## 14.9 Fonctions génératrices

*Dans ce paragraphe, on ne considère que les variables aléatoires réelles à valeur entières*

### 14.9.1 Définition

Soit $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{N}$, une variable aléatoire réelle à valeurs entières.
On appelle fonction génératrice de $X$, la fonction $g_X : [-1;+1] \longrightarrow \mathbb{R}$, définie, pour tout $t \in [-1;+1]$, par :

$$\begin{cases} g_X : [-1;+1] & \longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ \qquad t & \longmapsto \quad g_X(t) = \mathbb{E}\left(t^X\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} t^n \mathbf{P}(\{X=n\}) \end{cases}$$

**Remarque 30 :**

1. $g_X$ apparaît comme une série entière dont on peut rechercher le rayon de convergence.
   Comme $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{P}(\{X=n\}) = 1$, il est évident que si $|t| < 1$, alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} t^n \mathbf{P}(\{X=n\})$ est convergente. Ce qui nous permet de dire que le rayon de convergence est au moins égal à 1. ainsi :
   — $g_X$ est-elle continue sur $[-1;+1]$
   — $g_X$ est-elle de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1;+1[$
2. D'après la théorie des séries entières, nous avons $\mathbf{P}(\{X=n\}) = \dfrac{g_X^{(n)}(0)}{n\,!}$, ce qui signifie que la fonction génératrice définit bien la loi de la variable aléatoire réelle .

**Exemple 12 :**

1. La loi de Bernouilli
   Soit $X$ une variable aléatoire réelle qui suit une loi de Bernouilli de paramètre $p$, alors
   $$g_X(t) = \mathbb{E}\left(t^X\right) = t^0\mathbf{P}(\{X=0\}) + t^1\mathbf{P}(\{X=1\}) = (1-p) + tp$$
   Ainsi, si $X$ suit une loi de Bernouilli de paramètre $p$, $g_X(t) = (1-p) + tp$
2. La loi binômiale
   Soit $X$ une variable aléatoire réelle qui suit une loi binômiale de paramètre $n$ et $p$, alors
   $$\begin{aligned} g_X(t) = \mathbb{E}\left(t^X\right) &= \sum_{k=0}^{n} t^k \mathrm{C}_n^k p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k (tp)^k (1-p)^{n-k} \\ &= (tp+1-p)^n \end{aligned}$$
   Ainsi, si $X$ suit une loi binômiale de paramètre $n$ et $p$, $g_X(t) = ((1-p)+tp)^n$
3. La loi uniforme sur $\{1,\cdots,n\}$
   Soit $X$ une variable aléatoire réelle qui suit une loi uniforme sur $\{1,\cdots,n\}$ ; ceci veut dire que, pour tout $k \in \{1,\cdots,n\}$, $\mathbf{P}(\{X=k\}) = \dfrac{1}{n}$ ; alors
   $$\begin{aligned} g_X(t) = \mathbb{E}\left(t^X\right) &= \sum_{k=0}^{n} t^k \mathbf{P}(\{X=k\}) \\ &= \sum_{k=0}^{n} t^k \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} t^k \\ &= \frac{1}{n}\left(\frac{1-t^{n+1}}{1-t}\right) \quad \text{somme des termes d'une suite géométrique} \end{aligned}$$

Ainsi, si $X$ suit une loi uniforme sur $\{1, \cdots, n\}$, $g_X(t) = \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1-t^{n+1}}{1-t}\right)$

On peut remarquer, qu'à priori, $g_X$ n'est pas définie pour $t = 1$. Mais, comme nous avons $\displaystyle\lim_{\substack{t \to +1 \\ t < +1}} g_X(t) = +1$, nous pouvons poser, en prolongeant par continuité, $g_X(1) = +1$

4. <u>La loi géométrique</u>
Soit $X$ une variable aléatoire réelle qui suit une loi géométrique de paramètre $p$ ; ceci veut dire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}(\{X = n\}) = p(1-p)^{n-1}$ ; alors

$$\begin{aligned} g_X(t) = \mathbb{E}\left(t^X\right) &= \sum_{n \geqslant 1} t^n \mathbf{P}(\{X = n\}) \\ &= \sum_{n \geqslant 1} t^n p(1-p)^{n-1} \\ &= tp \sum_{n \geqslant 1} t^{n-1}(1-p)^{n-1} \\ &= tp \sum_{n \geqslant 0} t^n (1-p)^n \end{aligned}$$

La série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} t^n (1-p)^n$ ne converge que si $|t(1-p)| < +1$, c'est à dire si $|t| < \dfrac{+1}{1-p}$.

En supposant cette condition remplie, nous avons $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} t^n (1-p)^n = \frac{1}{1-(t(1-p))}$

Ainsi, si $X$ suit une loi géométrique de paramètre $p$, $g_X(t) = \dfrac{tp}{1-(t(1-p))}$

5. <u>La loi de Poisson</u>
Soit $X$ une variable aléatoire réelle qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda$ ; ceci veut dire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(\{X = n\}) = \dfrac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n\,!}$ ; alors

$$\begin{aligned} g_X(t) = \mathbb{E}\left(t^X\right) &= \sum_{n \geqslant 0} t^n \mathbf{P}(\{X = n\}) \\ &= \sum_{n \geqslant 0} t^n \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n\,!} \\ &= e^{-\lambda} \sum_{n \geqslant 0} \frac{(t\lambda)^n}{n\,!} \\ &= e^{-\lambda} \times e^{\lambda t} \\ &= e^{\lambda(t-1)} \end{aligned}$$

Ici, il n'y a aucun problème de convergence.
Ainsi, si $X$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda$, $g_X(t) = e^{\lambda(t-1)}$

### 14.9.2 Proposition

Soit $X$ une variable aléatoire réelle à valeurs entières de fonction génératrice $g_X$
Si $X$ admet un moment d'ordre 2, alors les dérivées $g'_X(1)$ et $g''_X(1)$ existent.
Dans ce cas, nous avons :
- $\mathbb{E}(X) = g'_X(1)$
- $\sigma^2(X) = g''_X(1) + g'_X(1) - (g'_X(1))^2$

<u>**Démonstration**</u>

On suppose que $X$ admet un moment d'ordre 2 ; alors, d'après 14.6.14, $X$ admet un moment d'ordre 1 *(c'est à dire que si $\mathbb{E}(X^2)$ existe, alors $\mathbb{E}(X)$ existe aussi)*

Nous avons donc $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} n\mathbf{P}(\{X = n\}) < +\infty$ et $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} n^2\mathbf{P}(\{X = n\}) < +\infty$

— La série dérivée $\sum_{n\geqslant 0} nt^{n-1}\mathbf{P}(\{X=n\})$ converge pour $|t|<+1$, et pour $|t|<+1$, nous avons $g'_X(t)=\sum_{n\geqslant 0} nt^{n-1}\mathbf{P}(\{X=n\})$.

Comme $\sum_{n\geqslant 0} n\mathbf{P}(\{X=n\})$ converge, d'après le théorème d'Abel sur les séries, nous avons

$$\lim_{\substack{t\to+1\\ t<+1}} g'_X(t)=\sum_{n\geqslant 0} n\mathbf{P}(\{X=n\})=\mathbb{E}(X)=g'_X(1)$$

— De la même manière, la série dérivée seconde $\sum_{n\geqslant 0} n(n-1)t^{n-2}\mathbf{P}(\{X=n\})$ converge pour $|t|<+1$, et pour $|t|<+1$, nous avons $g''_X(t)=\sum_{n\geqslant 0} n(n-1)t^{n-2}\mathbf{P}(\{X=n\})$.

Comme $\sum_{n\geqslant 0} n\mathbf{P}(\{X=n\})$ et $\sum_{n\geqslant 0} n^2\mathbf{P}(\{X=n\})$ convergent, nous avons

$$\sum_{n\geqslant 0} n^2\mathbf{P}(\{X=n\})-\sum_{n\geqslant 0} n\mathbf{P}(\{X=n\})=\sum_{n\geqslant 0} n(n-1)\mathbf{P}(\{X=n\})$$

La série $\sum_{n\geqslant 0} n(n-1)\mathbf{P}(\{X=n\})$ est donc convergente. D'après le théorème d'Abel sur les séries, nous avons

$$\lim_{\substack{t\to+1\\ t<+1}} g''_X(t)=\sum_{n\geqslant 0} n(n-1)\mathbf{P}(\{X=n\})=\mathbb{E}(X)=g''_X(1)=\mathbb{E}\left(X^2\right)-\mathbb{E}(X)$$

Ainsi $\sigma^2(X)=\mathbb{E}\left(X^2\right)-(\mathbb{E}(X))^2=g''_X(1)+g'_X(1)-(g'_X(1))^2$

**Exemple 13 :**

1. Loi de Bernouilli
   Si $X$ est une variable aléatoire réelle suivant une loi de Bernouilli de paramètre $p$, la fonction génératrice est donnée par $g_X(t)=(1-p)+tp$. Alors, $g'_X(t)=p$ et $g''_X(t)=0$.
   Ainsi, nous avons $\mathbb{E}(X)=g'_X(1)=p$ et $\sigma^2(X)=g''_X(1)+g'_X(1)-(g'_X(1))^2=0+p-p^2=p(1-p)$
2. Loi Binômiale
   Pour une loi binômiale $\mathcal{B}(n,p)$, nous avons $g_X(t)=((1-p)+tp)^n$, et donc :

   — $g'_X(t)=np((1-p)+tp)^{n-1}$

   — $g''_X(t)=n(n-1)p^2((1-p)+tp)^{n-2}$

   D'où

   — $g'_X(1)=np$

   — $g''_X(1)=n(n-1)p^2$

   Et nous en déduisons que $\mathbb{E}(X)=g'_X(1)=np$ et

$$\sigma^2(X)=n(n-1)p^2+np-n^2p^2=np-np^2=np(1-p)$$