12.7 Liste d'exercices complémentaires

12.7.1 Applications du cours

Exercice 20 :

Soit $\mathcal{C}^{\infty}(R)$ l'espace des fonctions numériques, définies sur $\mathbb{R}$ et indéfiniment continuement différentiables sur $\mathbb{R}$.
Soit D l'endomorphisme de $\mathcal{C}^{\infty}(R)$ qui à f associe sa fonction dérivée f'. Déterminer les valeurs propres de D et les sous-espaces propres associés.

Exercice 21 :

Soit $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est l'espace des suites à numériques complexes, et Φ l'endomorphisme de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ ainsi défini :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & \Phi\left((u_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) = (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ où } \left\{\begin{array}{l} v_0 = u_0 \\ v_n = \dfrac{u_n + u_{n-1}}{2} \end{array}\right. \end{array}$$

Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de Φ.

Exercice 22 :

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que $A = \begin{pmatrix} a & \bar{b} \\ b & a \end{pmatrix}$
Discuter en fonction des valeurs de $a \in \mathbb{C}$ et de $b \in \mathbb{C}$ de la diagonalisation ou de la trigonalisation de A

Exercice 23 :

Dans les matrices suivantes, on cherchera les valeurs propres et les vecteurs propres correspondant à chaque valeur propre. Trouver, s'il y a lieu, une base de $\mathbb{C}^n$ formée de vecteurs propres. Si la matrice est diagonalisable sur $\mathbb{C}$, trouver le plus petit sous-corps de $\mathbb{C}$, c'est à dire $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{Q}$ sur lequel la matrice est diagonalisable.

1. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}$
2. $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
3. $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$
4. $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

Exercice 24 :

Soit $m \in \mathbb{R}$ un nombre réel et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2-m & m-2 & m \end{pmatrix}$$

1. Quelles sont les valeurs propres de f ?
2. Pour quelles valeurs de $m \in \mathbb{R}$, l'endomorphisme est-il diagonalisable ?
3. On suppose $m = 2$. Calculer A^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 25 :

Pour $a \in \mathbb{C}$, $b \in \mathbb{C}$ et $c \in \mathbb{C}$ des nombres complexes, on pose $M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$ et $J = M(0,1,0)$.

1. Exprimer $M(a,b,c)$ en fonction de Id_3, J et J^2
2. Démontrer que J est diagonalisable, et donner ses valeurs propres et ses vecteurs propres.
3. En déduire que $M(a,b,c)$ est diagonalisable, et donner ses valeurs propres.

Exercice 26 :

1. Soit $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; calculer B^2, B^3, puis montrer que $B^3 = 4B^2 - 4B$
2. En déduire vecteurs propres et valeurs propres de B

Exercice 27 :

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel .

1. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent. Démontrer que la seule valeur propre de f est 0
2. Réciproquement, démontrer que si $f \in \mathcal{L}(E)$ a toutes ses valeurs propres nulles, alors f est nilpotent

Exercice 28 :

E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n et $f : E \longmapsto E$ un endomorphisme de E tel que $f^2 = f$.
Quelles sont les valeurs propres de f ?
Trouver toutes les matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telles que $A^2 = A$

12.7.2 Pour aller un peu plus loin

Exercice 29 :

Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} a+b & 0 & a \\ 0 & b & a \\ a & 0 & a+b \end{pmatrix}$ est semblable à une matrice triangulaire
On discutera suivant les valeurs de a et de b

Exercice 30 :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente d'indice p

1. Démontrer que $A^n = \mathcal{O}_n$
2. Calculer $\det(A + \mathrm{Id}_n)$
3. Soit $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $AM = MA$. Calculer $\det(A + M)$

Exercice 31 :

On considère $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathcal{B}_0 = \left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right\}$.
Soient $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ et $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ des endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ dont les matrices dans la base canonique sont :

$$M = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_0}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad N = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_0}(g) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Démontrez que f et g commutent
2. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de f et g

3. Parmi les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$, invariants par f et g, montrer qu'il en existe un de dimension 1 et un autre de dimension 2. En déduire une base de $\mathbb{R}^3$ par rapport à laquelle les matrices de f et g sont triangulaires.

Exercice 32 :

Résoudre dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'équation $X^2 = A$ où $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 8 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 33 :

On considère $\mathbb{C}_3[X]$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 3.
Soient $A(X) = X^4 - 1$ et $B(X) = X^4 - X$, et

$$\left\{ \begin{array}{rcl} f : \mathbb{C}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{C}_3[X] \\ P & \longmapsto & f(P) = R \end{array} \right.$$

où $R = f(P)$ est le reste de la division euclidienne de AP par B.
Vérifier que f est un endomorphisme de $\mathbb{C}_3[X]$ puis déterminer $\ker f$, $\mathrm{Im} f$ et les valeurs et vecteurs propres de f .

Exercice 34 :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice carrée d'ordre n.
Montrer que A est nilpotente si et seulement si pour tout $k \in \mathbb{N}$ avec $1 \leqslant k \leqslant n$, $\mathrm{Tr}\left(A^k\right) = 0$

12.7.3 Miscelleanous

Exercice 35 :

Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice nilpotente.
Montrer que la matrice $\mathrm{Id}_n - N$ est inversible et exprimer son inverse en fonction de N.

Exercice 36 :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$, et pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant n$, $0 \leqslant a_{i,j} \leqslant 1$ et $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$

1. Montrer que 1 est une valeur propre de A.
2. Soit λ une valeur propre de A. Montrer que $|\lambda| \leqslant 1$.

Exercice 37 :

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E. On désigne par φ_u l'application de $\mathcal{L}(E)$ dans $\mathcal{L}(E)$ définie par

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \varphi_u : \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ f & \longmapsto & \varphi_u(f) = u \circ f \end{array} \right.$$

1. Soit α une valeur propre de u et d la dimension du sous-espace propre E_α de valeur propre α. Montrer que α est une valeur propre de φ_u et caractériser les vecteurs propres de φ_u associés à α. Quelle est la dimension du sous-espace propre de $\mathcal{L}(E)$ associé à la valeur propre α ?
2. Montrer que si u est diagonalisable, alors φ_u est diagonalisable.
3. Dans cette question, on suppose que $E = \mathbb{R}^2$ et on considère l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice par rapport à la base canonique est $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(a) Calculer les valeurs propres et trouver des vecteurs propres de u ; montrer que u est diagonalisable.

(b) φ_u étant définie comme à la question 1, écrire la matrice de φ_u, relativement à une base convenablement choisie de $\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^2\right)$. Chercher les valeurs propres et les vecteurs propres de φ_u. Montrer que φ_u est diagonalisable et retrouver ainsi par le calcul direct le résultat de 2 appliqué à ce cas particulier.

Exercice 38 :

L'objet de ce problème est d'étudier une forme de valeur propre et de vecteur propre d'une application semi-linéaire.

Dans tout ce problème l'entier n est supérieur ou égal à 1 *(c'est à dire $n \in \mathbb{N}^*$)* et E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n.

Le but de ce problème est d'étudier les applications semi-linéaires du $\mathbb{C}$-espace vectoriel E dans lui même.

Une application u de E dans lui même est dite **semi-linéaire** si elle possède la propriété suivante :

$$(\forall x \in E)\,(\forall y \in E)\,(u\,(x+y) = u\,(x) + u\,(y))$$

$$(\forall x \in E)\,(\forall a \in \mathbb{C})\,(u\,(ax) = \overline{a}u\,(x))$$

Le nombre complexe $\overline{a}$ est le nombre complexe conjugué de a.

Un nombre complexe $\mu \in \mathbb{C}$ est une valeur **co-propre** de l'application semi-linéaire u s'il existe un vecteur $x \in E$ différent de 0 tel que la relation ci-dessous soit vérifiée :

$$u\,(x) = \mu x$$

Le vecteur x est un vecteur **co-propre** associé à la valeur co-propre μ

Première partie

Le but de cette partie est d'étudier, pour une application semi-linéaire u donnée, les valeurs et vecteurs co-propres.

1. **Premières propriétés.**

   Soit u une application semi-linéaire du $\mathbb{C}$-espace vectoriel E.

   (a) Démontrer qu'étant donné un vecteur $x \neq 0$, appartenant au $\mathbb{C}$-espace vectoriel E, il existe au plus un nombre complexe $\mu \in \mathbb{C}$ tel que la relation $u\,(x) = \mu x$ ait lieu.

   (b) Démontrer que, si le nombre complexe μ est une valeur co-propre de l'application semi-linéaire u, alors, pour tout réel θ , le nombre complexe $\mu e^{i\theta}$ est encore valeur co-propre de l'application semi-linéaire u. Exprimer un vecteur co-propre associé à la valeur co-propre $\mu e^{i\theta}$ en fonction d'un vecteur co-propre x associé à la valeur co-propre μ et du réel θ

   (c) Etant donnée une valeur co-propre μ de l'application semi-linéaire u, soit E_μ l'ensemble des vecteurs $x \in E$ qui vérifient la relation $u\,(x) = \mu x$, c'est à dire :

   $$E_\mu = \{x \in E \text{ tels que } u\,(x) = \mu x\}$$

   ▷ Est-ce que l'ensemble E_μ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel ?
   ▷ Est-ce que l'ensemble E_μ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ?

   (d) Etant données deux applications semi-linéaires u et v, démontrer la linéarité de l'application composée $u \circ v$

2. **Matrice associée à une application semi-linéaire**

   Soit u une application semi-linéaire du $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension finie n ; soit $\{e_i; 1 \leqslant i \leqslant n\}$ une base du $\mathbb{C}$-espace vectoriel E.

   A un vecteur $x \in E$ de coordonnées $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est associée la matrice colonne $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

(a) Démontrer qu'à une application semi-linéaire $u : E \longrightarrow E$ est associée dans la base $\{e_i; 1 \leqslant i \leqslant n\}$ de E une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. telle que la relation $y = u(x)$ s'écrive : $Y = A\overline{X}$.
(La matrice-colonne $\overline{X}$ est la matrice complexe conjuguée de la matrice-colonne X)

(b) Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ les matrices associées à une même application semi-linéaire $u : E \longrightarrow E$ dans les bases $\mathcal{B}_e = \{e_i; 1 \leqslant i \leqslant n\}$ et $\mathcal{B}_f = \{f_i; 1 \leqslant i \leqslant n\}$ respectivement.
Soit S la matrice de passage de la base $\{e_i; 1 \leqslant i \leqslant n\}$ à la base $\{f_i; 1 \leqslant i \leqslant n\}$. Démontrer la relation $B = S \times A \times \overline{S^{-1}}$ où, si $S = (s_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}}$ alors $\overline{S} = (\overline{s_{i,j}})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}}$

3. Étant donnée une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, complexe, d'ordre n, le vecteur X, différent de $0,(X \neq 0)$ est un vecteur co-propre de la matrice carrée A, associée à la valeur co-propre μ, si le vecteur X et le nombre complexe μ vérifient la relation matricielle : $A\overline{X} = \mu X$.

   Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ la matrice d'ordre 2 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

   Rechercher les valeurs co-propres μ et les vecteurs co-propres $X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ associés.

4. **Correspondance entre les valeurs co-propres de la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et les valeurs propres de la matrice $A\overline{A}$**
   Soit$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$
   (a) Démontrer que si le scalaire μ est une valeur co-propre de la matrice A, le nombre réel $|\mu|^2$ est une valeur propre de la matrice $A\overline{A}$
   (b) Soit λ une valeur propre réelle positive ou nulle $\lambda \in \mathbb{R}^+$ de la matrice $A\overline{A}$ et X un vecteur propre associé, c'est à dire $A\overline{A}X = \lambda X$.
   Démontrer que le réel $\sqrt{\lambda}$ est une valeur co-propre de la matrice A
   (c) En déduire que, pour que le réel positif ou nul μ soit valeur co-propre de la matrice A, il faut et il suffit que le réel μ^2 soit valeur propre de la matrice $A\overline{A}$
   (d) Etant donné un réel $m \in \mathbb{R}$, soit A_m la matrice définie par la relation :
   $$A_m = \begin{pmatrix} m & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
   Déterminer les valeurs co-propres réelles positives de A_m *(discuter selon les valeurs de m)*.

5. **Cas d'une matrice triangulaire supérieure**
   Dans cette question la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est une matrice triangulaire supérieure *(les éléments situés en-dessous de la diagonale principale sont nuls)*.
   (a) Démontrer que si λ est une valeur propre de la matrice A, alors, pour tout réel θ, le nombre complexe $\lambda e^{i\theta}$ est une valeur co-propre de la matrice A.
   (b) Démontrer que si μ est une valeur co-propre de la matrice A, alors il existe un réel θ tel que le nombre complexe $\mu e^{i\theta}$ soit valeur propre de la matrice A.
   (c) Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ la matrice définie par $A = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & i \end{pmatrix}$
   Démontrer que le réel 1 est valeur co-propre de cette matrice et déterminer un vecteur X co-propre associé.

6. **Une caractérisation des valeurs co-propres**
   Soit A une matrice carrée complexe d'ordre n, c'est à dire $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$; soient $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ les matrices réelles définies par la relation suivante $A = B + iC$.
   Démontrer que le nombre complexe μ est valeur co-propre de la matrice A si et seulement si le nombre réel $|\mu|$ est une valeur propre de la matrice D, carrée, réelle, d'ordre $2n$ c'est à dire $D \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$, définie par blocs par la relation suivante : $D = \begin{pmatrix} B & C \\ C & -B \end{pmatrix}$

Seconde partie

Soient A et B deux matrices carrées complexes d'ordre n *(c'est à dire $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$)*, s'il existe une matrice carrée complexe S d'ordre n inversible *(c'est à dire $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$)* telle que la relation $B = SA\overline{S}^{-1}$ soit vérifiée, les deux matrices A et B **sont dites co-semblables**.
Si une matrice A est co-semblable à une matrice diagonale, la matrice A est dite **co-diagonalisable**.
Le but de cette partie est de rechercher à quelles conditions une matrice est co-diagonalisable.

1. **Une relation d'équivalence :**
   Etant données deux matrices carrées complexes A et B d'ordre n, ces matrices sont dites satisfaire la relation $\equiv$ si et seulement si ces deux matrices sont co-semblables, c'est à dire :
   $$A \equiv B \Longleftrightarrow (\exists S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}))\left(B = SA\overline{S}^{-1}\right)$$
   Démontrer que la relation $\equiv$ est une relation d'équivalence dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, l'ensemble des matrices carrées complexes d'ordre n .
2. **Indépendance des vecteurs co-propres :**
   Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice carrée complexe d'ordre n ; soient $X_1, X_2, \ldots, X_k$, k vecteurs co-propres de la matrice A associés à des valeurs co-propres $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$, l'entier k étant inférieur ou égal à l'entier n ($k \leqslant n$).
   Démontrer que, si les valeurs co-propres μ_p pour $p = 1, 2, \ldots, k$ ont des <u>modules différents</u> les uns des autres, c'est à dire que si $p \neq q$, alors $|\mu_p| \neq |\mu_q|$, alors la famille $\{X_1, X_2, \ldots, X_k\}$ est libre.
   En déduire que, si la matrice $A\overline{A}$ a n valeurs propres λ_p avec $p = 1, \ldots, n$, positives ou nulles, c'est à dire telles que $\lambda_p \geqslant 0$, distinctes les unes des autres, c'est à dire que si $p \neq q$, alors $\lambda_p \neq \lambda_q$, alors la matrice A est co-diagonalisable.
3. **Quelques propriétés :**
   (a) Soit $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ une matrice carrée complexe d'ordre n inversible ; soit A la matrice définie par la relation $A = S \times \overline{S}^{-1}$
   Calculer la matrice produit $A \times \overline{A}$
   (b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice carrée complexe d'ordre n telle que $A \times \overline{A} = \mathrm{Id}_n$.
   Démontrer qu'il existe au moins un réel θ_0 tel que la matrice $S(\theta_0)$ définie par la relation
   $$S(\theta_0) = A - e^{-i\theta_0}\mathrm{Id}_n$$
   soit inversible.
   Calculer Calculer la matrice $A \times S(\theta_0)$..
   En déduire la matrice $S(\theta) \times \overline{S(\theta)}^{-1}$
4. **Une condition nécessaire :**
   Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice d'ordre n co-diagonalisable. Il existe donc une matrice $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, inversible telle que la matrice $S^{-1} \times A \times S$ soit diagonale.
   Démontrer que la matrice $A \times \overline{A}$ est diagonalisable, que ses valeurs propres sont positives ou nulles et que le rang de la matrice A est égal au rang de la matrice $A \times \overline{A}$
5. **Exemples : co-diagonalisable ? Pas co-diagonalisable ?**
   Soient A, B, C, D les matrices d'ordre 2 suivantes :

   (a) $A = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & i \end{pmatrix}$ (b) $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (c) $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (d) $D = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$

   Est-ce que ces matrices sont diagonalisables ? co-diagonalisables ?