14.8 Premières inégalités en probabilités

14.8.1 Inégalité de Markov dans le cas discret

Soit $\{\Omega; \mathcal{F}; \mathbf{P}\}$ un espace probabilisé et $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, une variable aléatoire réelle discrète positive ou nulle *(C'est à dire que, pour tout $\omega \in \Omega$, nous avons $X(\omega) \geqslant 0$)*
Alors, pour tout $\alpha > 0$, nous avons $\mathbf{P}(\{X \geqslant \alpha\}) \leqslant \dfrac{\mathbb{E}(X)}{\alpha}$

Démonstration

Soit X une variable aléatoire réelle discrète infinie positive et admettant une espérance.
Comme d'habitude, nous notons $X(\Omega) = \{x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots\}$ avec $x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_n < \cdots$
Nous avons $\mathbb{E}(X) = \sum\limits_{k \geqslant 1} x_k \mathbf{P}(\{X = x_k\})$
Soit $\alpha > 0$. Nous faisons le découpage suivant :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k \geqslant 1} x_k \mathbf{P}(\{X = x_k\}) = \sum_{\substack{k \geqslant 1 \\ x_k \leqslant \alpha}} x_k \mathbf{P}(\{X = x_k\}) + \sum_{\substack{k \geqslant 1 \\ x_k \geqslant \alpha}} x_k \mathbf{P}(\{X = x_k\})$$

Alors, comme X est une variable aléatoire réelle à valeurs positives, nous avons $\mathbb{E}(X) \geqslant \sum\limits_{\substack{k \geqslant 1 \\ x_k \geqslant \alpha}} x_k \mathbf{P}(\{X = x_k\})$

Toujours parce que X est une variable aléatoire réelle à valeurs positives, nous avons

$$\sum_{\substack{k \geqslant 1 \\ x_k \geqslant \alpha}} x_k \mathbf{P}(\{X = x_k\}) \geqslant \sum_{\substack{k \geqslant 1 \\ x_k \geqslant \alpha}} \alpha \mathbf{P}(\{X = x_k\}) = \alpha \sum_{\substack{k \geqslant 1 \\ x_k \geqslant \alpha}} \mathbf{P}(\{X = x_k\})$$

Or, $\sum\limits_{\substack{k \geqslant 1 \\ x_k \geqslant \alpha}} \mathbf{P}(\{X = x_k\}) = \mathbf{P}(\{X \geqslant \alpha\})$
En synthèse, nous avons donc

$$\mathbb{E}(X) \geqslant \alpha \mathbf{P}(\{X \geqslant \alpha\}) \Longleftrightarrow \alpha \mathbf{P}(\{X \geqslant \alpha\}) \leqslant \mathbb{E}(X) \Longleftrightarrow \mathbf{P}(\{X \geqslant \alpha\}) \leqslant \frac{\mathbb{E}(X)}{\alpha}$$

Ce que nous voulions

Remarque 28 :

L'inégalité de Markov 14.8.1 est un résultat utile en probabilité qui donne des informations sur une distribution de probabilité.
L'aspect remarquable à ce sujet est que l'inégalité est valable pour toute distribution avec des valeurs positives, quelles que soient ses autres caractéristiques.
L'inégalité de Markov donne une limite supérieure pour le pourcentage de la distribution qui est au-dessus d'une valeur particulière.

Exemple : *Le nombre de pièces sortant d'une usine chaque jour, est une variable aléatoire réelle discrète de moyenne 100. On souhaite estimer la probabilité pour en sortir 200 demain.*
Quelle estimation obtenons nous de cette probabilité ?

Si X est la variable aléatoire réelle donnant la production du lendemain, nous devons donc évaluer $\mathbf{P}(\{X \geqslant 200\})$.

D'après l'inégalité de Markov, $\mathbf{P}(\{X \geqslant 200\}) \leqslant \dfrac{100}{200} = \dfrac{1}{2}$

14.8.2 Corollaire

Soit $\{\Omega; \mathcal{F}; \mathbf{P}\}$ un espace probabilisé et $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, une variable aléatoire réelle discrète qui admet un moment d'ordre $s \in \mathbb{N}^*$, c'est à dire que la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} |x_k|^s \mathbf{P}(\{X = x_k\})$ converge

Alors, pour tout $\alpha > 0$, nous avons $\mathbf{P}(\{|X|^s \geqslant \alpha\}) \leqslant \dfrac{\mathbb{E}(|X|^s)}{\alpha}$

Démonstration

Il suffit d'appliquer le théorème 14.8.1 à la variable aléatoire réelle $Y = |X|^s$. Nous avons Y qui est une variable aléatoire réelle positive et $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(|X|^s) = \sum_{k\in\mathbb{N}} |x_k|^s \mathbf{P}(\{X = x_k\})$

Donc, pour tout $\alpha > 0$, $\mathbf{P}(\{Y \geqslant \alpha\}) \leqslant \dfrac{\mathbb{E}(Y)}{\alpha} \Longleftrightarrow \mathbf{P}(\{|X|^s \geqslant \alpha\}) \leqslant \dfrac{\mathbb{E}(|X|^s)}{\alpha}$

Ce que nous voulions

14.8.3 Théorème : Inégalité de Bienaymé-Tchébichev

Soit $\{\Omega; \mathcal{F}; \mathbf{P}\}$ un espace probabilisé et $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, une variable aléatoire réelle discrète qui admet une variance non nulle $\sigma^2(X)$ et donc une moyenne $\mathbb{E}(X)$

Alors, pour tout $\varepsilon > 0$

$$\mathbf{P}(\{|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant \varepsilon\}) \leqslant \frac{\sigma^2(X)}{\varepsilon^2}$$

Démonstration

Nous donnons 2 démonstrations à cette inégalité : une première qui utilise l'inégalité de Markov, et une seconde des plus classiques

1. **Utilisation de l'inégalité de Markov**

   On considère la variable aléatoire réelle $Y = (X - \mathbb{E}(X))^2$; cette variable aléatoire réelle admet une espérance puisque $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right) = \sigma^2(X)$.

   Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, en utilisant l'inégalité de Markov, nous avons :

$$\mathbf{P}\left(\{Y \geqslant \varepsilon^2\}\right) \leqslant \frac{\mathbb{E}(Y)}{\varepsilon^2} \Longleftrightarrow \mathbf{P}\left(\left\{(X - \mathbb{E}(X))^2 \geqslant \varepsilon^2\right\}\right) \leqslant \frac{\sigma^2(X)}{\varepsilon^2}$$

   Comme nous avons $\left\{(X - \mathbb{E}(X))^2 \geqslant \varepsilon^2\right\} = \{|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant \varepsilon\}$, alors, nous avons bien

$$\mathbf{P}(\{|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant \varepsilon\}) \leqslant \frac{\sigma^2(X)}{\varepsilon^2}$$

2. **Démonstration classique**

   Soit $\varepsilon > 0$

   Comme d'habitude, nous posons $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$, et I_ε l'ensemble des indices $n \in \mathbb{N}$ tels que si $n \in I_\varepsilon$, alors $|x_n - \mathbb{E}(X)| \geqslant \varepsilon$.

   Autrement dit, en langage formalisé, $I_\varepsilon = \{n \in \mathbb{N} \text{ tq } |x_n - \mathbb{E}(X)| \geqslant \varepsilon\}$. Nous avons bien $I_\varepsilon \subset \mathbb{N}$

   Alors, en utilisant la définition de la variance,

$$\begin{aligned}\sigma^2(X) &= \sum_{n\in\mathbb{N}} (x_n - \mathbb{E}(X))^2 \mathbf{P}(\{X = x_n\}) \\ &= \sum_{n\in I_\varepsilon} (x_n - \mathbb{E}(X))^2 \mathbf{P}(\{X = x_n\}) + \sum_{n\notin I_\varepsilon} (x_n - \mathbb{E}(X))^2 \mathbf{P}(\{X = x_n\})\end{aligned}$$

Comme $\sum_{n \notin I_\varepsilon} (x_n - \mathbb{E}(X))^2 \mathbf{P}(\{X = x_n\}) \geqslant 0$, nous avons

$$\sigma^2(X) \geqslant \sum_{n \in I_\varepsilon} (x_n - \mathbb{E}(X))^2 \mathbf{P}(\{X = x_n\})$$

Or, si $n \in I_\varepsilon$, alors $|x_n - \mathbb{E}(X)| \geqslant \varepsilon$, nous avons aussi

$$n \in I_\varepsilon \Longrightarrow (x_n - \mathbb{E}(X))^2 \geqslant \varepsilon^2$$

En conclusion :

$$\sigma^2(X) \geqslant \sum_{n \in I_\varepsilon} (x_n - \mathbb{E}(X))^2 \mathbf{P}(\{X = x_n\}) \geqslant \sum_{n \in I_\varepsilon} \varepsilon^2 \mathbf{P}(\{X = x_n\})$$

Comme $\sum_{n \in I_\varepsilon} \varepsilon^2 \mathbf{P}(\{X = x_n\}) = \varepsilon^2 \sum_{n \in I_\varepsilon} \mathbf{P}(\{X = x_n\})$ et que $\sum_{n \in I_\varepsilon} \mathbf{P}(\{X = x_n\}) = \mathbf{P}(\{|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant \varepsilon\})$, nous avons bien

$$\sigma^2(X) \geqslant \varepsilon^2 \mathbf{P}(\{|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant \varepsilon\})$$

Ce que nous voulions

Remarque 29 :

1. Cette inégalité est **très importante**, et nous la retrouverons souvent dans ce cours, en particulier lorsque nous étudierons les lois des grands nombres.
2. Une autre forme de ce théorème est plus parlante, et c'est celle ci :
   Elle est obtenue en posant $\varepsilon = \lambda\sigma$:
   Pour tout $\lambda > 0$,
   $$\mathbf{P}(\{|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant \lambda\sigma(X)\}) \leqslant \frac{1}{\lambda^2}$$
   Par exemple, en posant $\lambda = 2$, en écrivant $\mathbf{P}(\{|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant 2\sigma(X)\}) \leqslant \frac{1}{4}$, on exprime que la probabilité pour que les valeurs prises par la variable aléatoire réelle s'écartent de la moyenne de 2 fois l'écart type, est inférieure à $\frac{1}{4}$

Exercice 19 :

Le nombre de pièces sortant d'une usine en une journée est une variable aléatoire d'espérance 50. On veut estimer la probabilité que la production d'un jour donné dépasse 75 pièces.

1. En utilisant l'inégalité de Markov, quelle estimation obtient-on sur cette probabilité ?
2. Que peut-on dire de plus sur cette probabilité si on sait que la variance de la production quotidienne est 25 ?

Exercice 20 :

Soit $\{\Omega; \mathcal{F}; \mathbf{P}\}$ un espace probabilisé et $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, une variable aléatoire réelle discrète

1. On suppose que X suit une loi binômiale $\mathcal{B}\left(10, \frac{1}{2}\right)$. Trouver un majorant de la probabilité de l'événement $\{X \neq 5\} \cap \{X \neq 4\} \cap \{X \neq 6\}$
2. Qu'en est-il si nous supposons, cette fois-ci que X suit une loi binômiale $\mathcal{B}\left(100, \frac{1}{2}\right)$ pour l'événement $\{X \neq 50\} \cap \{X \neq 51\} \cap \{X \neq 49\}$