= \sum_{n\in\mathbb{N}^*} (X+Y)(\omega_n)\, \mathbf{P}(\{\omega_n\}) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}^*} X(\omega_n) + Y(\omega_n)\, \mathbf{P}(\{\omega_n\}) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}^*} X(\omega_n)\, \mathbf{P}(\{\omega_n\}) + \sum_{n\in\mathbb{N}^*} Y(\omega_n)\, \mathbf{P}(\{\omega_n\}) \\ &= \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)\end{aligned}$$

Remarque 22 :

Ce résultat est toujours applicable pour Ω dénombrable ; dans le chapitre suivant, nous démontrerons le même résultat, mais dans un cas plus général.

Etude des moyennes des lois classiques

14.6.6 Moyenne d'une loi de Bernouilli

Soit $\{\Omega; \mathcal{F}; \mathbf{P}\}$ un espace probabilisé et $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, une variable aléatoire réelle de Bernouilli de paramètre p
Alors $\mathbb{E}(X) = p$

Démonstration

Nous avons

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= 0 \times \mathbf{P}(\{X=0\}) + 1 \times \mathbf{P}(\{X=1\}) \\ &= 1 \times \mathbf{P}(\{X=1\}) \\ &= p\end{aligned}$$

14.6.7 Moyenne d'une loi binomiale

Soit $\{\Omega; \mathcal{F}; \mathbf{P}\}$ un espace probabilisé et $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, une variable aléatoire réelle qui suit une loi binomiale de paramètre n et p, $\mathcal{B}(n,p)$
Alors $\mathbb{E}(X) = np$

Démonstration

Par définition de l'espérance (ou de la moyenne !!), nous avons :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{n} k\mathrm{C}_n^k p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} k\mathrm{C}_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

Or,

$$\begin{aligned}k\mathrm{C}_n^k &= \frac{k \times n!}{k! \times (n-k)!} \\ &= \frac{n!}{(k-1)! \times (n-k)!} \\ &= \frac{n \times (n-1)!}{(k-1)! \times ((n-1)-(k-1))!} \\ &= n\mathrm{C}_{n-1}^{k-1}\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \sum_{k=1}^{n} n\mathrm{C}_{n-1}^{k-1}p^{k}(1-p)^{n-k} \\ &= \sum_{k=1}^{n} np\mathrm{C}_{n-1}^{k-1}p^{k-1}(1-p)^{((n-1)-(k-1))}\end{aligned}$$

C'est à dire que :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \sum_{k=1}^{n} np\mathrm{C}_{n-1}^{k-1}p^{k-1}(1-p)^{((n-1)-(k-1))} \\ &= np\sum_{k=1}^{n} \mathrm{C}_{n-1}^{k-1}p^{k-1}(1-p)^{((n-1)-(k-1))} \\ &= np\,(p+(1-p))^{n-1} = np\end{aligned}$$

On en conclue donc que $\mathbb{E}(\{X\}) = np$

14.6.8 Moyenne de la loi géométrique

Ici, nous avons à étudier une loi à valeurs dénombrables donc discrètes infinies

Soit $\{\Omega;\mathcal{F};\mathbf{P}\}$ un espace probabilisé et $X:\Omega\longrightarrow\mathbb{N}^*$, une variable aléatoire réelle qui suit une loi géométrique de paramètre $p\in\,]0;1[$,
Alors $\mathbb{E}(X)$ existe et $\mathbb{E}(X) = \dfrac{1}{p}$

Démonstration

Par définition de l'espérance, nous avons

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n\geqslant 1} n\mathbf{P}(\{X=n\}) = \sum_{n\geqslant 1} np(1-p)^{n-1} = p\sum_{n\geqslant 1} n(1-p)^{n-1}$$

Dans l'étude des séries entières, nous avons vu que si $|x|<1$ alors $\sum_{n\geqslant 1} nx^{n-1} = \dfrac{1}{(1-x)^2}$; nous appliquons alors ce résultat au calcul de l'espérance :

$$\mathbb{E}(X) = p\sum_{n\geqslant 1} n(1-p)^{n-1} = p\times\frac{1}{(1-(1-p))^2} = \frac{1}{p}$$

14.6.9 Moyenne d'une loi de Poisson

Soit $\{\Omega;\mathcal{F};\mathbf{P}\}$ un espace probabilisé et $X:\Omega\longrightarrow\mathbb{N}$, une variable aléatoire réelle qui suit une loi de Poisson de paramètre λ,
Alors $\mathbb{E}(X)$ existe et $\mathbb{E}(X) = \lambda$

Démonstration

Par définition de l'espérance, nous avons

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \sum_{n\geqslant 0} n\mathbf{P}(\{X=n\}) \\ &= \sum_{n\geqslant 1} n\frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} \\ &= e^{-\lambda}\sum_{n\geqslant 1}\frac{\lambda^n}{(n-1)!} \\ &= \lambda e^{-\lambda}\sum_{n\geqslant 1}\frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}\end{aligned}$$

Nous avons vu, en étudiant les séries entières, que : $\sum_{n\geqslant 0}\frac{\lambda^n}{n!}=e^{\lambda}$ et on applique ce résultat au calcul de l'espérance :

$$\mathbb{E}(X)=\lambda e^{-\lambda}\sum_{n\geqslant 1}\frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}=\lambda e^{-\lambda}\sum_{n\geqslant 0}\frac{\lambda^n}{n!}=\lambda e^{-\lambda}\times e^{\lambda}=\lambda$$

14.6.10 Variables aléatoires discrètes et positives

1. Soit $\{\Omega;\mathcal{F};\mathbf{P}\}$ un espace probabilisé et $X:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle .
   On dit que X est positive, si, pour tout $\omega\in\Omega$, $X(\omega)\geqslant 0$, c'est à dire que $\mathbf{P}(\{X\geqslant 0\})=1$
2. Soit X une variable aléatoire réelle discrète et positive telle que $\sum_{x\in X(\Omega)}|x|\,\mathbf{P}(\{X=x\})$ existe. Alors,
   (a) $\mathbb{E}(X)\geqslant 0$
   (b) Si $\mathbb{E}(X)=0$, alors $\mathbf{P}(\{X=0\})=1$

Démonstration

1. On montre que $\mathbb{E}(X)\geqslant 0$
   Nous avons :
   $$\mathbb{E}(X)=\sum_{x\in X(\Omega)}x\mathbf{P}(\{X=x\})=\sum_{\substack{x\in X(\Omega)\\ x<0}}x\mathbf{P}(\{X=x\})+\sum_{\substack{x\in X(\Omega)\\ x\geqslant 0}}x\mathbf{P}(\{X=x\})$$
   Or, $\bigcup_{\substack{x\in X(\Omega)\\ x<0}}\{X=x\}=\{X<0\}$. Comme $\mathbf{P}(\{X<0\})=0$, nous avons, pour tout $x\in X(\Omega)$ tel que $x<0$, $\mathbf{P}(\{X=x\})=0$, et donc $\mathbb{E}(X)=\sum_{\substack{x\in X(\Omega)\\ x\geqslant 0}}x\mathbf{P}(\{X=x\})$
   Comme $x\geqslant 0$ et $0\leqslant\mathbf{P}(\{X=x\})\leqslant +1$, nous avons $\mathbb{E}(X)\geqslant 0$
2. Montrons que si $\mathbb{E}(X)=0$, alors $\mathbf{P}(\{X=0\})=1$
   Supposons $X\geqslant 0$ et $\mathbb{E}(X)=0$. Alors, de $\mathbb{E}(X)=\sum_{x\in X(\Omega)}x\mathbf{P}(\{X=x\})$, nous déduisons que :
   $$\begin{aligned}\mathbb{E}(X)&=0\times\mathbf{P}(\{X=0\})+\sum_{\substack{x\in X(\Omega)\\ x>0}}x\mathbf{P}(\{X=x\})\\&=\sum_{\substack{x\in X(\Omega)\\ x>0}}x\mathbf{P}(\{X=x\})\end{aligned}$$
   Or, pour tout $x\in X(\Omega)$ tel que $x>0$, $x\mathbf{P}(\{X=x\})\leqslant\mathbb{E}(X)=0$, nous avons $\mathbf{P}(\{X=x\})=0$.
   Donc, $\mathbf{P}(\{X>0\})=0$.
   Or, $X(\Omega)=\{X=0\}\cup\{X>0\}$, et donc $\mathbf{P}(X(\Omega))=\mathbf{P}(\{X=0\})+\mathbf{P}(\{X>0\})$. Comme $\mathbf{P}(X(\Omega))=1$ et $\mathbf{P}(\{X>0\})=0$, nous en déduisons $\mathbf{P}(\{X=0\})=1$

Remarque 23 :

Le dernier point dit que si, pour une variable aléatoire réelle discrète positive X, l'espérance est nulle, alors la variable aléatoire réelle X est presque sûrement nulle.

Exercice 13 :

Soit $\{\Omega;\mathcal{F};\mathbf{P}\}$ un espace probabilisé, X et Y, 2 variables aléatoires réelles discrètes définies sur Ω telles que, pour tout $\omega\in\Omega$, $X(\omega)\geqslant Y(\omega)$ *(qui s'écrit aussi $X\geqslant Y$)*. Démontrer que $\mathbb{E}(X)\geqslant\mathbb{E}(Y)$

Exemples de calculs de moments d'ordre 2 pour les lois classiques

14.6.11 Moments d'une loi binomiale

Soit $\{\Omega; \mathcal{F}; \mathbf{P}\}$ un espace probabilisé et $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, une variable aléatoire réelle qui suit une loi binomiale de paramètre n et p $\mathcal{B}(n,p)$
Alors

1. La variable aléatoire réelle X admet des moments de tous ordres
2. En particulier, le moment d'ordre 2 de X est $M_2(X) = np[1 + (n-1)p]$

Démonstration

1. Par définition des moments d'ordre s, nous avons :

$$M_s(X) = \sum_{k=0}^{n} k^s \mathrm{C}_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

C'est une somme finie qui ne pose pas de question de convergence. Reste à calculer ces moments !!

2. Calculons $M_2(X)$, le moment d'ordre 2
Par définition d'un moment d'ordre 2, nous avons

$$M_2(X) = \sum_{k=0}^{n} k^2 \mathbf{P}(\{X = k\}) = \sum_{k=0}^{n} k^2 \mathrm{C}_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

Nous avons $k^2 = k(k-1) + k$ et donc

$$\begin{aligned}
k^2 \mathrm{C}_n^k &= [k(k-1) + k] \mathrm{C}_n^k \\
&= k(k-1) \mathrm{C}_n^k + k\mathrm{C}_n^k \\
&= \frac{k(k-1) \times n!}{k! \times (n-k)!} + k\mathrm{C}_n^k \\
&= n(n-1) \times \frac{(n-2)!}{(k-2)! \times (n-k)!} + k\mathrm{C}_n^k \\
&= n \times (n-1) \times \frac{(n-2)!}{(k-2)! \times ((n-2)-(k-2))!} + k\mathrm{C}_n^k \\
&= n \times (n-1) \mathrm{C}_{n-2}^{k-2} + k\mathrm{C}_n^k
\end{aligned}$$

De telle sorte que :

$$\begin{aligned}
M_2(X) &= n \times (n-1) \sum_{k=2}^{n} \mathrm{C}_{n-2}^{k-2} p^k (1-p)^{n-k} + \sum_{k=1}^{n} k\mathrm{C}_n^k p^k (1-p)^{n-k} \\
&= n \times (n-1) \sum_{k=0}^{n-2} p^2 \mathrm{C}_{n-2}^k p^{k-2} (1-p)^{((n-2)-(k-2))} + \mathbb{E}(X)
\end{aligned}$$

C'est à dire que :

$$\begin{aligned}
M_2(X) &= n \times (n-1) \times p^2 \sum_{k=0}^{n-2} \mathrm{C}_{n-2}^k p^k (1-p)^{((n-2)-(k-2))} + np \\
&= n \times (n-1) \times p^2 (p + (1-p))^{n-2} + np = n \times (n-1) \times p^2 + np
\end{aligned}$$

On en conclue donc que $M_2(X) = n \times (n-1) \times p^2 + np = np[1 + (n-1)p]$

14.6.12 Moments de la loi géométrique

Soit $\{\Omega; \mathcal{F}; \mathbf{P}\}$ un espace probabilisé et $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{N}^*$, une variable aléatoire réelle qui suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0;1[$
Alors

1. X admet des moments de tous ordres
2. En particulier, le moment d'ordre 2 de X est $M_2(X) = \dfrac{2-p}{p^2}$

Démonstration

1. Par définition des moments d'ordre s, nous avons :
$$M_s(X) = \sum_{n\geqslant 1} n^s p(1-p)^{n-1}$$
C'est une série numérique dont nous allons étudier la convergence.
En appelant $u_n = n^s p(1-p)^{n-1}$, nous allons utiliser le critère de d'Alembert.
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^s p(1-p)^n}{n^s p(1-p)^{n-1}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^s (1-p)$$
Nous avons $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^s (1-p) = 1-p$.
Comme $0 < 1-p < 1$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n = \sum_{n\geqslant 1} n^s p(1-p)^{n-1}$ est donc convergente et donc $M_s(X)$ existe pour tout $s \in \mathbb{N}$
2. Calculons $M_2(X)$, le moment d'ordre 2
Calculons, par exemple, $M_2(X)$; par définition d'un moment d'ordre 2, nous avons
$$M_2(X) = \sum_{n\geqslant 1} n^2 \mathbf{P}(\{X=n\}) = \sum_{n\geqslant 1} n^2 p(1-p)^{n-1}$$
Nous avons, à nouveau, $n^2 = n(n-1)+n$ et donc
$$\begin{aligned} M_2(X) &= \sum_{n\geqslant 1}(n(n-1)+n)\,p(1-p)^{n-1} \\ &= \sum_{n\geqslant 1} n(n-1)\,p(1-p)^{n-1} + \sum_{n\geqslant 1} np(1-p)^{n-1} \\ &= p(1-p)\sum_{n\geqslant 1} n(n-1)(1-p)^{n-2} + \mathbb{E}(X) \\ &= p(1-p)\sum_{n\geqslant 1} n(n-1)(1-p)^{n-2} + \frac{1}{p} \end{aligned}$$
Il faut maintenant étudier $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} n(n-1)(1-p)^{n-2}$
Dans l'étude des séries entières, nous avons, pour $|x| < 1$, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} n(n-1)x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3}$, et donc
$$\sum_{n\geqslant 1} n(n-1)(1-p)^{n-2} = \frac{2}{(1-(1-p))^3} = \frac{2}{p^3}$$
Et donc, $\displaystyle p(1-p)\sum_{n\geqslant 1} n(n-1)(1-p)^{n-2} = \frac{2p(1-p)}{p^3} = \frac{2(1-p)}{p^2}$
De telle sorte que :
$$M_2(X) = \frac{2(1-p)}{p^2} + \frac{1}{p} = \frac{2-p}{p^2}$$
On en conclue donc que $M_2(X) = \dfrac{2-p}{p^2}$

14.6.13 Moments d'une loi de Poisson

Soit $\{\Omega; \mathcal{F}; \mathbf{P}\}$ un espace probabilisé et $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{N}$, une variable aléatoire réelle qui suit une loi de Poisson de paramètre λ
Alors

1. X admet des moments de tous ordres
2. En particulier, le moment d'ordre 2 de X est $M_2(X) = \lambda(\lambda + 1)$

Démonstration

1. $M_s(X)$ existe pour tout $s \in \mathbb{N}$
   Par définition des moments d'ordre s, nous avons :
   $$M_s(X) = \sum_{n \geqslant 0} n^s \mathbf{P}(\{X = n\}) = \sum_{n \geqslant 0} n^s \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} = e^{-\lambda} \sum_{n \geqslant 0} n^s \frac{\lambda^n}{n!}$$
   $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} n^s \frac{\lambda^n}{n!}$ est une série numérique dont nous allons étudier la convergence.
   En appelant $u_n = n^s \dfrac{\lambda^n}{n!}$, nous allons utiliser le critère de d'Alembert.
   $$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^s \lambda^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{n^s \lambda^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^s \frac{\lambda}{n+1}$$
   Nous avons $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^s \frac{\lambda}{n+1} = 0.$
   La série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} u_n = \sum_{n \geqslant 0} n^s \frac{\lambda^n}{n!}$ est donc convergente et donc $M_s(X)$ existe pour tout $s \in \mathbb{N}$
2. Calculons $M_2(X)$, le moment d'ordre 2
   Nous allons, une nouvelle fois, utiliser la même procédure de démonstration
   Calculons, par exemple, $M_2(X)$; par définition d'un moment d'ordre 2, nous avons
   $$M_2(X) = \sum_{n \geqslant 0} n^2 \mathbf{P}(\{X = n\}) = \sum_{n \geqslant 0} n^s \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} = e^{-\lambda} \sum_{n \geqslant 0} n^s \frac{\lambda^n}{n!}$$
   Nous avons, à nouveau, $n^2 = n(n-1) + n$ et donc
   $$\begin{aligned} M_2(X) &= \sum_{n \geqslant 0} (n(n-1) + n) \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!} \\ &= \sum_{n \geqslant 2} n(n-1) \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!} + \sum_{n \geqslant 1} n \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!} \\ &= \sum_{n \geqslant 2} \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{(n-2)!} + \mathbb{E}(X) \\ &= e^{-\lambda}\lambda^2 \sum_{n \geqslant 2} \frac{\lambda^{n-2}}{(n-2)!} + \lambda \\ &= e^{-\lambda}\lambda^2 \sum_{n \geqslant 0} \frac{\lambda^n}{n!} + \lambda \end{aligned}$$
   Comme $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \frac{\lambda^n}{n!} = e^{\lambda}$, nous avons :
   $$M_2(X) = e^{-\lambda}\lambda^2 e^{\lambda} + \lambda = \lambda^2 e^{\lambda} + \lambda = \lambda(\lambda + 1)$$
   On en conclue donc que $M_2(X) = \lambda(\lambda + 1)$

Exercice 14 :

Soit $\alpha > 1$, réel. On considère $\zeta(\alpha) = \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ qui est une série de Riemann convergente.

Soit $\{\Omega; \mathcal{F}; \mathbf{P}\}$ un espace probabilisé et $X_\alpha : \Omega \longrightarrow \mathbb{N}^*$ une variable aléatoire réelle telle que $\mathbf{P}(\{X_\alpha = n\}) = \frac{1}{\zeta(\alpha)} \times \frac{1}{n^\alpha}$

1. Vérifier que $\sum_{n \geqslant 1} \mathbf{P}(\{X_\alpha = n\}) = 1$
2. Démontrer que X_α admet des moments d'ordre $s \in \mathbb{N}$ si et seulement si $s < \alpha - 1$.

14.6.14 Proposition

Soit $\{\Omega; \mathcal{F}; \mathbf{P}\}$ un espace probabilisé et $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle discète
Si X admet un moment d'ordre $s \in \mathbb{N}$, alors, pour tout $r \in \mathbb{N}$ tel que $r \leqslant s$, X admet un moment d'ordre r

Démonstration

1. Comme X est une variable aléatoire réelle discrète, nous notons $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$ avec $x_1 < x_2 < \cdots < x_n < \cdots$
2. Nous avons $M_s(X)$ qui existe, c'est à dire que la série $\sum_{n \geqslant 1} |x_n|^s \mathbf{P}(\{X = x_n\})$ est convergente et nous devons montrer que si $r \in \mathbb{N}$ tel que $r \leqslant s$, alors la série $\sum_{n \geqslant 1} |x_n|^r \mathbf{P}(\{X = x_n\})$ converge
3. Premières remarques :
   $\rightarrow$ Si $|x_k| \geqslant 1$, alors $|x_k|^s \geqslant |x_k|^r \geqslant 1$, et, donc $|x_k|^r \leqslant 1 + |x_k|^s$
   $\rightarrow$ Et maintenant, si $|x_k| < 1$, alors $|x_k|^s \leqslant |x_k|^r < 1$, et, même dans ce cas, $|x_k|^r \leqslant 1 + |x_k|^s$
   $\rightarrow$ Et donc, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, nous avons $|x_k|^r \leqslant 1 + |x_k|^s$
4. La série $\sum_{n \geqslant 1} (1 + |x_n|^s) \mathbf{P}(\{X = x_n\})$ est convergente.

   En effet, par hypothèse, la série $\sum_{n \geqslant 1} |x_n|^s \mathbf{P}(\{X = x_n\})$ est convergente et comme $\sum_{n \geqslant 1} \mathbf{P}(\{X = x_n\}) = 1$, cette série est aussi convergente et la série somme $\sum_{n \geqslant 1} (1 + |x_n|^s) \mathbf{P}(\{X = x_n\})$ est bien convergente.
   Comme $0 \leqslant |x_k|^r \mathbf{P}(\{X = x_n\}) \leqslant (1 + |x_n|^s) \mathbf{P}(\{X = x_n\})$, la série $\sum_{n \geqslant 1} |x_n|^r \mathbf{P}(\{X = x_n\})$ est donc convergente
   Ainsi, X admet un moment d'ordre r

14.6.15 Proposition

Soit $\{\Omega; \mathcal{F}; \mathbf{P}\}$ un espace probabilisé et $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle discète telle que

$$X(\Omega) = \{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\} \text{ avec } x_1 < x_2 < \cdots < x_n < \cdots$$

Soit $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, une fonction numérique de domaine $\mathcal{D}_\varphi$ et telle que $X(\Omega) \subset \mathcal{D}_\varphi$
Alors :

1. $\varphi \circ X$ est ne variable aléatoire réelle discrète définie sur $\{\Omega; \mathcal{F}; \mathbf{P}\}$ et telle que

$$\varphi \circ X(\Omega) = \{\varphi(x_1), \varphi(x_2), \cdots, \varphi(x_n), \cdots\}$$

   Les valeurs $\varphi(x_k)$ pouvant être répétées
2. Pour tout nombre $u_j \in \varphi \circ X(\Omega)$, nous avons :

$$\mathbf{P}(\{\varphi \circ X = u_j\}) = \sum_{\substack{x_k \in X(\Omega) \\ \varphi(x_k) = u_j}} \mathbf{P}(\{X = x_k\})$$

Démonstration

Nous notons, pour cette démonstration $\{u_1, u_2, \cdots, u_n, \cdots\}$ l'ensemble des **valeurs distinctes** prises par $\varphi \circ X$.

1. Il nous faut démontrer que $\varphi \circ X$ est une variable aléatoire réelle , c'est à dire que si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, alors $\{\varphi \circ X \in I\} \in \mathcal{F}$
   Soit donc $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle
   (a) Pour commencer, on suppose $\varphi \circ X(\Omega) \cap I = \{u_j\}$
   C'est à dire que l'intersection de $\varphi \circ X(\Omega)$ et de I est réduite à un singleton. Alors :

$$\{\varphi \circ X \in I\} = \{\omega \in \Omega \text{ tels que } \varphi \circ X(\omega) \in I\} = \{\omega \in \Omega \text{ tels que } \varphi \circ X(\omega) = u_j\} = \{\varphi \circ X = u_j\}$$

   Soit $\{x_k;\ k \in \mathbb{N}\}$ l'ensemble des valeurs de $X(\Omega)$ telles que $\varphi(x_k) = u_j$. *(Ces valeurs $\{x_k;\ k \in \mathbb{N}\}$ peuvent en nombre fini ou infini)*
   Posons aussi, pour $k \in \mathbb{N}$, $A_k = \{\omega \in \Omega \text{ tels que } X(\omega) = x_k\} = \{X = x_k\}$.
   Alors, $\{\varphi \circ X = u_j\} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{X = x_k\}$
   Comme X est une variable aléatoire réelle , alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, nous avons $\{X = x_k\} \in \mathcal{F}$ et donc, d'après les propriétés de tribu, $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{X = x_k\} \in \mathcal{F}$.
   Et donc $\{\varphi \circ X = u_j\} \in \mathcal{F}$
   (b) On suppose, maintenant, que $\varphi \circ X(\Omega) \cap I = \left\{u_{j_1}, u_{j_2}, \cdots, u_{j_p}, \cdots,\right\}$ *(éventuellement une infinité)*
   Alors $\{\varphi \circ X \in I\} = \{\omega \in \Omega \text{ tels que } \varphi \circ X(\omega) \in I\} = \bigcup_{l \in \mathbb{N}^*} \{\varphi \circ X = u_{j_l}\}$
   Nous venons de montrer $\{\varphi \circ X = u_j\} \in \mathcal{F}$, et donc, toujours par propriété des tribus, $\bigcup_{l \in \mathbb{N}^*} \{\varphi \circ X = u_{j_l}\} \in \mathcal{F}$

   $\varphi \circ X$ est donc une variable aléatoire réelle .
2. Montrons que $\mathbf{P}(\{\varphi \circ X = u_j\}) = \sum_{\substack{x_k \in X(\Omega) \\ \varphi(x_k) = u_j}} \mathbf{P}(\{X = x_k\})$

   Nous venons de montrer que $\{\varphi \circ X = u_j\} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{X = x_k\}$ où les $\{x_k;\ k \in \mathbb{N}\}$ sont tels que $\varphi(x_k) = u_j$, et donc

$$\mathbf{P}(\{\varphi \circ X = u_j\}) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \mathbf{P}(\{X = x_k\})$$

Qui peut être résumé par :

$$\mathbf{P}\left(\{\varphi\circ X=u_j\}\right)=\sum_{\substack{x_k\in X(\Omega)\\ \varphi(x_k)=u_j}}\mathbf{P}\left(\{X=x_k\}\right)$$

Ce que nous voulions

Exemple 9 :

Si X est une loi de Bernouilli, la variable aléatoire réelle $Y=2X-1$ est telle que $Y=\varphi\circ X$ où $\varphi(x)=2x-1$.
Nous avons $Y(\Omega)=\{-1;+1\}$ et $\mathbf{P}(\{Y=-1\})=\mathbf{P}(\{X=0\})=1-p$ et $\mathbf{P}(\{Y=+1\})=\mathbf{P}(\{X=+1\})=p$
Cette variable est appelée **variable de Rademacher**

14.6.16 Proposition

Soit $\{\Omega;\mathcal{F};\mathbf{P}\}$ un espace probabilisé. On considère :
 $\Rightarrow$ $X:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$, une variable aléatoire réelle discrète
 $\Rightarrow$ Soit $\varphi:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, une fonction numérique de domaine $\mathcal{D}_\varphi$ et telle que $X(\Omega)\subset\mathcal{D}_\varphi$
Alors

1. La variable aléatoire réelle $\varphi\circ X$ admet une espérance mathématique si et seulement si la série $\sum_{n\in\mathbb{N}}\varphi(x_n)\mathbf{P}(\{X=x_n\})$ est absolument convergente.
2. Dans le cas où cette espérance existe, nous avons $\mathbb{E}(\varphi\circ X)=\sum_{n\in\mathbb{N}}\varphi(x_n)\mathbf{P}(\{X=x_n\})$

Démonstration

Comme souvent, jusqu'ici, nous écrivons $\varphi\circ X(\Omega)=\{u_1,u_2,u_3,\cdots,u_n,\cdots\}$ avec $u_1<u_2<u_3<\cdots<u_n<\cdots$.

1. Nous appelons aussi $I_j=\{x_k\in X(\Omega)\ \text{tels que}\ \varphi(x_k)=u_j\}$; c'est donc l'ensemble des antécédents de u_j dans $X(\Omega)$. I_j est un ensemble dénombrable.
   D'après la proposition 14.6.15, nous avons $\mathbf{P}(\{\varphi\circ X=u_j\})=\sum_{x_k\in I_j}\mathbf{P}(\{X=x_k\})$
2. La variable aléatoire réelle admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{j\in\mathbb{N}}|u_j|\,\mathbf{P}(\{\varphi\circ X=u_j\})$ converge.
   Pour chaque $j\in\mathbb{N}$, nous avons $|u_j|\,\mathbf{P}(\{\varphi\circ X=u_j\})=\sum_{x_k\in I_j}|u_j|\,\mathbf{P}(\{X=x_k\})$
3. Soit $N\in\mathbb{N}$. Nous nous intéressons aux sommes partielles $U_N=\sum_{j=1}^{N}|u_j|\,\mathbf{P}(\{\varphi\circ X=u_j\})$. Alors :

$$\begin{aligned}U_N=\sum_{j=1}^{N}|u_j|\,\mathbf{P}(\{\varphi\circ X=u_j\})=&\sum_{j=1}^{N}\left(\sum_{x_k\in I_j}|u_j|\,\mathbf{P}(\{X=x_k\})\right)\\=&\sum_{x_k\in\left(\bigcup_{j=1}^{N}I_j\right)}|\varphi(x_k)|\,\mathbf{P}(\{X=x_k\})\end{aligned}$$

4. Supposons la série $\sum_{n\in\mathbb{N}}\varphi(x_n)\mathbf{P}(\{X=x_n\})$ absolument convergente.

Alors, $U_N \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} |\varphi(x_n)| \mathbf{P}(\{X = x_n\})$ et $\lim_{N\to+\infty} U_N$ existe, c'est à dire que la série $Sum_{j\geqslant 1} |u_j| \mathbf{P}(\{\varphi \circ X = u_j\})$ est convergente et que $\varphi \circ X$ admet une moyenne

5. Nous avons $\mathbb{E}(\varphi \circ X) = \sum_{j\geqslant 1} u_j \mathbf{P}(\{\varphi \circ X = u_j\}) = \sum_{x_k \in \left(\bigcup_{j\geqslant 1} I_j\right)} \varphi(x_k) \mathbf{P}(\{X = x_k\}) = \sum_{k\geqslant 1} \varphi(x_k) \mathbf{P}(\{X = x_k\})$
6. Nous avons bien $\mathbb{E}(\varphi \circ X) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \varphi(x_n) \mathbf{P}(\{X = x_n\})$

Exemple 10 :

1. **Comment calculer $\mathbb{E}\left(X^2\right)$?**

   Ici, c'est simple, on a $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, avec $\varphi(x) = x^2$, et donc $\mathbb{E}\left(X^2\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} (x_n)^2 \mathbf{P}(\{X = x_n\})$

   On peut remarquer que $M_2(X) = \mathbb{E}\left(X^2\right)$
2. Plus généralement, pour les moments d'ordre $s \in \mathbb{N}$, si $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ qui à x fait correspondre $\varphi(x) = x^s$, nous avons démontré en 14.6.15 que $\varphi \circ X$ était aussi une variable aléatoire réelle dont on pouvait, d'après 14.6.16 calculer l'espérance :

$$\mathbb{E}(\varphi \circ X) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \varphi(x_n) \mathbf{P}(\{X = x_n\}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} (x_n)^s \mathbf{P}(\{X = x_n\}) = M_s(X)$$

   Pour les moments d'ordre s, la notation $M_s(X) = \mathbb{E}(X^s)$ est donc justifiée ; c'est celle qui sera le plus souvent utilisée

Exercice 15 :

1. Soit $\{\Omega; \mathcal{F}; \mathbf{P}\}$ un espace probabilisé et $A \in \mathcal{F}$. On considère $1_A : \Omega \longrightarrow \{0, 1\}$, la fonction indicatrice de l'ensemble A. Donner $M_k(1_A)$ pour tout k
2. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, une fonction bornée. On appelle $M = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$. Montrer que

$$\sum_{x\in X(\Omega)} |f(x)| \mathbf{P}(\{X = x\}) \leqslant M$$

Exercice 16 :

Soit X une variable aléatoire réelle qui suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0; 1[$, c'est à dire que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\mathbf{P}(\{X = n\}) = p(1-p)^{n-1}$

Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et on pose $Y = \min(X, m)$, c'est à dire que Y est du type $Y = \varphi \circ X$ où $\varphi(x) = \min(x, m)$

1. Donner la loi de Y
2. Calculer $\mathbb{E}(Y)$

14.6.17 Proposition

Soit $\{\Omega; \mathcal{F}; \mathbf{P}\}$ un espace probabilisé et $X : \omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle discrète qui admet une espérance $\mathbb{E}(X)$

1. Pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $b \in \mathbb{R}$ nous avons $\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b$
2. En particulier $\mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X)) = 0$

Démonstration

Par hypothèse, la variable aléatoire réelle X admettant une espérance $\mathbb{E}(X)$, la série $\sum_{k\geqslant 0} |x_k| \mathbf{P}(\{X = x_k\})$ converge

1. En écrivant $Y = \varphi \circ X$, nous avons $\varphi(ax + b)$, et donc $\mathbb{E}(Y)$ n'existe que si la série $\sum_{k\geqslant 0} |ax_k + b| \mathbf{P}(\{X = x_k\})$ converge.
   Pour tout $k \in \mathbb{N}$, nous avons $|ax_k + b| \mathbf{P}(\{X = x_k\}) \leqslant |a| |x_k| \mathbf{P}(\{X = x_k\}) + |b| \mathbf{P}(\{X = x_k\})$.
   La série $\sum_{k\geqslant 0} |a| |x_k| \mathbf{P}(\{X = x_k\}) = |a| \sum_{k\geqslant 0} |x_k| \mathbf{P}(\{X = x_k\})$ est convergente.
   De même, la série $\sum_{k\geqslant 0} |b| \mathbf{P}(\{X = x_k\}) = |b| \sum_{k\geqslant 0} \mathbf{P}(\{X = x_k\}) = |b|$ est une série convergente.
   D'après la théorie des séries la série $\sum_{k\geqslant 0} |ax_k + b| \mathbf{P}(\{X = x_k\})$ converge
2. $\mathbb{E}(aX + b) = \sum_{k\geqslant 0} (ax_k + b) \mathbf{P}(\{X = x_k\}) = a \sum_{k\geqslant 0} x_k \mathbf{P}(\{X = x_k\}) + b \sum_{k\geqslant 0} \mathbf{P}(\{X = x_k\}) = a\mathbb{E}(X) + b$
3. $\mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X)) = \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(\mathbb{E}(X))$
   Nous avons $\mathbb{E}(X)$ qui est un nombre réel constant et donc $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X)) = \mathbb{E}(X)$
   D'où, donc, $\mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X)) = \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(\mathbb{E}(X)) = \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X) = 0$