12.4 Diagonalisation

Introduction

Dans ce qui suit, nous allons considérer un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n *(en fait, $E=\mathbb{K}^n$)* et un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$.
Du fait de l'isomorphisme entre $\mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, nous parlerons indifféremment du polynôme caractéristique P_u de $u \in \mathcal{L}(E)$ et du polynôme caractéristique P_A où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est la matrice de u. Nous avons $P_u = P_A$.
Ainsi, parler de valeur propre de $u \in \mathcal{L}(E)$ ou de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est identique

12.4.1 Définition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$

1. On dit que $u \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable s'il existe une base $\mathcal{B}$ telle que la matrice associée à u dans la base $\mathcal{B}$ soit diagonale.
2. Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable, s'il existe une matrice $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible, telle $P^{-1}AP$ soit une matrice diagonale

Remarque 11 :

1. En fait, $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible veut dire $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$
2. On revient aux remarques de l'introduction : la matrice diagonale D est la matrice de $u \in \mathcal{L}(E)$ dans la base $\mathcal{B}$. P et P^{-1} étant les matrices de passage d'une base à l'autre.

12.4.2 Théorème

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$.
$u \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable si et seulement si il est possible de trouver une base de E formée de vecteurs propres.

Démonstration

1. On suppose que $u \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable
   Alors, il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice associée à u dans la base $\mathcal{B}$ soit diagonale. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ cette matrice
   Nous avons $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \cdots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$ où $\lambda_i \in \mathbb{K}$; donc le polynôme caractéristique de u est

$$P_u(X) = \det(A - X\mathrm{Id}_n) = \begin{vmatrix} \lambda_1 - X & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 - X & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \lambda_{n-1} - X & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \lambda_n - X \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} (\lambda_i - X)$$

   La famille des λ_i pour $i = 1, \ldots, n$ est donc une famille de valeurs propres de u et pour chaque $i = 1, \ldots, n$, $u(a_i) = \lambda_i a_i$ et les a_i sont des vecteurs propres non nuls de valeur propre associée λ_i ; la famille de ces a_i forme une base $\mathcal{B} = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ de E

2. Réciproquement, si $\mathcal{B} = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ est une base faite des vecteurs propres de u tels que, pour chaque $i = 1, \ldots, n$, $u(a_i) = \lambda_i a_i$, alors, la matrice de u dans la base $\mathcal{B} = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ est une matrice diagonale

Remarque 12 :

Ainsi, si un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable, ses n valeurs propres, distinctes ou confondues sont toutes dans $\mathbb{K}$, et le polynôme caractéristique P_u a toutes ses racines dans $\mathbb{K}$

12.4.3 Théorème

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$
$u \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable si et seulement si les 2 propositions suivantes sont vérifiées

1. Le polynôme P_u a toutes ses racines dans $\mathbb{K}$
2. Si $\lambda_i \in \mathbb{K}$ est racine de P_u d'ordre k_i alors, $\dim E_{\lambda_i} = k_i$

Démonstration

1. On suppose que $u \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable
Soit A la matrice de u.
Alors, A est semblable à une matrice diagonale de la forme $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \cdots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$ où
$\lambda_i \in \mathbb{K}$ et le polynôme caractéristique $P_u(X) = \prod_{i=1}^{n} (\lambda_i - X)$; donc P_u a toutes ses racines dans $\mathbb{K}$
Soit k_i l'ordre de λ_i ; alors alors, $P_u(X) = \prod_{i=1}^{h} (\lambda_i - X)^{k_i}$ où $k_1 + \cdots + k_h = n$ et A est, en fait, semblable à une matrice du type :
$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & & \\ & \lambda_1 & & & & & & \\ & & \lambda_1 & & & & & \\ & & & \lambda_2 & & 0 & & \\ & & & & \lambda_2 & & & \\ & & 0 & & & \ddots & & \\ & & & & & & \lambda_h & \\ & & & & & & & \lambda_h \end{pmatrix}$$
C'est à dire qu'il existe une base de vecteurs propres dans lequel u admet D pour matrice.
Nous avons donc, $\dim E_{\lambda_i} = k_i$
Alors $E = E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_h}$ et donc $\dim E = \dim E_{\lambda_1} + \cdots + \dim E_{\lambda_h}$
2. Etude de la réciproque
Supposons que P_u a toutes ses racines dans $\mathbb{K}$ et que si λ_i est une racine de P_u d'ordre k_i alors, $\dim E_{\lambda_i} = k_i$
Alors, $k_1 + \cdots + k_h = n$ impose que $\dim (E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_h}) = n = \dim E$
Donc, $E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_h} = E$; la réunion des bases de chacun des E_{λ_i} forme une base de E, formée de vecteurs propres, d'où u est diagonalisable.

12.4.4 Corollaire

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est semblable à une matrice diagonale si et seulement si

1. P_A le polynôme caractéristique de A a toutes ses racines dans $\mathbb{K}$
2. Si λ_i est une racine de P_A d'ordre k_i alors, $\dim E_{\lambda_i} = k_i$

Démonstration

Pour démontrer ce corollaire, il suffit d'utiliser le théorème 12.4.3 et l'isomorphisme entre $\mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Remarque 13 :

Mettons nous dans la situation où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Si les valeurs propres ne sont pas toutes réelles, on ne peut pas espérer pouvoir diagonaliser dans $\mathbb{R}$; en effet D fait apparaître les valeurs propres sur sa diagonale et ne saurait alors être réelle.
La première condition est donc indispensable si on veut obtenir une diagonalisation dans $\mathbb{K}$; par contre, si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, elle n'a pas d'objet si on diagonalise dans $\mathbb{C}$. Dans la plupart des cas cette condition sera réalisée

12.4.5 Une condition suffisante de diagonalisation

1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$
   Si u possède n valeurs propres 2 à 2 distinctes dans $\mathbb{K}$, alors, u est diagonalisable
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice possèdant n valeurs propres 2 à 2 distinctes dans $\mathbb{K}$, alors, A est diagonalisable.

Démonstration

Supposons que toutes les racines de $P_u = P_A$ soient toutes des éléments de $\mathbb{K}$ $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ et qu'elles soient 2 à 2 distinctes, c'est à dire que si $i \neq j$, alors $\lambda_i \neq \lambda_j$
Il existe donc une famille de vecteurs $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ tous non nuls tels que, pour tout i, $u(x_i) = \lambda x_i$.
La famille $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ est une famille de vecteurs propres donc forme une famille libre et est donc une base de E
u est diagonalisable ; donc A est diagonalisable.

12.4.6 Corollaire

Soit $\mathbb{K}$ un corps algébriquement clos.

1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$. Pour que u soit diagonalisable, il suffit que les racines de P_u soient simples
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour que A soit diagonalisable, il suffit que les racines de P_A soient simples.

Démonstration

En effet, si $\mathbb{K}$ est algébriquement clos, toutes les racines de $P_u = P_A$ sont dans $\mathbb{K}$. Elles sont distinctes 2 à 2 si et seulement si les racines sont simples.
D'où ce corollaire.

Remarque 14 :

1. Le cas du corps algébriquement clos, c'est surtout celui où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
2. Lorsque $\mathbb{K}$ est algébriquement clos, l'application linéaire u (ou la matrice A) peut très bien être diagonalisable, même si $P_u = P_A$ a des racines multiples. Il suffit de penser à l'identité Id_n dont le polynôme caractéristique est $P_{\mathrm{Id}_n}(X) = (1 - X)^n$

3. ATTENTION, même sur $\mathbb{C}$ il existe des matrices qui ne sont pas diagonalisables.
   Par exemple $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice triangulaire supérieure. Elle admet donc une seule valeur propre $\lambda = 0$. C'est une racine double, puisque $P_A(X) = X^2$, mais sa multiplicité géométrique *(La dimension de l'espace propre associé à $\lambda = 0$, c'est à dire le noyau)* est visiblement 1.
   Donc $\mathbb{C}^2$ ne peut pas être somme directe des espaces propres, et A n'est pas diagonalisable

Exemple 5 :

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$*.Déterminer vecteurs propres et valeurs propres de cette matrice*

- $\Rightarrow$ **Recherchons les valeurs propres**

  Tout d'abord, $P_A(X) = \begin{vmatrix} 2-X & 0 & 4 \\ 3 & -4-X & 12 \\ 1 & -2 & 5-X \end{vmatrix}$

  Tout calculs faits, $P_A(X) = -X(X-1)(X-2)$.
  Les 3 valeurs propres sont 0, 1 et 2 ; elles sont simples ; la matrice A est donc diagonalisable.

- $\Rightarrow$ **Cherchons le vecteur propre associé à la valeur propre** $\lambda = 0$

  En fait, nous devons, ici, chercher le noyau, c'est à dire les vecteurs $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tels que

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  Nous obtenons donc le système :

$$\left\{\begin{array}{rl} 2x+4z = & 0 \\ 3x-4y+12z = & 0 \\ x-2y+5z = & 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} x+2z = & 0 \\ -4y+6z = & 0 \\ -2y+3z = & 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} x+2z = & 0 \\ -2y+3z = & 0 \end{array}\right.$$

  D'où les solutions sont du type $\overrightarrow{K} = \begin{pmatrix} -4\mu \\ 3\mu \\ 2\mu \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ où $\mu \in \mathbb{R}$

  On remarque, tout de suite que $\dim E_0 = \dim \ker u = 1$

- $\Rightarrow$ **Cherchons le vecteur propre associé à la valeur propre** $\lambda = 1$

  Soit $\overrightarrow{U} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ le vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda = 1$

  Nous devons donc résoudre le système :

$$\left\{\begin{array}{rl} 2x+4z = & x \\ 3x-4y+12z = & y \\ x-2y+5z = & z \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} x+4z = & 0 \\ 3x-5y+12z = & 0 \\ x-2y+4z = & 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} x+4z = & 0 \\ -5y = & 0 \\ -2y = 0 & \end{array}\right.$$

  D'où les solutions sont du type $\overrightarrow{K} = \begin{pmatrix} -4\mu \\ 0 \\ \mu \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ où $\mu \in \mathbb{R}$

  On remarque, tout de suite que $\dim E_1 = 1$

- $\Rightarrow$ **Cherchons le vecteur propre associé à la valeur propre** $\lambda = 2$

  Soit $\overrightarrow{U} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ le vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda = 2$

  Nous devons donc résoudre le système :

$$\left\{\begin{array}{rl} 2x+4z = & 2x \\ 3x-4y+12z = & 2y \\ x-2y+5z = & 2z \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} 4z = & 0 \\ 3x-6y+12z = & 0 \\ x-2y+3z = & 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} z = & 0 \\ 3x-6y = & 0 \\ x-2y = & 0 \end{array}\right.$$

D'où les solutions sont du type $\overrightarrow{K}=\begin{pmatrix}\mu\\2\mu\\0\end{pmatrix}=\mu\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ où $\mu\in\mathbb{R}$

On remarque, tout de suite que $\dim E_2=1$

Exercice 6 :

Mêmes questions : déterminer vecteurs propres et valeurs propres des matrices suivantes :

1. $Y=\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&-1&1\\1&0&-1\end{pmatrix}$
2. $Z=\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&-1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}$
3. $T=\begin{pmatrix}-4&0&2\\0&1&0\\5&1&-3\end{pmatrix}$

12.4.7 Proposition

Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonalisable. On suppose que les valeurs propres de A sont $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$, éventuellement distinctes. Alors, pour tout $k\in\mathbb{N}$, les valeurs propres de A^k sont $\lambda_1^k,\lambda_2^k,\ldots,\lambda_n^k$
De plus, si $P\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est une matrice qui diagonalise A, alors

$$A^k=P\begin{pmatrix}\lambda_1^k&0&\cdots&0\\0&\lambda_2^k&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&\cdots&\cdots&\lambda_n^k\end{pmatrix}P^{-1}$$

Démonstration

La démonstration pose peu de difficultés.
$P\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est une matrice qui diagonalise A, alors, ceci veut dire que $P^{-1}AP$ est diagonale, ou encore

$$A=P\begin{pmatrix}\lambda_1&0&\cdots&0\\0&\lambda_2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&\cdots&\cdots&\lambda_n\end{pmatrix}P^{-1}=PDP^{-1}$$

Par conséquent,

$$A^k=\left(PDP^{-1}\right)\left(PDP^{-1}\right)\cdots\left(PDP^{-1}\right)=PD\left(P^{-1}P\right)D\left(P^{-1}P\right)\cdots\left(P^{-1}P\right)DP^{-1}=PD^kP^{-1}$$

Or, il est évident [2] que $D^k=\begin{pmatrix}\lambda_1^k&0&\cdots&0\\0&\lambda_2^k&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&\cdots&\cdots&\lambda_n^k\end{pmatrix}$

D'où le résultat.

Exercice 7 :

Soit $A=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$.

1. Rechercher les valeurs propres et les vecteurs propres de A et en déduire A^n pour $n\in\mathbb{N}$
2. Ecrivez $A=2\mathrm{Id}_2+M$ où $M\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est à préciser. Pour $n\in\mathbb{N}$, calculer M^n et retrouver A^n
3. La matrice A est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Soit $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice symétrique, c'est à dire telle que
$$X=\begin{pmatrix}a&c\\c&b\end{pmatrix}\text{ avec } a\in\mathbb{R}\text{ et } b\in\mathbb{R}$$
La matrice X est-elle diagonalisable ?

2. Résultat qui peut, par exemple, être montré par récurrence

Exercice 8 :

On considère un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension 2, rapporté à une base $\left\{\vec{i},\vec{j}\right\}$; f est l'endomorphisme de E, défini par sa matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$

1. Rechercher les vecteurs propres et les valeurs propres de A
2. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, calculer A^n
3. On considère 2 suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_0 = 3$, $v_0 = -3$ et $\begin{cases} u_{n+1} = 5u_n - v_n \\ v_{n+1} = -u_n + 5v_n \end{cases}$

   Donner u_n et v_n en fonction de n