12.6 Polynômes de matrices, polynôme d'endomorphismes

12.6.1 Définition de polynôme de matrice

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$.
À X^k, on associe A^k ; au polynôme constant 1, nous associons la matrice identité Id_n.
Plus généralement, pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ avec $P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n$, nous définissons la matrice carrée $P(A) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par :

$$P(A) = a_0\mathrm{Id}_n + a_1A + a_2A^2 + \cdots + a_nA^n$$

Exemple 6 :

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $P(X) = X^2 + X + 1$.

Nous calculons A^2 et nous obtenons $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$, d'où nous obtenons $P(A)$:

$$P(A) = A^2 + A + \mathrm{Id}_n = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 8 \end{pmatrix} = 4A$$

Nous pouvons aller plus loin en observant donc que si $P(A) = A^2 + A + \mathrm{Id}_n = 4A$, il est possible de trouver la matrice inverse de A. On vérifie facilement qu'elle est inversible puisque $\det A = 3$.
D'autre part :

$$A^2 + A + \mathrm{Id}_n = 4A \Longleftrightarrow \mathrm{Id}_n = 3A - A^2 \Longleftrightarrow \mathrm{Id}_n = A \times (3\mathrm{Id}_n - A)$$

D'où[3] $A^{-1} = 3\mathrm{Id}_n - A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Autre observation, nous avons $A^2 + A + \mathrm{Id}_n = 4A \Longleftrightarrow A^2 - 3A + \mathrm{Id}_n = \mathcal{O}_n$ où $\mathcal{O}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est la matrice carrée nulle d'ordre n.

12.6.2 Définition de polynôme d'endomorphisme

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E.
Pour $u \in \mathcal{L}(E)$, on note $u^k = \underbrace{u \circ u \circ u \circ \cdots \circ u}_{k \text{ fois}}$
À X^k, on associe f^k ; au polynôme constant 1, nous associons l'application identique Id_E.
Plus généralement, pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ avec $P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n$, nous définissons l'endomorphisme $P(u) \in \mathcal{L}(E)$ par :

$$P(u) = a_0\mathrm{Id}_E + a_1u + a_2u^2 + \cdots + a_nu^n$$

Exemple 7 :

Choisissons $E = \mathbb{R}^2$.
Soit, maintenant, $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, la rotation d'angle $\theta = \dfrac{\pi}{6}$. Soit, maintenant, $P(X) = X^{11}$. Calculons $P(F)$.

Pour $k \in \mathbb{Z}$, F^k est la rotation d'angle $k\theta = \dfrac{k\pi}{6}$. Donc $P(F) = F^{11}$ est la rotation d'angle $\dfrac{11\pi}{6}$ qui est aussi la rotation d'angle $\dfrac{-\pi}{6}$
Ainsi $P(F) = F^{11} = F^{-1}$

3. Résultat qui aurait bien sûr pu être obtenu avec le cours de L_0

Exercice 9 :

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E. Comme dans la définition 12.6.2 précédente pour $u \in \mathcal{L}(E)$, nous définissons $u^k = \underbrace{u \circ u \circ u \circ \cdots \circ u}_{k \text{ fois}}$.

Démontrer que $\operatorname{Im} u^{k+1} \subset \operatorname{Im} u^k$ et que $\ker u^k \subset \ker u^{k+1}$

12.6.3 Proposition

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $Q \in \mathbb{K}[X]$

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$; Alors

$$(P \times Q)(A) = P(A) \times Q(A) = P(A) \times Q(A) = (Q \times P)(A)$$

2. De la même manière, pour $u \in \mathcal{L}(E)$,

$$(P \times Q)(u) = P(u) \circ Q(u) = P(u) \circ Q(u) = (Q \times P)(u)$$

3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ fixée et considérons l'application $\Phi_A : \mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \Phi_A : \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ P & \longmapsto & \Phi_A(P) = P(A) \end{array} \right.$$

Alors, Φ_A est un morphisme d'algèbres, c'est à dire :

⋆ Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, tout $\mu \in \mathbb{K}$, tout $p \in \mathbb{K}[X]$ et tout $Q \in \mathbb{K}[X]$,

$$\Phi_A(\lambda P + \mu Q) = \lambda \Phi_A(P) + \mu \Phi_A(Q)$$

c'est à dire $(\lambda P + \mu Q)(A) = \lambda P(A) + \mu Q(A)$

⋆ $\Phi_A(P \times Q) = \Phi_A(P) \times \Phi_A(Q)$

Démonstration

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $Q \in \mathbb{K}[X]$.
Alors $(P \times Q)(X) = P(X) \times Q(X) = Q(X) \times P(X) = (Q \times P)(X)$
Et donc, pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, nous avons :

$$(P \times Q)(A) = P(A) \times Q(A) = Q(A) \times P(A) = (Q \times P)(A)$$

La démonstration est semblable pour $u \in \mathcal{L}(E)$
Le fait que Φ_A soit un morphisme d'algèbre est trivial

12.6.4 Proposition

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
Si A et B sont 2 matrices semblables, alors les matrices $P(A)$ et $P(B)$ sont, elles aussi semblables
Plus précisément, si $A = SBS^{-1}$ où $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, alors $P(A) = SP(B)S^{-1}$

Démonstration

Supposons que $P \in \mathbb{K}[X]$ s'écrive $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, alors :

$$\begin{aligned} P(A) = & \ a_0 \mathrm{Id}_n + a_1 A + a_2 A^2 + \cdots + a_k A^k + \cdots + a_n A^n \\ = & \ a_0 S S^{-1} + a_1 S B S^{-1} + a_2 S B^2 S^{-1} + \cdots + a_k S B^k S^{-1} + \cdots + a_n S B^n S^{-1} \end{aligned}$$

En utilisant la distributivité, nous avons :

$$\begin{aligned} a_0SS^{-1}+a_1SBS^{-1}+a_2SB^2S^{-1}+\cdots+a_nSB^nS^{-1} &= S\left(a_0\mathrm{Id}_n+a_1B+a_2B^2+\cdots+a_nB^n\right)S^{-1} \\ &= SP\left(B\right)S^{-1} \end{aligned}$$

Et donc $P\left(A\right)=SP\left(B\right)S^{-1}$

Exemple 8 :

Soit $A\in\mathcal{M}_n\left(\mathbb{K}\right)$ une matrice diagonalisable, c'est à dire qu'il existe une matrice diagonale $D\in\mathcal{M}_n\left(\mathbb{K}\right)$ et $S\in\mathrm{GL}_n\left(\mathbb{K}\right)$ telle que $A=SDS^{-1}$.
Si $P\in\mathbb{K}\left[X\right]$, alors nous avons $P\left(A\right)=SP\left(D\right)S^{-1}$.
Si $P\left(X\right)=a_0+a_1X+\cdots+a_nX^n$, alors $P\left(X\right)=a_0\mathrm{Id}_n+a_1D+\cdots+a_nD^n$.
Si $D=\begin{pmatrix}\lambda_1&0&\cdots&0\\0&\lambda_2&\cdots&\vdots\\\vdots&\cdots&\ddots&0\\0&\cdots&0&\lambda_n\end{pmatrix}$, alors $D^k=\begin{pmatrix}\lambda_1^k&0&\cdots&0\\0&\lambda_2^k&\cdots&\vdots\\\vdots&\cdots&\ddots&0\\0&\cdots&0&\lambda_n^k\end{pmatrix}$ de telle sorte que nous avons tout de suite que

$$P\left(D\right)=\begin{pmatrix}P\left(\lambda_1\right)&0&\cdots&0\\0&P\left(\lambda_2\right)&\cdots&\vdots\\\vdots&\cdots&\ddots&0\\0&\cdots&0&P\left(\lambda_n\right)\end{pmatrix}$$

Et ce, quel que soit le polynôme $P\in\mathbb{K}\left[X\right]$.
Nous pouvons donc dire que si $A\in\mathcal{M}_n\left(\mathbb{K}\right)$ est diagonalisable, si $\lambda\in\mathbb{K}$ est valeur propre de A, alors $P\left(\lambda\right)$ est valeur propre de la matrice $P\left(A\right)$

Exercice 10 :

1. Soit $A=\begin{pmatrix}-2&1\\0&3\end{pmatrix}$ et $P\left(X\right)=X^2-X$. Calculer $P\left(A\right)$
2. Soit $A=\begin{pmatrix}2&-3\\-4&1\end{pmatrix}$ et $P\left(X\right)=X^2-3X$. Montrer que $P\left(A\right)=10\mathrm{Id}_2$. En déduire A^{-1}
3. (a) Trouver une matrice $A\in\mathcal{M}_3\left(\mathbb{R}\right)$ telle que $A^2\neq\mathcal{O}_3$ mais $A^3=\mathcal{O}_3$
   (b) Trouver une matrice $B\in\mathcal{M}_3\left(\mathbb{R}\right)$ telle que $B^2\neq\mathrm{Id}_3$ mais $B^3=\mathrm{Id}_3$

12.6.5 Sous espaces stables

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u\in\mathcal{L}\left(E\right)$.
Un sous-espace vectoriel F de E est stable par u si et seulement si $u\left(F\right)\subset F$, c'est à dire :

$$\left(\forall x\in F\right)\left(u\left(x\right)\in F\right)$$

Exemple 9 :

1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u\in\mathcal{L}\left(E\right)$. Un premier exemple de sous-espace vectoriel stable par u sont les sous-espaces propres de u qui sont stables par u .

   En effet, si E_λ est un sous-espace propre de u pour la valeur propre λ alors, pour tout $x\in E_\lambda$, $u\left(x\right)\in E_\lambda$
2. Soit $\{e_1,e_2,e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et r_θ la rotation d'axe vertical e_3 et d'angle θ.
   L'endomorphisme r_θ laisse invariant deux sous-espaces : $F_11=\mathrm{Vect}\left(\{e_1,e_2\}\right)=\mathbb{R}e_1\oplus\mathbb{R}e_2$ et $F_2=\mathrm{Vect}\left(\{e_3\}\right)$

La matrice de r_θ dans cette base $\{e_1, e_2, e_3\}$ est la matrice $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

La matrice de cet exemple a une structure particulière

3. **Effet sur les matrices.**

   Supposons que E soit de dimension n, que $f : E \longrightarrow E$ soit un endomorphisme de E ; choisissons $F \subset E$, sous-espace vectoriel de E stable par f .

   Notons $\{f_1, f_2, \cdots, f_p\}$ une base de F. On complète cette base par des vecteurs $\{e_{p+1}, e_{p+2}, \cdots, e_n\}$ pour obtenir une base de E : $\mathcal{B} = \{f_1, f_2, \cdots, f_p, e_{p+1}, e_{p+2}, \cdots, e_n\}$

   La matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est triangulaire par blocs :

$$\mathcal{M}(f)_{\mathcal{B}} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} & b_{1,1} & \cdots & b_{1,n-p} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p,1} & \cdots & a_{p,p} & b_{p,1} & \cdots & a_{p,n-p} \\ \hline & & & d_{1,1} & \cdots & d_{1,n-p} \\ & & & \vdots & & \vdots \\ & & & d_{n-p,1} & \cdots & d_{n-p,n-p} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline \mathcal{O} & D \end{array}\right)$$

   où $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ et $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ est la matrice de la restriction $f_{|F}$ de f à F dans la base $\{f_1, f_2, \cdots, f_p\}$

4. Supposons que $E = F_1 \oplus F_2$ et que F_1 et F_2 soient tous les deux stables par f , alors la matrice de f est diagonale par blocs :

$$\mathcal{M}(f)_{\mathcal{B}} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p,1} & \cdots & a_{p,p} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline & & & d_{1,1} & \cdots & d_{1,n-p} \\ & & & \vdots & & \vdots \\ & & & d_{n-p,1} & \cdots & d_{n-p,n-p} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} A & \mathcal{O} \\ \hline \mathcal{O} & D \end{array}\right)$$

12.6.6 Proposition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit F un sous-espace vectoriel de E est stable par u
Alors, pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$, F est stable par le polynôme d'endomorphisme $P(u)$

Démonstration

- ▷ Il assez facile de comprendre que si $x \in F$, alors $u(x) \in F$ et donc, en poursuivant, $u(u(x)) \in F$.
- ▷ Par une récurrence simple sur $k \in \mathbb{N}$, on montre que $u^k(x) \in F$ pour tout $k \geqslant 0$.
- ▷ Soit, maintenant, $P \in \mathbb{K}[X]$ c'est à dire $P(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$ alors $P(u)$ est l'endomorphisme défini par $P(u) = a_0 \mathrm{Id}_E + a_1 u + \cdots + a_n u^n$

  Donc, pour tout $x \in F$, $P(u)(x) = a_0 x + a_1 u(x) + \cdots + a_n u^n(x)$. Chaque terme $a_k u^k(x)$ est un élément de F et donc $P(u)(x) \in F$ car F est un sous-espace vectoriel de E

En conclusion, si F est stable par u, alors, pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$, F est stable par $P(u)$.

Exercice 11 :

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel . Soient $u : E \longrightarrow E$ et $f : E \longrightarrow E$ 2 endomorphismes qui commutent, c'est à dire tels que $f \circ u = u \circ f$.

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ un vecteur propre de u d'espace propre associé E_λ. Démontrer que E_λ est stable par f, c'est à dire que $f(E_\lambda) \subset E_\lambda$

12.6.7 Proposition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel . Soient $u : E \longrightarrow E$ et $f : E \longrightarrow E$ 2 endomorphismes qui commutent, c'est à dire tels que $f \circ u = u \circ f$.
Alors $\ker u$ et $\mathrm{Im} u$ sont stables par f.

Démonstration

- Soit $x \in \ker u$.
  Nous devons donc démontrer que $f(x) \in \ker u$
  Nous avons $u(x) = 0$, d'où, de l'égalité $f \circ u = u \circ f$, nous tirons :
  $$u(f(x)) = f(u(x)) = f(0) = 0$$
  Donc $f(x) \in \ker u$
- Soit $y \in \mathrm{Im} u$. Il faudra donc montrer que $f(y) \in \mathrm{Im} u$
  Il existe donc $x \in E$ tel que $y = u(x)$, d'où $f(y) = f(u(x)) = u(f(x))$
  Il existe donc $z \in E$, et $z = f(x)$ tel que $f(y) = u(z)$ et donc $f(y) \in \mathrm{Im} u$

Remarque 16 :

Nous n'avons pas la réciproque, c'est à dire que ce n'est pas parce que $\ker u$ et $\mathrm{Im} u$ sont stables par f que $f \circ u = u \circ f$

Contre-exemple

On considère E $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2 rapporté à une base $\mathcal{B}_0 = \{i, j\}$. Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ de matrice respective dans la base $\mathcal{B}_0$:

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}_0}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathcal{M}_{\mathcal{B}_0}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Nous pouvons remarquer que l'une est la transposée de l'autre et que toutes deux sont bijectives puisque leur déterminant est non nul.
Donc $\ker u = \{0\}$ et $\mathrm{Im}\, u = E$ et de manière évidente, $f(\ker u) = f(\{0\}) = \{0\} = \ker u$ et donc $\ker u$ est stable par f.
De la même manière, $f(\mathrm{Im}\, u) = f(E) = E = \mathrm{Im}\, u$ et donc $\mathrm{Im}\, u$ est stable par f.
Mais, f et u ne commutent pas. En effet :

$\Rightarrow$ $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_0}(u \circ f) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_0}(u) \times \mathcal{M}_{\mathcal{B}_0}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ Et $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_0}(f \circ u) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_0}(f) \times \mathcal{M}_{\mathcal{B}_0}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Nous avons donc $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_0}(u \circ f) \neq \mathcal{M}_{\mathcal{B}_0}(f \circ u)$ et donc $u \circ f \neq u \circ f$

Exercice 12 :

On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique.

Soit f, l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique est :$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Soit g l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique est $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

1. Montrer que $f \circ g = g \circ f$.
2. Calculer $\ker g$ et $\mathrm{Im}\, g$, et vérifier qu'ils sont stables par f
3. Calculer $\ker f$ et $\mathrm{Im}\, f$, et vérifier qu'ils sont stables par g

Exercice 13 :

Soient f et g deux endomorphismes du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie tels que f soit diagonalisable.
Démontrer que f et g commutent si et seulement si les sous-espaces propres de f sont stables par g.

Remarque 17 :

Rappel de la notion de restriction
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $F \subset E$ un sous-espace vectoriel stable par un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$.
Dans ce cas, on note $f_{|F} : F \longrightarrow F$, la restriction de f à F.
L'application $f_{|F}$ est un endomorphisme de F, c'est à dire $f_{|F} \in \mathcal{L}(F)$.

12.6.8 Polynôme caractéristique

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E. On suppose aussi qu'il existe un sous-espace $F \subset E$ laissé stable par f .
Nous notons $P_{f_{|F}}$ le polynôme caractéristique de la restriction de f à F. Alors si P_f est le polynôme caractéristique de f, $P_{f_{|F}}(X)$ divise $P_f(X)$ dans $\mathbb{K}[X]$

Démonstration

Ne reprenons des considérations déjà faites.
Considérons $\{f_1, f_2, \cdots, f_p\}$ une base de F. On complète cette base par des vecteurs $\{e_{p+1}, e_{p+2}, \cdots, e_n\}$ pour obtenir une base de E : $\mathcal{B} = \{f_1, f_2, \cdots, f_p, e_{p+1}, e_{p+2}, \cdots, e_n\}$
La matrice de f dans cette base est de la forme $\mathcal{M}_{\mathcal{B}} = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline \mathcal{O} & C \end{array}\right)$ où $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ est la matrice de $f_{|F}$ dans la base $\{f_1, f_2, \cdots, f_p\}$
On a alors

$$\begin{aligned} P_f(X) = & \det(\mathcal{M}_{\mathcal{B}} - X\mathrm{Id}_n) \\ = & \left|\begin{array}{c|c} \det(A - X\mathrm{Id}_p) & B \\ \hline \mathcal{O} & \det(C - X\mathrm{Id}_{n-p}) \end{array}\right| \\ = & \det(A - X\mathrm{Id}_p) \times \det(C - X\mathrm{Id}_{n-p}) \\ = & P_{f_{|F}}(X) \times \det(C - X\mathrm{Id}_{n-p}) = P_{f_{|F}}(X) \times Q(X) \end{aligned}$$

Où $Q \in \mathbb{K}_{n-p}[X]$
Cela prouve donc que $P_{f_{|F}}(X)$ divise $P_f(X)$

Exercice 14 :

Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par :

$$\begin{cases} f : \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & f[(x, y, z)] = \left(2x - y, 3x - 2y, \dfrac{1}{3}z\right) \end{cases}$$

Calculer la matrice de f dans la base canonique et déterminer le polynôme caractéristique de f. En déduire les sous-espaces stables par f

Exercice 15 :

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

Montrer que les vecteurs $w_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ engendrent un sous-espace stable de dimension 2 de cette matrice.

12.6.9 Définition d'endomorphisme nilpotent

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $g \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E
g est nilpotent s'il existe un entier $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $g^m = \mathcal{O}_E$

Remarque 18 :

1. Remarquons que dans cette définition, nous n'avons pas donné de dimension à E
2. Il est bien évident que l'endomorphisme nul $\mathcal{O}_E$ est nilpotent d'ordre 1
3. Si g est nilpotent d'ordre $m \geqslant 2$, alors $\ker g \neq \left\{\overrightarrow{0}_E\right\}$

   En effet, supposons le contraire, c'est à dire supposons $\ker g = \left\{\overrightarrow{0}_E\right\}$, ce qui sous-entend que pour tout $x \in E$, $x \neq \overrightarrow{0}_E$, $g(x) \neq \overrightarrow{0}_E$, et donc, par récurrence, pour tout $x \in E$ et tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons l'implication $x \neq \overrightarrow{0}_E \Longrightarrow g^n(x) \neq \overrightarrow{0}_E$ et donc, g n'est plus nilpotent.
   Il y a donc contradiction et donc $\ker g \neq \left\{\overrightarrow{0}_E\right\}$

   Nous pouvons donc déduire qu'un endomorphisme nilpotent n'est pas injectif.

12.6.10 Définition de matrice nilpotente

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans $_K$
A est une matrice nilpotente s'il existe un entier $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^m = \mathcal{O}_n$

Exemple 10 :

Exemples de matrices nilpotentes

1. Considérons $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Nous avons $A^2 = \mathcal{O}_2$
2. Maintenant $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Nous avons aussi $B^2 = \mathcal{O}_3$
3. Et, pour terminer, $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Nous avons $C^3 = \mathcal{O}_3$

Remarque 19 :

Si A est une matrice nilpotent d'ordre m, nous avons alors $\det A^m = 0$; comme $\det A^m = (\det A)^m = 0$, nous en concluons que $\det A = 0$ et que la matrice A n'est pas la matrice d'une bijection. Nous retrouvons, en particulier, le fait que si A est la matrice d'un endomorphisme g d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $\ker g \neq \left\{\overrightarrow{0}_E\right\}$.

12.6.11 Proposition et définition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $g \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent de E

1. Il existe un plus petit entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $g^k = \mathcal{O}_E$. Nous avons
$$k = \min\{m \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } g^m = \mathcal{O}_E\}$$
2. Ce plus petit entier k est appelé indice ou ordre de nilpotence

Démonstration

Si g est un endomorphisme nilpotent, il existe donc $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $g^m = \mathcal{O}_E$.
Alors, pour tout $n \geqslant m$, nous avons $g^n = \mathcal{O}_E$.
Il existe donc un plus petit entier $k \in \mathbb{N}^*$ et $k \leqslant m$ tel que $g^k = \mathcal{O}_E$

Remarque 20 :

1. Si k est l'indice de nilpotence de g, alors $g^{k-1} \neq \mathcal{O}_E$, et même mieux, pour tout $s < k$, $g^s \neq \mathcal{O}_E$
2. De manière similaire, pour une matrice nilpotente, il existe un plus petit entier k, appelé aussi indice ou ordre de nilpotence tel que $A^k = \mathcal{O}_n$

Exercice 16 :

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ nilpotente d'indice k et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ nilpotente d'indice l qui commutent.
Montrer que $A + B$ et AB sont 2 matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

12.6.12 Lemme

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent d'indice k de E.
Alors, il existe $x \in E$, avec $x \neq \overrightarrow{0}_E$ tel que, pour tout $j \in \mathbb{N}$ et $1 \leqslant j \leqslant k-1$ et $f^j(x) \neq \overrightarrow{0}_E$

Démonstration

Supposons le contraire, c'est à dire que, pour tout $x \in E$, avec $x \neq \overrightarrow{0}_E$, il existe $j \in \mathbb{N}$ avec $1 \leqslant j \leqslant k-1$ et $f^j(x) = \overrightarrow{0}_E$.
Ceci contredit donc le fait que k soit l'indice de nilpotence de f et donc le lemme est démontré.

12.6.13 Proposition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent d'indice k de E. Soit $x \in E$, avec $x \neq \overrightarrow{0}_E$ tel que, pour tout $j \in \mathbb{N}$ et $1 \leqslant j \leqslant k-1$ et $f^j(x) \neq \overrightarrow{0}_E$
On appelle $F = \text{Vect}\left(\left\{x, f(x), f^2(x), \cdots, f^{k-1}(x)\right\}\right)$. Alors F est stable par f

Démonstration

Soit $y \in F$; il faut donc montrer que $f(y) \in F$.

Nous pouvons écrire $y = \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i f^i(x)$, avec $\lambda_i \in \mathbb{K}$ et donc :

$$f(y) = \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i f^{i+1}(x) = \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_{i-1} f^i(x) = \lambda_0 f(x) + \lambda_1 f^2(x) + \cdots + \lambda_{k-2} f^{k-1}(x)$$

Et nous avons bien $f(y) \in F$, c'est à dire que F est stable par f

12.6.14 Proposition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent d'indice k de E. Soit $x \in E$, avec $x \neq \overrightarrow{0}_E$ tel que, pour tout $j \in \mathbb{N}$ et $1 \leqslant j \leqslant k-1$ et $f^j(x) \neq \overrightarrow{0}_E$
Alors, la famille de vecteurs $\left\{x, f(x), f^2(x), \cdots, f^{k-1}(x)\right\}$ est une famille libre

Démonstration

Soient $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{k-1}$, n éléments de $\mathbb{K}$ tels que

$$\lambda_0 x + \lambda_1 f(x) + \lambda_2 f^2(x) + \cdots + \lambda_{k-1} f^{k-1}(x) = \overrightarrow{0}_E$$

- $\Rightarrow$ En appliquant f^{k-1}, nous avons :

$$f^{k-1}\left[\lambda_0 x + \lambda_1 f(x) + \lambda_2 f^2(x) + \cdots + \lambda_{k-1} f^{k-1}(x)\right] = f^{k-1}\left(\overrightarrow{0}_E\right) \Longrightarrow \lambda_0 f^{k-1}(x) = \overrightarrow{0}_E$$

Comme $f^{k-1}(x) \neq \overrightarrow{0}_E$, nous avons $\lambda_0 = 0$
Donc, nous pouvons écrire :

$$\lambda_0 x + \lambda_1 f(x) + \lambda_2 f^2(x) + \cdots + \lambda_{k-1} f^{k-1}(x) = \lambda_1 f(x) + \lambda_2 f^2(x) + \cdots + \lambda_{k-1} f^{k-1}(x) = \overrightarrow{0}_E$$

- $\Rightarrow$ Nous pouvons itérer en appliquant f^{k-2} et nous avons :

$$f^{k-2}\left[\lambda_1 f(x) + \lambda_2 f^2(x) + \cdots + \lambda_{k-1} f^{k-1}(x)\right] = f^{k-2}\left(\overrightarrow{0}_E\right) \Longrightarrow \lambda_1 f^{k-1}(x) = \overrightarrow{0}_E$$

Comme $f^{k-1}(x) \neq \overrightarrow{0}_E$, nous avons $\lambda_1 = 0$
Donc, nous pouvons écrire :

$$\lambda_1 f(x) + \lambda_2 f^2(x) + \cdots + \lambda_{k-1} f^{k-1}(x) = \lambda_2 f^2(x) + \cdots + \lambda_{k-1} f^{k-1}(x) = \overrightarrow{0}_E$$

- $\Rightarrow$ En continuant cette même opération, nous arrivons à la conclusion que :

$$\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_{k-1} = 0$$

La famille de vecteurs $\left\{x, f(x), f^2(x), \cdots, f^{k-1}(x)\right\}$ est donc une famille libre

Remarque 21 :

1. Donc, $\dim \operatorname{Vect}\left(\left\{x, f(x), f^2(x), \cdots, f^{k-1}(x)\right\}\right) = k$
2. Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, l'indice de nilpotence d'un endomorphisme nilpotent ne peut être supérieur à n.
3. En notant toujours $F = \operatorname{Vect}\left(\left\{x, f(x), f^2(x), \cdots, f^{k-1}(x)\right\}\right)$, la matrice de $f_{|F}$ la restriction de f au sous-espace vectoriel F dans la base $\left\{x, f(x), f^2(x), \cdots, f^{k-1}(x)\right\}$ est donc :

$$\mathcal{M}_{\{x, f(x), f^2(x), \cdots, f^{k-1}(x)\}}\left(f_{|F}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, il est possible de compléter la base $\left\{x, f(x), f^2(x), \cdots, f^{k-1}(x)\right\}$ par des vecteurs $e_{k+1}, \ldots, e_n$ de telle sorte que $\left\{x, f(x), f^2(x), \cdots, f^{k-1}(x), e_{k+1}, \ldots, e_n\right\}$ forme une base $\mathcal{B}_0$ de E. La matrice de f dans la base $\mathcal{B}_0$ est triangulaire par blocs.

$$[\mathcal{M}_{\mathcal{B}_0}(f) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1,n} \\ 1 & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & 1 & 0 & a_{k,k+1} & \cdots & a_{k,n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{k+1,k+1} & \cdots & a_{k+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,k+1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

5. Revenons à $F = \text{Vect}\left(\left\{x, f(x), f^2(x), \cdots, f^{k-1}(x)\right\}\right)$.
   Pour $\lambda \in \mathbb{K}$, considérons $g = f + \lambda \text{Id}_E$
   - ▷ Tout d'abord, F est stable par g

     En effet, soit $y \in F$; alors $g(y) = f(y) + \lambda y$.
     Comme F est stable par f, $f(y) \in F$ et F étant un sous-espace vectoriel , $f(y)+\lambda y \in F$
     Et donc, F est stable par g
   - ▷ La matrice de g dans la base $\left\{x, f(x), f^2(x), \cdots, f^{k-1}(x)\right\}$ est donc :

$$\mathcal{M}_{\{x,f(x),f^2(x),\cdots,f^{k-1}(x)\}}(g) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

Cette matrice est appelée matrice de Jordan

12.6.15 Théorème de Cayley-Hamilton

1. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E de polynôme caractéristique P_f. Alors $P_f(f) = \mathcal{O}_E$
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de polynôme caractéristique P_A. Alors, $P_A(A) = \mathcal{O}_n$

Démonstration

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et $f \in \mathcal{L}(E)$
Soit $x \in E$ tel que $x \neq \overrightarrow{0}_E$, c'est à dire que x est non nul.

→ Soit $p \in \mathbb{N}$ avec $1 \leqslant p \leqslant n$ le plus grand entier tel que la famille $\left\{x, f(x), f^2(x), \cdots, f^{p-1}(x)\right\}$ soit libre. Nous pouvons donc écrire :

$$f^p(x) = c_0 x + c_1 f(x) + c_2 f^2(x) + \cdots + c_{p-1} f^{p-1}(x)$$

Où pour $1 \leqslant i \leqslant p-1$, nous avons $c_i \in \mathbb{K}$

→ Comme tout à l'heure en 12.6.13, nous appelons $F = \text{Vect}\left(\left\{x, f(x), f^2(x), \cdots, f^{p-1}(x)\right\}\right)$. F est un sous-espace vectoriel de E de dimension p, stable par f.
Nous avons, en particulier $f\left[f^{p-1}(x)\right] = f^p(x) = c_0 x + c_1 f(x) + c_2 f^2(x) + \cdots + c_{p-1} f^{p-1}(x)$ et donc

$$A = \mathcal{M}_{\{x,f(x),f^2(x),\cdots,f^{p-1}(x)\}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & c_0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & c_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & c_{p-1} \end{pmatrix}$$

→ Cette matrice $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ est la matrice compagnon *(cf 12.3.11)* du polynôme $P(X) = X^p - c_{p-1}X^{p-1} - \cdots - c_2 X^2 - c_1 X - c_0$ et donc, toujours d'après 12.3.11, $P_A(X) = (-1)^p P(X)$

→ D'après la proposition 12.6.8, le polynôme P_A divise le polynôme caractéristique P_f dans $\mathbb{K}[X]$, c'est à dire qu'il existe un polynôme $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P_f(X) = Q(X) P_A(X)$

→ Comme $P_f(f) \in \mathcal{L}(E)$ et de $P_f(X) = Q(X) P_A(X)$, nous avons, $P_f(f)(x) = \left[Q(f) \circ P_A(f)\right](x)$.
Et donc :

$$\begin{aligned} P_f(f)(x) = \left[Q(f) \circ P_A(f)\right](x) = & \; Q(f)\left[P_A(f)(x)\right] \\ = & \; Q(f)\left[(-1)^p P(f)(x)\right] = (-1)^p Q(f)\left[P(f)(x)\right] \\ = & \; (-1)^p Q(f)\left[\left(f^p - c_{p-1}f^{p-1} - \cdots - c_2 f^2 - c_1 f - c_0 \text{Id}_E\right)(x)\right] \\ = & \; (-1)^p Q(f)\left[f^p(x) - c_{p-1}f^{p-1}(x) - \cdots - c_2 f^2(x) - c_1 f(x) - c_0 x\right] \\ = & \; (-1)^p Q(f)\left[\overrightarrow{0}_E\right] \\ = & \; \overrightarrow{0}_E \end{aligned}$$

Finalement, $P_f\left(f\right)\left(x\right) = \overrightarrow{0}_E$ pour tout vecteur $x \in E$, et donc $P_f\left(f\right) = \mathcal{O}_E$.
Il est bien évident que ce qui est vrai pour un endomorphisme $f \in \mathcal{L}\left(E\right)$ où E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n l'est aussi pour tout matrice $A \in \mathcal{M}_n\left(\mathbb{K}\right)$

Exemple 11 :

1. Commençons simple.
   Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. On montre facilement que le polynôme caractéristique $P_A\left(X\right) = X^2 + 1$.
   Par calcul, $P_A\left(A\right) = A^2 + \mathrm{Id}_2 = \mathcal{O}_2$, puisque, par calculs, nous avons $A^2 = -\mathrm{Id}_2$
2. Plus généralement, pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_2\left(\mathbb{R}\right)$, $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
   Le polynôme caractéristique de M est $P_M\left(X\right) = X^2 - \left(a+d\right)X + ad - bc$.
   Par calcul, on montre facilement que $P_M\left(M\right) = \mathcal{O}_2$
3. On considère la matrice $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   Nous avons $P_N\left(X\right) = X^4$. Il est facile de voir que $P_N\left(N\right) = N^4 = \mathcal{O}_4$
4. On considère la matrice $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   Nous avons $P_J\left(X\right) = X^4 - 1$. Il est facile de voir que $J^4 = \mathrm{Id}_4$ et donc $P_J\left(J\right) = J^4 - \mathrm{Id}_4 = \mathcal{O}_4$

12.6.16 Définition de polynôme annulateur

1. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}\left(E\right)$ un endomorphisme de E. On dit qu'un polynôme $P \in \mathbb{K}\left[X\right]$ est un polynôme annulateur de l'endomorphisme f si $P\left(f\right) = \mathcal{O}_E$
2. Soient $A \in \mathcal{M}_n\left(\mathbb{K}\right)$ une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$. On dit qu'un polynôme $P \in \mathbb{K}\left[X\right]$ est un polynôme annulateur de la matrice A si $P\left(A\right) = \mathcal{O}_n$

Exemple 12 :

1. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $p \in \mathcal{L}\left(E\right)$ une projection de E ; alors $p \circ p = p \Longleftrightarrow p^2 = p$. Alors, le polynôme $P\left(X\right) = X^2 - X$ est un polynôme annulateur de p
2. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\sigma \in \mathcal{L}\left(E\right)$ une symétrie de E ; alors $\sigma \circ \sigma = \mathrm{Id}_E \Longleftrightarrow \sigma^2 = \mathrm{Id}_E$. Alors, le polynôme $P\left(X\right) = X^2 - 1$ est un polynôme annulateur de σ
3. Le polynôme caractéristique d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n\left(\mathbb{K}\right)$ ou d'un endomorphisme $f \in \mathcal{L}\left(E\right)$ est un polynôme annulateur de A ou de f

Exercice 17 :

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1. Trouver une relation entre Id_3, A et A^2, et en déduire que A est inversible.
2. En déduire aussi un polynôme annulateur de A
3. Démontrer que si λ est valeur propre de A, alors, λ est racine du polynôme $P\left(X\right) = X^2 - X - 2$
4. Rechercher les valeurs propres de A et les vecteurs propres associés ; la matrice A est-elle diagonalisable ?

12.6.17 Proposition

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme annulateur de l'endomorphisme f.
Alors, les valeurs propres de f sont racines du polynôme annulateur P

Démonstration

- Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $x \in E$, un vecteur propre de f de valeur propre λ. Comme nous avons $f(x) = \lambda x$, on démontre facilement que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^k(x) = \lambda^k x$
- Soit $Q \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme tel que $Q(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$. Alors :

$$\begin{aligned} Q(f)(x) = & \quad a_0 x + a_1 f(x) + \cdots + a_n f^n(x) \\ = & \quad a_0 x + a_1 \lambda x + \cdots + a_n \lambda^n x = (a_0 + a_1 \lambda + \cdots + a_n \lambda^n) x \\ = & \quad Q(\lambda) x \end{aligned}$$

- Si P est un polynôme annulateur de f, alors $P(f)(x) = P(\lambda) x = \overrightarrow{0}_E$
  Comme $x \neq \overrightarrow{0}_E$, alors $P(\lambda) = 0$ et donc λ est une racine de P

Remarque 22 :

1. La proposition énoncée pour un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ est aussi vraie pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
2. Ce résultat nous indique seulement que les valeurs propres de A sont également des racines du polynôme annulateur P. Il peut donc y avoir des racines du polynôme P qui ne sont pas des valeurs propres de A.

12.6.18 Proposition et définition de polynôme minimal

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E.

1. Il existe un unique polynôme $\mu_f \in \mathbb{K}[X]$ qui vérifie les trois conditions suivantes :
   - μ_f est un polynôme annulateur de f
   - μ_f est un polynôme unitaire
   - Si $P \in \mathbb{K}[X]$ est un polynôme annulateur de f alors $\deg \mu_f \leqslant \deg P$

   Ce polynôme μ_f est appelé le polynôme minimal de f
2. Le polynôme minimal de f , μ_f divise tous les polynômes annulateurs de f

Démonstration

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E

1. Soit $Z(f) = \{P \in \mathbb{K}[X] \text{ tel que } P(f) = \mathcal{O}_E\}$.
   Par le théorème de Cayley-Hamilton 12.6.15, le polynôme caractéristique de f, P_f, annule f .
   Ainsi, l'ensemble $Z(f)$ est non vide.
   Choisissons dans cet ensemble un polynôme $Q \in Z(f)$ de degré minimal.
2. Il est clair que tout polynôme multiple de Q annule également f .

   En effet, si $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = BQ$ où $B \in \mathbb{K}[X]$, alors $P(f) = B(f) \circ Q(f) = \mathcal{O}_E$ car $Q(f) = \mathcal{O}_E$
3. Réciproquement, soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(f) = \mathcal{O}_E$.
   On effectue la division euclidienne de P par Q.
   Nous obtenons alors $P = BQ + R$ avec $\deg R < \deg Q$.
   Ainsi $P(f) = B(f) \circ Q(f) + R(f) = \mathcal{O}_E$
   Comme de plus $Q(f) = \mathcal{O}_E$, alors on déduit de la division euclidienne que l'on a aussi $R(f) = \mathcal{O}_E$.

Par l'absurde, si $R(X)$ n'est pas le polynôme nul, alors on a obtenu un polynôme non nul qui annule f et qui est de degré strictement inférieur à celui de Q ; ce qui est contradictoire avec le choix de Q qui est de degré minimum dans $Z(f)$.
Donc, R est le polynôme nul et $P = BQ$, c'est-à-dire Q divise P.

4. Vérifions l'unicité d'un tel polynôme Q s'il est choisi unitaire.
   Supposons donc qu'il existe 2 polynômes Q_1 et Q_2, tous deux de degré minimal et unitaires, annulant f .
   Alors, par ce qui précède, Q_1 divise Q_2 et de même Q_2 divise Q_1, ce qui veut dire que Q_1 et Q_2 sont associés, c'est à dire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $Q_1 = \lambda Q_2$.
   Q_1 et Q_2 étant choisis unitaires, $\lambda = 1$, ce qui prouve que $Q_1 = Q_2$

Q est donc le polynôme minimal μ_f

Remarque 23 :

1. Le polynôme minimal est donc le polynôme unitaire de degré le plus petit qui annule f. On définit de même le polynôme minimal μ_A d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
2. Une conséquence immédiate de la proposition précédente et du théorème de Cayley-Hamilton12.6.15 est que le polynôme minimal μ_f divise le polynôme caractéristique P_f

Exemple 13 :

1. Le polynôme caractéristique de la matrice identité Id_n est $(1-X)^n$ et donc, le polynôme minimal de la matrice identité Id_n est $\mu_{\mathrm{Id}_n}(X) = X - 1$
2. Et, de manière évidente, le polynôme minimal de la matrice nulle est X.
3. Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

   Le polynôme caractéristique de A est $P_A(X) = (X-1)^2$; Son polynôme minimal étant un diviseur de P_A ne peut être que $(X-1)$ ou $(X-1)^2$. Ce ne peut pas être $X - 1$ car, alors, A serait égale à Id_2 donc son polynôme minimal est $\mu_A = (X-1)^2$
4. Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ où $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
   - ▷ Nous avons $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = A$ *(C'est donc une projection)* et donc, nous avons $A^2 - A = \mathcal{O}_3$, donc le polynôme $P(X) = X^2 - X$ est un polynôme annulateur de la matrice A
   - ▷ On vérifie que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ la matrice $A - \lambda \mathrm{Id}_3$ n'est jamais la matrice nulle. Donc aucun polynôme de degré 1 n'est un polynôme annulateur de la matrice A A
   - ▷ Le polynôme $P(X) = X^2 - X$ est donc le polynôme unitaire de plus petit degré annulant A.
     Conclusion : $\mu_f(X) = X^2 - X$

Exercice 18 :

Quel est le polynôme minimal de la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$?

12.6.19 Proposition

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E. Nous appelons μ_f le polynôme minimal de f.
Il y a équivalence entre les 2 propositions suivantes :

1. $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de f
2. $\lambda \in \mathbb{K}$ est une racine du polynôme minimal, c'est à dire $\mu_f(\lambda) = 0$

Démonstration

1. Supposons que $\mu_f(\lambda) = 0$
   D'après 12.6.18, on sait que μ_f divise P_f, le polynôme caractéristique de f.
   Il existe donc $B \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P_f = B \times \mu_f$.
   Si $\lambda \in \mathbb{K}$ est racine du polynôme minimal, alors $P_f(\lambda) = B(\lambda) \times \mu_f(\lambda) = 0$
   Donc λ est racine du polynôme caractéristique, c'est donc une valeur propre de f
2. Réciproquement, supposons que $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de f
   Soit $u \in E$ un vecteur propre de valeur propre λ, de telle sorte que $f(x) = \lambda x$.
   → Nous avons démontré en 12.6.17 que si $Q \in \mathbb{K}[X]$, alors $Q(f)(u) = Q(\lambda)u$
   Donc $Q(\lambda)$ est valeur propre de l'endomorphisme $Q(f)$.
   → On applique alors 12.6.17 au polynôme minimal μ_f :

$$\mu_f(f)(u) = \mu_f(\lambda)u$$

   Or, par définition du polynôme minimal, μ_f, $\mu_f(f)$ est l'endomorphisme identiquement nulet donc $\mu_f(f)(u) = \overrightarrow{0}_E$.
   Donc, par l'égalité précédente, $\mu_f(\lambda)u = \overrightarrow{0}_E$ et comme $u \neq \overrightarrow{0}_e$, alors $\mu_f(\lambda) = 0$ et donc λ est bien racine du polynôme minimal

Exemple 14 :

Recherchons le polynôme minimal de la matrice $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

Pour rechercher ce polynôme minimal, nous allons rechercher son polynôme caractéristique, en ayant en tête que le polynôme minimal divise le polynôme caractéristique et que les valeurs propres de C sont aussi racines de μ_C, le polynôme minimal de C

1. On commence par calculer le polynôme caractéristique de C.
   Classiquement, $P_C(X) = \det(C - X\mathrm{Id}_3) = \begin{vmatrix} 1-X & 2 & -2 \\ 2 & 1-X & -2 \\ 2 & 2 & -3-X \end{vmatrix} = (X-1)(X+1)^2$
   C admet donc deux valeurs propres, $+1$ et -1, l'une étant simple (1), l'autre étant double (-1)
2. On recherche, maintenant, les espaces propres associés.
   ▷ Pour la valeur propre $+1$, nous devons rechercher les vecteurs $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tels que $C\overrightarrow{X} = \overrightarrow{X}$
   Nous devons donc résoudre :

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = & x \\ 2x + y - 2z = & y \\ 2x + 2y - 3z = & z \end{cases} \iff \begin{cases} 2y - 2z = & 0 \\ 2x - 2z = & 0 \\ 2x + 2y - 4z = & 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x - z = & 0 \\ x + y - 2z = & 0 \end{cases}$$

   L'ensemble des solutions de ce système est donc une droite $\Delta = \{(x, x, x) \text{ où } x \in \mathbb{R}\}$.
   Nous pouvons donc écrire $\Delta = \mathbb{R}\overrightarrow{f}_1$ où $\overrightarrow{f}_1 = (1, 1, 1)$

   ▷ Pour la valeur propre -1, nous devons rechercher les vecteurs $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tels que $C\overrightarrow{X} = -\overrightarrow{X}$
   Nous devons donc résoudre :

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = & -x \\ 2x + y - 2z = & -y \\ 2x + 2y - 3z = & -z \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + 2y - 2z = & 0 \\ 2x + 2y - 2z = & 0 \\ 2x + 2y - 2z = & 0 \end{cases} \iff x + y - z = 0$$

L'ensemble des solutions de ce système est donc un plan $\Pi = \{(x, y, x+y) \text{ où } x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R}\}$.
Nous pouvons donc écrire $\Pi = \mathbb{R}\overrightarrow{f}_2 \oplus \mathbb{R}\overrightarrow{f}_3$ où $\overrightarrow{f}_2 = (1, 0, 1)$ et $\overrightarrow{f}_3 = (0, 1, 1)$

La matrice C est donc diagonalisable, de valeurs propres $+1$ et -1

3. Le polynôme minimal de C, μ_C divise le polynôme caractéristique de C, $P_C(X) = (X-1)(X+1)^2$, tout en ayant les mêmes racines.
   Le polynôme minimal ne peut être que $\mu_C(X) = (X-1)(X+1)$ ou $\mu_C(X) = (X-1)(X+1)^2 = P_C(X)$
   Il est alors facile de vérifier que $(X-1)(X+1)$ est un polynôme annulateur de C et que donc $\mu_C(X) = (X-1)(X+1) = X^2 - 1$

Si $\mu_C(X) = X^2 - 1$, nous pouvons en déduire que $\mu_C(C) = C^2 - \mathrm{Id}_3 = \mathcal{O}_3$, c'est à dire que $C^2 = \mathrm{Id}_3$. Ainsi, on montre que C est son propre inverse.

En fait, C est une involution, c'est la matrice d'une symétrie ; ici, c'est la matrice de la symétrie par rapport au plan Π, parallèlement à la droite Δ

Exercice 19 :

Rechercher le polynôme minimal de la matrice $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$