12.5 Réduction à la forme triangulaire

On a vu que l'on pouvait trouver des endomorphismes - donc des matrices - qui n'étaient pas diagonalisables ; seulement, on cherche toujours à simplifier ces calculs matriciels à l'aide de matrices équivalentes. S'il est impossible de diagonaliser, nous chercherons donc une matrice équivalente, mais , cette fois ci, triangulaire.

12.5.1 Endomorphisme trigonalisable

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $u : E \longrightarrow E$ un endomorphisme. On dit que $u \in \mathcal{L}(E)$ est trigonalisable,s'il existe une base $\mathcal{B}_T$, telle que la matrice de u dans cette base soit triangulaire.

12.5.2 Matrice trigonalisable

Une matrice $A \in\in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est trigonalisable si et seulement si il est possible de trouver une matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, inversible, telle que la matrice $B = PAP^{-1}$ soit triangulaire.

12.5.3 Théorème

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$, tel que le polynôme caractéristique de u, P_u ait ses n racines $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ dans $\mathbb{K}$
Alors, il existe une base $\mathcal{B}_T$ de E, telle que A la matrice de $u \in \mathcal{L}(E)$ dans la base $\mathcal{B}_T$ soit triangulaire.
Si nous supposons $A = M_{\mathcal{B}_T}(u) = \left[(a_{i,j})_{\substack{i=1,\ldots,n\\ j=1,\ldots,n}}\right]$, on a alors $a_{i,i} = \lambda_i$

Démonstration

1. **On peut ne rechercher qu'une matrice triangulaire supérieure**
   En effet, soit $\mathcal{B}_T = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une base dans laquelle la matrice de $u \in \mathcal{L}(E)$ appelée $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_T}(u)$ est triangulaire supérieure.
   La famille $\mathcal{B}_{T_1} = \{e_n, \ldots, e_1\}$ *(remarquez l'ordonnancement)* est telle que la matrice de $u \in \mathcal{L}(E)$ dans cette base sera triangulaire inférieure.
2. **Nous allons démontrer le théorème par récurrence**
   Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ la propriété que nous devons montrer par récurrence :

   Si E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$, tel que le polynôme caractéristique de u P_u ait ses n racines $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ dans $\mathbb{K}$, alors, il existe une base $\mathcal{B}_T = \{e_1, \ldots, e_n\}$ de E, telle que la matrice de u dans la base $\mathcal{B}_T$ appelée $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_T}(u)$ soit triangulaire supérieure.

   - Le théorème est trivialement vrai pour $n = 1$
   - Supposons qu'au rang n, $P(n)$ soit vraie,
   - Démontrons $P(n+1)$
     Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n+1$ et $u \in \mathcal{L}(E)$, tel que le polynôme caractéristique de P_u ait ses $n+1$ racines $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}$ dans $\mathbb{K}$
     Soit donc, λ_1 l'une d'entre elles, et e_1, un vecteur non nul tel que $u(e_1) = \lambda_1 e_1$
     On considère alors les vecteurs $\{e_2, \ldots, e_{n+1}\}$ tels que la famille de vecteurs $\{e_1, e_2, \ldots, e_{n+1}\}$ forment une base de E.
     En fait, $\{e_2, \ldots, e_{n+1}\}$ forment une base du supplémentaire de $\mathbb{K}e_1 = \{\alpha e_1 \text{ où } \alpha \in \mathbb{K}\}$
     La matrice de u dans la base $\{e_1, e_2, \ldots, e_{n+1}\}$ est donnée par

$$\mathcal{M}_{\{e_1,\ldots,e_{n+1}\}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & b_{1,2} & \cdots & \cdots & b_{1,n+1} \\ 0 & b_{2,2} & \cdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & b_{n+1,2} & \cdots & \cdots & b_{1,n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & b_{1,2} & \cdots & b_{1,n+1} \\ 0 & & & \\ \vdots & & C' & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

où C' est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Nous avons, évidemment , pour $j = 2, \ldots, n+1$ $u(e_j) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} b_{k,j} e_k$, et si on restreint u à l'espace F engendré par $\{e_2, \ldots, e_{n+1}\}$, F n'est pas stable par u, car les $\{b_{1,j}$ avec $j = 2, \ldots, n+1\}$ ne sont pas tous forcément nuls.
On considère alors la projection Π de E sur F, parallèlement à $\mathbb{K}e_1 = \{\alpha e_1$ où $\alpha \in \mathbb{K}\}$ et l'endomorphisme $g = \Pi \circ u$

Nous avons, pour $j = 2, \ldots, n+1$, $g(e_j) = \displaystyle\sum_{k=2}^{n+1} b_{k,j} e_k = b_{2,j}e_2 + b_{3,j}e_3 + \cdots + b_{n+1,j}e_{n+1}$; ce qui montre que F est stable par $g = \Pi \circ f$, et si g' est la restriction de g à F, alors $\mathcal{M}_{\{e_2,\ldots,e_{n+1}\}}(g') = C'$
Il faut maintenant montrer que le polynôme caractéristique de g' a toutes ses racines dans $\mathbb{K}$
Or,

$$P_u(X) = \det\left(\mathcal{M}_{\{e_1,\ldots,e_{n+1}\}}(u) - X\mathrm{Id}_{n+1}\right) = \begin{vmatrix} \lambda_1 - X & b_{12} & \cdots & \cdots & b_{1n+1} \\ 0 & b_{22} - X & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & b_{n+1,2} & \cdots & \cdots & b_{n+1,n+1} - X \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} \lambda_1 - X & b_{12} \cdots b_{1,n+1} \\ 0 & \\ \vdots & C' - X\mathrm{Id}_n \\ 0 & \end{vmatrix}$$

C'est à dire, en développant par rapport à la première colonne,

$$P_u(X) = \det\left(\mathcal{M}_{\{e_1,\ldots,e_{n+1}\}}(u) - X\mathrm{Id}_{n+1}\right) = (\lambda_1 - X)\det(C' - X\mathrm{Id}_n) = (\lambda_1 - X)P_{g'}(X)$$

Ce qui montre que $P_{g'}(X)$ divise $P_u(X)$, et comme il y a $n+1$ racines à $P_u(X)$, il y en a donc n à $P_{g'}(X)$, et les valeurs propres de g' sont aussi celles de u.
Nous sommes donc dans l'hypothèse de récurrence : il existe donc une base $\{b_2, \ldots, b_{n+1}\}$ de F, dans laquelle la matrice C' est triangulaire supérieure, c'est à dire

$$\mathcal{M}_{\{b_2,\ldots,b_{n+1}\}}(g') = T = \begin{pmatrix} \beta_{22} & \beta_{23} & \cdots & \cdots & \beta_{2,n+1} \\ 0 & \beta_{33} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \beta_{n+1,n+1} \end{pmatrix}$$

D'où on obtient :

$$\mathcal{M}_{\{e_1,b_2,\ldots,b_{n+1}\}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & b'_{1,2} & \cdots & b'_{1,n+1} \\ 0 & & & \\ \vdots & & T & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & b'_{1,2} & \cdots & b'_{1,n+1} \\ 0 & \beta_{2,2} & \cdots & \beta_{2,n+1} \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \beta_{n+1,n+1} \end{pmatrix}$$

Et, nous avons bien $P_u(X) = (\lambda_1 - X)(\beta_{22} - X)\cdots(\beta_{n+1,n+1} - X)$.
Les valeurs propres de u sont bien les éléments diagonaux de $\mathcal{M}_{\{e_1,b_2,\ldots,b_{n+1}\}}(u)$

12.5.4 Corollaire

Toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont le polynôme caractéristique a toutes ses racines dans $\mathbb{K}$ est trigonalisable

Remarque 15 :

- $\Rightarrow$ Ceci veut donc dire qu'il existe une matrice inversible $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, inversible, telle que la matrice $B = PAP^{-1}$ soit triangulaire.
- $\Rightarrow$ Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, toute matrice est trigonalisable.