14.7 Variance et écart-type

14.7.1 Définition

Soit $\{\Omega;\mathcal{F};\mathbf{P}\}$ un espace probabilisé et $X:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$, une variable aléatoire réelle discrète qui admet une moyenne $\mathbb{E}(X)$
On appelle variance de X, la quantité, si elle existe :

$$V(X)=\sigma^2(X)=\mathbb{E}\left((X-\mathbb{E}(X))^2\right)$$

L'écart-type σ est la racine carrée de la variance :

$$\sigma(X)=\sqrt{\mathbb{E}\left((X-\mathbb{E}(X))^2\right)}=\sqrt{V(X)}$$

Remarque 24 :

1. La notation $V(X)$ pour la variance est plutôt utilisée en statistiques ; en probabilité, on lui préfère $\sigma^2(X)$, qui exprime bien le carré de l'écart-type ; **c'est la notation que nous adopterons**
2. L'ecart-type mesure la dispersion autour de $\mathbb{E}(X)$; c'est, dans une certaine mesure, une distance *(La distance, au sens des moindres carrés).*
3. En utilisant la proposition 14.6.15, en posant $\varphi(x)=(x-\mathbb{E}(X))^2$, nous avons aussi, si X est une variable aléatoire réelle discrète avec $X(\Omega)=\{x_1,x_2,\ldots,x_n,\ldots\}$:
$$\sigma^2(X)=\mathbb{E}(\varphi\circ X)=\sum_{n\in\mathbb{N}}\varphi(x_n)\mathbf{P}(\{X=x_n\})=\sum_{n\in\mathbb{N}}(x_n-\mathbb{E}(X))^2\mathbf{P}(\{X=x_n\})$$
4. La variance est aussi appelée **moment centré d'ordre 2**
5. Plus généralement,**moment centré d'ordre** s est donné par :
$$\mu_s=\mathbb{M}_s(X-\mathbb{E}(X))=\mathbb{E}\left[(X-\mathbb{E}(X))^s\right]$$

Exercice 17 :

1. Quelle est la variance d'une variable aléatoire réelle certaine ? Réciproquement, soit X une variable aléatoire réelle discrète et finie dont la variance est nulle. Montrer que X est une variable aléatoire réelle constante.
2. Soit $\{\Omega;\mathcal{F};\mathbf{P}\}$ un espace probabilisé et $A\in\mathcal{F}$. On considère $1_A:\Omega\to\{0,1\}$, la fonction indicatrice de l'ensemble A. Donner la variance $\sigma^2(1_A)$ de 1_A
3. Montrer que, pour tout $x\in\mathbb{R}$, nous avons l'inégalité $|x|\leqslant\dfrac{1+x^2}{2}$. Déduire de cette inégalité que si X est une variable aléatoire réelle telle que $\mathbb{E}\left(X^2\right)$ existe, alors $\mathbb{E}(X)$ existe.

Exercice 18 :

Soit X une variable aléatoire réelle telle que $X(\Omega)=\{-4,\ -3,\ 1,\ 2\}$ et dont la loi est donnée par le tableau suivant :

x_i	-4	-3	1	2
$\mathbb{P}(X=x_i)$	$0,10$	$0,15$	$0,65$	$0,10$

1. Calculez l'espérance et la variance de X
2. Définissez la fonction de répartition de X
3. Soit $\varphi:\mathbb{R}^+\longrightarrow\mathbb{R}$, définie par :
$$\begin{cases}\varphi:\mathbb{R}^+ & \longrightarrow \quad \mathbb{R}\\ \qquad h & \overset{\varphi}{\longmapsto} \quad \varphi(h)=\mathbb{P}(\{|X|\leqslant h\})\end{cases}$$
Définissez la fonction φ

14.7.2 Théorème de Koenig

Avec le théorème de Koenig, nous avons un moyen plus simple de calculer la variance.

Soit $\{\Omega ; \mathcal{F} ; \mathbf{P}\}$ un espace probabilisé et $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, une variable aléatoire réelle discrète qui admet une espérance et une variance.
Alors, nous avons :

$$\sigma^2(X) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - (\mathbb{E}(X))^2$$

Démonstration

X étant une variable aléatoire réelle discrète, nous appelons $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$, avec toujours $x_1 < x_2 < \cdots < x_n < \cdots$
Par définition, nous avons $\sigma^2(X) = \sum_{n\in\mathbb{N}} (x_n - \mathbb{E}(X))^2 \mathbf{P}(\{X = x_n\})$.
Or, $(x_n - \mathbb{E}(X))^2 = x_n^2 - 2x_n\mathbb{E}(X) + (\mathbb{E}(X))^2$, et donc :

$$\begin{aligned} \sigma^2(X) &= \sum_{n\in\mathbb{N}} (x_n - \mathbb{E}(X))^2 \mathbf{P}(\{X = x_n\}) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n^2 \mathbf{P}(\{X = x_n\}) - 2\mathbb{E}(X) \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n \mathbf{P}(\{X = x_n\}) + \sum_{n\in\mathbb{N}} (\mathbb{E}(X))^2 \mathbf{P}(\{X = x_n\}) \end{aligned}$$

Or :

- $\rightarrow$ $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n^2 \mathbf{P}(\{X = x_n\}) = \mathbb{E}\left(X^2\right)$
- $\rightarrow$ $2\mathbb{E}(X) \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n \mathbf{P}(\{X = x_n\}) = 2\mathbb{E}(X) \times \mathbb{E}(X) = 2(\mathbb{E}(X))^2$, puisque $\mathbb{E}(X) = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n \mathbf{P}(\{X = x_n\})$
- $\rightarrow$ Et, pour terminer, $\sum_{n\in\mathbb{N}} (\mathbb{E}(X))^2 \mathbf{P}(\{X = x_n\}) = (\mathbb{E}(X))^2 \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{P}(\{X = x_n\}) = (\mathbb{E}(X))^2$, puisque $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{P}(\{X = x_n\}) = 1$

Ainsi : $\sigma^2(X) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - 2(\mathbb{E}(X))^2 + (\mathbb{E}(X))^2 = \mathbb{E}\left(X^2\right) - (\mathbb{E}(X))^2$
Ce que nous voulions

Remarque 25 :

Cet énoncé est valable pour tout type de variables aléatoires réelles . Nous le verrons en progressant dans le cours de probabilité

Exemple 11 :

La variance d'une loi de Bernouilli de paramètre p est : $\sigma^2(X) = p(1-p)$

En effet, si X une variable aléatoire réelle qui suit une loi de Bernouilli de paramètre p ; alors, par le théorème de Koenig 14.7.2, nous avons : $\sigma^2(X) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - \mathbb{E}(X)^2$; nous connaissons $\mathbb{E}(X) = p$, il nous reste à calculer $\mathbb{E}\left(X^2\right)$

$$\mathbb{E}\left(X^2\right) = 0^2 \times \mathbf{P}(\{X = 0\}) + 1^2 \times \mathbf{P}(\{X = 1\}) = p$$

Donc, $\sigma^2(X) = p - p^2 = p(1-p)$

14.7.3 Proposition

Soit $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, une variable aléatoire réelle discrète qui admet une variance $\sigma^2(X)$
Alors, la variable aléatoire réelle $Y = aX + b$ a pour variance $\sigma^2(Y) = a^2\sigma^2(X)$

Démonstration

D'après la proposition 14.6.17 on sait déjà que $\mathbb{E}(Y)$ existe et que $\mathbb{E}(Y) = a\mathbb{E}(X) + b$, et donc que

$$Y - \mathbb{E}(Y) = aX + b - (a\mathbb{E}(X) + b) = a(X - \mathbb{E}(X))$$

Donc, nous avons $(Y - \mathbb{E}(Y))^2 = a^2 (X - \mathbb{E}(X))^2$, et comme $\sigma^2(Y) = \mathbb{E}\left((Y - \mathbb{E}(Y))^2\right)$, nous avons

$$\sigma^2(Y) = \mathbb{E}\left(a^2 (X - \mathbb{E}(X))^2\right)$$

En utilisant à nouveau la proposition 14.6.17 où nous avons démontré que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}(\lambda X) = \lambda\mathbb{E}(X)$, nous continuons :

$$\mathbb{E}\left(a^2 (X - \mathbb{E}(X))^2\right) = a^2\mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right) = a^2\sigma^2(X)$$

Ce que nous voulions.

Remarque 26 :

Si $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, est une variable aléatoire réelle discrète qui admet une variance $\sigma^2(X)$ Alors, la variable aléatoire réelle $Y = aX + b$ a pour écart-type $\sigma(Y) = |a|\,\sigma(X)$

14.7.4 Définition de variable aléatoire réelle centrée réduite

Soit $\{\Omega; \mathcal{F}; \mathbf{P}\}$ un espace probabilisé et $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, une variable aléatoire réelle discrète qui admet une variance non nulle $\sigma^2(X)$ et donc une moyenne $\mathbb{E}(X)$

On appelle variable aléatoire réelle centrée réduite associée à X, la variable aléatoire réelle X^* définie par :

$$X^* = \frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$$

Remarque 27 :

1. Nous avons, et c'est facile à démontrer : $\mathbb{E}(X^*) = 0$ et $\sigma^2(X^*) = 1$

   $\Rightarrow$ **Nous avons** $\mathbb{E}(X^*) = 0$

   En effet, X^* peut s'écrire sous la forme $X^* = aX + b$ où $a = \dfrac{1}{\sigma(X)}$ et $b = \dfrac{-\mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$.

   De $X^* = aX + b$, nous tirons que $\mathbb{E}(X^*) = a\mathbb{E}(X) + b = \dfrac{\mathbb{E}(X)}{\sigma(X)} - \dfrac{\mathbb{E}(X)}{\sigma(X)} = 0$

   $\Rightarrow$ **Nous avons** $\sigma^2(X^*) = 1$

   Nous avons démontré en que $\sigma^2(X^*) = a^2\sigma^2(X) = \dfrac{1}{\sigma^2(X)} \times \sigma^2(X) = 1$

   Démonstration simple, en effet
2. Avoir recours à une variable aléatoire réelle centrée réduite est fortement utile au moment de l'utilisation des tables

Variance de lois discrètes classiques

14.7.5 Variance d'une loi binômialle

La variance d'une variable aléatoire réelle discrète suivant une loi binômiale $\mathcal{B}(n, p)$ est $\sigma^2(X) = np(1 - p)$

Démonstration

Nous allons utiliser la formule de Koenig vue en 14.7.2

Il nous faut connaître moyenne et moment d'ordre 2. Ces deux quantités ont été calculées en 14.6.7 et en 14.6.11

→ En 14.6.7, nous avons $\mathbb{E}(X) = np$

→ Et en 14.6.11, nous avons $M_2(X) = \mathbb{E}(X^2) = np[1 + (n - 1)p]$

D'où $\sigma^2(X) = np[1 + (n - 1)p] - n^2p^2 = np(1 + (n - 1)p - np) = np(1 - p)$

14.7.6 Variance d'une loi géométrique

La variance d'une d'une variable aléatoire réelle discrète suivant une loi géométrique de paramètre p est $\sigma^2(X) = \dfrac{(1-p)}{p^2}$

Démonstration

Nous allons encore utiliser la formule de Koenig vue en 14.7.2
Il nous faut connaître moyenne et moment d'ordre 2. Ces deux quantités ont été calculées en 14.6.8 et en 14.6.12

→ En 14.6.8, nous avons $\mathbb{E}(X) = \dfrac{1}{p}$

→ Et en 14.6.12, nous avons $M_2(X) = \mathbb{E}\left(X^2\right) = \dfrac{2-p}{p^2}$

D'où $\sigma^2(X) = \dfrac{2-p}{p^2} - \dfrac{1}{p^2} = \dfrac{2-p-1}{p^2} = \dfrac{1-p}{p^2}$

14.7.7 Variance d'une loi de Poisson

La variance d'une variable aléatoire réelle discrète suivant une loi de Poisson de paramètre λ est $\sigma^2(X) = \lambda$

Démonstration

Toujours la formule de Koenig de la proposition 14.7.2
Il nous faut connaître moyenne et moment d'ordre 2. Ces deux quantités ont été calculées en 14.6.9 et en 14.6.13

→ En 14.6.9, nous avons $\mathbb{E}(X) = \lambda$

→ Et en 14.6.13, nous avons $M_2(X) = \mathbb{E}\left(X^2\right) = \lambda(\lambda+1)$

D'où $\sigma^2(X) = \lambda(\lambda+1) - \lambda^2 = \lambda$

14.7.8 Tableau des caractéristiques à retenir

Loi	Moyenne	Variance
Loi de Bernouilli de paramètre p	p	$p(1-p)$
Loi binômiale $\mathcal{B}(n,p)$	np	$np(1-p)$
Loi géométrique de paramètre p	$\dfrac{1}{p}$	$\dfrac{1-p}{p^2}$
Loi de Poisson de paramètre λ, $\mathcal{P}(\lambda)$	λ	λ