Chapitre 12

Réduction des matrices

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne un corps commutatif ; ce corps commutatif pouvant être $\mathbb{R}$, le corps des réels, ou, $\mathbb{C}$, le corps des complexes.

Motivation du chapitre

Pour motiver l'étude du chapitre, nous nous plaçons dans le plan $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2
Voici deux transformations simples définies par une matrice :

1. Soit $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une application dont la matrice dans la base canonique est :

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

   Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, nous obtenons $h\left[(x, y)\right] = (2x, 2y)$
   L'application h est une homothétie de $\mathbb{R}^2$. Si D est une droite vectorielle, alors elle est globalement invariante par cette transformation, c'est-à-dire si $P \in D$ alors $h(P) \in D$ (mais on n'a pas $h(P) = P$).

2. Soit $k : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une application dont la matrice dans la base canonique est :

$$K = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

   Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, nous obtenons $k\left[(x, y)\right] = (2x, 3y)$
   L'application k n'est plus une homothétie. Cependant la droite vectorielle de base $\overrightarrow{i}$ est globalement invariante par k ; de même, la droite vectorielle de base $\overrightarrow{j}$ est globalement invariante.

Pour une matrice quelconque, il s'agit de voir comment on se ramène à ces situations géométriques simples. C'est ce qui nous amènera à la notion de vecteurs propres et de valeurs propres.

12.1 Similitudes des matrices

12.1.1 Définition et Théorème

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{K}$ un corps quelconque.
Nous considérons $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées à coefficients dans $\mathbb{K}$.
Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on dit que 2 matrices $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables si et seulement si il existe $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, inversible telle que

$$X = PYP^{-1}$$

La relation $\mathcal{S}$ définie pour tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et tout $Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par :

$$X \mathcal{S} Y \iff X \text{ et } Y \text{ sont semblables}$$

est une relation d'équivalence

Démonstration

Démontrer que c'est une relation d'équivalence n'est pas difficile.

Réflexivité Très simple, il suffit de prendre pour P, la matrice identité Id_n

Symétrie Soient $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $X\mathcal{S}Y$. Il existe alors $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, inversible telle que $X = PYP^{-1}$. Or :

$$X = PYP^{-1} \Longleftrightarrow P^{-1}XP = Y$$

Et donc $Y\mathcal{S}X$

Transitivité Soient $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $Z \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $X\mathcal{S}Y$ et $Y\mathcal{S}Z$; alors :
→ Il existe $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, inversible telle que $X = PYP^{-1}$
→ Et, il existe $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, inversible telle que $Y = QZQ^{-1}$
Donc $X = PYP^{-1} = P\left(QZQ^{-1}\right)P^{-1} = (PQ)\,Z\left(Q^{-1}P^{-1}\right)$
Or, $(PQ)^{-1} = Q^{-1}P^{-1}$, et nous avons donc $X = (PQ)\,Z\,(PQ)^{-1}$ et donc $X\mathcal{S}Z$.
La relation est donc transitive

Remarque 1 :

1. Que P soit inversible signifie que $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$
2. Dire que 2 matrices sont semblables, c'est dire qu'elle représentent **la même application linéaire dans 2 bases différentes**. La matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ représentant la matrice de passage d'une base dans une autre

12.1.2 Théorème : invariants dans la relation de similitude

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{K}$ un corps quelconque et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées à coefficients dans $\mathbb{K}$.
2 matrices semblables ont même trace et même déterminant

Démonstration

Soient $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ 2 matrices semblables. Il existe alors $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, inversible telle que $X = PYP^{-1}$

1. **X et Y ont même trace**
   Si, pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{tr}\,(A)$ est la trace de A alors, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et tout $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, nous avons $\mathrm{tr}\,(AB) = \mathrm{tr}\,(BA)$. Donc :
   $$\mathrm{tr}\,(X) = \mathrm{tr}\left(PYP^{-1}\right) = \mathrm{tr}\left((PY)\,P^{-1}\right) = \mathrm{tr}\left(P^{-1}\,(PY)\right) = \mathrm{tr}\left(\left(P^{-1}P\right)Y\right) = \mathrm{tr}\,(Y)$$
   Ce que nous voulions
2. **X et Y ont même déterminant**
   Si, pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\det(A)$ est le déterminant de A alors, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et tout $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, nous avons $\det(AB) = \det A \times \det B$. Donc :
   $$\det(X) = \det\left(PYP^{-1}\right) = \det P \times \det Y \times \det P^{-1} = \det P \times \det Y \times (\det P)^{-1} = \det Y$$
   Ce que nous voulions