12.3 Valeur propre d'une matrice

12.3.1 Rappels et introduction

1. Soit $\mathcal{B}$ une base de E, $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n ; alors, il existe un isomorphisme entre $\mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ainsi défini :
$$\begin{cases} M_{\mathcal{B}} : \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ \qquad\qquad u & \longmapsto & M_{\mathcal{B}}(u) = A \end{cases}$$
Où $M_{\mathcal{B}}(u) = A$ est la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$.
2. Nous pouvons ainsi définir les vecteurs propres et les valeurs propres de la matrice A, comme étant les vecteurs propres et les valeurs propres de $u \in \mathcal{L}(E)$
3. $X \in E$ étant un vecteur propre de u de valeur propre associée $\lambda \in \mathbb{K}$, si $A = M_{\mathcal{B}}(u)$ et $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ les coordonnées de X dans la base $\mathcal{B}$, nous aurons :
$$A \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Nous avons donc le théorème suivant :

12.3.2 Théorème

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée d'ordre n ; les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. λ est valeur propre de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
2. La matrice $A - \lambda \mathrm{Id}_n$ n'est pas inversible
3. $\det(A - \lambda \mathrm{Id}_n) = 0$

Démonstration

Ce théorème est en fait un corollaire évident de 12.2.9 ; il suffit d'utiliser l'isomorphisme entre $\mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

12.3.3 Définition

1. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E. Le spectre de u que nous notons $\mathrm{Spec}(u)$ est l'ensemble des valeurs propres de u
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée d'ordre n. Le spectre de A que nous notons aussi $\mathrm{Spec}(A)$ est l'ensemble des valeurs propres de A

Remarque 6 :

La notion de spectre d'un opérateur est beaucoup plus large et s'étant aussi aux $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension quelconque. En dimension finie, cette notion coïncide avec l'ensemble des valeurs propres

Exemple 2 :

1. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2, rapporté à une base $\left\{\vec{i}, \vec{j}\right\}$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ de matrice dans la base $\left\{\vec{i}, \vec{j}\right\}$: $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
Soient $\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Alors : $A\vec{u} = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $A\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$
Nous avons $A\vec{v} = 2\vec{v}$, ce qui veut dire $u(\vec{v}) = 2\vec{v}$; ce qui montre que $\vec{v}$ est un vecteur propre de u de valeur propre 2, alors que $\vec{u}$ n'et pas un vecteur propre.

2. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2. Une rotation d'angle différent de 0 et π de E n'a pas de valeurs propres.
   Il est important de remarquer que nous parlons d'un **$\mathbb{R}$-espace vectoriel** . Le problème pourrait être différent [1] pour un $\mathbb{C}$-espace vectoriel

   Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice de rotation du plan. C'est à dire que :

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

   Existe-t-il $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$?

   ▷ Si tout celea existe, nous avons :

$$\begin{cases} \cos\theta x - \sin\theta y = & \lambda x \\ \sin\theta x + \cos\theta y = & \lambda y \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} (\cos\theta - \lambda)\, x - \sin\theta y = & 0 \\ \sin\theta x + (\cos\theta - \lambda)\, y = & 0 \end{cases}$$

   ▷ Le déterminant du système est

$$\begin{vmatrix} \cos\theta - \lambda & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta - \lambda \end{vmatrix} = (\cos\theta - \lambda)^2 + \sin^2\theta = \lambda^2 - 2\lambda\cos\theta + 1$$

   Si $P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda\cos\theta + 1$, le discriminant de P est $\Delta = 4\left(\cos^2\theta - 1\right) \leqslant 0$
   $\Delta = 0 \Longleftrightarrow \theta = 2k\pi$ ou $\theta = (2k+1)\,\pi$

   ▷ Ainsi, si $\theta \neq 2k\pi$ ou $\theta \neq (2k+1)\,\pi$ A n'admet pas de valeur propre

   ▷ Sinon une rotation d'angle $2k\pi$ dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2 est Id_E qui admet 1 comme valeur propre

   ▷ Et une rotation d'angle $(2k+1)\,\pi$ dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2 est $-\mathrm{Id}_E$ qui admet -1 comme valeur propre

3. Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ où $A_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. A_θ est la matrice de rotation d'axe $\vec{k}$ et d'angle θ. On vérifie que le vecteur $\vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de valeur propre 1.
   On démontre (et facilement !) que 1 est la seule valeur propre de A_θ

4. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ où $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. On démontre que $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ est valeur propre de A. En effet, nous avons :

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ j \end{pmatrix} = j \begin{pmatrix} 1 \\ j \end{pmatrix}$$

Exercice 1 :

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Montrer que $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$ sont des vecteurs propres de A. Quelles sont les valeurs propres associées ?
2. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -1$ et $\lambda_3 = 0$ sont valeurs propres de A.
   Pour chaque valeur propre, trouver un vecteur propre associé.
3. Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & -7 & 7 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 7 & -2 \end{pmatrix}$. Montrer que les vecteurs $X_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $X_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont des vecteurs propres de A. Montrer que la famille $\{X_1, X_2, X_3\}$ ne forme pas une famille libre. Est-ce que cela contredit un résultat du cours ?

1. En fait, il est différent ! !

Exercice 2 :

E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2, rapporté à une base $\left\{\vec{i},\vec{j}\right\}$ et $f : E \longrightarrow E$ une application linéaire de matrice, dans la base $\left\{\vec{i},\vec{j}\right\}$,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Démontrer que $k_0 = 5$ et $k_1 = -1$ sont des valeurs propres de f (ou de A).
2. Trouver $\overrightarrow{u_0}$ un vecteur propre de valeur propre $k_0 = 5$ et $\overrightarrow{u_1}$ un vecteur propre de valeur propre $k_1 = -1$ et démontrer que ces 2 vecteurs déterminent une base de E.
3. Quelle est la matrice de $f : E \longrightarrow E$ dans la base $\{\overrightarrow{u_0},\overrightarrow{u_1}\}$; on appelle cette matrice B.
4. Trouver une matrice P, telle que $A = P^{-1}BP$, et montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $A^n = P^{-1}B^nP$

12.3.4 Proposition

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$; alors, toutes les **matrices semblables** à A ont même valeurs propres.

Démonstration

Soit B une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ semblable à A.
Il existe donc $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, inversible telle que $B = PAP^{-1}$. Soit X un vecteur propre de A, valeur propre $\lambda \in \mathbb{K}$.
Alors PX est un vecteur propre de B de valeur propre λ. En effet :

$$B(PX) = (BP)X = \left(PAP^{-1}P\right)X = (PA)X = P(AX) = P(\lambda X) = \lambda PX$$

Ainsi, PX est un vecteur propre de B de valeur propre λ.

Remarque 7 :

1. On vient de démontrer que si les valeurs propres de 2 matrices semblables sont identiques, il n'en est pas de même des vecteurs propres.
   D'autre part, les matrices B semblables à A sont de la forme $B = P^{-1}AP$, ont même valeur propre, puisqu'en fait, B est aussi la matrice de $u \in \mathcal{L}(E)$, mais dans une autre base.
2. le résultat fondamental pour déterminer les valeurs propres est donné par le théorème 12.3.2 :
   $$\lambda \text{ est valeur propre de } A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \text{ si et seulement si } \det(A - \lambda \mathrm{Id}_n) = 0$$
3. L'expression $P(\lambda) = \det(A - \lambda \mathrm{Id}_n)$ est un nombre et donc, toujours par le théorème 12.3.2 :
   $$\lambda \text{ est valeur propre de } A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \text{ si et seulement si } P(\lambda) = 0$$
4. On peut remplacer λ par une indéterminée X, et alors $P(X) = \det(A - X\mathrm{Id}_n)$ est un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$; c'est un polynôme de $\mathbb{K}_n[X]$
   $$\lambda \text{ est valeur propre de } A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \text{ si et seulement si } \lambda \text{ est racine de } P$$
5. **Exemple :**
   Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ alors $A - \lambda \mathrm{Id}_n = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 4 \\ 0 & 6-\lambda \end{pmatrix}$ et $P(\lambda) = (2-\lambda)(6-\lambda) = \lambda^2 - 8\lambda + 12$, que l'on, peut transformer en $P(X) = X^2 - 8X + 12$ où P devient un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$ de racines $x_1 = 2$ et $x_2 = 6$.
   Les valeurs propres de A sont donc $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = 6$

12.3.5 Proposition

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Le polynôme caractéristique de A est $P_A(X) = \det(A - X\mathrm{Id}_n)$
λ est valeur propre de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ si et seulement si λ est racine du polynôme caractéristique P_A

Remarque 8 :

1. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n rapporté à une base $\mathcal{B}$, $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$.
   Le polynôme caractéristique de A, est aussi appelé polynôme caractéristique de u
2. Une valeur propre λ d'une matrice *(ou d'une application linéaire)* est donc une racine du polynôme caractéristique puisque $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda \mathrm{Id}_n) = 0$

Exemple 3 :

1. On pose $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & 8 & 2 \end{pmatrix}$
   Alors, $P_A(X) = \begin{vmatrix} 3-X & 1 & 0 \\ -4 & -1-X & 0 \\ 4 & 8 & 2-X \end{vmatrix}$, et le calcul donne :
   $$P_A(X) = (2-X)(X-1)^2$$
   Nous avons 1 et 2 comme valeurs propres de A
   Recherchons les vecteurs propres de A
   Nous avons 2 valeurs propres : 1 et 2
   (a) Pour la valeur propre $\lambda = 1$ on peut remarquer qu'elle est double*(elle est racine double du polynôme caractéristique)*, et les vecteurs propres doivent vérifier : $AX = X$, ou, ce qui est équivalent :
   $$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & 8 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$
   $$\iff \begin{cases} 2x + y = & 0 \\ -4x - 2y = & 0 \\ 4x + 8y + z = & 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + y = & 0 \\ 4x + 8y + z = & 0 \end{cases}$$
   Les vecteurs propres de valeur propre $\lambda = 1$ sont de la forme : $\{(x, -2x, 12x) \text{ où } x \in \mathbb{R}\}$
   L'espace propre E_1 est donc une droite de base le vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 12 \end{pmatrix}$
   (b) Pour la valeur propre $\lambda = 2$, on peut remarquer qu'elle est simple ; les vecteurs propres doivent vérifier : $AX = 2X$, ou, ce qui est équivalent :
   $$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 3x + y = & 2x \\ -4x - y = & 2y \\ 4x + 8y + 2z = & 2z \end{cases}$$
   $$\iff$$
   $$\begin{cases} x + y = & 0 \\ -4x - 3y = & 0 \\ 4x + 8y = & 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$$
   Les vecteurs propres de valeur propre $\lambda = 2$ sont de la forme : $\{(0; 0; z) \text{ avec } z \in \mathbb{R}\}$
   On obtient donc 2 sous espaces propres, E_1 et E_2, tels que $\dim E_1 = \dim E_2 = 1$
2. Soit $B = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ A est une matrice de rotation dans $\mathbb{R}^2$
   Alors $P_B(X) = X^2 - (2\cos\theta)X + 1$, ce qui montre que, sauf si $\theta = k\pi$, B n'admet pas de valeurs propres réelles ; par contre, si on considère B comme matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, B admet 2 valeurs propres qui sont $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$.

3. Soit A la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

   Alors $P_A(X) = \begin{vmatrix} -X & 1 \\ -1 & -1-X \end{vmatrix} = X(1+X)+1 = X^2+X+1 = (X-j)(X-\overline{j})$.
   Ainsi :
   $\Rightarrow$ Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, c'est à dire si $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, alors A ne possède pas de valeur propre
   $\Rightarrow$ Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, c'est à dire si $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, alors A possède 2 valeurs propres qui sont j et $\overline{j}$

Exercice 3 :

Rechercher les valeurs propres réelles ou complexes de la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

12.3.6 Proposition

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire *(supérieure ou inférieure)*
Les valeurs propres de A sont les coefficients diagonaux de la matrice.

Démonstration

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire supérieure *(le problème est identique si elle est triangulaire inférieure).*
On suppose

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

dont les coefficients diagonaux s'écrivent $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$
Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la matrice $A - \lambda \mathrm{Id}_n$ est toujours triangulaire supérieure et

$$A - \lambda \mathrm{Id}_n = \begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}-\lambda & \cdots & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix}$$

Et ses coefficients diagonaux s'écrivent $a_{11}-\lambda, a_{22}-\lambda, \cdots, a_{nn}-\lambda$
Le polynôme caractéristique de A est donc :

$$P_A(X) = \det(A - X\mathrm{Id}_n) = \begin{vmatrix} a_{11}-X & a_{12} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}-X & \cdots & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a_{nn}-X \end{vmatrix} = \prod_{i=0}^{n} (a_{ii} - X)$$

Les racines de P_A sont exactement les éléments diagonaux de A

12.3.7 Proposition

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $A^\intercal$ sa matrice transposée
Alors A et $A^\intercal$ ont les mêmes polynômes caractéristiques et donc les mêmes valeurs propres

Démonstration

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $A^\intercal$ sa matrice transposée.
Alors, $P_{A^\intercal}(X) = \det(A^\intercal - X\mathrm{Id}_n)$
Nous allons utiliser 3 propriétés de la matrice transposée :

- $\Rightarrow$ Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors $(A+B)^\intercal = A^\intercal + B^\intercal$
- $\Rightarrow$ En second lieu $\mathrm{Id}_n^\intercal = \mathrm{Id}_n$
- $\Rightarrow$ Et, pour terminer : $\det A = \det A^\intercal$

Ainsi $(A^\intercal - X\mathrm{Id}_n) = (A^\intercal - X\mathrm{Id}_n^\intercal) = (A - X\mathrm{Id}_n)^\intercal$
Comme $\det(A^\intercal - X\mathrm{Id}_n) = \det((A - X\mathrm{Id}_n)^\intercal) = \det(A - X\mathrm{Id}_n)$, nous avons bien $P_{A^\intercal}(X) = P_A(X)$
Ce que nous voulions

12.3.8 Théorème

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On considère le polynôme caractéristique de A, $P_A(X) = \det(A - X\mathrm{Id}_n)$; Alors,

1. Ce polynôme est invariant lorsqu'on remplace A par une matrice semblable à A c'est à dire que si $B = PAP^{-1}$, alors $P_A(X) = P_B(X)$
2. Il est de degré n et de la forme :

$$P_A(X) = (-1)^n X^n - (-1)^{n-1} \operatorname{tr}(A) X^{n-1} + \cdots + \det A$$

Démonstration

1. Soit B une matrice semblable à A, c'est à dire que nous supposons $B = PAP^{-1}$

   Alors,
   $$\begin{aligned} B - X\mathrm{Id}_n = &\ PAP^{-1} - XP\mathrm{Id}_nP^{-1} \\ = &\ PAP^{-1} - P(X\mathrm{Id}_n)P^{-1} \\ = &\ P(A - X\mathrm{Id}_n)P^{-1} \end{aligned}$$
   Donc,
   $$\begin{aligned} P_B(X) = &\ \det(B - X\mathrm{Id}_n) = \det\left(P(A - X\mathrm{Id}_n)P^{-1}\right) \\ = &\ \det P \times \det(A - X\mathrm{Id}_n) \times \det P^{-1} = \det(A - X\mathrm{Id}_n) \\ = &\ P_A(X) \end{aligned}$$
   C'est à dire $P_A(X) = P_B(X)$; les 2 matrices ont même polynôme caractéristique
2. P_A est de degré n et $P_A(X) = (-1)^n X^n - (-1)^{n-1} \operatorname{tr}(A) X^{n-1} + \cdots + \det A$

   La démonstration de cette partie est très calculatoire *(calcul d'un déterminant)* et nous allons l'admettre.
   On peut remarquer que le terme constant est $P_A(0) = \det(A - 0 \times \mathrm{Id}_n) = \det A$

Exemple 4 :

Pour un cas trivial, $n = 2$, la matrice A est de la forme $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, et

$$\begin{aligned} P_A(A) = \det(A - X\mathrm{Id}_n) = &\ \begin{vmatrix} a - X & b \\ c & d - X \end{vmatrix} \\ = &\ (a - X)(d - X) - bc = X^2 - (a+d)X + (ad - bc) \\ = &\ X^2 - \operatorname{tr}(A) X + \det A \end{aligned}$$

Remarque 9 :

En ayant démontré que si 2 matrices A et B sont semblables, alors $P_A(X) = P_B(X)$, nous retrouvons le fait que 2 matrices semblables A et B ont mêmes valeurs propres.
C'est un nouveau cas d'invariance dans le cas des similitudes de matrices.

Exercice 4 :

1. Rechercher les valeurs propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 7 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
2. Calculer le polynôme caractéristique de la matrices $A = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ et en déduire les valeurs propres

12.3.9 Corollaire

1. Toute matrice de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ admet au plus n valeurs propres.
2. Si $\mathbb{K}$ est un corps algébriquement clos, alors, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ admet exactement n valeurs propres distinctes ou confondues.

12.3.10 Proposition

Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Les polynômes caractéristiques de A et A^{-1} vérifient :

$$P_{A^{-1}}(X) = \frac{(-1)^n}{\det A} X^n P_A\left(\frac{1}{X}\right)$$

En particulier, si λ est valeur propre de A alors $\lambda \neq 0$ et $\dfrac{1}{\lambda} = \lambda^{-1}$ est valeur propre de A^{-1}

Démonstration

⇒ Tout d'abord, comme $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, nous avons $\det A \neq 0$ et donc $\lambda \neq 0$

⇒ Remarquons aussi que si $P_A(X) = \sum_{k=0} a_k X^k$, alors

$$X^n P_A\left(\frac{1}{X}\right) = X^n \sum_{k=0} a_k \frac{1}{X^k} = \sum_{k=0} a_k X^{n-k} = \sum_{k=0} a_{n-k} X^k$$

est aussi un polynôme de degré n

⇒ Par définition de $P_{A^{-1}}(X)$, nous avons :

$$\begin{aligned}
P_{A^{-1}}(X) &= \det\left(A^{-1} - X\mathrm{Id}_n\right) = \det\left(A^{-1} - X\left(A^{-1}A\right)\right) \\
&= \det A^{-1}\left(\mathrm{Id}_n - XA\right) = \det A^{-1} \det\left(\mathrm{Id}_n - XA\right) \\
&= \det A^{-1} \det X\left(\frac{1}{X}\mathrm{Id}_n - A\right) \\
&= \det A^{-1} \times X^n \times (-1)^n \det\left(A - \frac{1}{X}\mathrm{Id}_n\right) \\
&= \det A^{-1} \times X^n \times (-1)^n P_A\left(\frac{1}{X}\right) \\
&= \frac{(-1)^n}{\det A} X^n P_A\left(\frac{1}{X}\right)
\end{aligned}$$

Ce que nous voulions

Remarque 10 :

Il nous est possible de nous poser la question : est-ce que n'importe quel polynôme peut être considéré comme polynôme caractéristique ? La réponse est oui et nous la développons dans la proposition suivante :

12.3.11 Définition et proposition

1. Soit $P \in \mathbb{K}_n[X]$ unitaire tel que $P(X) = X^n + c_{n-1}X^{n-1} + c_{n-2}X^{n-2} + \cdots + c_1 X + c_0$.
   On appelle matrice compagnon de P une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par :
$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -c_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & -c_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -c_{n-1} \end{pmatrix}$$
2. Soit $P \in \mathbb{K}_n[X]$ unitaire, alors le polynôme caractéristique de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la matrice compagnon de P est $P_A(X) = (-1)^n P(X)$

Démonstration

Nous allons faire cette démonstration par récurrence sur n

1. **Nous allons le vérifier pour les premiers termes.**
   (a) Pour $n = 2$, nous avons $P(X) = X^2 + c_1 X + c_0$ et la matrice compagnon de P est
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -c_0 \\ 1 & -c_1 \end{pmatrix}$$
   dont le polynôme caractéristique est donné par :
$$P_A(X) = \begin{vmatrix} -X & -c_0 \\ 1 & -X - c_1 \end{vmatrix} = -X(-X - c_1) + c_0 = X^2 + c_1 X + c_0 = (-1)^2 P(X)$$
   (b) Pour $n = 3$, nous avons $P(X) = X^3 + c_2 X^2 + +c_1 X + c_0$ et la matrice compagnon de P est $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -c_0 \\ 1 & 0 & -c_1 \\ 0 & 1 & -c_2 \end{pmatrix}$ dont le polynôme caractéristique est donné par :
$$\begin{aligned} P_A(X) &= \begin{vmatrix} -X & 0 & -c_0 \\ 1 & -X & -c_1 \\ 0 & 1 & -X - c_2 \end{vmatrix} = -X \times \begin{vmatrix} -X & -c_1 \\ 1 & -X - c_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & -c_0 \\ 1 & -X - c_2 \end{vmatrix} \\ &= -X(-X(-X - c_2) + c_1) - c_0 = -X^3 - c_2 X^2 - c_1 X - c_0 \\ &= (-1)^3 P(X) \end{aligned}$$
2. **Supposons que ce soit vrai à l'ordre n**
3. **Démontrons à l'ordre $n + 1$**
   Soit $P(X) = X^{n+1} + c_n X^n + c_{n-1}X^{n-1} + c_{n-2}X^{n-2} + \cdots + c_1 X + c_0$ la matrice compagnon de P est :
$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -c_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & -c_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -c_n \end{pmatrix}$$

Et son polynôme caractéristique $P_A(X) = \det(A - X\mathrm{Id}_{n+1}) = \begin{vmatrix} -X & 0 & \cdots & 0 & -c_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & -c_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -X & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -X - c_n \end{vmatrix}$

En développant par rapport à la première ligne, nous avons :

$$P_A(X) = -X \begin{vmatrix} -X & 0 & \cdots & 0 & -c_1 \\ 1 & \ddots & & \vdots & -c_2 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -X & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -X - c_n \end{vmatrix} + (-1)^{n+1} c_0 \begin{vmatrix} 1 & -X & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -X \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Or,

$$\begin{vmatrix} -X & 0 & \cdots & 0 & -c_1 \\ 1 & \ddots & & \vdots & -c_2 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -X & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -X - c_n \end{vmatrix}$$

est le polynôme caractéristique d'une matrice compagnon de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et

$$\begin{vmatrix} 1 & -X & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -X \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Donc, d'après l'hypothèse de récurrence :

$$P_A(X) = -X\left((-1)^n\left(X^n + c_n X^{n-1} + \cdots + c_2 X + c_1\right)\right) + (-1)^{n+1} c_0$$

Et donc, pour terminer :

$$P_A(X) = (-1)^{n+1}\left(X^{n+1} + c_n X^n + \cdots + c_2 X^2 + c_1 X + c_0\right)$$

Ce que nous voulions ; la proposition est démontrée.

Exercice 5 :

1. Trouver plusieurs matrices carrées d'ordre 2 dont la somme des valeurs propres fait 6 et le produit des valeurs propres fait 2
2. Trouver une matrice, ni diagonale ni triangulaire, dont le polynôme caractéristique est $(X-1)^2\left(X^2+X+1\right)$

12.3.12 Théorème

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice de u dans une base de E.

1. L'ordre d'une valeur propre λ de u est l'ordre de λ en tant que racine du polynôme caractéristique P_A de A
2. Soit λ une valeur propre de u d'ordre k, alors, $1 \leqslant \dim E_\lambda \leqslant k$

Démonstration

On suppose λ valeur propre de u, d'ordre k et $\dim E_\lambda > k$
On pose $\dim E_\lambda = h$, et on construit $\{a_1, \dots, a_h\}$ une base de E_λ, base que l'on complète par $\{a_{h+1}, \dots, a_n\}$.
La matrice de u dans la base $\{a_1, \dots, a_n\}$ est alors, $M_{\{a_1,\dots,a_n\}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda Id_h & A_1 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$ où A_1 est une matrice $h \times (n-h)$ et A_2 est une matrice $(n-h) \times (n-h)$.Donc,

$$M_{\{a_1,\dots,a_n\}}(u) - X\mathrm{Id}_n = \begin{pmatrix} (\lambda - X)\, Id_h & A_1 \\ 0 & A_2 - XId_{n-h} \end{pmatrix}$$

C'est une matrice définie par blocs D'où,

$$\begin{aligned} P_u(X) = & \ (\lambda - X)^h \det(A_2 - X\mathrm{Id}_{n-h}) \\ = & \ (\lambda - X)^h P_{A_2}(X) \end{aligned}$$

Donc, si on suppose $h > k$, alors, l'ordre de λ serait supérieur à k ; ce qui est impossible.
Donc, $h \leqslant k$