12.8 Correction des exercices

12.8.1 Correction des exercices du cours

Exercice 1 :

Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & -7 & 7 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 7 & -2 \end{pmatrix}$. *Montrer que les vecteurs* $X_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ *et* $X_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *sont des vecteurs propres de* A. *Montrer que la famille* $\{X_1, X_2, X_3\}$ *ne forme pas une famille libre. Est-ce que cela contredit un résultat du cours ?*

- ⋆ Montrons que X_1 est un vecteur propre :
$$AX_1 = \begin{pmatrix} 5 & -7 & 7 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 7 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ -5 \\ -5 \end{pmatrix} = 5X_1$$
X_1 est donc un vecteur propre de valeur propre 5
- ⋆ En faisant des calculs semblables, nous avons $AX_2 = 5X_2$ et donc X_2 est un vecteur propre de valeur propre 5
- ⋆ Et, pour terminer, nous avons $AX_3 = 5X_3$ et donc X_3 est un vecteur propre de valeur propre 5

Effectivement, la famille $\{X_1, X_2, X_3\}$ ne forme pas une famille libre *(Nous avons* $X_1 = -\frac{4}{5}X_2 + \frac{3}{5}X_3$*)*. Il n' y apas contradiction avec le cours, puisque d'après 12.2.5, si les valeurs propres sont différentes, alors les vecteurs propres sont indépendants. Ici, nous avons qu'une seule valeur propre.

En fait, le polynôme caractéristique de A est $P_A(X) = -(5-X)^2(X+2)$. La valeur propre 5 est une valeur propre d'ordre 2 et la dimension de l'espace propre correspondant est au plus 2.

Exercice 2 :

E *est un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel de dimension 2, rapporté à une base* $\left\{\vec{i}, \vec{j}\right\}$ *et* $f : E \longrightarrow E$ *une application linéaire de matrice, dans la base* $\left\{\vec{i}, \vec{j}\right\}$,
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

1. *Démontrer que* $k_0 = 5$ *et* $k_1 = -1$ *sont des valeurs propres de* f *(ou de* A*).*

   Nous allons en fait nous intéresser à l'identité :
$$A\overrightarrow{X} = k\overrightarrow{X} \iff \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2x - 3y = & kx \\ -3x + 2y = & ky \end{cases} \iff \begin{cases} (2-k)x - 3y = & 0 \\ -3x + (2-k)y = & 0 \end{cases}$$
   Le système $\begin{cases} (2-k)x - 3y = & 0 \\ -3x + (2-k)y = & 0 \end{cases}$ est un système de Cramer de déterminant $(2-k)^2 - 9 = (k-5)(k+1)$.

   Ce déterminant s'annule pour $k = 5$ ou $k = -1$.
   - ⋆ Si $k \neq 5$ et $k \neq -1$, le système n'admet qu'une seule solution : $x = 0$ et $y = 0$
   - ⋆ Si $k = 5$, alors le système devient $x + y = 0$.
     Ainsi, la droite $\Delta_5 = \left\{\overrightarrow{X} = (x, -x) \text{ où } x \in \mathbb{R}\right\} = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un espace propre de valeur propre 5
   - ⋆ Si $k = -1$, alors le système devient $x - y = 0$.
     Ainsi, la droite $\Delta_{-1} = \left\{\overrightarrow{X} = (x, x) \text{ où } x \in \mathbb{R}\right\} = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un espace propre de valeur propre -1

2. *Trouver $\overrightarrow{u_0}$ un vecteur propre de valeur propre $k_0 = 5$ et $\overrightarrow{u_1}$ un vecteur propre de valeur propre $k_1 = -1$ et démontrer que ces 2 vecteurs déterminent une base de E.*

   D'après la question ci-dessus, nous choisissons $\overrightarrow{u_0} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   Il est évident que ces 2 vecteurs forment une base de E

3. *Quelle est la matrice de $f : E \longrightarrow E$ dans la base $\{\overrightarrow{u_0}, \overrightarrow{u_1}\}$; on appelle cette matrice B.*

   Voilà qui est très facile : $B = \mathcal{M}(f)_{\{\overrightarrow{u_0},\overrightarrow{u_1}\}} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

4. *Trouver une matrice P, telle que $A = P^{-1}BP$, et montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $A^n = P^{-1}B^nP$*

   ⋆ La matrice de passage de la base $\{\overrightarrow{u_0}, \overrightarrow{u_1}\}$ à la base canonique est $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et la matrice de passage de la base canonique à la base $\{\overrightarrow{u_0}, \overrightarrow{u_1}\}$ est la matrice $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

   ⋆ Nous avons donc $A = PBP^{-1}$ et donc :

$$\begin{aligned} A^n = ()^n = & \left(PBP^{-1}\right)\left(PBP^{-1}\right)\cdots\left(PBP^{-1}\right) \\ = & PB\left(P^{-1}P\right)B\left(P^{-1}P\right)\cdots\left(P^{-1}P\right)BP^{-1} \\ = & PB^nP^{-1} \end{aligned}$$

   ⋆ Nous avons $B^n = \begin{pmatrix} 5^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$

   D'où nous avons $A^n = \begin{pmatrix} \dfrac{5^n + (-1)^n}{2} & \dfrac{-5^n + (-1)^n}{2} \\ \dfrac{-5^n + (-1)^n}{2} & \dfrac{5^n + (-1)^n}{2} \end{pmatrix}$

Exercice 4 :

Calculer le polynôme caractéristique de la matrices $A = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ et en déduire les valeurs propres

Nous recherchons le polynôme caractéristique de A, $P_A(X)$:

$$P_A(X) = \det(A - X\mathrm{Id}_4) = \begin{vmatrix} -3-X & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -3-X & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1-X & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 2-X \end{vmatrix}$$

Nous allons utiliser le calcul du déterminant par blocs :

$$\begin{aligned} P_A(X) = & \begin{vmatrix} -3-X & -1 \\ -1 & -3-X \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} -1-X & 2 \\ 5 & 2-X \end{vmatrix} = \left[(-3-X)^2 + 1\right]\left[(X-2)(X+1) - 10\right] \\ = & \left[(3+X)^2 + 1\right]\left[X^2 - X - 12\right] \end{aligned}$$

→ Si nous considérons A comme une matrice à coefficients réels, c'est à dire $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, alors, $P_A(X) = 0$ si et seulement si $X^2 - X - 12 = 0$.
Dans ce cas, A n'admet que 2 valeurs propres $\lambda_1 = 4$ et $\lambda_2 = -3$

→ Par contre, si nous considérons A comme une matrice à coefficients complexes, c'est à dire $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{C})$, alors, $P_A(X) = 0$ si et seulement si $X^2 - X - 12 = 0$ et $(3+X)^2 + 1 = 0$.
Dans ce cas, A admet 4 valeurs propres $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = -3$, $\lambda_3 = -3 + i$ et $\lambda_4 = -3 - i$

Exercice 5 :

1. *Trouver plusieurs matrices carrées d'ordre 2 dont la somme des valeurs propres fait* 6 *et le produit des valeurs propres fait* 2

   ⋆ Le polynôme caractéristique d'une matrice A carrée d'ordre 2 est donné par $P_A(X) = X^2 - \operatorname{tr}(A)\,X + \det A$, tout en sachant que si les valeurs propres sont λ_1 et λ_2, $\operatorname{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2$ et $\det A = \lambda_1 \times \lambda_2$.
   Dans notre cas, $P_A(X) = X^2 - 6X + 2$ dont les racines sont $\lambda_1 = 3 + \sqrt{7}$ et $\lambda_2 = 3 - \sqrt{7}$

   ⋆ Ainsi, une première famille de matrices est donnée par :

$$A_z = \begin{pmatrix} 3+\sqrt{7} & z \\ 0 & 3-\sqrt{7} \end{pmatrix} \text{ où } z \in \mathbb{C}$$

   ⋆ Si nous considérons le polynôme $P_A(X) = X^2 - 6X + 2$, la « matrice-compagnon » de P_A est donnée par $M = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$

2. *Trouver une matrice, ni diagonale ni triangulaire, dont le polynôme caractéristique est* $(X-1)^2\left(X^2+X+1\right)$

   Nous allons utiliser une matrice d'ordre 4, par blocs :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & j & \mu \\ 0 & 0 & 0 & j^2 \end{pmatrix} \text{ avec } \lambda \in \mathbb{C} \text{ et } \mu \in \mathbb{C}$$

Exercice 6 :

Déterminer les vecteurs propres et les valeurs propres de la matrice $Y = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

⇒ Tout d'abord, nous clculons le polynôme caractéristique P_Y :

$$\begin{aligned} P_Y(X) &= \begin{vmatrix} -1-X & 1 & 0 \\ 0 & -1-X & 1 \\ 1 & 0 & -1-X \end{vmatrix} = (-1-X)\begin{vmatrix} -1-X & 1 \\ 0 & -1-X \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1-X & 1 \end{vmatrix} \\ &= (-1-X)^3 + 1 = 1 - (1+X)^3 \end{aligned}$$

⇒ Nous avons $(1+X)^3 = 1 + X^3 + 3X + 3X^2$ et donc $P_Y(X) = 1 - (1+X)^3 = -X\left(X^2+3X+3\right)$
Les valeurs propres de Y sont donc les racines du polynôme P_Y

⇒ Si nous supposons $Y \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, la seule racine réelle de P_Y est 0 et la recherche de vecteurs propres est la recherche du noyau.

Nous devons donc trouver $\overrightarrow{U} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tel que $Y\overrightarrow{U} = \overrightarrow{0}$, c'est à dire résoudre le système :

$$\begin{cases} -x + y = 0 \\ -y + z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases} \iff x = y = z$$

Ainsi, $\ker Y = \{(x,x,x) \text{ avec } x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

⇒ Si nous supposons maintenant $Y \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, les racines de P_Y sont 0 et celles du polynôme $X^2 + 3X + 3$, c'est à dire $\lambda_1 = -1 + j$ et $\lambda_2 = -1 + \overline{j}$

   ⋆ Nous avons $\ker Y = \{(x,x,x) \text{ avec } x \in \mathbb{C}\} = \mathbb{C}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

- $\star$ Recherchons les vecteurs propres de valeurs propres $\lambda_1 = -1+j$. Nous devons donc résoudre :

$$\left\{\begin{array}{rl} -x+y= & (-1+j)\,x \\ -y+z= & (-1+j)\,y \\ x-z= & (-1+j)\,z \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} jx-y= & 0 \\ jy-z= & 0 \\ -x+jz= & 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow y=jx \text{ et } z=j^2x=\overline{j}x \text{ avec } x\in\mathbb{C}$$

Ainsi, $E_{-1+j} = \left\{\left(x, jx, j^2x\right) \text{ avec } x\in\mathbb{C}\right\} = \mathbb{C}\begin{pmatrix}1\\ j\\ j^2\end{pmatrix}$

- $\star$ Continuons en reherchant les vecteurs propres de valeurs propres $\lambda_1 = -1+\overline{j} = -1+j^2$. Nous devons donc résoudre :

$$\left\{\begin{array}{rl} -x+y= & \left(-1+j^2\right)x \\ -y+z= & \left(-1+j^2\right)y \\ x-z= & \left(-1+j^2\right)z \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} j^2x-y= & 0 \\ j^2y-z= & 0 \\ -x+j^2z= & 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow y=\overline{j}x \text{ et } z=jx=\overline{j}x \text{ avec } x\in\mathbb{C}$$

Ainsi, $E_{-1+\overline{j}} = \left\{\left(x, j^2x, jx\right) \text{ avec } x\in\mathbb{C}\right\} = \mathbb{C}\begin{pmatrix}1\\ j^2\\ j\end{pmatrix}$

Exercice 7 :

Soit $A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice symétrique, c'est à dire telle que

$$A = \begin{pmatrix} a & c\\ c & b\end{pmatrix} \text{ avec } a\in\mathbb{R} \text{ et } b\in\mathbb{R}$$

La matrice A est-elle diagonalisable ?

Nous utilisons les résultats sur les matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

$$P_A(X) = X^2 - \operatorname{tr}(A)\,X + \det A$$

C'est à dire, dans notre cas :

$$P_A(X) = X^2 - (a+b)\,X + ab - c^2$$

Le discriminant de ce polynôme est $\Delta = (a+b)^2 - 4\left(ab-c^2\right) = (a-b)^2 + 4c^2$.
Comme $\Delta \geqslant 0$, le polynôme a aumoins une racine.

- $\star$ $\Delta = 0$ si et seulement si $a=b$ et $c=0$ et la matrice X est du type $X = a\mathrm{Id}_2$
- $\star$ Si $a\neq b$ ou $c\neq 0$, alors $\Delta > 0$ et le polynôme caractéristique admet 2 racines distinctes et donc X admet 2 valeurs propres.

Ainsi, toute matrice symétrique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est diagonalisable.

Exercice 8 :

On considère un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension 2, rapporté à une base $\left\{\vec{i}, \vec{j}\right\}$; f est l'endomorphisme de E, défini par sa matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & -1\\ -1 & 5\end{pmatrix}$

1. *Rechercher les vecteurs propres et les valeurs propres de A*

   Remarquons que la matrice A est symétrique et qu'elle admet sûrement 2 valeurs propres distinctes
   $\Rightarrow$ Le polynôme caractistique de A est $P_A(X) = X^2 - 10X + 24$ dont les racines sont $\lambda_1 = 6$ et $\lambda_2 = 4$
   $\Rightarrow$ Recherchons les vecteurs propres de valeur propre $\lambda_1 = 6$.
   Nous devons donc résoudre le système d'équations :

$$\left\{\begin{array}{rl} 5x-y= & 6x \\ -x+5y= & 6y \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} -x-y= & 0 \\ -x-y= & 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow x+y=0$$

   Donc si E_6 est le sous-espace vectoriel des vecteurs propres de valeur propre 6, nous avons $E_6 = \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ Recherchons, maintenant, les vecteurs propres de valeur propre $\lambda_2 = 4$.
Nous devons donc résoudre le système d'équations :

$$\left\{\begin{array}{rl} 5x - y = & 4x \\ -x + 5y = & 4y \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rl} x - y = & 0 \\ -x + y = & 0 \end{array}\right. \iff x - y = 0$$

Donc si E_4 est le sous-espace vectoriel des vecteurs propres de valeur propre 4, nous avons $E_4 = \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

2. *Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, calculer A^n*

$\Rightarrow$ Appelons $u_0 = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ et $u_1 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

Il est clair que la famille $\{u_0, u_1\}$ forme une base de E, et qui si $f : E \longrightarrow E$ est une application linéaire de matrice A dans la lase canonique, la matrice de f dans la base $\{u_0, u_1\}$ sera $D = \begin{pmatrix}6 & 0\\0 & 4\end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ Si P est la matrice de passage de la base canonique à la base $\{u_0, u_1\}$, nous avons $P = \begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & 1\end{pmatrix}$ et nous avons $A = PDP^{-1}$, puis, pour $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.

Nous avons $P^{-1} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{-1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ Pour $n \in \mathbb{N}$, nous avons $D^n = \begin{pmatrix}6^n & 0\\0 & 4^n\end{pmatrix}$, nous obtenons alors, par calculs

$$A^n = \begin{pmatrix}\dfrac{4^n + 6^n}{2} & \dfrac{4^n - 6^n}{2}\\ \dfrac{4^n - 6^n}{2} & \dfrac{4^n + 6^n}{2}\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Soit $n \in \mathbb{Z}$ et $n \leqslant -1$.
Alors, $A^n = \left(A^{-1}\right)^{-n}$ et, de $A = PDP^{-1}$, nous avons $A^{-1} = PD^{-1}P^{-1}$; d'où $A^n = \left(A^{-1}\right)^{-n} = P\left(D^{-1}\right)^{-n}P^{-1}$

$\Rightarrow$ Nous avons $D^{-1} = \begin{pmatrix}\frac{1}{6} & 0\\ 0 & \frac{1}{4}\end{pmatrix}$ et donc $\left(D^{-1}\right)^{-n}\begin{pmatrix}\frac{1}{6^{-n}} & 0\\ 0 & \frac{1}{4^{-n}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6^n & 0\\0 & 4^n\end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ Ainsi, pour $n \in \mathbb{Z}$ et $n \leqslant -1$, nous avons $A^n = PD^nP^{-1}$, c'est à dire :

$$A^n = \begin{pmatrix}\dfrac{4^n + 6^n}{2} & \dfrac{4^n - 6^n}{2}\\ \dfrac{4^n - 6^n}{2} & \dfrac{4^n + 6^n}{2}\end{pmatrix}$$

En conclusion, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, nous avons

$$A^n = \begin{pmatrix}\dfrac{4^n + 6^n}{2} & \dfrac{4^n - 6^n}{2}\\ \dfrac{4^n - 6^n}{2} & \dfrac{4^n + 6^n}{2}\end{pmatrix}$$

3. *On considère 2 suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_0 = 3$, $v_0 = -3$ et $\left\{\begin{array}{l} u_{n+1} = 5u_n - v_n \\ v_{n+1} = -u_n + 5v_n \end{array}\right.$*
Donner u_n et v_n en fonction de n

De manière évidente, nous avons $\begin{pmatrix}u_{n+1}\\v_{n+1}\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}u_n\\v_n\end{pmatrix}$.

Donc en itérant, nous obtenons $\begin{pmatrix}u_{n+1}\\v_{n+1}\end{pmatrix} = A^2\begin{pmatrix}u_{n-1}\\v_{n-1}\end{pmatrix}$ et plus généralement $\begin{pmatrix}u_{n+1}\\v_{n+1}\end{pmatrix} = A^p\begin{pmatrix}u_{n-p+1}\\v_{n-p+1}\end{pmatrix}$

De là, nous déduisons que $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$ et donc, par calcul :

$$\begin{cases} u_n = & 3 \times 6^n \\ v_n = & -3 \times 6^n \end{cases}$$

Les 2 suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont simplement des suites géométriques.

Exercice 11 :

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel . Soient $u : E \longrightarrow E$ et $f : E \longrightarrow E$ 2 endomorphismes qui commutent, c'est à dire tels que $f \circ u = u \circ f$.
Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ un vecteur propre de u d'espace propre associé E_λ. Démontrer que E_λ est stable par f, c'est à dire que $f(E_\lambda) \subset E_\lambda$

Soit $x \in E_\lambda$; il faudra donc montrer que $f(x) \in E_\lambda$.
$f \circ u(x) = f[u(x)] = f[\lambda x] = \lambda f[x]$
De $f \circ u = u \circ f$, nous déduisons que, pour $x \in E_\lambda$, $f \circ u(x) = f[u(x)] = u \circ f(x) = u[f(x)]$
Nous avons dons $f[u(x)] = u[f(x)] \Longleftrightarrow \lambda f[x] = u[f(x)]$
Nous en déduisons que $f(x)$ est donc un vecteur propre de valeur propre λ, c'est à dire que $f(x) \in E_\lambda$.

Exercice 13 :

Soient f,g deux endomorphismes du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie tels que f soit diagonalisable.
Démontrer que f et g commutent si et seulement si les sous-espaces propres de f sont stables par g.

- Supposons que f et g commutent
  Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme quelconque. Alors $\ker P(f)$ est stable par g

  En effet, soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et nous avons alors $P(f) = a_0 \mathrm{Id}_E + a_0 f + \cdots + a_n f^n$.
  Nous devons donc montrer que si $x \in \ker P(f)$, alors $g(x) \in \ker P(f)$.
  Soit $x \in \ker P(f)$; alors $P(f)(x) = 0$ et nous devons montrer que $P(f)[g(x)] = 0$.
  Nous avons :

  $$P(f)[g(x)] = a_0 g(x) + a_0 f[g(x)] + \cdots + a_n f^n [g(x)]$$

  Remarquons que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, avec $1 \leqslant k \leqslant n$, en utilisant la commutativité et l'associativité de la composition :

  $$\begin{aligned} f^k \circ g = & \ f^{k-1} \circ (f \circ g) = f^{k-1} \circ (g \circ f) \\ = & \ f^{k-2} \circ (f \circ g) \circ f = f^{k-2} \circ (g \circ f) \circ f \\ = & \ f^{k-3} \circ (f \circ g) \circ f^2 = f^{k-3} \circ (g \circ f) \circ f^2 = \left(f^{k-3} \circ g\right) \circ f^3 \\ \vdots & \ \vdots \\ = & \ g \circ f^k \end{aligned}$$

  Nous avons alors :

  $$\begin{aligned} P(f)[g(x)] = & \ a_0 g(x) + a_0 g[f(x)] + \cdots + a_n g[f^n(x)] \\ = & \ g[a_0 x + a_0 f(x) + \cdots + a_n f^n(x)] \\ = & \ g[P(f)(x)] \\ = & \ g(0) = 0 \end{aligned}$$

  Donc $g(x) \in \ker P(f)$ et $\ker P(f)$ est bien stable par g

  Comme $\ker P(f)$ est stable par g pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$, il l'est, en particulier, pour les polynômes $P_\lambda(X) = X - \lambda$ où $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de f.
  Si E_λ est un sous-espace propre de f de valeur propre λ, nous avons en fait $E_\lambda = \ker P_\lambda(f)$ qui est donc stable par g.
  Ainsi, si f et g commutent alors les sous-espaces propres de f sont stables par g

- ▷ Réciproquement, on suppose que g laisse stable tous les sous-espaces propres de f.
  Soit E_λ un tel sous-espace propre et soit $x \in E_\lambda$.
  Alors d'une part $g\left(f\left(x\right)\right) = g\left(\lambda x\right) = \lambda g\left(x\right)$, ce qui signifie que $g\left(x\right) \in E_\lambda$.
  Autrement dit, si $x \in E_\lambda$, on a $f\left(g\left(x\right)\right) = \lambda g\left(x\right)$ et $g\left(f\left(x\right)\right) = g\left(\lambda x\right) = \lambda g\left(x\right)$. Ainsi, si $x \in E_\lambda$, alors $f\left(g\left(x\right)\right) = g\left(f\left(x\right)\right)$.
  Maintenant, comme f est diagonalisable, E est somme directe des sous-espaces propres de f.
  Ecrivant tout $x \in E$ comme somme de x_{λ_i}, où $x_{\lambda_i} \in E_{\lambda_i}$, on prouve que $f\left(g\left(x\right)\right) = g\left(f\left(x\right)\right)$ et donc que g et f commutent.

Exercice 16 :

Soient $A \in \mathcal{M}_n\left(\mathbb{R}\right)$ nilpotente d'indice k et $B \in \mathcal{M}_n\left(\mathbb{R}\right)$ nilpotente d'indice l qui commutent.
Montrer que $A+B$ et AB sont 2 matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n\left(\mathbb{R}\right)$

- ▷ A et B étant 2 matrices qui commutent, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous pouvons calculer $\left(A+B\right)^n$ à l'aide de la formule du binôme de Newton. Ainsi :

$$\left(A+B\right)^n = \sum_{j=0}^{n} \mathrm{C}_n^j A^j B^{n-j} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} A^j B^{n-j}$$

  Nous allons choisir $n = k+l-1$; alors :

$$\begin{aligned}\left(A+B\right)^{k+l-1} &= \sum_{j=0}^{k+l-1} \binom{k+l-1}{j} A^j B^{k+l-1-j} \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k+l-1}{j} A^j B^{k+l-1-j} + \sum_{j=k}^{k+l-1} \binom{k+l-1}{j} A^j B^{k+l-1-j}\end{aligned}$$

  Dans l'expression $\displaystyle\sum_{j=k}^{k+l-1} \binom{k+l-1}{j} A^j B^{k+l-1-j}$, nous avons $j \geqslant k$ et donc $A^j = \mathcal{O}_n$, de telle sorte que $\displaystyle\sum_{j=k}^{k+l-1} \binom{k+l-1}{j} A^j B^{k+l-1-j} = \mathcal{O}_n$.
  Puis, dans l'expression $\displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} \binom{k+l-1}{j} A^j B^{k+l-1-j}$, nous avons $1-k \leqslant -j \leqslant 0$ et donc $1-k+(k+l-1) \leqslant (k+l-1)-j \leqslant (k+l-1)$, c'est à dire $(k+l-1)-j \geqslant l$ et donc nous avons $B^{k+l-1-j} = \mathcal{O}_n$.
  D'où $\displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} \binom{k+l-1}{j} A^j B^{k+l-1-j} = \mathcal{O}_n$.
  Et donc, en résumé, $\left(A+B\right)^{k+l-1} = \mathcal{O}_n$ et la matrice $A+B$ est donc nilpotente, d'indice au plus $k+l-1$
- ▷ Comme A et B commutent, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous pouvons calculer $\left(AB\right)^n = A^n \times B^n$.
  En supposant $k \leqslant l$, nous avons $\left(AB\right)^k = A^k \times B^n = \mathcal{O}_n \times B^n = \mathcal{O}_n$.
  Donc, AB est nilpotente, d'indice, au plus k

Exercice 17 :

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1. *Trouver une relation entre Id_3, A et A^2, et en déduire que A est inversible.*

   Un calcul matriciel élémentaire montre que $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Nous voyons donc, tout de suite, que $A^2 = 2\mathrm{Id}_2 + A$
Donc, nous avons :

$$A^2 = 2\mathrm{Id}_2 + A \Longleftrightarrow A^2 - A = 2\mathrm{Id}_2 \Longleftrightarrow A\left(A - \mathrm{Id}_2\right) = 2\mathrm{Id}_2$$

D'où, $A^{-1} = \dfrac{1}{2}\left(A - \mathrm{Id}_2\right) = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

2. *En déduire aussi un polynôme annulateur de A*

   Très simple. Nous avons $A^2 = 2\mathrm{Id}_2 + A \Longleftrightarrow A^2 - A - 2\mathrm{Id}_2 = \mathcal{O}_2$
   Le polynôme $P(X) = X^2 - X - 2$ est donc un polynôme annulateur de A

3. *Démontrer que si λ est valeur propre de A, alors, λ est racine du polynôme $P(X) = X^2 - X - 2$*

   Soit $\lambda_i n\mathbb{K}$, une valeur propre de A de vecteur propre non nul u. Alors :

$$A(u) = \lambda u \quad A^2(u) = A\left[A(u)\right] = A\left[\lambda u\right] = \lambda A(u) = \lambda^2 u$$

   Donc :

$$\left(A^2 - A - 2\mathrm{Id}_2\right)(u) = \mathcal{O}_2(u) \Longleftrightarrow A^2(u) - A(u) - 2u = \overrightarrow{0}_E \Longleftrightarrow \left(\lambda^2 - \lambda - 2\right)u = \overrightarrow{0}_E$$

   Comme $u \neq \overrightarrow{0}_E$, nous avons $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$, ce qui veut dire que λ est racine du polynôme $P(X) = X^2 - X - 2$

4. *Rechercher les valeurs propres de A et les vecteurs propres associés ; la matrice A est-elle diagonalisable ?*

   Si λ est valeur propre de A, alors, λ est racine du polynôme $P(X) = X^2 - X - 2$.
   Nous avons $X^2 - X - 2 = (X+1)(X-2)$, ce qui veut dire que -1 et 2 sont des valeurs propres de A. Mais, sont-ce les seules ?.
   Recherchons le polynôme caractéristique de A.

$$P_A(X) = \det\left(A - X\mathrm{Id}_3\right) = \begin{vmatrix} -X & 1 & 1 \\ 1 & -X & 1 \\ 1 & 1 & -X \end{vmatrix} = -X^3 + 3X + 2 = (X+1)^2(2-X)$$

   Il y a donc 2 valeurs propres :
   ⋆ Une valeur propre simple $\lambda = 2$
   ⋆ Une valeur propre double $\lambda = -1$
   Recherchons, maintenant, l'espace propre associé à la valeur propre $\lambda = -1$.

   Nous devons donc trouver des vecteurs $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tels que $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

   Nous avons :

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} y + z = & -x \\ x + z = & -y \\ x + y = & -z \end{array}\right. \Longleftrightarrow x + y + z = 0$$

   L'espace propre de valeur propre $\lambda = -1$ est le plan d'équation $x + y + z = 0$. c'est un sous-espace vectoriel de dimension 2 et la matrice A est donc diagonalisable. A est donc semblable à la matrice $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

   Il faut remarquer que le polynôme annulateur $P(X) = X^2 - X - 2$ divise le polynôme caractéristique $P_A(X) = (X+1)^2(2-X)$

   C'est exceptionnel ! ! Par exemple, si nous considérons la matrice $\Pi = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ qui est une projection ($\Pi^2 = \Pi$), alors le polynôme $Q(X) = X^3 - X$ est un polynôme annulateur de Π, mais ne divise pas le polynôme caractéristique P_Π de Π

Exercice 18 :

Quel est le polynôme minimal de la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ *?*

Un calcul facile montre que $B^2 = 3B$ et que donc $B^2 - 3B = \mathcal{O}_3$. Ainsi, le polynôme $Q(X) = X^2 - 3X$ est un polynôme annulateur de B.
Le polynôme minimal de B, μ_B divise Q. Donc $\mu_B(X) = X$ ou $\mu_B(X) = X - 3$ ou $\mu_B(X) = X^2 - 3X$.
Or, B n'est ni la matrice nulle ni un multiple de la matrice identité.
Donc, le seul choix que nous ayions est $\mu_B(X) = X^2 - 3X$

Exercice 19 :

Rechercher le polynôme minimal de la matrice $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$

Pour rechercher ce polynôme minimal, nous allons rechercher son polynôme caractéristique, en ayant en tête que le polynôme minimal divise le polynôme caractéristique et que les valeurs propres de D sont aussi racines de μ_D, le polynôme minimal de D

1. On commence par calculer le polynôme caractéristique de D.
   Classiquement, $P_D(X) = \det(D - X\mathrm{Id}_3) = \begin{vmatrix} 3-X & 0 & 8 \\ 3 & -1-X & 6 \\ -2 & 0 & -5-X \end{vmatrix} = (X+1)^3$
   D n'admet donc qu'une seule valeurs propre, -1
2. On recherche, maintenant, les espaces propres associés.
   - ▹ Nous devons rechercher les vecteurs $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tels que $D\overrightarrow{X} = -\overrightarrow{X}$

     Nous devons donc résoudre :
     $$\left\{\begin{array}{rl} 3x + 8z = & -x \\ 3x - y + 6z = & -y \\ -2x - 5z = & -z \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} 4x + 8z = & 0 \\ 3x + 6z = & 0 \\ -2x - 4z = & 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow x + 2z = 0$$
     L'ensemble des solutions de ce système est donc un plan $\Pi_1 = \{(-2z, y, z) \text{ où } z \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R}\}$.
     Nous avons $\dim \Pi_1 = 2$

   La matrice D n'est donc pas diagonalisable.
3. Le polynôme minimal de D, μ_D divise le polynôme caractéristique de D, $P_D(X) = (X+1)^3$, tout en ayant comme racine $x_0 = -1$
   Le polynôme minimal ne peut être que $\mu_D(X) = (X+1)$, $\mu_D(X) = (X+1)^2$ ou $\mu_D(X) = (X+1)^3 = P_C(X)$
4. Comme $D \neq -\mathrm{Id}_3$, le polynôme $(X+1)$ n'est sûrement pas le polynôme annulateur de D
5. $D + \mathrm{Id}_3 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$
   Il est alors facile de vérifier, par calcul que $(D + \mathrm{Id}_3)^2 =$ et que donc $(X+1)^2$ est un polynôme annulateur de D et que donc $\mu_D(X) = (X+1)^2$

12.8.2 Applications du cours

Exercice 20 :

Soit $\mathcal{C}^\infty(R)$ *l'espace des fonctions numériques, définies sur* $\mathbb{R}$ *et indéfiniment continuement différentiables sur* $\mathbb{R}$.
Soit D *l'endomorphisme de* $\mathcal{C}^\infty(R)$ *qui à* f *associe sa fonction dérivée* f'. *Déterminer les valeurs propres de* D *et les sous-espaces propres associés.*

Il faut trouver des fonctions $f \in \mathcal{C}^{\infty}(R)$ telles que $D(f) = \lambda f \iff f' = \lambda f$.
C'est une équation différentielle banale du type $y' = \lambda y$ dont les solutions sont du type $f_\lambda(x) = Ce^{\lambda x}$.
Un espace propre de valeur propre λ est donc l'espace $\left\{Ce^{\lambda x} \text{ avec } C \in \mathbb{R}\right\}$

> **Note**
> Si on choisit des fonctions définies sur $\mathbb{R}$, mais à valeurs dans $\mathbb{C}$, on peut choisir $\lambda \in \mathbb{C}$ et $C \in \mathbb{C}$

Exercice 21 :

Soit $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est l'espace des suites à numériques complexes, et Φ l'endomorphisme de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ ainsi défini :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & \Phi\left((u_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) = (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ où } \left\{\begin{array}{l} v_0 = u_0 \\ v_n = \dfrac{u_n + u_{n-1}}{2} \end{array}\right. \end{array}$$

Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de Φ.

Nous admettons, mais la démonstration est simple, que Φ est une application linéaire
Il faut donc trouver une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et un nombre $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $\Phi\left((u_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) = \lambda (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$
Soit donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un « vecteur propre » associé à la valeur propre λ.
Nous avons alors $u_0 = \lambda u_0$ et pour tout $n \geqslant 1$, $\dfrac{u_n + u_{n-1}}{2} = \lambda u_n \iff u_{n-1} = (2\lambda - 1) u_n$

- ⋆ Si $\lambda = 1$, alors $u_0 = u_0$ *(ce qui ne nous apporte rien)* et $u_{n-1} = u_n$, ce qui veut dire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite constante.
  Réciproquement, il est clair qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ constante vérifie $\Phi\left((u_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$
  Donc, le nombre 1 est bien valeur propre de Φ, d'espace propre associé le sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ formé des suites constantes.
- ⋆ Si $\lambda = \dfrac{1}{2}$, alors $u_0 = \dfrac{1}{2}u_0$ implique $u_0 = 0$ et, pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = 0$. Ainsi, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la seule suite nulle et donc $\dfrac{1}{2}$ n'est pas valeur propre
- ⋆ Pour $\lambda \neq 1$ et $\lambda \neq \dfrac{1}{2}$ alors l'identité $u_0 = \lambda u_0$ implique toujours $u_0 = 0$, et comme, pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = \dfrac{1}{2\lambda - 1}u_{n-1}$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique telle que, toujours pour $n \geqslant 1$, $u_n = \left(\dfrac{1}{2\lambda - 1}\right)^n u_0$.
  La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite nulle

En conclusion, la seule valeur propre de Φ est 1, et les seuls vecteurs propres sont les suites constantes.

Exercice 22 :

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que $A = \begin{pmatrix} a & \overline{b} \\ b & a \end{pmatrix}$
Discuter en fonction des valeurs de $a \in \mathbb{C}$ et de $b \in \mathbb{C}$ de la diagonalisation ou de la trigonalisation de A
Cet exercice ne me paraît pas difficile. Je l'ai mis pour changer d'espace : trop souvent, nous travaillons sur $\mathbb{R}$. Ici, nous nous intéressons à $\mathbb{C}^2$
Comme toute matrice d'ordre 2, le ploynôme caractéristique de A est donné par

$$P_A(X) = X^2 - 2aX + \left(a^2 - |b|^2\right)$$

Par calcul, les racines de P_A sont $\lambda_1 = a + |b|^2$ et $\lambda_2 = a - |b|^2$ et sont donc aussi les valeurs propres possibles de A.

⇒ Recherchons les vecteurs propres de valeur propre $\lambda_1 = a + |b|^2$

Nous devons chercher des vecteurs $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ tels que $A\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \left(a+|b|^2\right)\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$; ce qui revient à étudier le système :

$$\left\{\begin{array}{rl} az_1+\bar{b}z_2 = & \left(a+|b|^2\right)z_1 \\ bz_1+az_2 = & \left(a+|b|^2\right)z_2 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} -|b|^2 z_1+\bar{b}z_2 = & 0 \\ bz_1-|b|^2 z_2 = & 0 \end{array}\right.$$

Nous sommes devant un système de Cramer dont le déterminant est donné par :

$$\delta = |b|^4-|b|^2 = |b|^2\left(|b|^2-1\right)$$

- ⋆ Supposons $|b|=0$ ou, ce qui est équivalent, $b=0$.
  La matrice A devient alors $A=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = a\mathrm{Id}_2$
  A est donc la matrice d'une homothétie
- ⋆ Supposons $|b|=1$
  Le système devient alors, en tenant compte que $|b|^2=b\bar{b}=1$, :

$$\left\{\begin{array}{rl} -z_1+\bar{b}z_2 = & 0 \\ bz_1-z_2 = & 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow bz_1-z_2=0$$

  L'espace propre de valeur propre $\left(a+|b|^2\right)=a+1$ est donc

$$E_{a+1}=\{(z,bz) \text{ où } z\in\mathbb{C}\} = \mathbb{C}\times\begin{pmatrix} 1 \\ b \end{pmatrix}$$

- ⋆ Bien sûr, si $|b|\neq 0$ ou $|b|\neq 1$, les seules solutions au système sont $z_1=0$ et $z_2=0$ et, à ce moment, $\lambda_1=a+|b|^2$ n'est pas une valeur propre.
  Par contre, si $|b|\neq 0$ ou $|b|\neq 1$, la matrice A est trigonalisable

⇒ <u>Recherchons, maintenant, les vecteurs propres de valeur propre $\lambda_2=a-|b|^2$</u>

Nous devons chercher des vecteurs $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ tels que $A\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \left(a-|b|^2\right)\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$; ce qui revient à étudier le système :

$$\left\{\begin{array}{rl} az_1+\bar{b}z_2 = & \left(a-|b|^2\right)z_1 \\ bz_1+az_2 = & \left(a-|b|^2\right)z_2 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} |b|^2 z_1+\bar{b}z_2 = & 0 \\ bz_1+|b|^2 z_2 = & 0 \end{array}\right.$$

Nous sommes devant un système de Cramer dont le déterminant est toujours donné par :

$$\delta = |b|^4-|b|^2 = |b|^2\left(|b|^2-1\right)$$

- ⋆ Supposons $|b|=0$ ou, ce qui est équivalent, $b=0$.
  La matrice A nous retrouvons alors $A=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = a\mathrm{Id}_2$
  A est donc la matrice d'une homothétie.
- ⋆ Supposons $|b|=1$
  Le système devient alors, en tenant compte que $|b|^2=b\bar{b}=1$, :

$$\left\{\begin{array}{rl} z_1+\bar{b}z_2 = & 0 \\ bz_1+z_2 = & 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow bz_1+z_2=0$$

  L'espace propre de valeur propre $\left(a-|b|^2\right)=a-1$ est donc

$$E_{a-1}=\{(z,-bz) \text{ où } z\in\mathbb{C}\} = \mathbb{C}\times\begin{pmatrix} 1 \\ -b \end{pmatrix}$$

- ⋆ Bien sûr, si $|b|\neq 0$ ou $|b|\neq 1$, les seules solutions au système sont $z_1=0$ et $z_2=0$ et, à ce moment, $\lambda_1=a-|b|^2$ n'est pas une valeur propre, mais la matrice A est néanmoins trigonalisable

Exercice 23 :

Dans les matrices suivantes, on cherchera les valeurs propres et les vecteurs propres correspondant à chaque valeur propre. Trouver, s'il y a lieu, une base de $\mathbb{C}^n$ formée de vecteurs propres. Si la matrice est diagonalisable sur $\mathbb{C}$, trouver le plus petit sous-corps de $\mathbb{C}$, c'est à dire $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{Q}$ sur lequel la matrice est diagonalisable.

1. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}$

   Par calculs, le polynôme caractéristique de A est $P_A(X) = -(X+2)(X-1)^2$.
   Il y a 2 racines $X_0 = -2$ et $X_1 = 1$. 1 est racine double de P_A.
   Visiblement, $\overrightarrow{k}$ est vecteur propre de A et de valeur propre -2.
   Pour que A soit diagonisable il faudra que la dimension de l'espace propre associé à la valeur propre $\lambda = 1$ soit de dimension 2.
   <u>Recherchons les vecteur propre de valeur propre 1</u>
   Si $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ est un tel vecteur propre, nous devrons avoir :

   $$\left\{\begin{array}{rl} 3x+y= & x \\ -4x-y= & y \\ 4x-8y-2z= & z \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rl} 2x+y= & 0 \\ -4x-2y= & 0 \\ 4x-8y-3z= & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rl} 2x+y= & 0 \\ 4x-8y-3z= & 0 \end{array}\right.$$

   C'est l'équation d'une droite dans $\mathbb{R}^3$.
   Nous avons $E_1 = \{z(3,-6,20) \text{ où } z \in \mathbb{R}\}$.
   Donc $\dim E_1 = 1$ et la matrice A n'est pas diagonalisable

2. $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

   On peut remarquer que la matrice B est déjà une matrice triangulaire et que donc, le polynôme caractéristique de B est $P_A(X) = (1-X)^3$.
   Elle n'est sûrement pas diagonalisable. Si B était diagonalisable, B serait semblable à Id_3, la matrice identité, ce qui est impossible.
   Visiblement, ici aussi, seul $\overrightarrow{i}$ est un vecteur propre de valeur propre 1

3. $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

   Recherchons le polynôme caractéristique de C.
   Par calculs, nous trouvons $P_C = (2-X)\left(X^2 - X + 44\right)$.
   le polynôme P_C n'a qu'une seule racine réelle $X_0 = 2$ et la matrice C n'est donc pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$; elle l'est, par contre, dans $\mathbb{C}$.
   En résolvant de manière classique le système adéquat, on trouve comme espace propre pour la valeur propre 2 :
   $$E_2 = \{x(2,1,0) \text{ avec } x \in \mathbb{K}\}$$

4. $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

   Comme pour toutes les autres questions, nous calculons le polynôme caractéristique de D.
   Nous avons $P_D = (1-X)\left(X^2 - 9X + 22\right)$. P_D n'admettant, dans $\mathbb{R}$ qu'une seule racine, D n'est donc pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$.
   Recherchons l'espace propre de valeur propre 1.

Un vecteur propre de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et de valeur propre 1 vérifie le système d'équations :

$$\left\{\begin{array}{rl} 4x-2z= & x \\ y= & y \\ x-2y+5z= & z \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} 3x-2z= & 0 \\ x-2y+4z= & 0 \end{array}\right.$$

C'est donc une droite et nous avons :

$$E_1=\{z\,(2,7,3)\ \text{ avec } z\in\mathbb{R}\}=\mathbb{R}\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 24 :

Soit $m\in\mathbb{R}$ un nombre réel et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2-m & m-2 & m \end{pmatrix}$$

1. *Quelles sont les valeurs propres de f ?*

   Nous allons donc calculer le polynôme caractéristique de A en développant suivant la première ligne

$$\begin{aligned} P_A(X)=\begin{vmatrix} 1-X & 0 & 1 \\ -1 & 2-X & 1 \\ 2-m & m-2 & m-X \end{vmatrix} &= (1-X)\begin{vmatrix} 2-X & 1 \\ m-2 & m-X \end{vmatrix}+1\times\begin{vmatrix} -1 & 2-X \\ 2-m & m-2 \end{vmatrix} \\ &= (1-X)\left[(2-X)(m-X)-(m-2)\right]+\left[-(m-2)-(2-m)(2-X)\right] \\ &= (1-X)\left[(2-X)(m-X)-(m-2)\right]+(m-2)\left[-1+(2-X)\right] \\ &= (1-X)\left[(2-X)(m-X)-(m-2)\right]+(m-2)\left[1-X\right] \\ &= (1-X)\left[(2-X)(m-X)-(m-2)+(m-2)\right] \\ &= (1-X)(2-X)(m-X) \end{aligned}$$

   Les valeurs propres de A sont donc 1,2 et m. En particulier, si $m=1$ ou $m=2$, la matrice A n'admet que deux valeurs propres.

2. *Pour quelles valeurs de $m\in\mathbb{R}$, l'endomorphisme est-il diagonalisable ?*

   $\Rightarrow$ Si $m\neq 1$ et $m\neq 2$, les racines de P_A sont simples et la matrice A est diagonalisable.

   $\Rightarrow$ Si $m=1$, alors le polynôme caractéristique $P_A(X)=(1-X)^2(2-X)$; la valeur $\lambda=1$ est racine double de P_A. A sera diagonalisable si et seulement si l'espace propre associé sera de dimension 2.

   Pour $m=1$, la matrice A devient $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ se traduit par :

$$\left\{\begin{array}{rl} x+z= & x \\ -x+2y+z= & y \\ x-y+z= & z \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} z= & 0 \\ -x+y+z= & 0 \\ x-y= & 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} z= & 0 \\ x-y= & 0 \end{array}\right.$$

   L'espace propre associé à la valeur propre 1 est alors $E_1=\{x\,(1,1,0)\ \text{ avec } x\in\mathbb{R}\}$
   Nous avons $\dim E_1=1$ et la matrice A n'est pas diagonalisable

   $\Rightarrow$ Si $m=2$, alors le polynôme caractéristique $P_A(X)=(1-X)(2-X)^2$; la valeur $\lambda=2$ est racine double de P_A. A sera diagonalisable si et seulement si l'espace propre associé sera de dimension 2.

Pour $m = 2$, la matrice A devient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ se traduit par :

$$\begin{cases} x + z = & 2x \\ -x + 2y + z = & 2y \\ 2z = & 2z \end{cases} \iff \begin{cases} -x + z = & 0 \\ -x + z = & 0 \end{cases}$$

L'espace propre associé à la valeur propre 2 est alors $E_2 = \{(x, y, x) \text{ avec } x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R}\}$
Nous avons $\dim E_2 = 2$ et la matrice A est diagonalisable

3. *On suppose $m = 2$. Calculer A^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.*

Revenons à $m = 2$.

La matrice A est donnée par $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ dont les valeurs propres sont 1 et 2.

$\Rightarrow$ Nous connaissons le sous-espace propre E_2 dont une base est donnée par $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ Il nous faut, maintenant, chercher l'espace propre E_1 pour la valeur propre 1.
$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ se traduit, avec $m = 2$, par :

$$\begin{cases} x + z = & x \\ -x + 2y + z = & y \\ 2z = & 2z \end{cases} \iff \begin{cases} z = & 0 \\ -x + y + z = & 0 \end{cases}$$

L'espace propre associé à la valeur propre 1 est alors $E_1 = \{(x, x, 0) \text{ avec } x \in \mathbb{R}\}$. Une base de E_1 est donc le vecteur $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

La famille de vecteurs $\left\{\overrightarrow{v}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{u}\right\}$ forme une base de $\mathbb{R}^3$.
Si f est un endomorphisme de matrice A dans la base canonique, la matrice de f sera, dans la base $\left\{\overrightarrow{v}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{u}\right\}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et nous aurons $A = PDP^{-1}$ où $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et donc $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous aurons $A^n = PD^nP^{-1}$ où $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ D'où, nous trouvons, par calculs :

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2^n - 1 \\ 1 - 2^n & 2^n & 2^n - 1 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

Exercice 25 :

Pour $a \in \mathbb{C}$, $b \in \mathbb{C}$ et $c \in \mathbb{C}$ des nombres complexes, on pose $M(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$ et $J = M(0, 1, 0)$.

1. *Exprimer $M(a,b,c)$ en fonction de Id_3, J et J^2*

   Un calcul simple montre que $J^2 = M(0,0,1)$ et que $J^3 = M(1,0,0) = \mathrm{Id}_3$ et, très simplement, nous avons :

$$M(a,b,c) = aM(1,0,0) + bM(0,1,0) + cM(0,0,1) = a\mathrm{Id}_3 + bJ + cJ^2$$

   Ce qui nous simplifie le calcul entre 2 matrices du même type :

$$M(a,b,c) \times M(a',b',c') = M(aa' + bc' + cb', ab' + ba' + cc', ac' + bb' + ca')$$

2. *Démontrer que J est diagonalisable, et donner ses valeurs propres et ses vecteurs propres.*

   $\Rightarrow$ Le polynôme caractéristique est donné par :

$$P_J(X) = \begin{vmatrix} -X & 1 & 0 \\ 0 & -X & 1 \\ 1 & 0 & -X \end{vmatrix} = -X \begin{vmatrix} -X & 1 \\ 0 & -X \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -X & 1 \end{vmatrix} = 1 - X^3$$

   P_J admet 3 racines complexes distinctes 1, j et j^2.
   La matrice J est donc diagonalisable dans $\mathbb{C}$

   $\Rightarrow$ Recherche des vecteurs propres de valeur propre 1

   Si $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ est un tel vecteur, il devra alors vérifier :

$$\begin{cases} y = & x \\ z = & y \\ x = & z \end{cases} \iff x = y = z$$

   L'espace propre E_1 est donc $E_1 = \{x(1,1,1) \text{ où } x \in \mathbb{C}\}$

   $\Rightarrow$ Recherche des vecteurs propres de valeur propre j

   Si $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ est un tel vecteur, il devra alors vérifier :

$$\begin{cases} y = & jx \\ z = & jy \\ x = & jz \end{cases} \iff x = j^2 y = jz$$

   L'espace propre E_j est donc $E_j = \left\{y\left(j^2,1,j\right) \text{ où } y \in \mathbb{C}\right\}$

   $\Rightarrow$ Pour terminer, recherchons des vecteurs propres de valeur propre j^2

   Si $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ est un tel vecteur, il devra alors vérifier :

$$\begin{cases} y = & j^2 x \\ z = & j^2 y \\ x = & j^2 z \end{cases} \iff x = j^2 z = jy$$

   L'espace propre E_{j^2} est donc $E_{j^2} = \left\{z\left(j,1,j^2\right) \text{ où } z \in \mathbb{C}\right\}$

3. *En déduire que $M(a,b,c)$ est diagonalisable, et donner ses valeurs propres.*

   Comme nous savons que J est semblable à la matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & j^2 \end{pmatrix}$, il existe des matrices P et P^{-1} telles que $J = PDP^{-1}$.
   Nous aurons alors $J^2 = PD^2P^{-1}$

De l'identité $M(a,b,c) = a\mathrm{Id}_3 + bJ + cJ^2$, nous tirons :

$$\begin{aligned} M(a,b,c) = a\mathrm{Id}_3 + bJ + cJ^2 = & \ aPP^{-1} + bPDP^{-1} + cPD^2P^{-1} \\ = & \ P\left(a\mathrm{Id}_3 + bD + cD^2\right)P^{-1} \end{aligned}$$

En posant $\Delta = a\mathrm{Id}_3 + bD + cD^2$, nous avons $\Delta = \begin{pmatrix} a+b+c & 0 & 0 \\ 0 & a+bj+cj^2 & 0 \\ 0 & 0 & a+bj^2+cj \end{pmatrix}$

Ainsi, la matrice $M(a,b,c)$ est diagonalisable, et ses valeurs propres sont $a+b+c$, $a+bj+cj^2$, $a+bj^2+cj$.

Vous prendrez bien encore un petit verre ?

1. J est, en fait, une matrice de permutation. Expliquons nous :
   Si Σ est un endomorphisme de E, de matrice, dans la base canonique $\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right\}$, J, nous avons :
   $$\Sigma\left(\overrightarrow{i}\right) = \overrightarrow{k} \quad \Sigma\left(\overrightarrow{j}\right) = \overrightarrow{i} \quad \Sigma\left(\overrightarrow{k}\right) = \overrightarrow{j}$$
   On peut remarquer que $\Sigma^3 = \mathrm{Id}_3$ et que l'ensemble $\left\{\mathrm{Id}_3, \Sigma, \Sigma^2\right\}$ forme un groupe pour la composition de applications
2. Utiliser l'exercice précédent pour déterminer toutes les matrices $M(a,b,c)$ telles que $M(a,b,c) \times M(a,b,c) = \mathrm{Id}_3$

Exercice 26 :

1. *Soit* $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *; calculer* B^2, B^3, *puis montrer que* $B^3 = 4B^2 - 4B$

   Les calculs matriciels sont évidents. Nous avons :
   $$B^2 = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 2 \\ -4 & -2 & -2 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B^3 = \begin{pmatrix} 20 & 16 & 4 \\ -12 & -8 & -4 \\ 12 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$
   Une vérification simple montre que $B^3 = 4B^2 - 4B$
2. *En déduire vecteurs propres et valeurs propres de* B

   Si $x \in E$ est vecteur propre de B de valeur propre λ, alors, pour tout $n_{¡}n\mathbb{N}$, nous avons $B^n(x) = \lambda^n x$ et donc $B^3(x) = \lambda^3 x$ et $\left(4B^2 - 4B\right)(x) = \left(4\lambda^2 - 4\lambda\right)x$.
   Comme $x \neq \overrightarrow{0}$, nous avons $\lambda^3 = 4\lambda^2 - 4\lambda \iff \lambda^3 - 4\lambda^2 + 4\lambda = 0 \iff \lambda(\lambda - 2)^2$
   Les valeurs propres de B sont donc 0 et 2

Exercice 27 :

Soit E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel .*

1. *Soit* $f \in \mathcal{L}(E)$ *un endomorphisme nilpotent. Démontrer que la seule valeur propre de* f *est* 0

   Si $f \in \mathcal{L}(E)$ est un endomorphisme nilpotent, alors il existe un entier k tel que $f^k = \mathcal{O}_E$
   Maintenant, si λ est une valeur propre associée à $\overrightarrow{x}$ non nul, alors : $f(x) = \lambda\overrightarrow{x}$ et donc $f^k(x) = \lambda^k\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$; comme $\overrightarrow{x} \neq \overrightarrow{0}$, nous en déduisons $\lambda = 0$
2. *Réciproquement, démontrer que si* $f \in \mathcal{L}(E)$ *a toutes ses valeurs propres nulles, alors* f *est nilpotent*

   Réciproquement, supposons que λ soit une valeur propre non nulle associée au vecteur propre $\overrightarrow{x}$, et que f soit nilpotent.
   Alors pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $f^n(x) = \lambda^n\overrightarrow{x}$ est non nul et donc f n'est pas nilpotent.
   Contradiction et donc f est nilpotent

Exercice 28 :

1. *E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n et $f : E \longmapsto E$ un endomorphisme de E tel que $f^2 = f$. Quelles sont les valeurs propres de f ?*

   Soit $x \in E$ un vecteur propre non nul de valeur propre λ ; alors $f^2(x) = f(x) \iff \lambda^2 x = \lambda x$, et comme $x \neq \overrightarrow{0}$, nous avons $\lambda^2 = \lambda$, c'est à dire $\lambda = 1$ et $\lambda = 0$
   Les 2 valeurs propres de f sont $\lambda = 1$ et $\lambda = 0$

   Rien d'étonnant à cela puisque f est un projecteur

2. *Trouver toutes les matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telles que $A^2 = A$*

   Nous revenons à la question précédente où nous avons les valeurs propres de A qui sont 0 et 1. Ainsi, toute matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que $A^2 = A$ sera semblable à une matrice de la forme $D_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ou $D_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ou $\mathcal{O}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ou $\mathrm{Id}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

   Il existera donc une matrice $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, c'est à dire telle que $ad - bc \neq 0$ telle que $A = PD_1P^{-1}$ ou $A = PD_2P^{-1}$
   Par calculs, nous trouvons 2 types de matrices :

   - Le premier type $A_1 = \dfrac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} -bc & -bd \\ ac & ad \end{pmatrix}$ avec $a \in \mathbb{C}$, $b \in \mathbb{C}$, $c \in \mathbb{C}$ et $d \in \mathbb{C}$ et $ad - bc \neq 0$
   - Le premier type $A_2 = \dfrac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} ad & bd \\ -ac & -bc \end{pmatrix}$ avec toujours $a \in \mathbb{C}$, $b \in \mathbb{C}$, $c \in \mathbb{C}$ et $d \in \mathbb{C}$ et $ad - bc \neq 0$

   Les seules matrices semblables à $\mathcal{O}_2$ ou Id_2 sont elles-mêmes ; donc peu intéressantes.

12.8.3 Approfondissements

Exercice 29 :

Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} a+b & 0 & a \\ 0 & b & a \\ a & 0 & a+b \end{pmatrix}$ est semblable à une matrice triangulaire
On discutera suivant les valeurs de a et de b

Nous allons commencer par quelques « bricolages »

1. Si $a = 0$, alors la matrice A devient $A = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} = b\mathrm{Id}_3$ et alors $A^n = b^n \mathrm{Id}_3$.

   Remarquons que si $b = 0$, alors A est la matrice nulle et $A^n = \mathcal{O}_n$.
   Dans notre cas, A est semblable à une matrice diagonale *(En fait, une matrice d'homthétie)*

2. Si $a \neq 0$ et $b = 0$, alors la matrice A devient $A = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & 0 & a \\ a & 0 & a \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = a\mathcal{U}$ où $\mathcal{U} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   Nous aurons donc $A^n = a^n \mathcal{U}^n$
   Adonnons nous à de nouveaux bricolages

   - Pour $n = 2$, par calculs, nous avons $\mathcal{U}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

     Pour $n = 3$, c'est $\mathcal{U}^3 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

▷ Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, nous avons $\mathcal{U}^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \\ 2^{n-2} & 0 & 2^{n-2} \\ 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}$.

Et donc, $A^n = a^n \mathcal{U}^n = \begin{pmatrix} a^n 2^{n-1} & 0 & a^n 2^{n-1} \\ a^n 2^{n-2} & 0 & a^n 2^{n-2} \\ a^n 2^{n-1} & 0 & a^n 2^{n-1} \end{pmatrix}$.

Nous n'avons pas montré qu'elle était semblable à une matrice triangulaire.

Et maintenant, « jouons sérieux » en supposant $a \neq 0$ **et** $b \neq 0$

Nous allons tenter de trigonaliser la matrice A.

1. Recherchons donc le polynôme caractéristique de A

$$\begin{array}{rcl} P_A(X) = \det(A - X\mathrm{Id}_3) = & & \begin{vmatrix} a+b-X & 0 & a \\ 0 & b-X & a \\ a & 0 & a+b-X \end{vmatrix} \\ & = & (a+b-X)\begin{vmatrix} b-X & a \\ 0 & a+b-X \end{vmatrix} + a \begin{vmatrix} 0 & a \\ b-X & a \end{vmatrix} \\ & = & (a+b-X)^2(b-X) + a[-a(b-X)] \\ & = & (a+b-X)^2(b-X) - a^2(b-X) \\ & = & (b-X)[(a+b-X)-a][(a+b-X)+a] \\ & = & (b-X)^2(2a+b-X) \end{array}$$

P_A a donc 2 racines : l'une $x_1 = b$ laquelle est une racine double, et l'autre $x_2 = 2a+b$ qui est une racine simple

2. Recherchons, maintenant, les espaces propres associés aux valeurs propres $\lambda_1 = b$ et $\lambda_2 = 2a+b$

(a) Pour $\lambda_1 = b$

Nous devons trouver des vecteurs $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tels que $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = b\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Or :

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = b\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} (a+b)x + az = & bx \\ by + az = & by \\ ax + (a+b)z = & bz \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} ax + az = & 0 \\ az = & 0 \\ ax + az = & 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} x + z = & 0 \\ z = & 0 \end{array}\right.$$

puisque $a \neq 0$; donc $x = z = 0$ et $y \in \mathbb{R}$

L'espace propre de valeur propre b est donc de dimension 1 : c'est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\overrightarrow{j}$. La matrice A n'est donc pas diagonalisable.

(b) Pour $\lambda_2 = 2a+b$

Nous devons, cette fois-ci, résoudre :

$$\left\{\begin{array}{rl} (a+b)x + az = & (2a+b)x \\ by + az = & (2a+b)y \\ ax + (a+b)z = & (2a+b)z \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} -ax + az = & 0 \\ -2ay + az = & 0 \\ ax - az = & 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} x - z = & 0 \\ z = & 2y \end{array}\right.$$

L'espace propre de valeur propre $2a+b$ est donc : $E_{2a+b} = \{y(2,1,2) \text{ où } y \in \mathbb{R}\}$

3. (a) Appelons $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$; alors, la famille $\mathcal{B}_T = \left\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right\}$ est une base de E.

(b) On appelle f l'endomorphisme de E qui admet A pour matrice dans la base canonique $Can = \left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right\}$. Alors :

▷ $f(\overrightarrow{u}) = (2a+b)\overrightarrow{u}$, $f\left(\overrightarrow{j}\right) = b\overrightarrow{j}$ et $f\left(\overrightarrow{k}\right) = a\overrightarrow{i} + a\overrightarrow{j} + (a+b)\overrightarrow{k}$

▷ Si $\overrightarrow{u} = 2\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$, alors $\overrightarrow{i} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{u} - \dfrac{1}{2}\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$, de telle sorte que :

$$\begin{aligned} f\left(\overrightarrow{k}\right) &= a\overrightarrow{i} + a\overrightarrow{j} + (a+b)\overrightarrow{k} \\ &= a\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{u} - \frac{1}{2}\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}\right) + a\overrightarrow{j} + (a+b)\overrightarrow{k} \\ &= \frac{a}{2}\overrightarrow{u} - \frac{a}{2}\overrightarrow{j} + b\overrightarrow{k} \end{aligned}$$

Ainsi, dans la base $\mathcal{B}_T$, l'endomorphisme f a pour matrice $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_T}(f) = T = \begin{pmatrix} 2a+b & 0 & \frac{a}{2} \\ 0 & b & \frac{a}{2} \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$

▷ En nous intéressant aux matrices de passage, en posant $P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, nous avons $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{-1}{2} & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et donc $A = PTP^{-1}$.

La matrice A est donc bien semblable à la matrice T

Exercice 30 :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente d'indice p

1. *Démontrer que $A^n = \mathcal{O}_n$*

   Si la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est nilpotente d'indice p, alors la seule valeur propre de A est 0 et P_A, le polynôme caractéristique de A est $P_A(X) = (-X)^n$. D'après le théorème de Cayley-Hamilton 12.6.15, nous avons $P_A(A) = \mathcal{O}_n$, c'est à dire $(-1)^n A^n = \mathcal{O}_n$, et donc $A^n = \mathcal{O}_n$

2. *Calculer* $\det(A + \mathrm{Id}_n)$

   A étant nilpotente, est semblable à une matrice triangulaire dont tous les termes diagonaux sont nuls. Donc, $(A + \mathrm{Id}_n)$ est une matrice triangulaire dont tous les termes diagonaux sont égaux à 1. et nous avons donc $\det(A + \mathrm{Id}_n) = 1$

3. *Soit $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $AM = MA$. Calculer* $\det(A + M)$

   Nous avons $A + M = M\left(AM^{-1} + \mathrm{Id}_n\right)$ et donc $\det(A+M) = \det M \times \det\left(AM^{-1} + \mathrm{Id}_n\right)$
   Nous avons aussi $AM = MA \iff AM^{-1} = M^{-1}A$ et donc $\left(AM^{-1}\right)^p = A^p \times \left(M^{-1}\right)^p$ et donc, AM^{-1} est nilpotente d'indice p. D'après la question précédente, $\det\left(AM^{-1} + \mathrm{Id}_n\right) = 1$ et donc $\det(A+M) = \det M$

   De l'importance de la commutativité.

   Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Nous avons $A^2 = \mathcal{O}_2$. A est donc nilpotente d'indice 2.

   Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Nous avons $M \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, $\det M = 1$ et $AM \neq MA$.

   Ensuite, $M + A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et donc $\det(A+M) = 0 \neq \det M$

Exercice 31 :

On considère $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathcal{B}_0 = \left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right\}$.
Soient $f \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^3\right)$ et $g \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^3\right)$ des endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ dont les matrices dans la base canonique sont :

$$M = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_0}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad N = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_0}(g) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. *Démontrez que f et g commutent*

   Les ensembles $\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^3\right)$ et $\mathcal{M}_3\left(\mathbb{R}\right)$ sont isomorphes et démontrer que $f\circ g = g\circ f$, c'est démontrer que $MN = NM$. Or :
$$MN = NM = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$
   Donc, $MN = NM$ et donc $f\circ g = g\circ f$

2. *Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de f et g*

   Exercice classique... et éreintant ! !

   (a) <u>Recherche des vecteurs propres et valeurs propres de f</u>

   $\Rightarrow$ Comme d'habitude, nous allons nous pencher sur le polynôme caractéristique de f.
$$\begin{array}{rcl} P_f\left(X\right) = \det\left(M - X\mathrm{Id}_3\right) & = & \begin{vmatrix} 1-X & 0 & 0 \\ 0 & -X & -1 \\ 0 & 1 & 2-X \end{vmatrix} \\ & = & \left(1-X\right)\begin{vmatrix} -X & -1 \\ 1 & 2-X \end{vmatrix} = \left(1-X\right)\left[-X\left(2-X\right)+1\right] \\ & = & \left(1-X\right)^3 \end{array}$$
   f n'a donc qu'une seule valeur propre $\lambda = 1$, laquelle est une valeur propre triple.

   $\Rightarrow$ Recherchons, maintenant un vecteur propre et/ou l'espace propre de valeur propre 1. Ces vecteurs propres doivent répondre à l'équation $f\left(u\right) = u$, c'est à dire, qu'en termes matriciel, nous devons avoir $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, ce qui se traduit en termes de systèmes d'équations par :
$$\left\{\begin{array}{rcl} x = & x \\ -z = & y \\ y+2z = & z \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} -y-z = & 0 \\ y+z = & 0 \end{array}\right. \iff y+z=0$$
   L'espace propre de valeur propre 1 est le plan d'équation $y+z=0$ de base, par exemple $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

   Ce qui nous permet de conclure que f n'est pas diagonalisable

   (b) <u>Recherche des vecteurs propres et valeurs propres de g</u>

   Itérons ! !

   $\Rightarrow$ Nous allons nous pencher sur le polynôme caractéristique de g.
$$\begin{array}{rcl} P_g\left(X\right) = \det\left(N - X\mathrm{Id}_3\right) & = & \begin{vmatrix} -X & 1 & 1 \\ -1 & 1-X & -1 \\ 1 & 1 & 3-X \end{vmatrix} \\ & = & -X\begin{vmatrix} 1-X & -1 \\ 1 & 3-X \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3-X \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1-X & -1 \end{vmatrix} \\ & = & -X\left[\left(1-X\right)\left(3-X\right)+1\right] + \left[3-X-1\right] + \left[-1-\left(1-X\right)\right] \\ & = & -X\left[X^2-4X+4\right] + \left[2-X\right] + X \\ & = & -X\left(X-2\right)^2 + \left(2-X\right) + \left(X-2\right) \\ & = & -X\left(X-2\right)^2 \end{array}$$
   g a donc 2 valeurs propres dstinctes $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 2$; μ_2 étant une valeur propre double

   $\Rightarrow$ Recherchons, maintenant les vecteurs propres de g

   $\star$ Pour la valeur propre $\mu_1 = 0$

   Les vecteurs propres doivent répondre à l'équation $g\left(u\right) = \overrightarrow{0}$, c'est à dire, qu'en termes matriciel, nous devons avoir $N\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; autrement dit, nous recherchons $\ker g$

Ces vecteurs propres vérifient alors le système d'équations :

$$\left\{\begin{array}{rl} y+z= & 0 \\ -x+y-z= & 0 \\ x+y+3z= & 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} y+z= & 0 \\ x-y+z= & 0 \end{array}\right.$$

L'espace propre de valeur propre $\mu_1 = 0$ est la droite d'équation $\left\{\begin{array}{rl} y+z= & 0 \\ x-y+z= & 0 \end{array}\right.$ de base, par exemple $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 2u_1 - u_2$

⋆ Pour la valeur propre $\mu_2 = 2$
Les vecteurs propres doivent répondre à l'équation $g(u) = 2u$, c'est à dire, qu'en termes matriciel, nous devons avoir $N\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}$
Ces vecteurs propres vérifient alors le système d'équations :

$$\left\{\begin{array}{rl} y+z= & 2x \\ -x+y-z= & 2y \\ x+y+3z= & 2z \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} 2x-y-z= & 0 \\ x+y+z= & 0 \\ x+y+z= & 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} 2x-y-z= & 0 \\ x+y+z= & 0 \end{array}\right.$$

L'espace propre de valeur propre $\mu_2 = 2$ est la droite d'équation $\left\{\begin{array}{rl} 2x-y-z= & 0 \\ x+y+z= & 0 \end{array}\right.$ de base, par exemple $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -u_1$

Ce qui nous permet de conclure que g n'est pas diagonalisable

3. *Parmi les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$, invariants par f et g, montrer qu'il en existe un de dimension 1 et un autre de dimension 2. En déduire une base de $\mathbb{R}^3$ par rapport à laquelle les matrices de f et g sont triangulaires.*

C'est une question que je trouve assez emberlificotée!!. M'enfin!!
Rappelons les égalités :

$$(v_1 = 2u_1 - u_2 \text{ et } v_2 = -u_1) \Longleftrightarrow (u_1 = -v_2 \text{ et } u_2 = -v_1 - 2v_2)$$

⇒ Recherche de sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$, invariants par f et g
- ▷ Soit $F = \text{span}(\{u_1\})$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par u_1
  Alors, F est stable par f et g. En effet :
  $f(u_1) = u_1$ et $g(u_1) = g(-v_2) = -g(v_2) = -2v_2 = 2u_1$
- ▷ Soit $G = \text{span}(\{u_1, u_2\})$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par u_1 et u_2
  Alors, G est stable par f et g. En effet, nous avons déjà démontré que $f(u_1) = u_1$ et $g(u_1) = 2u_1$.
  Maintenant, $f(u_2) = u_2$ et $g(u_2) = g(-v_1 - 2v_2) = -g(v_1) - 2g(v_2) = -4v_2 = 4u_1$
  $G = \text{span}(\{u_1, u_2\})$ est bien stable par f et g

⇒ Recherche d'une base de $\mathbb{R}^3$ par rapport à laquelle les matrices de f et g sont triangulaires. Soit $k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ il est évident que la famille $\{u_1, u_2, k\}$ forme une base de $\mathbb{R}^3$
Dans la base canonique, nous avons $f(k) = -j + 2k = u_2 + k$ et donc $\mathcal{M}_{\{u_1,u_2,k\}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
De même, dans la base canonique, nous avons $g(k) = i - j + 3k = u_1 + u_2 + 2k$ et donc $\mathcal{M}_{\{u_1,u_2,k\}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Exercice 32 :

Résoudre dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'équation $X^2 = A$ où $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 8 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Soit $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

- ▷ Si nous avons $X^2 = A$ alors, en multipliant à droite, $AX = X^3$ et en multipliant à gauche $XA = X^3$ et donc $AX = XA$ ce qui veut dire que X et A commutent.
- ▷ Il est clair et facile à voir que A admet trois valeurs propres réelles et simples à savoir 1, 3 et 4. Donc A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et les sous-espaces vectoriels propres de A sont des droites Δ_1,Δ_2 et Δ_3.

  Nous avons démontré que si f et u étaient 2 endomorphismes qui commutent et que si E_λ était un espace propre de u, alors E_λ était un sous-espace vectoriel stable par f

  Comme X commute avec A, X laisse stable les trois droites propres Δ_1,Δ_2 et Δ_3.
  Ainsi une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de A est également une base de vecteurs propres de X ou encore, si P est une matrice réelle inversible telle que $P^{-1}AP$ soit une matrice diagonale D_0 alors pour la même matrice P, $P^{-1}XP$ est une matrice diagonale D et donc $X = PDP^{-1}$. De plus

$$X^2 = A \iff PD^2P^{-1} = PD_0P^{-1} \iff D^2 = D_0 \iff D = \begin{pmatrix} \pm\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & \pm 2 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$$

  Ce qui fournit $2^3 = 8$ solutions deux à opposées.

  Pour P, on peut prendre $P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -16 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et donc $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 8 & 1 & 0 \\ -\frac{5}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$

  D'où nous tirons les valeurs de X.

  En posant $\varepsilon_1 = \pm 1$, $\varepsilon_2 = \pm 1$ et $\varepsilon_3 = \pm 1$, nous avons $D = \begin{pmatrix} \varepsilon_1\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 2\varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}$ et nous avons alors :

$$X = \begin{pmatrix} \varepsilon_1\sqrt{3} & 0 & 0 \\ -8\varepsilon_1\sqrt{3} + 16\varepsilon_2 & 2\varepsilon_2 & 0 \\ \frac{5}{2}\left(\varepsilon_1\sqrt{3} - \varepsilon_3\right) & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}$$

Exercice 33 :

On considère $\mathbb{C}_3[X]$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 3.
Soient $A(X) = X^4 - 1$ et $B(X) = X^4 - X$, et

$$\left\{ \begin{array}{rcl} f : \mathbb{C}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{C}_3[X] \\ P & \longmapsto & f(P) = R \end{array} \right.$$

où $R = f(P)$ est le reste de la division euclidienne de AP par B.

1. *Vérifier que f est un endomorphisme de $\mathbb{C}_3[X]$*

   ⋆ Soit $P \in \mathbb{C}_3[X]$ et effectuons la division euclidienne de AP par B :

$$AP = BQ + R \text{ avec } ((\deg R < \deg B) \iff (\deg R \leqslant 3))$$

   Ainsi, si $f(P) = R$, nous avons $f(P) \in \mathbb{C}_3[X]$.

   ⋆ Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et $P \in \mathbb{C}_3[X]$. Nous allons étudier $f(\lambda P)$

$$AP = BQ + R \iff A(\lambda P) = \lambda(AP) = \lambda(BQ + R) = B(\lambda Q) + \lambda R$$

   Donc, $f(\lambda P) = \lambda R = \lambda f(P)$

⋆ Soient $P_1 \in \mathbb{C}_3[X]$ et $P_2 \in \mathbb{C}_3[X]$.
Alors $AP_1 = BQ_1 + R_1$ et $AP_2 = BQ_2 + R_2$
Et nous avons $f(P_1) = R_1$ et $f(P_2) = R_2$
Maintenant,

$$A(P_1 + P_2) = AP_1 + AP_2 = (BQ_1 + R_1) + (BQ_2 + R_2) = B(Q_1 + Q_2) + (R_1 + R_2)$$

Nous avons donc $f(P_1 + P_2) = (R_1 + R_2) = f(P_1) + f(P_2)$
f est donc un endomorphisme de $\mathbb{C}_3[X]$

2. *Déterminer $\ker f$ et $\mathrm{Im} f$*

Pour commencer, nous allons préciser la base canonique de $\mathbb{C}_3[X]$.
Cette base est donnée par $Can = \{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ où, pour $k = 0, \cdots, 3$, nous avons $e_k(X) = X^k$
⋆ Etude de $f(e_0)$

$$1\left(X^4 - 1\right) = X^4 - 1 = \left(X^4 - X\right) + (X - 1)$$

Et donc $f(e_0) = -e_0 + e_1$
⋆ Etude de $f(e_1)$

$$X\left(X^4 - 1\right) = X^5 - X = X\left(X^4 - X\right) + \left(X^2 - X\right)$$

Et donc $f(e_1) = -e_1 + e_2$
⋆ Etude de $f(e_2)$

$$X^2\left(X^4 - 1\right) = X^6 - X^2 = X^2\left(X^4 - X\right) + \left(X^3 - X^2\right)$$

Et donc $f(e_2) = -e_2 + e_3$
⋆ Etude de $f(e_3)$

$$X^3\left(X^4 - 1\right) = X^7 - X^3 = \left(X^3 + 1\right)\left(X^4 - X\right) + \left(X - X^3\right)$$

Et donc $f(e_3) = e_1 - e_3$
Nous obtenons donc la matrice de f dans la base canonique Can

$$\mathcal{M}_{Can}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

⇒ Recherche du noyau $\ker f$.
Si $P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d$ et si $P \in \ker f$, alors les termes a, b, c, d doivent vérifier le système d'équations :

$$\begin{cases} -d = & 0 \\ d - c + a = & 0 \\ c - b = & 0 \\ b - a = & 0 \end{cases} \iff d = 0 \text{ et } a = b = c$$

Ainsi, $P \in \ker f$ si et seulement si $P(X) = a\left(X^3 + X^2 + X\right) = aX(X - j)\left(X - j^2\right)$ avec $a \in \mathbb{C}$
⇒ Recherche de $\mathrm{Im} f$, l'image de f
Comme $\dim \ker f = 1$ et que $\dim \mathbb{C}_3[X] = 4$, nous avons $\dim \mathrm{Im} f = 3$.
Nous pouvons remarquer que $f(e_3) = -f(e_1) - f(e_2)$ et donc $\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}\left(\{f(e_0), f(e_1), f(e_2)\}\right)$ et, en termes de polynômes, $\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}\left(\left\{(X - 1), \left(X^2 - X\right), \left(X^3 - X^2\right)\right\}\right)$

3. *Rechercher les valeurs et vecteurs propres de f*

⇒ Recherche des valeurs propres

Comme à chaque fois, nous allons nous pencher sur le polynôme caractéristique de f :

$$\begin{aligned}
P_f(X) &= \begin{vmatrix} -1-X & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1-X & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1-X & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1-X \end{vmatrix} \\
&= (-1-X)\begin{vmatrix} -1-X & 0 & 1 \\ 1 & -1-X & 0 \\ 0 & 1 & -1-X \end{vmatrix} \\
&= (-1-X)\left[(-1-X)\begin{vmatrix} -1-X & 0 \\ 1 & -1-X \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1-X \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\right] \\
&= (-1-X)\left[(-1-X)^3+1\right] \\
&= (-1-X)\left[-X^3-3X^2-3X\right] \\
&= X(X+1)\left(X^2+3X+3\right) \\
&= X(X+1)(X-(-1+j))\left(X-\left(-1+j^2\right)\right)
\end{aligned}$$

f admet donc 4 valeurs propres et est donc diagonalisable. Ces valeurs propres sont $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -1+j$ et $\lambda_3 = -1+j^2$

⇒ Recherche des vecteurs propres

▷ Pour la valeurs $\lambda_0 = 0$, c'est la recherche du noyau dont nous avons trouvé une base.

▷ Pour la valeurs $\lambda_1 = -1$, les coordonnées du vecteur propre devont vérifier

$$\begin{cases} -d = & -d \\ d-c+a = & -c \\ c-b = & -b \\ b-a = & -a \end{cases} \iff \begin{cases} d = & d \\ d+a = & 0 \\ c = & 0 \\ b = & 0 \end{cases} \iff c=0 \quad b=0 \quad a=-d$$

Ainsi, si $P \in E_{-1}$, alors $P(X) = a\left(X^3-1\right)$ avec $a \in \mathbb{C}$

▷ Pour la valeurs $\lambda_2 = -1+j$, les coordonnées du vecteur propre devont vérifier

$$\begin{cases} -d = & (-1+j)\,d \\ d-c+a = & (-1+j)\,c \\ c-b = & (-1+j)\,b \\ b-a = & (-1+j)\,a \end{cases} \iff \begin{cases} jd = & 0 \\ d-jc+a = & 0 \\ c-jb = & 0 \\ b-ja = & 0 \end{cases} \iff d=0 \quad c=jb \quad b\in\mathbb{C} \quad a=j^2b$$

Ainsi, si $P \in E_{-1+j}$, alors $P(X) = b\left(j^2X^3+X^2+jX\right) = bX\left(j^2X^2+X+j\right)$ avec $b \in \mathbb{C}$

▷ Pour la valeurs $\lambda_3 = -1+j^2$, les coordonnées du vecteur propre devont vérifier

$$\begin{cases} -d = & \left(-1+j^2\right)d \\ d-c+a = & \left(-1+j^2\right)c \\ c-b = & \left(-1+j^2\right)b \\ b-a = & \left(-1+j^2\right)a \end{cases} \iff \begin{cases} j^2d = & 0 \\ d-j^2c+a = & 0 \\ c-j^2b = & 0 \\ b-j^2a = & 0 \end{cases} \iff d=0 \quad c=j^2b \quad b\in\mathbb{C} \quad a=jb$$

Ainsi, si $P \in E_{-1+j^2}$, alors $P(X) = b\left(jX^3+X^2+j^2X\right) = bX\left(jX^2+X+j^2\right)$ avec $b \in \mathbb{C}$

Exercice 34 :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice carrée d'ordre n.
Montrer que A est nilpotente si et seulement si pour tout $k \in \mathbb{N}$ avec $1 \leqslant k \leqslant n$, $\operatorname{Tr}\left(A^k\right) = 0$

1. Supposons $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice carrée d'ordre n nilpotente
   Il existe donc $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = \mathcal{O}_n$
   Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$ avec $1 \leqslant k \leqslant n$, $\left(A^k\right)^p = A^{kp} = \left(A^p\right)^k = \left(\mathcal{O}_n\right)^k = \mathcal{O}_n$
   A^k est donc nilpotente et $\operatorname{Tr}\left(A^k\right) = 0$
2. Réciproquement, supposons que pour tout $k \in \mathbb{N}$ avec $1 \leqslant k \leqslant n$, $\operatorname{Tr}\left(A^k\right) = 0$
   Nous allons montrer que toutes les valeurs propres de A sont nulles ; le polynôme caractéristique sera alors $(-X)^n$, et en appliquant le théorème de Cayley-Hamilton 12.6.15, nous aurons :

$$P_A(A) = (-X)^n = (-1)^n A^n = \mathcal{O}_n$$

   Donc $A^n = \mathcal{O}_n$ et A est donc nilpotente.

⇒ Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les n valeurs propres de A, alors, par hypothèses $\mathrm{Tr}\,(A) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 0$

⇒ A est donc semblable à une matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$

⇒ Et donc, A^k est semblable à une matrice diagonale $D^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n^k \end{pmatrix}$ et nous avons alors

$$\mathrm{Tr}\left(A^k\right) = \lambda_1^k + \lambda_2^k + \cdots + \lambda_n^k = 0$$

⇒ Nous sommes devant le système :

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = & 0 \\ \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \cdots + \lambda_n^2 = & 0 \\ \vdots \quad = & \vdots \\ \lambda_1^n + \lambda_2^n + \cdots + \lambda_n^n = & 0 \end{cases}$$

Qui n'a rien d'évident à être résolu !!

⇒ Nous allons le résoudre en faisant uns récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$. La propriété $P\,(n)$ étant définie par :

$$P\,(n) : \begin{cases} \text{Etant donnés } n \text{ complexes } \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \text{ tels que :} \\ \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = & 0 \\ \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \cdots + \lambda_n^2 = & 0 \\ \vdots \quad = & \vdots \\ \lambda_1^n + \lambda_2^n + \cdots + \lambda_n^n = & 0 \end{cases} \\ \text{Alors } \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0 \end{cases}$$

⋆ C'est trivialement vrai pour $n = 1$

⋆ Supposons $P\,(n)$ vraie

⋆ Démontrons que $P\,(n+1)$ est vraie

Soient donc $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{n+1}$ $n+1$ nombres complexes tels que :

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_{n+1} = & 0 \\ \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \cdots + \lambda_{n+1}^2 = & 0 \\ \vdots \quad \vdots \quad = & \vdots \\ \lambda_1^{n+1} + \lambda_2^n + \cdots + \lambda_{n+1}^{n+1} = & 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = & 0 \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i^2 = & 0 \\ \vdots = & \vdots \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i^{n+1} = & 0 \end{cases}$$

Considérons le polynôme $Q\,(X) = \prod\limits_{k=1}^{n+1} (X - \lambda_k)$; alors, pour tout $1 \leqslant i \leqslant n+1$, $Q\,(\lambda_i) = 0$ et de $Q\,(\lambda_i) = 0$, nous tirons très facilement $\sum\limits_{i=1}^{n+1} Q\,(\lambda_i) = 0$

Ecrivons Q sous forme développée $Q\,(X) = X^{n+1} + a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0$ et

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+1} Q\,(\lambda_i) = & \sum_{i=1}^{n+1} \left(\lambda_i^{n+1} + a_n \lambda_i^n + \cdots + a_1 \lambda_i + a_0\right) \\ = & \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i^{n+1} + a_n \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i^n + \cdots + a_1 \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i + n a_0 \\ = & \; n a_0 = 0 \end{aligned}$$

Et donc $a_0 = 0$; ce qui veut dire que $Q(X) = X^{n+1} + a_n X^n + \cdots + a_1 X$ et donc que 0 est racine de Q.
Ce qui veut dire qu'il existe $i_0 \in \mathbb{N}^*$ et $1 \leqslant i_0 \leqslant n+1$ tel que $\lambda_{i_0} = 0$.
Quitte à réordonner, nous pouvons supposer $\lambda_{n+1} = 0$ et le système initial nous fournit alors un nouveau système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n &=& 0 \\ \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \cdots + \lambda_n^2 &=& 0 \\ \vdots \qquad\quad \vdots \quad &=& \vdots \\ \lambda_1^n + \lambda_2^n + \cdots + \lambda_n^n &=& 0 \end{array}\right.$$

Par hypothèse de récurrence, nous en déduisions que $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$, c'est à dire, finalement, $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = \lambda_{n+1} = 0$

Avec ce raisonnement par récurrence, le résultat est établi.
Les valeurs propre de A sont donc toutes nulles et la matrice A est donc nilpotente.

12.8.4 Miscelleanous

Exercice 35 :

Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice nilpotente.
Montrer que la matrice $\mathrm{Id}_n - N$ est inversible et exprimer son inverse en fonction de N.

Soit p l'indice de nilpotence de N, c'est à dire tel que $N^p = \mathcal{O}_n$.
Considérons $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(X) = 1 - X^p$.
En utilisant le polynôme matriciel, nous avons $P(N) = \mathrm{Id}_n - N^p = \mathrm{Id}_n$.
Or $P(X) = 1 - X^p = (1 - X)\left(1 + X + X^2 + \cdots + X^{p-1}\right)$ et donc, en termes de polynômes matriciels

$$P(N) = \mathrm{Id}_n = (\mathrm{Id}_n - N)\left(\mathrm{Id}_n + N + N^2 + \cdots + N^{p-1}\right)$$

Ce qui montre bien que $\mathrm{Id}_n - N$ est inversible et d'inverse

$$(\mathrm{Id}_n - N)^{-1} = \mathrm{Id}_n + N + N^2 + \cdots + N^{p-1}$$

Exercice 36 :

Cet exercice s'intéresse aux matrices stochastiques
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$, et pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant n$, $0 \leqslant a_{i,j} \leqslant 1$ et $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$

1. *Montrer que 1 est une valeur propre de A.*

   Soit $U \in \mathbb{R}^n$ tel que $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

   Alors $AU = A\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{1,j} \\ \vdots \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{n,j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

   Nous avons donc $AU = U$ et 1 est donc valeur propre de A

2. *Soit λ une valeur propre de A. Montrer que $|\lambda| \leqslant 1$.*

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de A et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur propre de A.

De l'identité $AX = \lambda X$, nous tirons pour chaque i tel que $1 \leqslant i \leqslant n$, $\lambda x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j$.

En passant à la valeur absolue, nous avons :

$$|\lambda x_i| = \left| \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \right| \leqslant \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} |x_j|$$

Soit j_0 tel que $|x_{j_0}| = \max \{|x_j| \text{ où } 1 \leqslant j \leqslant n\}$; cet indice j_0 existe et de plus, comme $X \neq \overrightarrow{0}$, $|x_{j_0}| > 0$.
Alors, pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$

$$|\lambda x_i| \leqslant \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} |x_j| \leqslant \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} |x_{j_0}| \Longrightarrow |\lambda x_i| \leqslant |x_{j_0}|$$

En particulier lorsque $i = j_0$

$$|\lambda x_{j_0}| \leqslant |x_{j_0}| \Longleftrightarrow |\lambda| \, |x_{j_0}| \leqslant |x_{j_0}| \Longrightarrow |\lambda| \leqslant 1$$

Exercice 37 :

On s'intéresse en fait, dans cet exercice, à l'endomorphisme dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui, à une matrice M fait correspondre son produit $\Phi_U(M) = UM$ par une matrice U. Sans le dire, mais en le faisant, cet exercice tente de faire le lien entre les valeurs propres de U et celles de Φ_U. Un exemple pratique est proposé en fin d'exercice en dimension 2

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n et u un endomorphisme de E. On désigne par φ_u l'application de $\mathcal{L}(E)$ dans $\mathcal{L}(E)$ définie par

$$\begin{cases} \varphi_u : \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ \qquad f & \longmapsto & \varphi_u(f) = u \circ f \end{cases}$$

1. *Soit α une valeur propre de u et d la dimension du sous-espace propre E_α de valeur propre α. Montrer que α est une valeur propre de φ_u et caractériser les vecteurs propres de φ_u associés à α. Quelle est la dimension du sous-espace propre de $\mathcal{L}(E)$ associé à la valeur propre α ?*

   Soit $\alpha \in \mathbb{K}$ une valeur propre de u
   - ▷ Si α est valeur propre de φ_u et $f \in \mathcal{L}(E)$ un vecteur propre de φ_u de valeur propre α, alors $\varphi_u(f) = \alpha f$. Or :

     $$u \circ f = \alpha f \Longleftrightarrow u \circ f - \alpha f = \mathcal{O}_E \Longleftrightarrow (u - \alpha \mathrm{Id}_E) \circ f = \mathcal{O}_E$$

     De l'identité $(u - \alpha \mathrm{Id}_E) \circ f = \mathcal{O}_E$, on peut déduire que $\mathrm{Im} f \subset \ker (u - \alpha \mathrm{Id}_E)$
   - ▷ Si α est valeur propre de u, alors, E_α, l'espace propre de valeur propre α est tel que $E_\alpha = \ker (u - \alpha \mathrm{Id}_E)$
   - ▷ Supposons que $\dim E_\alpha = d$ et $\{e_1, \ldots, e_d\}$ une base de E_α, complétée par une famille de vecteurs $\{e_{d+1}, \ldots, e_n\}$, de telle sorte que la famille $\{e_1, \ldots, e_d, e_{d+1}, \ldots, e_n\}$ forme une base de E.
     Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que :
     - ⋆ Pour $1 \leqslant i \leqslant d$, $f(e_i) = \sum_{j=1}^{d} a_{i,j} e_j$ avec $a_{i,j} \in \mathbb{K}$

$\star$ Pour $d+1 \leqslant i \leqslant n$, $f(e_i) = \overrightarrow{0}$

$\operatorname{Im} f \subset E_\alpha$ et il existe donc des endomorphismes f de E, non nuls tels que $\operatorname{Im} f \subset \ker(u - \alpha \mathrm{Id}_E)$

▷ Pour tout $x \in E$, $f(x) \in \ker(u - \alpha \mathrm{Id}_E)$, c'est à dire

$$(u - \alpha \mathrm{Id}_E)[f(x)] = \overrightarrow{0} \iff u[f(x)] = \alpha[f(x)] \iff \varphi_u(f)(x) = (\alpha f)(x) \iff \varphi_u(f) = \alpha f$$

▷ L'espace propre de φ_u de valeur propre α est donc l'ensemble des applications linéaires de E dans E_α, c'est à dire $\mathcal{L}(E, E_\alpha)$.

On démontre facilement que $\mathcal{L}(E, E_\alpha)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ de dimension nd

2. *Montrer que si u est diagonalisable, alors φ_u est diagonalisable.*

▷ Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ les valeurs propres de l'endomorphisme u de E et $E_{\alpha_1}, \ldots, E_{\alpha_p}$ les différents espaces propres associés. Nous appelons $d_i = \dim E_{\alpha_i}$

▷ u étant diagonalisable, nous avons $d_1 + d_2 + \cdots + d_i + \cdots + d_p = n$ et $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_{\alpha_i}$

▷ Pour chacune des valeurs propres α_i, φ_u admet un espace propre $\mathcal{L}(E, E_{\alpha_i})$ qui a pour dimension $d_i n$.

Soit $F = \bigoplus_{i=1}^{p} \mathcal{L}(E, E_{\alpha_i})$ qui est la somme directe des espaces propres de φ_u.

Nous avons $\dim F = \sum_{i=1}^{n} \dim \mathcal{L}(E, E_{\alpha_i}) = \sum_{i=1}^{n} n d_i = n^2 = \dim \mathcal{L}(E)$

Donc $F = \mathcal{L}(E)$ et φ_u est diagonalisable.

3. *Dans cette question, on suppose que $E = \mathbb{R}^2$ et on considère l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice par rapport à la base canonique est $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$*

(a) *Calculer les valeurs propres et trouver des vecteurs propres de u ; montrer que u est diagonalisable.*

Question tout ce qu'il y a de plus classique !!

$\Rightarrow$ Recherchons les valeurs propres :

$$P_u(X) = \begin{vmatrix} 1-X & 4 \\ 1 & 1-X \end{vmatrix} = (1-X)^2 - 4 = (X-3)(X+1)$$

Les valeurs propres sont donc $\alpha_1 = -1$ et $\alpha_2 = 3$

$\Rightarrow$ Recherche des espaces propres

$\star$ Pour $\alpha_1 = -1$, les vecteurs $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ vérifient :

$$\left\{ \begin{array}{rl} x + 4y = & -x \\ x + y = & -y \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rl} 2x + 4y = & 0 \\ x + 2y = & 0 \end{array} \right. \iff x + 2y = 0$$

L'espace propre E_{-1} est donc $E_{-1} = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R} \right\}$

$\star$ De la même manière, pour $\alpha_2 = 3$, les vecteurs $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ vérifient :

$$\left\{ \begin{array}{rl} x + 4y = & 3x \\ x + y = & 3y \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rl} -2x + 4y = & 0 \\ x - 2y = & 0 \end{array} \right. \iff x - 2y = 0$$

L'espace propre E_{-3} est donc $E_{-3} = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R} \right\}$

Les vecteurs $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ forment une base de $\mathbb{R}^2$ et la matrice $U = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est donc diagonalisable.

(b) *φ_u étant définie comme à la question 1, écrire la matrice de φ_u, relativement à une base convenablement choisie de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$. Chercher les valeurs propres et les vecteurs propres de φ_u. Montrer* *que φ_u est diagonalisable et retrouver ainsi par le calcul direct le résultat de 2 appliqué à ce cas particulier.*

Cette question comporte plusieurs volets !!
Tout d'abord, pour nous simplifier la vie, nous allons confondre matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et endomorphisme. Ainsi, l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$\left\{\begin{array}{rcl}\varphi_u : \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^2\right) & \longrightarrow & \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^2\right)\\ f & \longmapsto & \varphi_u(f) = u \circ f\end{array}\right.$$

sera, en raison de l'isomorphisme entre $\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^2\right)$ et $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ sera remplacé par :

$$\left\{\begin{array}{rcl}\Phi_U : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\\ M & \longmapsto & \Phi_U(M) = UM\end{array}\right.$$

$\Rightarrow$ La base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est donnée par :

$$\mathcal{B}_0 = \left\{A_{1,1} = \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} \quad A_{1,2} = \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} \quad A_{2,1} = \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} \quad A_{2,2} = \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$$

Donner la matrice de Φ_U dans la base canonique, c'est rechercher $\Phi_U(A_{i,j}) = U \times A_{i,j}$

- ⋆ $\Phi_U(A_{1,1}) = U \times A_{1,1} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix}1&4\\1&1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix} = A_{1,1} + A_{2,1}$
- ⋆ $\Phi_U(A_{1,2}) = U \times A_{1,2} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix}1&4\\1&1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix} = A_{1,2} + A_{2,2}$
- ⋆ $\Phi_U(A_{2,1}) = U \times A_{2,1} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix}1&4\\1&1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4&0\\1&0\end{pmatrix} = 4A_{1,1} + A_{2,1}$
- ⋆ $\Phi_U(A_{2,2}) = U \times A_{2,2} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix}1&4\\1&1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&4\\0&1\end{pmatrix} = 4A_{1,2} + A_{2,2}$

Et donc, la matrice de Φ_u dans la base $\mathcal{B}_0$ est donnée par :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}_0}(\Phi_U) = \begin{pmatrix}1&0&4&0\\0&1&0&4\\1&0&1&0\\0&1&0&1\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Le polynôme caractéristique de Φ_u est donné par :

$$\begin{aligned}P_{\Phi_U}(X) &= \begin{vmatrix}1-X&0&4&0\\0&1-X&0&4\\1&0&1-X&0\\0&1&0&1-X\end{vmatrix}\\ &= (1-X)\begin{vmatrix}1-X&0&4\\0&1-X&0\\1&0&1-X\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}0&4&0\\1-X&0&4\\1&0&1-X\end{vmatrix}\end{aligned}$$

⋆ Premiers calculs

$$\begin{aligned}(1-X)\begin{vmatrix}1-X&0&4\\0&1-X&0\\1&0&1-X\end{vmatrix} &= (1-X)(1-X)\begin{vmatrix}1-X&4\\1&1-X\end{vmatrix}\\ &= (1-X)^2\left[(1-X)^2-4\right]\end{aligned}$$

⋆ Second calcul

$$\begin{vmatrix}0&4&0\\1-X&0&4\\1&0&1-X\end{vmatrix} = -4\begin{vmatrix}1-X&4\\1&1-X\end{vmatrix} = -4\left[(1-X)^2-4\right]$$

D'où $P_{\Phi_U}(X) = (1-X)^2\left[(1-X)^2-4\right] - 4\left[(1-X)^2-4\right] = \left[(1-X)^2-4\right]^2 = (P_u(X))^2$
Les valeurs propres de Φ_U sont donc -1 et 3 et elles sont doubles

⇒ Recherche des espaces propres.
La recherche des espaces propres est classique. Pour la valeur propre $\alpha_1 = -1$, nous devons avoir, pour un endomorphisme $M = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$:

$$\left\{\begin{array}{rl} x_1 + 4x_3 = & -x_1 \\ x_2 + 4x_4 = & -x_2 \\ x_1 + x_3 = & -x_3 \\ x_2 + x_4 = & -x_4 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rl} 2x_1 + 4x_3 = & 0 \\ 2x_2 + 4x_4 = & 0 \\ x_1 + 2x_3 = & 0 \\ x_2 + 2x_4 = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rl} x_1 + 2x_3 = & 0 \\ x_2 + 2x_4 = & 0 \end{array}\right.$$

L'espace propre est donc un espace de dimension 2 engendré par les endomorphismes M_1 et M_2
Les coordonnées de M_1 sont :

$$M_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -2A_{1,1} + A_{2,1} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Et les coordonnées de M_2 :

$$M_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -2A_{1,2} + A_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On démontrerait, de la même manière que l'espace propre de valeur propre 3 est engendré par les matrices

$$M_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La famille de matrices $\{M_1, M_2, M_3, M_4\}$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans laquelle la matrice de Φ_U est diagonale.

Exercice 38 :

Dans tout ce problème l'entier n est supérieur ou égal à 1 (c'est à dire $n \in \mathbb{N}^*$) et E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n.
Une application u de E dans lui même est dite **semi-linéaire** *si elle possède la propriété suivante :*

$$(\forall x \in E)(\forall y \in E)(u(x+y) = u(x) + u(y))$$

$$(\forall x \in E)(\forall a \in \mathbb{C})(u(ax) = \overline{a}u(x))$$

Le nombre complexe $\overline{a}$ est le nombre complexe conjugué de a.
Un nombre complexe $\mu \in \mathbb{C}$ est une valeur **co-propre** *de l'application semi-linéaire u s'il existe un vecteur $x \in E$ différent de 0 tel que la relation ci-dessous soit vérifiée :*

$$u(x) = \mu x$$

Le vecteur x est un vecteur **co-propre** *associé à la valeur co-propre μ*

Première partie

Le but de cette partie est d'étudier, pour une application semi-linéaire u donnée, les valeurs et vecteurs co-propres.

1. **Premières propriétés.**
Soit u une application semi-linéaire du $\mathbb{C}$-espace vectoriel E.

(a) *Démontrer qu'étant donné un vecteur $x \neq 0$, appartenant au $\mathbb{C}$-espace vectoriel E, il existe au plus un nombre complexe $\mu \in \mathbb{C}$ tel que la relation $u(x) = \mu x$ ait lieu.*

Comme toujours, soient $\mu_1 \in \mathbb{C}$ et $\mu_2 \in \mathbb{C}$ 2 nombres complexes tels que $u(x) = \mu_1 x$ et $u(x) = \mu_2 x$. Alors :
$$u(x) = \mu_1 x = \mu_2 x \Longleftrightarrow (\mu_2 - \mu_1)\, x = 0$$
Comme $x \neq 0$, nous avons alors $\mu_2 - \mu_1 = 0$, c'est à dire $\mu_2 = \mu_1$
Ce que nous voulions

(b) *Démontrer que, si le nombre complexe μ est une valeur co-propre de l'application semi-linéaire u, alors, pour tout réel θ, le nombre complexe $\mu e^{i\theta}$ est encore valeur co-propre de l'application semi-linéaire u. Exprimer un vecteur co-propre associé à la valeur co-propre $\mu e^{i\theta}$ en fonction d'un vecteur co-propre x associé à la valeur co-propre μ et du réel θ*

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $x \in E$ tel que $u(x) = \mu x$
- ▷ Alors, $u\left(e^{-i\frac{\theta}{2}} x\right) = e^{i\frac{\theta}{2}} u(x) = e^{i\frac{\theta}{2}} \mu x$.
Or, $e^{i\frac{\theta}{2}} \mu x = e^{i\theta} \mu \left(e^{-i\frac{\theta}{2}} x\right)$
- ▷ Ainsi, le vecteur $e^{-i\frac{\theta}{2}} x$ est un vecteur co-propre de u associé à la valeur co-propre $\mu e^{i\theta}$

(c) *Etant donnée une valeur co-propre μ de l'application semi-linéaire u, soit E_μ l'ensemble des vecteurs $x \in E$ qui vérifient la relation $u(x) = \mu x$, c'est à dire :*
$$E_\mu = \{x \in E \text{ tels que } u(x) = \mu x\}$$

- ▷ *Est-ce que l'ensemble E_μ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel ?*

La réponse est NON
  - ⋆ Tout d'abord E_μ est stable par addition.
Soient $x \in E_\mu$ et $y \in E_\mu$, alors, $x + y \in E_\mu$. En effet :
$$u(x+y) = u(x) + u(y) = \mu x + \mu y = \mu(x+y)$$
  - ⋆ Mais E_μ n'est pas stable par la multiplication par un scalaire
Soient $x \in E_\mu$ et $a \in \mathbb{C}$. Alors :
$$u(ax) = \overline{a} u(x) = \mu(\overline{a} x) \neq \mu(ax)$$
Et donc $ax \notin E_\mu$

  Prenons par exemple $E = \mathbb{C}$ qui est considéré comme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel .
  Et soit $u : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que $u(z) = \overline{z}$. u est clairement semi-linéaire.
  Recherchons des co-valeurs propres et des co-vecteurs propres, c'est à dire des vecteurs $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, et des scalaires $\mu \in \mathbb{C}$ tels que $u(z) = \mu z$, c'est à dire tels que $\overline{z} = \mu z$. Or, en posant $z = x + iy$:
$$\overline{z} = \mu z \Longleftrightarrow x - iy = \mu(x+iy) \Longleftrightarrow x = \mu x \text{ et } 2\mu y = 0$$
  C'est à dire $\mu = 1$ et $y = 0$; c'estr à dire, dans notre cas, $E_1 = \mathbb{R}$ et $\mathbb{R}$ n'est pas un $\mathbb{C}$-espace vectoriel puisque non stable par la multiplication par un scalaire complexe.

- ▷ *Est-ce que l'ensemble E_μ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ?*

Oui, c'est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel .

- ⋆ Nous avons démontré que E_μ était stable par addition.
- ⋆ Et E_μ est stable par la multiplication par un scalaire réel

  Soient $x \in E_\mu$ et $a \in \mathbb{R}$. Alors :

$$u(ax) = \overline{a}u(x) = au(x) = \mu(ax)$$

  Et donc $ax \in E_\mu$ lorsque $a \in \mathbb{R}$

(d) *Etant données deux applications semi-linéaires u et v , démontrer la linéarité de l'application composée $u \circ v$*

Cette question ne pose pas de difficultés.

Soient $x \in E$, $y \in E$, $a \in \mathbb{C}$ et $b \in \mathbb{C}$. Alors :

$$\begin{aligned} u \circ v(ax+by) = u[v(ax+by)] &= u[v(ax)+v(by)] \\ &= u\left[\overline{a}v(x)+\overline{b}v(y)\right] = u[\overline{a}v(x)]+u\left[\overline{b}v(y)\right] \\ &= \overline{\overline{a}}u[v(x)]+\overline{\overline{b}}u[v(y)] \\ &= au[v(x)]+bu[v(y)] = au\circ v(x)+bu\circ v(y) \end{aligned}$$

$u \circ v$ est bien linéaire.

Plus généralement, il est possible de démontrer que si $u : E \longrightarrow E$ est semi-linéaire et $v : E \longrightarrow E$, linéaire, alors $v \circ u$ et $u \circ v$ sont semi-linéaires.

Si $E = \mathbb{C}^n$ *(Il faut faire remarquer que tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie est isomorphe à $\mathbb{C}^n$; donc, toutes les considérations que nous faisons, ici, sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension finie, nous les faisons, en fait, sur $\mathbb{C}^n$)* et $u : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$, définissons $\overline{u} : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ par :

$$\begin{cases} \overline{u} : \mathbb{C}^n & \longrightarrow \quad \mathbb{C}^n \\ \qquad x & \longmapsto \quad \overline{u}(x) = \overline{u(x)} \end{cases}$$

Il est facile de démontrer que si u est semi-linéaire, alors $\overline{u}$ est linéaire.

- ▷ Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{C}^n$ et tout $y \in \mathbb{C}^n$, $\overline{u}(x+y) = \overline{u}(x)+\overline{u}(y)$ est évident
- ▷ Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et $x \in \mathbb{C}^n$; alors :

$$\overline{u}(\lambda x) = \overline{u(\lambda x)} = \overline{\overline{\lambda}u(x)} = \lambda\overline{u(x)} = \lambda\overline{u}(x)$$

2. **Matrice associée à une application semi-linéaire**

Soit u une application semi-linéaire du $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension finie n ; soit $\{e_i ; 1 \leqslant i \leqslant n\}$ une base du $\mathbb{C}$-espace vectoriel E. Á un vecteur $x \in E$ de coordonnées $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est associée la matrice colonne $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

(a) *Démontrer qu'à une application semi-linéaire $u : E \longrightarrow E$ est associée dans la base $\{e_i ; 1 \leqslant i \leqslant n\}$ de E une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que la relation $y = u(x)$ s'écrive : $Y = A\overline{X}$*
(La matrice-colonne $\overline{X}$ est la matrice complexe conjuguée de la matrice-colonne X)

$\Rightarrow$ Bricolons un peu pour commencer. Intéressons nous à $\mathbb{C}^2$, $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 2.

Soit $u : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$ une application semi-linéaire. La base canonique de $\mathbb{C}^2$ est donnée par $\{e_1 ; e_2\}$ où $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$.

Nous avons $u(e_1) = ae_1 + be_2$ et $u(e_2) = ce_1 + de_2$ avec $a \in \mathbb{C}$, $b \in \mathbb{C}$, $c \in \mathbb{C}$ et $d \in \mathbb{C}$.

Appelons $Z = z_1e_1 + z_2e_2$ ou, en écriture matricielle $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$. Si $Z' = u(Z)$ nous aurons $Z' = \begin{pmatrix} z'_1 \\ z'_2 \end{pmatrix}$

Alors :

$$\begin{array}{rcl} Z' = u(Z) = u(z_1e_1 + z_2e_2) & = & u(z_1e_1) + u(z_2e_2) \\ & = & \overline{z_1}u(e_1) + \overline{z_2}u(e_2) = \overline{z_1}(ae_1 + be_2) + \overline{z_2}(ce_1 + de_2) \\ & = & (\overline{z_1}a + \overline{z_2}c)e_1 + (\overline{z_1}b + \overline{z_2}d)e_2 \end{array}$$

Identité que nous pouvons traduire par :

$$\begin{pmatrix} z_1' \\ z_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{z_1} \\ \overline{z_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \overline{\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \overline{Z}$$

$\Rightarrow$ Après le bricolage, passons à la généralisation

Soit $u : E \longrightarrow \mathbb{E}$ une application semi-linéaire. Une base de E est donnée par $\{e_1; e_2; \ldots; e_n\}$

Nous avons, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$ tel que $1 \leqslant j \leqslant n$, $u(e_j) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ij}e_i$ avec $a_{ij} \in \mathbb{C}$.

Soit $Z \in E$ tel que $Z = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} z_ke_k$. Nous avons, en écriture matricielle, $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$. Si $Z' = u(Z)$ nous aurons $Z' = \begin{pmatrix} z_1' \\ z_2' \\ \vdots \\ z_n' \end{pmatrix}$

Alors :

$$\begin{array}{rcl} Z' = u(Z) = u\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} z_ke_k\right) & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u(z_ke_k) = \sum_{k=1}^{n} \overline{z_k}u(e_k) \\ & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \overline{z_k}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ik}e_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} \overline{z_k}a_{ik}\right)e_i \end{array}$$

De telle sorte que nous avons $z_i' = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \overline{z_k}a_{ik}$

Si nous posons comme matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ $A = (a_{ik})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant k \leqslant n}}$, nous avons :

$$\begin{pmatrix} z_1' \\ z_2' \\ \vdots \\ z_n' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \overline{z_1} \\ \overline{z_2} \\ \vdots \\ \overline{z_n} \end{pmatrix} = A \overline{\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}} = A\overline{Z}$$

Nous avons bien le résultat demandé.

(b) *Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ les matrices associées à une même application semi-linéaire $u : E \longrightarrow E$ dans les bases $\mathcal{B}_e = \{e_i; 1 \leqslant i \leqslant n\}$ et $\mathcal{B}_f = \{f_i; 1 \leqslant i \leqslant n\}$ respectivement. Soit S la matrice de passage de la base $\{e_i; 1 \leqslant i \leqslant n\}$ à la base $\{f_i; 1 \leqslant i \leqslant n\}$. Démontrer la relation $B = S \times A \times \overline{S^{-1}}$ où, si $S = (s_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ alors $\overline{S} = (\overline{s_{i,j}})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$*

$\Rightarrow$ S étant la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_e = \{e_i; 1 \leqslant i \leqslant n\}$ à la base $\mathcal{B}_f = \{f_i; 1 \leqslant i \leqslant n\}$, c'est à dire, en reprenant les notations de L_0, $S = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_e \to \mathcal{B}_f}(\mathrm{Id}_E)$, les colonnes de la matrice S sont composées des coordonnées des vecteurs $\{e_i; 1 \leqslant i \leqslant n\}$ dans la base $\mathcal{B}_f$.

C'est à dire que si $x \in E$ est un vecteur de E de coordonnées dans la base $\mathcal{B}_e$ $X_e = \begin{pmatrix} x_1^e \\ x_2^e \\ \vdots \\ x_n^e \end{pmatrix}$

et $X_f = \begin{pmatrix} x_1^f \\ x_2^f \\ \vdots \\ x_n^f \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}_f$, nous avons :

$$X_f = SX_e \iff X_e = S^{-1}X_f$$

Où $S^{-1} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_f \to \mathcal{B}_e}(\mathrm{Id}_E)$ est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_f$ dans la base $\mathcal{B}_e$

$\Rightarrow$ Pour tout $x \in E$, la relation $y = u(x)$ s'écrit matriciellement $Y_e = A\overline{X_e}$.
En utilisant les matrices de passage, nous avons :

$$Y_e = A\overline{X_e} \iff S^{-1}Y_f = A \times \overline{S^{-1}X_f} = A \times \overline{S^{-1}} \times \overline{X_f} \iff Y_f = S\times = A \times \overline{S^{-1}} \times \overline{X_f}$$

Par définition, nous avons $Y_f = B\overline{X_f}$ et donc

$$B\overline{X_f} = S \times A \times \overline{S^{-1}} \times \overline{X_f}$$

Ceci étant vrai pour tout $x \in E$, nous avons donc $B = S \times A \times \overline{S^{-1}}$

3. *Étant donnée une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, complexe, d'ordre n, le vecteur X, différent de 0,($X \neq 0$) est un vecteur co-propre de la matrice carrée A, associée à la valeur co-propre μ, si le vecteur X et le nombre complexe μ vérifient la relation matricielle : $A\overline{X} = \mu X$.*

   Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ la matrice d'ordre 2 : $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

   Rechercher les valeurs co-propres μ et les vecteurs co-propres $X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ associés.

   Soit $X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ un vecteur co-propre de A de valeur co-propre μ

   Alors, par calcul matriciel, nous avons : $-\overline{b} = \mu a$ et $\overline{a} = \mu b$.
   De $-\overline{b} = \mu a$, nous tirons $b = -\overline{\mu} \times \overline{a}$ d'où nous tirons :

   $$\overline{a} = \mu b \iff \overline{a} = -|\mu|^2 \overline{a}$$

   Il est très tentant de simplifier, maintenant par $\overline{a}$, sauf qu'il faut s'assurer que $\overline{a} \neq 0$.
   Or, $\overline{a} = 0 \iff a = 0$ et si $a = 0$, alors de l'identité $-\overline{b} = \mu a$, nous tirons $b = 0$, c'est à dire $X = 0$, ce qui est exclu.
   Donc, $\overline{a} \neq 0$ et $\overline{a} = -|\mu|^2 \overline{a} \iff |\mu|^2 = -1$, ce qui est impossible.

   Ainsi, la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ n'admet pas de valeur co-propre, ni de vecteur co-propre.

4. **Correspondance entre les valeurs co-propres de la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et les valeurs propres de la matrice $A\overline{A}$**

   Soit$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

   (a) *Démontrer que si le scalaire μ est une valeur co-propre de la matrice A, le nombre réel $|\mu|^2$ est une valeur propre de la matrice $A\overline{A}$*

   Soit donc μ une valeur co-propre de A de vecteur co-propre $X \neq 0$; donc $A\overline{X} = \mu X$.
   En prenant la conjugaison, nous avons : $\overline{A\overline{X}} = \overline{\mu X} \iff \overline{A}X = \overline{\mu}\overline{X}$
   En multipliant par la matrice A, nous obtenons :

   $$\overline{A}X = \overline{\mu}\overline{X} \iff A\overline{A}X = A\overline{\mu}\overline{X} = \overline{\mu}A\overline{X} = \overline{\mu}\mu X = |\mu|^2 X$$

   Et donc $A\overline{A}X = |\mu|^2 X$.
   Ainsi, si le scalaire μ est une valeur co-propre de la matrice A, le nombre réel $|\mu|^2$ est une valeur propre de la matrice $A\overline{A}$

(b) *Soit λ une valeur propre réelle positive ou nulle $\lambda \in \mathbb{R}^+$ de la matrice $A\overline{A}$ et X un vecteur propre associé, c'est à dire $A\overline{A}X = \lambda X$.*
Démontrer que le réel $\sqrt{\lambda}$ est une valeur co-propre de la matrice A

■ → Supposons les vecteurs $A.\overline{X}$ et X liés
Il existe donc $k \in \mathbb{C}$, $k \neq 0$ tel que $A.\overline{X} = kX$ et effectivement, k est une valeur co-propre de A et, d'après la question précédente, $|k|^2$ est une valeur propre de la matrice $A\overline{A}$.
Donc, de $A\overline{A}X = \lambda X = |k|^2 X$, et comme $X \neq 0$, nous avons $\lambda = |k|^2$ et donc $\sqrt{\lambda} = |k|$ et si θ est un argument de k, nous avons $k = \sqrt{\lambda}e^{i\theta}$.
Comme k est une valeur co-propre de A, d'après une question précédente, $ke^{-i\theta}$ en est une aussi, c'est à dire que $\sqrt{\lambda}$ est une valeur co-propre de A

■ → Supposons les vecteurs $A\overline{X}$ et X non colinéaires
Soit $Y = aA\overline{X} + bX$; du fait de la non colinéarité de $A\overline{X}$ et X, $Y = 0$ si et seulement si $a = b = 0$. Alors :
$$\overline{Y} = \overline{a}\overline{A}X + \overline{b}\overline{X} \iff A\overline{Y} = \overline{a}A\overline{A}X + \overline{b}A\overline{X}$$
Alors, de $A\overline{A}X = \lambda X$, nous tirons $A\overline{Y} = \overline{a}\lambda X + \overline{b}A\overline{X}$.
Nous avons $A\overline{Y} = \sqrt{\lambda}Y$, si et seulement si $\overline{a}\lambda X + \overline{b}A\overline{X} = a\sqrt{\lambda}A\overline{X} + b\sqrt{\lambda}X$.
De l'indépendance des vecteurs $A\overline{X}$ et X, nous déduisons $\overline{a}\lambda = b\sqrt{\lambda}$ et $\overline{b} = a\sqrt{\lambda}$
Nous avons ainsi $A\overline{Y} = \overline{a}\lambda X + a\sqrt{\lambda}A\overline{X}$. Si $a = 1$, alors $\overline{a} = 1$ et $Y = A\overline{X} + \sqrt{\lambda}X$ est tel que $A\overline{Y} = \sqrt{\lambda}Y$

(c) *En déduire que pour que le réel positif ou nul μ soit valeur co-propre de la matrice A, il faut et il suffit que le réel μ^2 soit valeur propre de la matrice $A\overline{A}$*

C'est une conséquence des questions précédentes :
- ▷ Si le scalaire μ est une valeur co-propre de la matrice A alors le nombre réel $|\mu|^2 = \mu^2$ est une valeur propre de la matrice $A\overline{A}$
- ▷ Réciproquement, si μ^2 une valeur propre de la matrice $A\overline{A}$ alors le réel $\sqrt{\mu^2} = \mu$ est une valeur co-propre de la matrice A

Nous venons donc de montrer l'équivalence demandée

(d) *Etant donné un réel $m \in \mathbb{R}$, soit A_m la matrice définie par la relation :*
$$A_m = \begin{pmatrix} m & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
Déterminer les valeurs co-propres réelles positives de A_m(discuter selon les valeurs de m).

Pour que $\mu \geqslant 0$ soit une valeur co-propre de A_m, il faut et il suffit que $\sqrt{\mu}$ soit valeur propre de $A_m\overline{A_m} = A_m^2$
Or, par calcul, $A_m^2 = \begin{pmatrix} m^2-1 & -m \\ m & -1 \end{pmatrix}$ et le polynôme caractéristique de A_m^2 est donné par
$$P_{A_m^2} = \begin{vmatrix} m^2-1-X & -m \\ m & -1-X \end{vmatrix} = X^2 - \left(m^2-2\right)X + 1$$
Le discriminant de ce polynôme est $\Delta = m^2\left(m^2-4\right)$.
- ▷ Si $m = 0$, alors $\Delta = 0$ et alors $P_{A_m^2} = X^2 + 2X + 1 = (X+1)^2$. -1 est donc racine double et valeur propre double qui, négative, n'entre pas dans notre problème.
  Nous pouvons remarquer qu'alors $A_m^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Elle est diagonale.
- ▷ Maintenant, si $m^2 \geqslant 4 \iff |m| \geqslant 2$, alors $\Delta \geqslant 0$ et $P_{A_m^2}$ admet une ou 2 racines.
  - ⋆ Si $|m| = 2$, alors $P_{A_m^2} = X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2$. Alors A_m^2 admet une valeur propre double $\mu^2 = 1$ et donc A_m admet une co-valeur propre $\mu = 1$
    On peut remarquer que si $m = 2$, alors $A_m^2 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ et si $m = -2$, alors $A_m^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.
    L'une est donc la transposée de l'autre

- ⋆ Si $|m| > 2$, alors $P_{A_m^2}$ admet 2 racines réelles :

$$X_1 = \frac{m^2 - 2 + \sqrt{m^2\left(m^2-4\right)}}{2} \text{ et } X_2 = \frac{m^2 - 2 - \sqrt{m^2\left(m^2-4\right)}}{2}$$

Comme $X_1 \times X_2 = 1$, nous avons $X_2 = \dfrac{1}{X_1}$.
De $|m| > 2$, on déduit $m^2 > 4 > 2$ et donc $X_1 > 0$ et donc $X_2 > 0$
Dans ce cas, A_m admet comme valeurs co-propres $\mu_1 = \sqrt{\dfrac{m^2 - 2 + \sqrt{m^2\left(m^2-4\right)}}{2}}$ et $\mu_2 = \dfrac{1}{\mu_1}$

5. **Cas d'une matrice triangulaire supérieure**

Dans cette question la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est une matrice triangulaire supérieure (les éléments situés en-dessous de la diagonale principale sont nuls).

(a) *Démontrer que si λ est une valeur propre de la matrice A, alors, pour tout réel θ, le nombre complexe $\lambda e^{i\theta}$ est une valeur co-propre de la matrice A.*

Soit λ une valeur propre de la matrice A.
Nous pouvons écrire $\lambda = |\lambda| e^{i\phi}$ où ϕ est un argument de $\lambda \in \mathbb{C}$.
Ainsi, d'après la question 1-b, si nous démontrons que $|\lambda|$ est valeur co-propre de A, alors $|\lambda| e^{i\phi}$ sera aussi valeur co-propre de A, c'est à dire que λ sera valeur co-propre de A et pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, nous aurons aussi $\lambda e^{i\theta}$ valeur co-propre de A.
Maintenant, $|\lambda|$ sera valeur co-propre de A si et seulement si $|\lambda|^2$ sera valeur propre de $A\overline{A}$
A étant diagonale, $\overline{A}$ l'est aussi.
Les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont ses coefficients diagonaux et les coefficients diagonaux d'un produit de matrices triangulaires supérieures sont les produits des coefficients diagonaux de chacune de ces matrices.
Ainsi, si λ est valeur propre de A, λ et $\overline{\lambda}$ sont des éléments diagonaux respectivement de A et $\overline{A}$ et le produit $\lambda \times \overline{\lambda} = |\lambda|^2$ est un élément diagonal de la matrice triangulaire $A\overline{A}$.
Donc, $|\lambda|^2$ est un vecteur propre de $A\overline{A}$
Ainsi, λ est valeur co-propre de A et donc, pour tout réel θ, le nombre complexe $\lambda e^{i\theta}$ est une valeur co-propre de la matrice A.

(b) *Démontrer que si μ est une valeur co-propre de la matrice A, alors il existe un réel θ tel que le nombre complexe $\mu e^{i\theta}$ soit valeur propre de la matrice A.*

Soit μ une valeur co-propre de A.
Nous avons $\mu = |\mu| e^{i\phi}$ où ϕ est l'argument de μ. Ainsi, $\mu e^{-i\phi}$ est aussi une valeur co-propre de A. Comme $\mu e^{-i\phi} = |\mu|$, on conclue que $|\mu|$ est donc aussi une valeur co-propre de A
Et donc $|\mu|^2$ est une valeur propre de $A\overline{A}$.
Comme les valeurs propres de $A\overline{A}$ *(elle est triangulaire)* sont les $|a_{j,j}|^2$, il existe $j_0 \in \mathbb{N}$ avec $1 \leqslant j_0 \leqslant n$ tel que $|a_{j_0,j_0}|^2 = |\mu|^2 \iff |a_{j_0,j_0}| = |\mu|$
Ayant deux nombres complexes de mêmes modules, ils diffèrent seulement par leurs arguments modulo 2π *(éventuellement arbitraires si les nombres sont nuls)* et nous avons donc $a_{j_0,j_0} = \mu e^{i\theta}$
Donc $\mu e^{i\theta}$ figure sur la diagonale de A, c'en est donc une valeur propre.

En résumé :

Soit A triangulaire.

- ⋆ Si λ est valeur propre de A alors $\lambda e^{i\theta}$ est une valeur co-propre de la matrice A pour tout réel θ
- ⋆ Réciproquement, si μ est valeur co-propre de A, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\mu e^{i\theta}$ soit valeur propre de la matrice A

(c) *Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ la matrice définie par $A = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & i \end{pmatrix}$*

Démontrer que le réel 1 est valeur co-propre de cette matrice et déterminer un vecteur X co-propre associé.

Nous pouvons remarquer qu'ici, $\lambda = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ est valeur propre double, et donc, d'après le « résumé » précédent, $\lambda e^{-i\frac{\pi}{2}} = e^{i\frac{\pi}{2}} \times e^{-i\frac{\pi}{2}}$ est une valeur co-propre de la matrice A, c'est à dire que 1 est une valeur co-propre de A.

Nous devons alors résoudre $A\overline{X} = X$.

Posons $X = \begin{pmatrix} a+ib \\ c+id \end{pmatrix}$ avec $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$ et $d \in \mathbb{R}$; alors, nous devons avoir :

$$A\overline{X} = X \iff \begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a-ib \\ c-id \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+ib \\ c+id \end{pmatrix}$$

Ce qui donne le système

$$\begin{cases} ia+b+c-id = & a+ib \\ c+id = & ic+d \end{cases} \iff \begin{cases} (b+c-a)+i(a-d-b) = & 0 \\ c-d+i(d-c) = & 0 \end{cases}$$

En identifiant partie réelle et partie imaginaire de la seconde ligne, nous avons $d = c$ et en reportant dans la première équation, nous obtenons

$$(b+c-a)+i(a-c-b) = 0 \iff a = b+c$$

Le vecteur $X = \begin{pmatrix} b+c+ib \\ c+ic \end{pmatrix}$ est donc un vecteur co-propre de A avec la valeur co-propre 1.

6. **Une caractérisation des valeurs co-propres**

Soit A une matrice carrée complexe d'ordre n, c'est à dire $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$; soient $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ les matrices réelles définies par la relation suivante $A = B + iC$.

Démontrer que le nombre complexe μ est valeur co-propre de la matrice A si et seulement si le nombre réel $|\mu|$ est une valeur propre de la matrice D, carrée, réelle d'ordre $2n$ c'est à dire $D \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$, définie par blocs par la relation suivante : $D = \begin{pmatrix} B & C \\ C & -B \end{pmatrix}$

Soit $\mu = a + ib$ valeur co-propre de A *(avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$)* et soit $X = Y + iZ$ un vecteur co-propre associé *(avec Y et Z vecteurs réels)*

Analytiquement, comme $A = B + iC$, nous avons :

$$\begin{aligned} A\overline{X} = \mu X \iff & (B+iC)\overline{X} = (a+ib)X \\ \iff & (B+iC)\overline{(Y+iZ)} = (a+ib)(Y+iZ) \iff (B+iC)(Y-iZ) = (a+ib)(Y+iZ) \\ \iff & BY - iBZ + iCY + CZ = aY + iaZ + ibY - bZ \\ \iff & (BY+CZ) + i(CY-BZ) = (aY-bZ) + i(aZ+bY) \end{aligned}$$

Si θ est l'un des arguments de μ, nous avons $\mu = |\mu| e^{i\theta}$ et, d'après 1.b $|\mu| = \mu e^{-i\theta}$ est encore une valeur co-propre, on peut donc appliquer les identités précédentes avec $a = |\mu|$ et $b = 0$; ce qui donne comme :

$$(BY+CZ) + i(CY-BZ) = |\mu| Y + i|\mu| Z \iff \begin{cases} BY + CZ = & |\mu| Y \\ CY - BZ = & |\mu| Z \end{cases}$$

Ce qui peut être traduit par :

$$\begin{pmatrix} B & C \\ C & -B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix} = |\mu| \begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix} \iff D \begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix} = |\mu| \begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix}$$

Et donc $\begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de D pour la valeur propre $|\mu|$

Réciproquement, si $|\mu|$ est valeur propre de D, alors il existe un vecteur propre $\begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix}$ réel tel que $D\begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix} = |\mu|\begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix}$ et nous avons alors le système :

$$\left\{ \begin{array}{rl} BY + CZ = & |\mu|\, Y \\ CY - BZ = & |\mu|\, Z \end{array} \right.$$

Et si nous avons le système précédent, alors $(B + iC)(Y - iZ) = |\mu|(Y + iZ)$, c'est à dire $A\overline{X} = |\mu|\, X$ et $|\mu|$ est donc valeur co-propre de la matrice A, donc μ aussi.

Seconde partie

Soient A et B deux matrices carrées complexes d'ordre n (c'est à dire $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$)*, s'il existe une matrice carrée complexe S d'ordre n inversible* (c'est à dire $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$) *telle que la relation $B = SA\overline{S}^{-1}$ soit vérifiée, les deux matrices A et B* ***sont dites co-semblables****.*
Si une matrice A est co-semblable à une matrice diagonale, la matrice A est dite ***co-diagonalisable****.*
Le but de cette partie est de rechercher à quelles conditions une matrice est co-diagonalisable.

1. **Une relation d'équivalence :**
Etant données deux matrices carrées complexes A et B d'ordre n, ces matrices sont dites satisfaire la relation $\equiv$ si et seulement si ces deux matrices sont co-semblables, c'est à dire :

$$A \equiv B \Longleftrightarrow (\exists S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}))\left(B = SA\overline{S}^{-1}\right)$$

Démontrer que la relation $\equiv$ est une relation d'équivalence dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, l'ensemble des matrices carrées complexes d'ordre n.

- $\rightarrow$ **Elle est réflexive**
En effet, soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Alors, $A = \mathrm{Id}_n \times A \times \mathrm{Id}_n$ et il est clair que $\left(\overline{\mathrm{Id}_n}\right)^{-1} = (\mathrm{Id}_n)^{-1} = \mathrm{Id}_n$.
Il existe donc $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et $S = \mathrm{Id}_n$ tel que $A = SA\overline{S}^{-1}$.
La relation $\equiv$ est donc réflexive
- $\rightarrow$ **Elle est symétrique**
Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ 2 matrices telles que $A \equiv B$, c'est à dire qu'il existe $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que la relation $B = SA\overline{S}^{-1}$ soit vérifiée.
Avons nous $B \equiv A$?

$$B = SA\overline{S}^{-1} \Longleftrightarrow B\overline{S} = SA \Longleftrightarrow S^{-1}B\overline{S} = A$$

Avons nous $\overline{S} = \overline{S^{-1}}^{-1}$ ou, autre forme de la question, avons nous $\left(\overline{S}\right)^{-1} = \overline{S^{-1}}$?
Et bien oui!!
Nous partons du fait que $SS^{-1} = \mathrm{Id}_n$ et donc $\overline{SS^{-1}} = \overline{\mathrm{Id}_n} = \mathrm{Id}_n$.
Or $\overline{SS^{-1}} = \overline{S} \times \overline{S^{-1}} = \mathrm{Id}_n$, et donc $\left(\overline{S}\right)^{-1} = \overline{S^{-1}}$

Il existe donc $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et nous avons $X = S^{-1}$ tel que $A = XB\overline{X}^{-1}$ et donc $B \equiv A$; la relation est donc symétrique
- $\rightarrow$ **Elle est transitive**
Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tels que $A \equiv B$ et $B \equiv C$
  - ⋆ Comme $A \equiv B$, il existe $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que la relation $B = SA\overline{S}^{-1}$
  - ⋆ De même, de $B \equiv C$, il existe $T \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que la relation $C = TB\overline{T}^{-1}$
  - ⋆ Alors, nous avons :

$$\begin{aligned} C = & \ T\left(SA\overline{S}^{-1}\right)\overline{T}^{-1} = (TS)\,A\left(\overline{S}^{-1} \times \overline{T}^{-1}\right) = (TS)\,A\left(\overline{S^{-1}} \times \overline{T^{-1}}\right) \\ = & \ (TS)\,A\left(\overline{S^{-1}T^{-1}}\right) = (TS)\,A\left(\overline{(TS)^{-1}}\right) = (TS)\,A\overline{(TS)}^{-1} \end{aligned}$$

Et nous avons donc $A \equiv C$; la relation $\equiv$ est donc transitive

La relation $\equiv$ est donc une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, l'ensemble des matrices carrées complexes d'ordre n

2. **Indépendance des vecteurs co-propres :**
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice carrée complexe d'ordre n ; soient $X_1, X_2, \ldots, X_k$, k vecteurs co-propres de la matrice A associés à des valeurs co-propres $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$, l'entier k étant inférieur ou égal à l'entier n ($k \leqslant n$).

$\rightarrow$ *Démontrer que, si les valeurs co-propres μ_p pour $p = 1, 2, \ldots, k$ ont des modules différents les uns des autres, c'est à dire que si $p \neq q$, alors $|\mu_p| \neq |\mu_q|$, alors la famille $\{X_1, X_2, \ldots, X_k\}$ est libre.*

Soient $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$, k valeurs co-propres de A, de vecteurs co-propres correspondants $X_1, X_2, \ldots, X_k$.
D'après la question 4 de la partie 1, les réels positifs $|\mu_1|^2, |\mu_2|^2, \ldots, |\mu_k|^2$ sont des valeurs propres de la matrice $A\overline{A}$, de vecteurs propres respectifs $X_1, X_2, \ldots, X_k$.
D'après le cours (théorème 12.2.6), comme les modules des valeurs co-propres sont distincts 2 à 2 (i.e. si $p \neq q$, alors $|\mu_p| \neq |\mu_q|$), les vecteurs propres sont donc linéairement indépendants.

$\rightarrow$ *En déduire que, si la matrice $A\overline{A}$ a n valeurs propres λ_p avec $p = 1, \ldots, n$, positives ou nulles, c'est à dire telles que $\lambda_p \geqslant 0$, distinctes les unes des autres, c'est à dire que si $p \neq q$, alors $\lambda_p \neq \lambda_q$, alors la matrice A est co-diagonalisable.*

Supposons que la matrice $A\overline{A}$ ait n valeurs propres λ_p avec $p = 1, \ldots, n$, positives ou nulles et distinctes.
Alors, d'après la question 4 de la première partie, $\sqrt{\lambda_p}$ est valeur co-propre de A, de vecteur co-propres respectifs $X_1, X_2, \ldots, X_n$.
Comme $p \neq q \Longrightarrow \lambda_p \neq \lambda_q$, nous avons aussi $p \neq q \Longrightarrow \sqrt{\lambda_p} \neq \sqrt{\lambda_q}$ et donc les vecteurs $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont linéairement indépendants et forment donc une base de E.
Et, pour tout p, nous avons $A\overline{X_p} = \sqrt{\lambda_p} X_p$.
Appelons u l'application semi-linéaire de matrice A dans la base canonique $\mathcal{B}_0$.

Si $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice $D = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & \cdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}$.

D est donc une matrice diagonale ; c'est la matrice de u dans la base $X_1, X_2, \ldots, X_n$ formée de co-vecteurs propres.
Si $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_0$ à la base $X_1, X_2, \ldots, X_n$, d'après la question 3 de la partie 1, nous avons $S = SD\left(\overline{S}\right)^{-1}$
La matrice A est donc co-diagonalisable.

3. **Quelques propriétés :**

(a) *Soit $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ une matrice carrée complexe d'ordre n inversible ; soit A la matrice définie par la relation $A = S \times \overline{S}^{-1}$. Calculer la matrice produit $A \times \overline{A}$*

Il suffit de calculer :

$$\begin{aligned} A \times \overline{A} = &\ S \times \overline{S}^{-1} \times \overline{S \times \overline{S}^{-1}} = S \times \overline{S}^{-1} \times \overline{S} \times S^{-1} \\ = &\ S \times \left(\overline{S}^{-1} \times \overline{S}\right) \times S^{-1} = S \times \mathrm{Id}_n \times S^{-1} = S \times S^{-1} \\ = &\ \mathrm{Id}_n \end{aligned}$$

Dans ce cas, nous avons donc $A \times \overline{A} = \mathrm{Id}_n$, c'est à dire $\overline{A} = A^{-1}$

(b) ▷ *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice carrée complexe d'ordre n telle que $A \times \overline{A} = \mathrm{Id}_n$. Démontrer qu'il existe au moins un réel θ_0 tel que la matrice $S(\theta_0)$ définie par la relation*

$$S(\theta_0) = A - e^{-i\theta_0}\mathrm{Id}_n$$

soit inversible.

▷ Première remarque :A est inversible et $A^{-1} = \overline{A}$ et donc $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$

▷ Seconde remarque : Si A admet des valeurs propres, ces valeurs propres sont en nombre fini. et $\lambda \in \mathbb{C}$ est valeur propre si et seulement si la matrice $A - \lambda\mathrm{Id}_n$ n'est pas inversible