12.2 Vecteurs propres et valeurs propres

12.2.1 Définition

E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u : E \longrightarrow E$ une application linéaire $(u \in \mathcal{L}(E))$.
On appelle vecteur propre de u, tout vecteur $x \in E$, non nul, tel qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u(x) = \lambda x$

Remarque 2 :

1. Le cas du vecteur nul : $x = \overrightarrow{0}$ est sûrement vecteur propre de u puisque $u\left(\overrightarrow{0}\right) = \overrightarrow{0}$, mais, c'est un vecteur propre un peu spécial ! !
2. Si D est un sous-espace vectoriel engendré par un vecteur propre, alors $u(D) \subset D$

12.2.2 Définition

E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u : E \longrightarrow E$ une application linéaire $(u \in \mathcal{L}(E))$.

1. On appelle valeur propre de u, tout élément $\lambda \in \mathbb{K}$ tel qu'il existe $x \in E$ avec $x \neq \overrightarrow{0}$ tel que $u(x) = \lambda x$
2. Etant donnée une valeur propre λ de u, on appelle *espace propre* l'ensemble

$$E_\lambda = \{y \in E / u(y) = \lambda y\}$$

Remarque 3 :

Il faut remarquer que dans les définitions 12.2.1 ou 12.2.2, la notion de vecteur propre ou de valeur propre est définie dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel quelconque, pas forcément de dimension finie.

12.2.3 Théorème

E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u : E \longrightarrow E$ une application linéaire.

1. Si $x \in E$ avec $x \neq 0$ est un vecteur propre de u, alors, la valeur propre correspondante est unique
2. Si λ est valeur propre de u, alors $E_\lambda = \{y \in E / u(y) = \lambda y\}$, l'espace propre associé à la valeur propre λ est un sous-espace vectoriel de E ; de plus $E_\lambda \neq \{\overrightarrow{0}\}$ et est stable par u, c'est à dire que $u(E_\lambda) \subset E_\lambda$

Démonstration

1. Soit $x \in E$ avec $x \neq \overrightarrow{0}$ tel qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ et $\mu \in \mathbb{K}$, avec $\lambda \neq \mu$ et $u(x) = \lambda x = \mu x$
   Alors, $u(x) = \lambda x = \mu x \Longrightarrow \lambda x - \mu x = \overrightarrow{0} \Longleftrightarrow (\lambda - \mu) x = \overrightarrow{0}$.
   Comme $\lambda \neq \mu$, alors $x = \overrightarrow{0}$, ce qui est impossible, par hypothèse. Et donc $\lambda = \mu$.
2. Que λ soit valeur propre de u, veut dire qu'il existe $x \neq \overrightarrow{0}$ tel que $u(x) = \lambda x$. Montrons que E_λ est un sous-espace vectoriel de E.
   $\Rightarrow$ Tout d'abord, $E_\lambda \neq \emptyset$ puisque $\overrightarrow{0} \in E_\lambda$. En effet, nous avons $u\left(\overrightarrow{0}\right) = \overrightarrow{0} = \lambda \overrightarrow{0}$
   $\Rightarrow$ Ensuite, soient $\vec{x} \in E_\lambda$, $\vec{y} \in E_\lambda$, $a \in \mathbb{K}$ et $b \in \mathbb{K}$. Avons nous $a\vec{x} + b\vec{y} \in E_\lambda$?.
   Par linéarité, nous avons $u(a\vec{x} + b\vec{y}) = au(\vec{x}) + bu(\vec{y})$. Comme $\vec{x} \in E_\lambda$ et $\vec{y} \in E_\lambda$, nous avons :

$$u(a\vec{x} + b\vec{y}) = a\lambda\vec{x} + b\lambda\vec{y} = \lambda((a\vec{x} + b\vec{y})$$

   Ce qui montre que $(a\vec{x} + b\vec{y} \in E_\lambda$
   E_λ est donc un sous-espace vectoriel de E
3. Que E_λ soit stable par u est évident.

Remarque 4 :

1. Si 0 est valeur propre de $u : E \longrightarrow E$, ceci signifie qu'il existe $x \neq \overrightarrow{0}$ tel que $u(x) = \overrightarrow{0}$, alors, $E_0 \neq \{\overrightarrow{0}\}$; en fait, $E_0 = \ker u$ et u n'est pas injectif.
2. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $E_\lambda = \{y \in E / u(y) = \lambda y\}$; alors la condition $E_\lambda = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$, signifie que λ n'est pas valeur propre de u

Exemple 1 :

1. Une homotéthie de E de rapport λ a λ pour seule valeur propre, le sous-espace propre associé est tout l'espace E
2. Un projecteur p de E *(différent de l'identité et de l'application nulle)* a pour valeurs propres 0 et 1, les sous-espaces propres associés sont le noyau et l'image de p ; en effet si $p(v) = \lambda v$ alors comme $p^2 = p$, nous avons $\lambda^2 v = \lambda v$ soit $\lambda^2 = \lambda$ puisque $v \neq 0$
3. Un endomorphisme f d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel tel que $f^n = \mathrm{Id}_E$ a pour valeurs propres des racines n-ièmes de 1 ; en effet si $f(v) = \lambda v$ on a $f^n(v) = \lambda^n v$, soit $\lambda^n v = v$ et si $v \neq \overrightarrow{0}$, alors $\lambda^n = 1$
4. E est le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. L'endomorphisme de E dans lui même qui, à une fonction f associe sa dérivée f' admet tous les réels pour valeur propre ; par exemple, la fonction $f(x) = e^{ax}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre a.

12.2.4 Théorème

E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u : E \longrightarrow E$ un endomorphisme de E
Supposons $\lambda \in \mathbb{K}$ et $\mu \in \mathbb{K}$ valeurs propres de u Alors,

$$\lambda \neq \mu \Longrightarrow E_\lambda \cap E_\mu = \{\overrightarrow{0}\}$$

Démonstration

Soit $x \in E_\lambda \cap E_\mu$; alors, $u(x) = \mu x = \lambda x$, donc, $(\lambda - \mu) x = 0$; et comme $\lambda \neq \mu$, on en déduit que $x = \overrightarrow{0}$

12.2.5 Théorème

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u : E \longrightarrow E$ un endomorphisme de E
Supposons $\lambda \in \mathbb{K}$ et $\mu \in \mathbb{K}$ valeurs propres de u telles que $\lambda \neq \mu$.
Soient $x \in E_\lambda$ tel que $x \neq 0$ et $y \in E_\mu$ avec $y \neq 0$
Alors x et y sont linéairement indépendants

Démonstration

Supposons, au contraire, que x et y non nuls tous les deux ne soient pas linéairement indépendants, c'est à dire qu'il existe $\alpha \neq 0$ tel que $y = \alpha x$.
On a alors $u(y) = \mu y = \mu \alpha x$ et $u(y) = u(\alpha x) = \alpha u(x) = \alpha \lambda x$
Donc, $\alpha \lambda x = \mu \alpha x \Longleftrightarrow \alpha(\lambda - \mu) x = \overrightarrow{0}$.
Comme $\alpha(\lambda - \mu) \neq 0$, nous en concluons $x = \overrightarrow{0}$
On est donc en contradiction avec l'hypothèse. Donc x et y sont linéairement indépendants.

12.2.6 Théorème : généralisation

E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u : E \longrightarrow E$ un endomorphisme de E admettant m valeurs propres 2à 2 distinctes $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$. Alors, la famille $x_1, \ldots, x_m$ de vecteurs tels que x_i a pour valeurs propres λ_i est une famille libre.

Démonstration

On appelle $P(m)$ la propriété à démontrer. La démonstration se fait par récurrence sur m

1. Elle est évidente pour $m = 1$
2. Supposons $P(m)$ vraie
3. Soient $m+1$ valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_{m+1}$ distinctes 2 à 2 et $m+1$ vecteurs $x_1, \dots, x_{m+1}$, tels que x_i a pour valeur propre λ_i.
   Nous allons montrer que la famille $\{x_1, \dots, x_{m+1}\}$ est une famille libre.
   Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_{m+1}$, $(m+1)$ réels tels que

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_m x_m + \alpha_{m+1} x_{m+1} = \overrightarrow{0} \tag{12.1}$$

   Alors, en faisant « opérer » u dans l'équation 12.1, nous obtenons

$$\alpha_1 \lambda_1 x_1 + \cdots + \alpha_{m+1} \lambda_{m+1} x_{m+1} = \overrightarrow{0}$$

   En multipliant 12.1 par λ_{m+1}, nous obtenons

$$\alpha_1 \lambda_{m+1} x_1 + \cdots + \alpha_{m+1} \lambda_{m+1} x_{m+1} = \overrightarrow{0}$$

   Puis, en soustrayant, le terme $\alpha_{m+1} \lambda_{m+1} x_{m+1}$ disparaissant :

$$\alpha_1 (\lambda_{m+1} - \lambda_1) x_1 + \cdots + \alpha_m (\lambda_{m+1} - \lambda_m) x_m = 0$$

   Nous avons donc m valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ distinctes 2 à 2 et m vecteurs $x_1, \dots, x_m$, tels que x_i a pour valeur propre λ_i.
   D'après l'hypothèse de récurrence $P(m)$, $\{x_1, \dots, x_m\}$ est une famille libre, et donc

$$\alpha_1 (\lambda_{m+1} - \lambda_1) = \cdots = \alpha_i (\lambda_{m+1} - \lambda_i) = \cdots = \alpha_m (\lambda_{m+1} - \lambda_m) = 0$$

   De l'hypothèse des valeurs propres 2 à 2 distinctes, on déduit que $\alpha_1 = \cdots = \alpha_i = \cdots = \alpha_m = 0$, et donc, que $\alpha_{m+1} = 0$; ce qui termine de montrer que les vecteurs $\{x_1, \dots, x_{m+1}\}$ forment une famille libre.

12.2.7 Corollaire

E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E
Alors, $u : E \longrightarrow E$ admet au plus n valeurs propres.

Démonstration

Evident, car si E est de dimension n, il y a au plus n vecteurs linéairement indépendants, donc au plus n valeurs propres distinctes.

12.2.8 Corollaire

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E
Soient $\lambda_1 \dots \lambda_m$ m valeurs propres distinctes de u et F un sous-espace vectoriel de E tel que

$$F = E_{\lambda_1} + E_{\lambda_2} + \cdots + E_{\lambda_m}$$

Alors F est somme directe des E_{λ_i} et nous avons donc

$$F = E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_m}$$

Démonstration

Rappel :
F est somme directe des E_{λ_i} si et seulement si, pour tout $x \in F$, x peut s'écrire de manière unique $x = x_1 + \cdots + x_m$ où $x_i \in E_{\lambda_i}$

1. Soit $x \in F$.
   Alors, $x = x_1 + \cdots + x_m$ où $x_i \in E_{\lambda_i}$.
   Supposons $x = \overrightarrow{0} \iff x_1 + \cdots + x_m = \overrightarrow{0}$
   Nous allons montrer que, pour tout $i = 1, \cdots, m$, $x_i = \overrightarrow{0}$
   En effet, supposons $x_1 + \cdots + x_m = 0$, et qu'il existe i_0 tel que $x_{i_0} \neq 0$
   Ceci signifie que les $\{x_1, \cdots, x_m\}$ forment une famille linéairement dépendantes; ce qui est en contradiction avec le théorème 12.2.6
   Conclusion, tous les x_i sont nuls
2. Ce qui permet de montrer l'unicité de la décomposition de $x \in F$.
   En effet, supposons $x = x_1 + \cdots + x_m = x_1^1 + \cdots + x_m^1$.
   Alors, $\left(x_1 - x_m^1\right) + \cdots + \left(x_m - x_m^1\right) = \overrightarrow{0}$. Comme $\left(x_i - x_i^1\right) \in E_{\lambda_i}$, nous avons $x_i - x_i^1 = \overrightarrow{0}$, pour tout i, c'est à dire que pour tout i, nous avons $x_i = x_i^1$
   Il y a donc unicité de la décomposition et F est donc somme directe des E_{λ_i}

12.2.9 Théorème

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E et $\lambda \in \mathbb{K}$
Les propriétés suivantes sont équivalentes :
- ⇒ $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de u
- ⇒ L'endomorphisme $u - \lambda \mathrm{Id}_E$ n'est pas injectif

Démonstration

1. On suppose que $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de u
   Il existe alors $x \neq 0$ tel que $u(x) = \lambda x$, ce qui est équivalent à
   $$u(x) - \lambda x = \overrightarrow{0} \iff (u - \lambda \mathrm{Id}_E)(x) = \overrightarrow{0}$$
   Donc, $\ker(u - \lambda \mathrm{Id}_E) \neq \{\overrightarrow{0}\}$, ce qui montre que $u - \lambda \mathrm{Id}_E$ n'est pas injective.
2. Réciproquement, on suppose que $u - \lambda \mathrm{Id}_E$ n'est pas injective
   Alors $\ker(u - \lambda \mathrm{Id}_E) \neq \left\{\overrightarrow{0}\right\}$
   Il existe donc $x \neq \overrightarrow{0}$ tel que $(u - \lambda \mathrm{Id}_E)(x) = \overrightarrow{0}$, ce qui est équivalent à $u(x) = \lambda x$; donc, $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de u.

12.2.10 Corollaire

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E et $\lambda \in \mathbb{K}$
Les propriétés suivantes sont équivalentes :
- ⇒ $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de u
- ⇒ L'endomorphisme $u - \lambda \mathrm{Id}_E$ n'est pas inversible

Démonstration

1. On suppose que $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de u
   D'après le théorème 12.2.9 nous savons déjà que $u - \lambda \mathrm{Id}_E$ n'est pas injective, et comme E est de dimension finie, $u - \lambda \mathrm{Id}_E$ n'est pas bijective, donc non inversible, c'est à dire $\det(u - \lambda \mathrm{Id}_E) \neq 0$

2. <u>Réciproquement, on suppose que $u - \lambda \mathrm{Id}_E$ n'est pas inversible</u>
   Comme E est de dimension finie, $u - \lambda \mathrm{Id}_E$ n'est pas bijective, donc non injective, et donc $\ker(u - \lambda \mathrm{Id}_E) \neq \left\{\overrightarrow{0}\right\}$
   Il existe donc $x \neq \overrightarrow{0}$ tel que $(u - \lambda \mathrm{Id}_E)(x) = \overrightarrow{0}$, ce qui est équivalent à $u(x) = \lambda x$; donc, $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de u.

Remarque 5 :

1. On remarque que pour $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ valeur propre de u, nous avons : $E_\lambda = \ker(u - \lambda \mathrm{Id}_E)$
2. (a) Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E. Si u est bijectif et admet λ comme valeur propre, alors $\lambda \neq 0$.
   (b) Réciproquement, si toutes les valeurs propres de u sont non nulles, alors u est bijectif.