Jean-Luc Éveno ©

Les mathématiques de L_2

Version du 25 avril 2024

La connaissance est un bien qui doit voyager entre les hommes,
de l'un à l'autre, d'une génération à l'autre, d'un pays à l'autre.

ARISTOTE

Table des matières

Première partie

Analyse en dimension finie

Chapitre 1

Normes, distance et topologie de $\mathbb{R}^n$

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

1.1 Espace vectoriel normé

1.1.1 Définition de norme

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel . On appelle norme sur E une application $\mathcal{N}$ de E dans $\mathbb{R}^+$ possédant les propriétés suivantes :

1. Pour tout $x \in E$, $\mathcal{N}(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$
2. Inégalité triangulaire : pour tout $x \in E$ et tout $y \in E$, $\mathcal{N}(x+y) \leqslant \mathcal{N}(x) + \mathcal{N}(y)$
3. Pour tout $x \in E$, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\mathcal{N}(\lambda x) = |\lambda| \mathcal{N}(x)$

On appelle espace normé la donnée d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et d'une norme sur E

Remarque 1 :

1. Le plus souvent, pour $x \in E$, la norme $\mathcal{N}(x)$ sera notée $\|x\|$, et c'est ce que nous ferons dans la suite.
2. Si E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel , alors dans l'égalité $\mathcal{N}(\lambda x) = |\lambda| \mathcal{N}(x)$, $|\lambda|$ désigne la valeur absolue de λ
3. De même, si E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel , alors dans l'égalité $\mathcal{N}(\lambda x) = |\lambda| \mathcal{N}(x)$, $|\lambda|$ désigne le module du nombre complexe λ

1.1.2 Conséquence de l'inégalité triangulaire

Soit E un espace vectoriel normé. Alors, pour tout $x \in E$ et tout $y \in E$,

$$|\|x\| - \|y\|| \leqslant \|x - y\|$$

Démonstration

Soient $x \in E$ et $y \in E$; alors :
- $\|x\| = \|x - y + y\| \leqslant \|x - y\| + \|y\|$ et nous en déduisons que $\|x\| - \|y\| \leqslant \|x - y\|$
- De même, $\|y\| = \|y - x + x\| \leqslant \|x - y\| + \|x\|$ et donc $\|y\| - \|x\| \leqslant \|x - y\|$

Nous avons bien $|\|x\| - \|y\|| \leqslant \|x - y\|$

Exemple 1 :

Exemple de norme sur $\mathbb{R}$: la valeur absolue. Nous avons en effet :
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$

— Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y \in \mathbb{R}$, $|x+y| \leqslant |x| + |y|$
— Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $|\lambda x| \leqslant |\lambda|\,|x|$

1.2 Les espace $\mathbb{K}^n$

Dans cette section, nous allons nous intéresser à 3 normes importantes des espaces $\mathbb{K}^n$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

1.2.1 Une première norme, la norme infinie $\|\bullet\|_\infty$

1. Dans $\mathbb{R}^n$, pour $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on définit $\|x\|_\infty = \sup\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|$.
   Alors $\|\bullet\|_\infty$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$
2. Dans $\mathbb{C}^n$, pour $z = (z_1, \cdots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, on définit $\|z\|_\infty = \sup\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |z_i|$.
   Alors $\|\bullet\|_\infty$ est une norme sur $\mathbb{C}^n$

Démonstration

Nous ne faisons qu'une seule démonstration, celle dans l'espace $\mathbb{C}^n$. La démonstration dans $\mathbb{R}^n$ est la même, donc facilement transposable.
Il faut donc que $\|\bullet\|_\infty$ vérifie les 3 axiômes des normes.

1. Démontrons que, pour tout $z \in \mathbb{C}^n$, $\|z\|_\infty = 0 \Longleftrightarrow z = 0$
   ▷ Si $z = 0$, ce qui veut dire que $z = (0, 0, \cdots, 0)$, nous avons bien, et sans coup férir, $\|z\|_\infty = 0$
   ▷ Réciproquement, supposons $\|z\|_\infty = 0$, alors $\sup\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |z_i| = 0$, ce qui veut dire que pour tout $i = 1, \cdots, n$, $|z_i| \leqslant 0$, et donc, pour tout $i = 1, \cdots, n$, le module d'un nombre complexe étant positif, $|z_i| = 0$ et donc, pour tout $i = 1, \cdots, n$, $z_i = 0$, c'est à dire $z = (0, \cdots, 0) = 0_{\mathbb{C}^n}$
2. Montrons l'inégalité triangulaire
   Soient $x \in \mathbb{C}^n$ et $y \in \mathbb{C}^n$.
   Alors $x = (x_1, \cdots, x_n)$ et $y = (y_1, \cdots, y_n)$.
   Donc $\|x + y\|_\infty = \|(x_1, \cdots, x_n) + (y_1, \cdots, y_n)\|_\infty = \|(x_1 + y_1, \cdots, x_n + y_n)\|_\infty$
   Donc $\|x + y\|_\infty = \sup\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i + y_i|$. Or, pour tout $i = 1, \cdots, n$, nous avons $|x_i + y_i| \leqslant |x_i| + |y_i|$, et donc :
   $$\sup_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i + y_i| \leqslant \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} (|x_i| + |y_i|) \leqslant \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} (|x_i|) + \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} (|y_i|)$$
   C'est à dire $\|x + y\|_\infty \leqslant \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$
3. Soient $x \in \mathbb{C}^n$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors $x = (x_1, \cdots, x_n)$ et $\lambda x = (\lambda x_1, \cdots, \lambda x_n)$.
   $\|\lambda x\|_\infty = \|(\lambda x_1, \cdots, \lambda x_n)\|_\infty = \sup\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |\lambda x_i| = \sup\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |\lambda|\,|x_i| = |\lambda| \sup\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i| = |\lambda|\,\|x\|_\infty$
   Ce que nous voulions

1.2.2 Une seconde norme, la norme 1 $\|\bullet\|_1$

1. Dans $\mathbb{R}^n$, our $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on définit $\|x\|_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|$.
   Alors, $\|\bullet\|_1$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$
2. Dans $\mathbb{C}^n$, our $z = (z_1, \cdots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, on définit $\|z\|_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} |z_i|$.
   Alors, $\|\bullet\|_1$ est une norme sur $\mathbb{C}^n$

Démonstration

Comme tout à l'heure, nous ne faisons qu'une seule démonstration, celle dans l'espace $\mathbb{C}^n$. La démonstration dans $\mathbb{R}^n$ est la même, donc tout aussi facilement transposable.
Il faut donc que $\|\bullet\|_1$ vérifie les 3 axiômes des normes.

1. Démontrons que $\|z\|_1 = 0 \iff z = 0$
   - ▷ Si $z = 0$, ce qui veut dire que $z = (0, 0, \cdots, 0)$, nous avons bien $\|z\|_1 = 0$
   - ▷ Réciproquement, supposons $\|z\|_1 = 0$, alors $\sum_{i=1}^{n} |z_i| = 0$. $\sum_{i=1}^{n} |z_i|$ étant une somme de termes tous positifs ou nuls, nous en déduisons que pour tout $i = 1, \cdots, n$, $|z_i| = 0$, et donc $z_i = 0$ et donc, $z = (0, \cdots, 0) = 0_{\mathbb{C}^n}$
2. Montrons l'inégalité triangulaire
   Soient $x \in \mathbb{C}^n$ et $y \in \mathbb{C}^n$. Alors $x = (x_1, \cdots, x_n)$ et $y = (y_1, \cdots, y_n)$.
   Donc $\|x + y\|_1 = \|(x_1, \cdots, x_n) + (y_1, \cdots, y_n)\|_1 = \|(x_1 + y_1, \cdots, x_n + y_n)\|_1$
   Donc $\|x + y\|_1 = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i + y_i|$.
   Or, pour tout $i = 1, \cdots, n$, nous avons $|x_i + y_i| \leqslant |x_i| + |y_i|$, et donc :
   $$\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i + y_i| \leqslant \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} (|x_i| + |y_i|) \leqslant \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} (|x_i|) + \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} (|y_i|)$$
   C'est à dire $\|x + y\|_1 \leqslant \|x\|_1 + \|y\|_1$
3. Soient $x \in \mathbb{C}^n$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors $x = (x_1, \cdots, x_n)$ et $\lambda x = (\lambda x_1, \cdots, \lambda x_n)$.
   $\|\lambda x\|_1 = \|(\lambda x_1, \cdots, \lambda x_n)\|_1 = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} |\lambda x_i| = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} |\lambda| |x_i| = |\lambda| \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i| = |\lambda| \|x\|_1$
   Ce que nous voulions

1.2.3 Lemme : Inégalité de Schwarz

Soient $x_1, \cdots, x_n$ et $y_1, \cdots, y_n$, $2n$ nombres réels. Alors, nous avons l'inégalité :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)$$

Démonstration

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et considérons le polynôme en λ défini par :

$$P(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} (x_i + \lambda y_i)^2$$

P est un polynôme du second degré tel que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $P(\lambda) \geqslant 0$. Donc, son discriminant est négatif ou nul.
Développons P.

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \sum_{i=1}^{n} (x_i + \lambda y_i)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(x_i^2 + \lambda^2 y_i^2 + 2\lambda x_i y_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \lambda^2 y_i^2 + \sum_{i=1}^{n} 2\lambda x_i y_i \\ &= \lambda^2 \sum_{i=1}^{n} y_i^2 + 2\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \end{aligned}$$

Le discriminant de P est donc $\Delta = 4\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 - 4\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)$, et de $\Delta \leqslant 0$, nous déduisons

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) \leqslant 0 \iff \left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)$$

1.2.4 Une troisième norme, dans $\mathbb{R}^n$: la norme euclidienne $\|\bullet\|_2$

Pour $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on définit $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$.

Alors $\|\bullet\|_2$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$

Démonstration

Comme précédemment, il faut donc que $\|\bullet\|_2$ vérifie les 3 axiômes des normes.

1. Démontrons que $\|x\|_2 = 0 \iff x = 0$
   - ▷ Que $x \in \mathbb{R}^n$ ou $x \in \mathbb{C}^n$, si $x = 0$, ce qui veut dire que $x = (0, 0, \cdots, 0)$, nous avons bien $\|x\|_2 = \sum_{i=1}^{n} 0^2 = 0$
   - ▷ Réciproquement

     Pour $x \in \mathbb{R}^n$, supposons $\|x\|_2 = 0$, alors $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0$. $\sum_{i=1}^{n} x_i^2$ étant une somme de termes tous positifs ou nuls, nous en déduisons que pour tout $i = 1, \cdots, n$, $x_i^2 = 0$, et donc $x_i = 0$ et donc, $x = (0, \cdots, 0) = 0$
2. Montrons l'inégalité triangulaire

   Soient $x \in \mathbb{R}^n$ et $y \in \mathbb{R}^n$. Alors $x = (x_1, \cdots, x_n)$ et $y = (y_1, \cdots, y_n)$.

   Donc $\|x + y\|_2 = \|(x_1, \cdots, x_n) + (y_1, \cdots, y_n)\|_2 = \|(x_1 + y_1, \cdots, x_n + y_n)\|_2$

   Donc $\|x + y\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^2}$.

   Développons cette dernière expression élevée au carrée ; nous avons donc :

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} y_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

   D'après l'inégalité de Schwarz 1.2.3, nous avons :

$$2\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leqslant 2\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)}\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)}$$

   Donc :

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} y_i^2 + 2\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)}\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)} = \left(\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)} + \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)}\right)^2$$

   Ou, ce qui est équivalent :

$$\|x + y\|_2^2 \leqslant \left(\|x\|_2 + \|y\|_2\right)^2$$

   Et comme nous avons affaire à des nombres positifs, nous en déduisons que $\|x + y\|_2 \leqslant \|x\|_2 + \|y\|_2$

   Ce que nous voulions

3. Soient $x \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $x = (x_1, \cdots, x_n)$ et $\lambda x = (\lambda x_1, \cdots, \lambda x_n)$.
$$\|\lambda x\|_2 = \|(\lambda x_1, \cdots, \lambda x_n)\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\lambda x_i)^2} = \sqrt{\lambda^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2} = |\lambda| \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = |\lambda| \, \|x\|_2$$
Ce que nous voulions

1.2.5 Comparaison de ces trois normes

Pour $x \in \mathbb{R}^n$, nous avons :
1. $\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_1 \leqslant n \|x\|_\infty$
2. $\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_2 \leqslant \sqrt{n} \|x\|_\infty$
3. $\dfrac{1}{n} \|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant \sqrt{n} \|x\|_1$

Démonstration

1. Démontrons que $\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_1 \leqslant n \|x\|_\infty$
   — Montrons que $\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_1$
   Il existe forcément un entier i_0 tel que $|x_{i_0}| = \sup\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|$
   Donc, comme $|x_{i_0}| \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|$, nous avons donc $\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_1$
   — Montrons que $\|x\|_1 \leqslant n \|x\|_\infty$
   Ce n'est pas moins simple : pour tout $i = 1, \cdots, n$, nous avons $|x_i| \leqslant |x_{i_0}|$. Donc,
$$\sum_{i=1}^{n} |x_i| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_{i_0}| \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{n} |x_i| \leqslant n \, |x_{i_0}|$$
   C'est à dire $\|x\|_1 \leqslant n \|x\|_\infty$
2. Montrons que $\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_2 \leqslant \sqrt{n} \|x\|_\infty$
   — Montrons que $\|x\|_2 \leqslant \sqrt{n} \|x\|_\infty$
   Comme tout à l'heure, nous choisissons i_0 tel que $|x_{i_0}| = \sup\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|$.
   Alors, pour tout $i = 1, \cdots, n$, nous avons $|x_i| \leqslant |x_{i_0}| \Longleftrightarrow (x_i)^2 \leqslant (x_{i_0})^2$. En passant à la sommation :
$$\sum_{i=1}^{n} (x_i)^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} (x_{i_0})^2 \Longleftrightarrow \|x\|_2^2 \leqslant n \|x\|_\infty^2 \Longleftrightarrow \|x\|_2 \leqslant \sqrt{n} \|x\|_\infty$$
   — Montrons que $\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_2$
   Nous avons $(x_{i_0})^2 \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} (x_i)^2$, nous avons donc $\|x\|_\infty^2 \leqslant \|x\|_2^2$, c'est à dire $\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_2$
3. Montrons que $\dfrac{1}{n} \|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant \sqrt{n} \|x\|_1$
   Nous allons utiliser les 2 inégalités démontrées précédemment.
   — Nous avons $\|x\|_1 \leqslant n \|x\|_\infty \leqslant n \|x\|_2$, c'est à dire $\|x\|_1 \leqslant n \|x\|_2$, et donc
$$\frac{1}{n} \|x\|_1 \leqslant \|x\|_2$$
   — De même, nous avons $\|x\|_2 \leqslant \sqrt{n} \|x\|_\infty \leqslant \sqrt{n} \|x\|_1$, et donc
$$\|x\|_2 \leqslant \sqrt{n} \|x\|_1$$

Remarque 2 :

$\mathbb{C}$ est un espace vectoriel normé

En effet, si le corps $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 1, c'est aussi un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2.
Tout nombre complexe s'écrivant d'une seule manière sous la forme $z = a + bi$, tout nombre complexe peut être identifié à un élément $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
L'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{R}^+$ qui, à z fait correspondre son module $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ est donc une norme sur $\mathbb{C}$, c'est la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^2$

1.2.6 Définition de l'équivalence des normes

Soit E un espace vectoriel normé, sur le quel sont définies 2 normes $\mathcal{N}_1$ et $\mathcal{N}_2$
On dit que ces 2 normes sont équivalentes s'il existe $a > 0$ et $b > 0$ tels que, pour tout $x \in E$:

$$\mathcal{N}_1(x) \leqslant a\mathcal{N}_2(x) \text{ ET } \mathcal{N}_2(x) \leqslant b\mathcal{N}_1(x)$$

Remarque 3 :

1. Cette définition est valable pour tout type d'espace normé, de dimension finie ou non.
2. L'équivalence des normes dans un espace normé E est une relation d'équivence *(Facile à démontrer)*
3. Dans $\mathbb{R}^n$, les normes $\|x\|_\infty$, $\|x\|_1$ et $\|x\|_2$ sont donc équivalentes
4. On démontrera en L_3 que les espaces normés sont de dimension finie **si et seulement si** toutes les normes sont équivalentes.

1.2.7 Quelques exercices sur les espaces vectoriels normés

Exercice 1 :

Soit E un espace vectoriel normé et $\mathcal{N}_1, \cdots, \mathcal{N}_n$ n normes sur E. Soient $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$, n nombres réels strictement positifs tels que $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$. Montrer que $\mathcal{N} = \lambda_1\mathcal{N}_1 + \cdots + \lambda_n\mathcal{N}_n$ est une norme.

Exercice 2 :

Soit E un espace vectoriel normé, et la norme de E est notée $\|\bullet\|_E$. Montrez que :

1. Pour tout $(x, y, z, t) \in E^4$,
$$\|x - y\|_E + \|z - t\|_E + \|x - z\|_E + \|y - t\|_E \geqslant \|x - t\|_E + \|y - z\|_E$$
2. Pour tout $(x, y, z) \in E^3$,
$$(x + y + z = 0) \Longrightarrow \left(\|x - y\|_E + \|y - z\|_E + \|x - z\|_E \geqslant \frac{3}{2}\left(\|x\|_E + \|y\|_E + \|z\|_E\right)\right)$$
3. Pour tout $(x, y) \in (E \setminus \{0\})^2$,
$$\|x - y\|_E \geqslant \frac{1}{2}\sup\left(\|x\|_E, \|y\|_E\right) \times \left\|\frac{x}{\|x\|_E} - \frac{y}{\|y\|_E}\right\|_E$$
4. Pour tout $(x, y) \in (E \setminus \{0\})^2$,
$$\|x - y\|_E \geqslant \frac{1}{4}\left(\|x\|_E + \|y\|_E\right) \times \left\|\frac{x}{\|x\|_E} - \frac{y}{\|y\|_E}\right\|_E$$

Exercice 3 :

Dans $\mathbb{R}^2$, on considère l'application $\mathcal{N}$ définie par :

$$\begin{cases} \mathcal{N} : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \mathcal{N}((x,y)) = \sup\limits_{t\in[0;1]} |x+ty| \end{cases}$$

1. Démontrer que $\mathcal{N}$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$
2. Représenter graphiquement la boule fermée de centre $(0,0)$ et de rayon 1 $B_F(0,1)$ définie par :

$$B_F(0,1) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } \mathcal{N}((x,y)) \leqslant 1\right\}$$

Exercice 4 :

Soit E un espace vectoriel normé, et la norme de E est notée $\|\bullet\|_E$.
Soient $e_1, \cdots, e_n$ n vecteurs de E. Dans $\mathbb{R}^n$, on considère l'application $\mathcal{N}$ définie par :

$$\begin{cases} \mathcal{N} : \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1,\cdots,x_n) & \longmapsto & \mathcal{N}((x_1,\cdots,x_n)) = \left\|\sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i\right\|_E \end{cases}$$

Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur les $\{e_1, \cdots, e_n\}$ pour que $\mathcal{N}$ soit une norme

Exercice 5 :

Soit E un espace vectoriel normé, et la norme de E est notée $\|\bullet\|_E$.
On note $T : E \longrightarrow E$, l'application définie par :

$$\begin{cases} T : E & \longrightarrow & E \\ u & \longmapsto & T(u) = \begin{cases} u & \text{si } \|u\|_E \leqslant 1 \\ \dfrac{u}{\|u\|_E} & \text{si } \|u\|_E \geqslant 1 \end{cases} \end{cases}$$

Montrer que pour tout $(u,v) \in E^2$, $\|T(u) - T(v)\|_E \leqslant 2\|u-v\|_E$

Exercice 6 :

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $\mathcal{L}(E)$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des endomorphismes de E. On sait que $\mathcal{L}(E)$ est isomorphe à $M_n(\mathbb{R})$ espace des matrices carrées de dimension n. Ainsi, $\mathcal{L}(E)$ et $M_n(\mathbb{R})$ sont des $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n^2.
On peut donc définir sur $M_n(\mathbb{R})$ les mêmes normes que sur $\mathbb{R}^{n^2}$ *(norme euclidienne, norme infinie, norme 1)* faisant donc de $M_n(\mathbb{R})$ un espace normé.

1. Pour $A \in M_n(\mathbb{R})$ où $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$, on pose $\mathcal{N}(A) = \sup\limits_{1\leqslant j\leqslant n}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} |a_{i,j}|\right)$

   Montrer que $\mathcal{N}$ est une norme
2. La norme 1 sur $M_n(\mathbb{R})$ est définie par $\|A\|_1 = \sum\limits_{i=1}^{n}\left(\sum\limits_{j=1}^{n} |a_{i,j}|\right)$. Trouver $\lambda > 0$ et $\mu > 0$ tels que $\mathcal{N}(A) \leqslant \lambda\|A\|_1$ et $\|A\|_1 \leqslant \mu\mathcal{N}(A)$ *(Autrement dit, ces deux normes sont équivalentes)*
3. Pour $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $B \in M_n(\mathbb{R})$, trouvez $\alpha > 0$ tel que $\|AB\|_1 \leqslant \alpha\|A\|_1\|B\|_1$
4. Pour $A \in M_n(\mathbb{R})$, inversible, démontrer que $\left\|A^{-1}\right\|_1 \geqslant \dfrac{1}{\|A\|_1}$

1.3 Notion d'espace métrique

1.3.1 Définition d'espace métrique

Soit E un ensemble.

1. On appelle distance sur E une application d de $E \times E$ dans $\mathbb{R}^+$:

$$\begin{array}{rcl} d : E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ (x, y) & \longmapsto & d(x, y) \end{array}$$

vérifiant :

   (a) Symétrie : Pour tout $x \in E$ et tout $y \in E$ $d(x, y) = d(y, x)$

   (b) Inégalité triangulaire Pour tout $x \in E$, tout $y \in E$ et tout $z \in E$ $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$

   (c) Pour tout $x \in E$ et tout $y \in E$ $d(x, y) = 0 \iff x = y$

2. On appelle espace métrique la donnée d'un couple (E, d) formé d'un ensemble E et d'une distance d sur E

Remarque 4 :

Si $l_3 > l_1 + l_2$, il n'y a pas de triangle dont les côtés ont cotés l_1, l_2, l_3

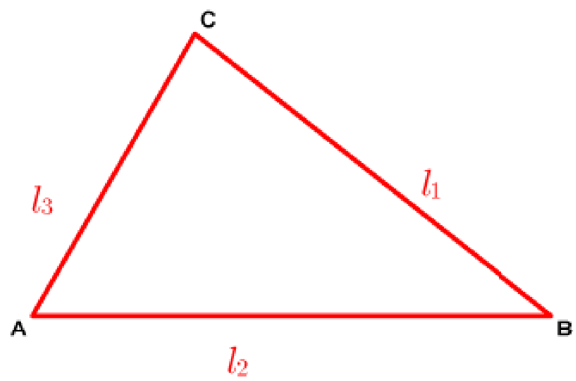

FIGURE 1.1 – Illustration de l'inégalité triangulaire

1.3.2 Conséquence de l'inégalité triangulaire

Soit (E, d) un espace métrique. Alors, pour tout $x \in E$, tout $y \in E$ et tout $z \in E$

$$|d(x, z) - d(y, z)| \leqslant d(x, y)$$

Démonstration

La démonstration est simple et en tous points semblable à celle de 1.1.2
Soit donc $x \in E$, $y \in E$ et $z \in E$. Alors :

- $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z) \iff d(x, z) - d(y, z) \leqslant d(x, y)$
- $d(y, z) \leqslant d(x, y) + d(x, z) \iff d(y, z) - d(x, z) \leqslant d(x, y)$

D'où nous avons bien $|d(x, z) - d(y, z)| \leqslant d(x, y)$

1.3.3 Proposition

Soit $(E, \mathcal{N})$ un espace normé. Pour $x \in E$ et $y \in E$, nous posons : $d(x,y) = \mathcal{N}(x-y)$. Alors d est une distance, et donc, (E,d) est un espace métrique.
De plus, cette distance est invariante par translation, c'est à dire :

$$(\forall x \in E)(\forall y \in E)(\forall z \in E)(d(x+z, y+z) = d(x,y))$$

Démonstration

1. Soient $x \in E$ et $y \in E$ tels que $d(x,y) = 0$; alors, $\mathcal{N}(x-y) = 0$; des axiômes de norme, nous tirons $x = y$; et réciproquement, nous avons bien $d(x,x) = 0$
2. Soient $x \in E$ et $y \in E$; alors $d(x,y) = \mathcal{N}(x-y) = \mathcal{N}(y-x) = d(y,x)$
3. Soient $x \in E$, $y \in E$ et $z \in E$; alors :
$$d(x,z) = \mathcal{N}(x-z) = \mathcal{N}(x-y+y-z) \leqslant \mathcal{N}(x-y) + \mathcal{N}(y-z) = d(x,y) + d(y,z)$$
Nous avons donc démontré l'inégalité triangulaire pour d.
4. Soient $x \in E$, $y \in E$ et $z \in E$; alors :
$$d(x+z, y+z) = \mathcal{N}(x+z-(y+z)) = \mathcal{N}(x+z-y-z) = \mathcal{N}(x-y) = d(x,y)$$
Nous venons de montrer l'invariance par translation

Exemple 2 :

1. **$\mathbb{R}$ est un espace métrique**
La distance entre 2 nombres réels $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$ est donnée par la valeur absolue : $d(x,y) = |x-y|$
2. **$\mathbb{C}$ est un espace métrique**
La distance entre 2 nombres complexes $z_1 \in \mathbb{R}$ et $z_2 \in \mathbb{R}$ est donnée par le module des nombres complexes : $d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$
3. **$\mathbb{R}^n$ est un espace métrique**
Nous avons défini 3 normes sur $\mathbb{R}^n$, et on peut donc définir 3 distances.
Soient $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $y = (y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$
   (a) La distance euclidienne est donnée par :
$$d_2(x,y) = \|x-y\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$
   (b) La distance liée à la norme 1 : $d_1(x,y) = \|x-y\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$
   (c) La distance liée à la norme infinie : $d_\infty(x,y) = \|x-y\|_\infty = \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i - y_i|$

Exercice 7 :

1. Dans $\mathbb{R}$, on définit la fonction D par :
$$\begin{cases} D : \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ \quad (x,y) & \longmapsto D(x,y) = \left|x^3 - y^3\right| \end{cases}$$
Il faut montrer que D est une distance sur $\mathbb{R}$
2. Soit E un ensemble. On définit la fonction D_1 par :
$$\begin{cases} D_1 : E \times E & \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ \quad (x,y) & \longmapsto D_1(x,y) = \begin{cases} 0 \text{ si } x = y \\ 1 \text{ si } x \neq y \end{cases} \end{cases}$$
Il faut montrer que D_1 est une distance sur E ; D_1 est souvent appelée distance discrète

Exercice 8 :

Soit (E, d) un espace métrique

1. Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ une application croissante et telle que :
   — $f(t) = 0 \Longrightarrow t = 0$
   — Pour tout $t \geqslant 0$ et tout $s \geqslant 0$, $f(t+s) \leqslant f(t) + f(s)$
   Démontrer que $d'(x, y) = f(d(x, y))$ est une distance sur E
2. Vérifier que les d_i avec $i = 1, \cdots, 5$ sont des distances sur E :
   (a) $d_1 = r \times d$ avec $r > 0$
   (b) $d_2 = d^r$ avec $0 < r \leqslant 1$
   (c) $d_3 = \dfrac{d}{1+d}$
   (d) $d_4 = \ln(1+d)$
   (e) $d_5 = \inf\{1, d\}$

Exercice 9 :

Transport de distances
Soient E et F 2 ensembles quelconques et $g : E \longrightarrow F$ une bijection. d est une distance sur F faisant de (F, d) un espace métrique.
Soit $d'(x, y) = d(g(x), g(y))$; montrer que d' est une distance sur E

1.3.4 Distances équivalentes

Soit E un ensemble et d_1 et d_2 2 distances définies sur E. On dit que ces 2 distances sont équivalentes, s'il existe 2 nombres réels strictement positifs $\lambda > 0$ et $\mu > 0$ tels que

$$(\forall x \in E)\,(\forall y \in E)\,(\lambda d_1(x, y) \leqslant d_2(x, y) \leqslant \mu d_1(x, y))$$

Exemple 3 :

Dans $\mathbb{R}^n$, nous avons, au niveau des distances définies à partir de normes :

1. $d_\infty(x, y) \leqslant d_1(x, y) \leqslant d_\infty(x, y)$
2. $d_\infty(x, y) \leqslant d_2(x, y) \leqslant \sqrt{n} d_\infty(x, y)$
3. $\dfrac{1}{n} d_1(x, y) \leqslant d_2(x, y) \leqslant \sqrt{n} d_1(x, y)$

Ces 3 distances sont donc équivalentes.

1.3.5 Notion d'ouvert

Soit (E, d) un espace métrique.

1. Etant donné un point $x_0 \in E$ et un nombre $r > 0$, on appelle boule ouverte de centre x_0 et de rayon r l'ensemble des $y \in E$ tels que $d(x_0, y) < r$, c'est à dire :
$$B_O(x_0, r) = \{y \in E \text{ tels que } d(x_0, y) < r\}$$
2. On appelle ouvert de E un sous-ensemble $A \subset E$ tel que :
   — $A = \emptyset$
   — Ou, si $A \neq \emptyset$, pour tout $x \in A$ il existe $r > 0$ tel que $B_O(x, r) \subset A$, autrement dit, A est un ouvert de E, si, pour tout $x \in E$, il existe une boule ouverte de centre x qui est incluse dans A
3. Soit $x_0 \in A$. On appelle voisinage de x_0 un sous-ensemble $A \subset E$ tel que il existe $r > 0$ tel que $B_O(x_0, r) \subset A$, autrement dit, A est un voisinage de x_0, s'il existe une boule ouverte de centre x_0 qui est incluse dans A

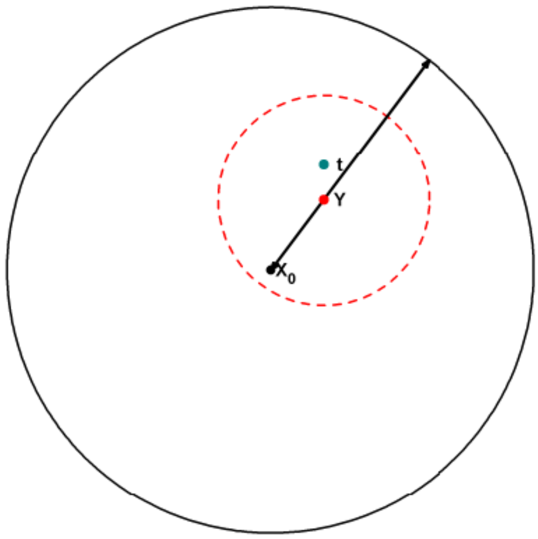

FIGURE 1.2 – Une boule ouverte est un ouvert

Remarque 5 :

1. Une boule ouverte est forcément un ouvert

   En effet, soit $B_O(x_0, r)$ une boule ouverte, et montrons que cette boule est un ouvert. Soit $y \in B_O(x_0, r)$. Existe-t-il $\rho > 0$ tel que $B_O(y, \rho) \subset B_O(x_0, r)$?
   Soit $\rho < r - d(x_0, y)$ et $t \in B_O(y, \rho)$; nous allons montrer que $t \in B_O(x_0, r)$, c'est à dire que $B_O(y, \rho) \subset B_O(x_0, r)$ Nous allons donc montrer que $d(x_0, t) < r$
   Par l'inégalité triangulaire,

   $$d(x_0, t) \leqslant d(x_0, y) + d(y, t) < d(x_0, y) + \rho < d(x_0, y) + r - d(x_0, y) = r$$

   Ce que nous voulions.
   Une boule ouverte est donc un ouvert
2. $A \subset E$ est un ouvert, si et seulement si, il est voisinage de chacun de ses points
3. E est évidemment un ouvert *(comme voisinage de chacun de ses points)*

1.3.6 Propriétés des ouverts

Soit (E, d) un espace métrique.

1. Toute réunion d'ensembles ouverts est un ouvert
2. Toute intersection finie d'ensembles ouverts est un ouvert

Démonstration

1. Démontrons la première assertion
   Soit donc $(\mathcal{U}_i)_{i \in I}$ une famille quelconque d'ouverts et considérons $\bigcup\limits_{i \in I} \mathcal{U}_i$. il faut donc montrer que $\bigcup\limits_{i \in I} \mathcal{U}_i$ est un ouvert.
   Soit $x \in \bigcup\limits_{i \in I} \mathcal{U}_i$; il faut donc montrer qu'il existe $r > 0$ tel que $B_O(x, r) \subset \bigcup\limits_{i \in I} \mathcal{U}_i$
   Comme $x \in \bigcup\limits_{i \in I} \mathcal{U}_i$, il existe $i_0 \in I$ tel que $x \in \mathcal{U}_{i_0}$. $\mathcal{U}_{i_0}$ étant un ouvert, il existe donc $r > 0$ tel que $B_O(x, r) \subset \mathcal{U}_{i_0}$ et donc tel que $B_O(x, r) \subset \bigcup\limits_{i \in I} \mathcal{U}_i$

2. Démontrons la seconde assertion
   Soient donc $\mathcal{U}_1, \cdots, \mathcal{U}_n$ n sous-ensembles ouverts de E ; il faut donc démontrer que $\mathcal{U}_1 \cap \cdots \cap \mathcal{U}_n$ est un ouvert.
   Soit $x \in \mathcal{U}_1 \cap \cdots \cap \mathcal{U}_n$; alors, pour tout $i = 1, \cdots, n$, $x \in \mathcal{U}_i$, et donc, pour chaque ouvert $\mathcal{U}_i$, il existe un nombre $r_i > 0$ tel que $B_O(x, r_i) \subset \mathcal{U}_i$. On appelle $r = \inf\{r_1, \cdots, r_n\}$, alors, pour tout $i = 1, \cdots, n$, $B_O(x, r) \subset B_O(x, r_i)$, et donc, $i = 1, \cdots, n$, $B_O(x, r) \subset \mathcal{U}_i$, c'est à dire $B_O(x, r) \subset \mathcal{U}_1 \cap \cdots \cap \mathcal{U}_n$
   On vient donc de démontrer que $\mathcal{U}_1 \cap \cdots \cap \mathcal{U}_n$ est un ouvert

Remarque 6 :

De manière générale, l'intersection infinie d'ouverts n'est pas un ouvert

Il suffit de prendre comme contre exemple la famille d'intervalles ouverts $I_n = \left]\dfrac{-1}{n}; \dfrac{1}{n}\right[$; nous avons $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}^*} I_n = \{0\}$ qui n'est pas un ouvert, car ne contient aucun intervalle ouvert de centre 0 et de rayon $r > 0$ quelconque

1.3.7 Proposition

Soit (E, d) un espace métrique et $x \in E$, $y \in E$ tels que $x \neq y$.
Alors, on peut trouver V, voisinage de x et W, voisinage de y tels que $V \cap W = \emptyset$

Nous allons adopter comme notation : pour $x \in E$, on appelle $\mathcal{V}(x)$ ensemble des voisinages de x

Démonstration

Comme $x \neq y$, nous avons $d(x, y) > 0$, et nous appelons $d(x, y) = r$
Soient $V = \left\{z \in E \text{ tel que } d(x, z) < \dfrac{r}{3}\right\}$ et $W = \left\{z \in E \text{ tel que } d(y, z) < \dfrac{r}{3}\right\}$
Nous avons $V \in \mathcal{V}(x)$, $W \in \mathcal{V}(y)$ et $V \cap W = \emptyset$

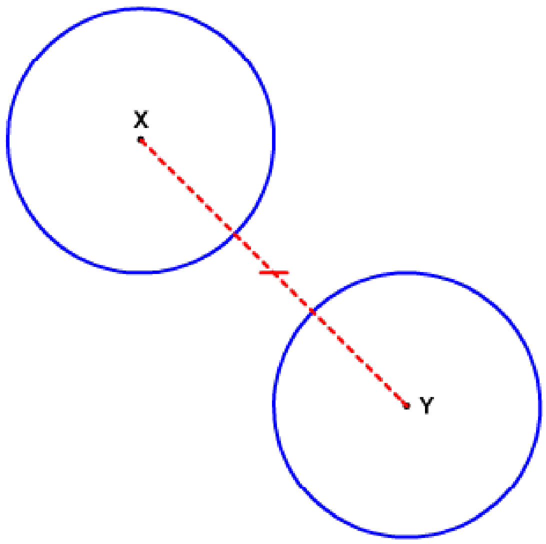

FIGURE 1.3 – Visualisation de V et W

En effet, car, si $z \in V \cap W$, par l'inégalité triangulaire, nous avons :

$$d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y) \Longrightarrow r < \frac{2r}{3}$$

Ce qui est impossible. Donc, $V \cap W = \emptyset$

1.3.8 Corollaire

Soit (E,d) un espace métrique et $x_1, \cdots, x_p$ p éléments de E tels que si $i \neq j$ alors $x_i \neq x_j$.
Alors, il existe $V_1, \cdots, V_p$, voisinages tels que $V_i \in \mathcal{V}(x_i)$, tels que si $i \neq j$, alors $V_i \cap V_j = \emptyset$

Démonstration

Soient $i \in \{1, \cdots, p\}$ et $j \in \{1, \cdots, p\}$ tels que $i \neq j$.
Nous utilisons la proposition 1.3.7 et nous pouvons donc écrire qu'il existe $V_{i,j} \in \mathcal{V}(x_i)$ et $V_{j,i} \in \mathcal{V}(x_j)$ tels que $V_{i,j} \cap V_{j,i} = \emptyset$
En posant $V_i = \bigcap\limits_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{p} V_{i,k}$, nous avons V_i ouvert comme intersection finie d'ouverts et $V_i \in \mathcal{V}(x_i)$
De plus, si $i \neq j$, alors $V_i \cap V_j = \emptyset$

En effet, supposons le contraire et soit $y \in V_i \cap V_j$
Alors, pour tout $k = 1, \cdots, p$ et $k \neq i$, $y \in V_{i,k}$. De même, pour tout $k = 1, \cdots, p$ et $k \neq j$, $y \in V_{j,k}$. Donc, $y \in V_{j,i}$ et $y \in V_{i,j}$, ce qui est contradictoire. Donc $V_i \cap V_j = \emptyset$

1.3.9 Distance d'un point à une partie

Soit (E,d) un espace métrique et $A \subset E$ tel que $A \neq \emptyset$
Pour tout $x \in E$, la distance de x à une partie A est donnée par :

$$d(x,A) = \inf \{d(x,y) \text{ avec } y \in A\}$$

1.3.10 Proposition

Soit (E,d) un espace métrique et $A \subset E$ tel que $A \neq \emptyset$
Pour tout $x \in E$, tout $y \in E$, nous avons $|d(x,A) - d(y,A)| \leqslant d(x,y)$

Démonstration

Soient $x \in E$ et $y \in E$ et soit $a \in A$, alors, par l'inégalité triangulaire, nous avons :

$$d(x,a) \leqslant d(x,y) + d(y,a) \text{ et } d(y,a) \leqslant d(x,y) + d(x,a)$$

En particulier en passant à inf :

$$\inf_{a \in A} d(x,a) \leqslant d(x,y) + \inf_{a \in A} d(y,a) \text{ et } \inf_{a \in A} d(y,a) \leqslant d(x,y) + \inf_{a \in A} d(x,a)$$

Et donc

$$d(x,A) \leqslant d(x,y) + d(y,A) \text{ et } d(y,A) \leqslant d(x,y) + d(x,A)$$

D'où on tire :

$$-d(x,y) \leqslant d(x,A) - d(y,A) \leqslant d(x,y)$$

Ce que nous voulions

1.3.11 Proposition

Soit (E,d) un espace métrique et $A \subset E$ tel que $A \neq \emptyset$. Soit $r > 0$
On appelle $V_r(A) = \{x \in E \text{ tels que } d(x,A) < r\}$. Alors, $V_r(A)$ est un ouvert

Démonstration

Soit $x \in V_r(A)$. Il faut trouver $\rho > 0$ tel que la boule ouverte $B_O(x, \rho) \subset V_r(A)$
Nous avons $d(x, A) < r$, et soit $\rho \leqslant r - d(x, A)$. Soit $z \in B_O(x, \rho)$ et montrons que $z \in V_r(A)$, c'est à dire montrons que $d(z, A) < r$
Dans 1.3.10, nous avons démontré que

$$d(z, A) \leqslant d(z, x) + d(x, A) < \rho + d(x, A) = r - d(x, A) + d(x, A) = r$$

Donc $d(z, A) < r$, c'est à dire $z \in V_r(A)$. $V_r(A)$ est donc un ouvert.

1.3.12 Notion de fermé

Soit (E, d) un espace métrique.

1. Etant donné un point $x_0 \in E$ et un nombre $r > 0$, on appelle boule fermée de centre x_0 et de rayon r l'ensemble des $y \in E$ tels que $d(x_0, y) < r$, c'est à dire :

$$B_F(x_0, r) = \{y \in E \text{ tels que } d(x_0, y) \leqslant r\}$$

2. On appelle fermé de E un sous-ensemble $A \subset E$ tel que le complémentaire de A dans E soit un ouvert

Remarque 7 :

1. Les ensembles E et $\emptyset$ sont donc des fermés
2. D'après la propriété des ouverts démontrée en 1.3.6, et en utilisant les propriétés de Morgan :
   (a) **L'intersection quelconque de fermés est un fermé**
   (b) **La réunion finie de fermés est un fermé**
3. **Une boule fermée est forcément un fermé**

   En effet, soit $B_F(x_0, r)$ une boule fermée de E, et montrons que cette boule est un fermé.
   Soit $y \in E$ tel $y \notin B_F(x_0, r)$. Existe-t-il $\rho > 0$ tel que $B_O(y, \rho) \cap B_F(x_0, r) = \emptyset$, c'est à dire que $B_O(y, \rho)$ est inclus dans le complémentaire de $B_F(x_0, r)$ dans E ?
   Soit $\rho < d(x_0, y) - r$ et $t \in B_O(y, \rho)$; nous allons montrer que $t \notin B_F(x_0, r)$, c'est à dire que $B_O(y, \rho) \subset (B_O(x_0, r))^C$ où $(B_O(x_0, r))^C$ désigne le complémentaire de $B_O(x_0, r)$ dans E
   Nous allons donc montrer que $d(x_0, t) > r$

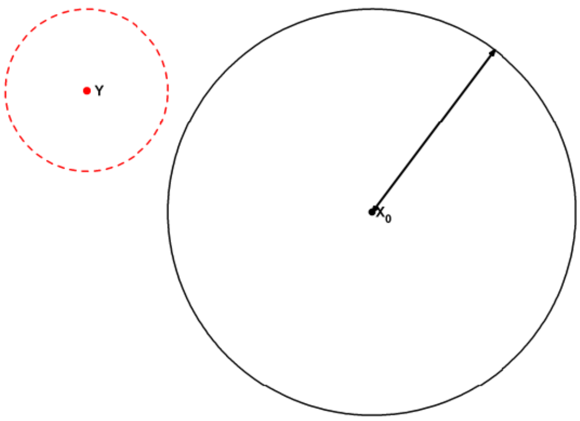

FIGURE 1.4 – Une boule fermée est un fermé

Par l'inégalité triangulaire, $d(x_0, y) \leqslant d(x_0, t) + d(y, t)$
Donc, $d(x_0, t) \geqslant d(x_0, y) - d(y, t)$

Or, $d(y,t) < \rho < d(x_0,y) - r$, c'est à dire $-d(y,t) > r - d(x_0,y)$ Donc

$$d(x_0,t) \geqslant d(x_0,y) - d(y,t) > d(x_0,y) + r - d(x_0,y) = r$$

Ce que nous voulions. Une boule fermée est donc un fermé.

1.3.13 Sphère d'un espace métrique

Soit (E,d) un espace métrique.
Etant donné un point $x_0 \in E$ et un nombre $r > 0$, on appelle sphère de centre x_0 et de rayon r l'ensemble des $y \in E$ tels que $d(x_0,y) = r$, c'est à dire :

$$S(x_0,r) = \{y \in E \text{ tels que } d(x_0,y) = r\}$$

Exercice 10 :

Montrer qu'une sphère est un fermé

Exemple 4 :

Boules et sphères de $\mathbb{R}^2$

1. Dans $\mathbb{R}^2$, nous considérons la distance $d_\infty(x,y) = \|x-y\|_\infty$
   Construisons la boule $B_\infty(0,1) = \left\{y \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } \|y\|_\infty \leqslant 1\right\}$.
   En écrivant $y = (y_1,y_2)$, $\|y\|_\infty = \sup(|y_1|,|y_2|)$, et si $y \in B_\infty(0,1)$, alors $\sup(|y_1|,|y_2|) \leqslant 1$
   C'est à dire $|y_1| \leqslant 1$ et $|y_2| \leqslant 1$. $B_\infty(0,1)$ est donc le carré $\{-1 \leqslant y_1 \leqslant +1\} \times \{-1 \leqslant y_2 \leqslant +1\}$
2. Dans $\mathbb{R}^2$, nous considérons la distance $d_1(x,y) = \|x-y\|_1$
   Construisons la boule $B_1(0,1) = \left\{y \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } \|y\|_1 \leqslant 1\right\}$.
   En écrivant $y = (y_1,y_2)$, $\|y\|_1 = |y_1| + |y_2|$, et si $y \in B_1(0,1)$, alors $|y_1| + |y_2| \leqslant 1$
   (a) Dans le premier quadrant, c'est à dire si $y_1 > 0$ et $y_2 > 0$, alors $|y_1| + |y_2| = y_1 + y_2 \leqslant 1$, et on obtient une région limitée par le segment $[A,B]$ (cf figure 1.5)
   (b) Dans le second quadrant, c'est à dire si $y_1 > 0$ et $y_2 < 0$, alors $|y_1| + |y_2| = y_1 - y_2 \leqslant 1$, et on obtient une région limitée par le segment $[B,C]$ (cf figure 1.5)
   (c) Et ainsi de suite pour les 2 autres quadrants

   $B_1(0,1)$ est donc un losange
3. Dans $\mathbb{R}^2$, nous considérons la distance euclidienne $d_2(x,y) = \|x-y\|_2$
   Construisons la boule $B_2(0,1) = \left\{y \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } \|y\|_2 \leqslant 1\right\}$.
   En écrivant $y = (y_1,y_2)$, $\|y\|_2 = \sqrt{y_1^2 + y_2^2}$, et si $y \in B_2(0,1)$, alors $\sqrt{y_1^2 + y_2^2} \leqslant 1$, ou, ce qui est équivalent, $y_1^2 + y_2^2 \leqslant 1$
   C'est à dire que $B_2(0,1)$ est donc le cercle de centre O et de rayon 1

Nous pouvons remarquer que $B_2(0,1) \subset B_\infty(0,1)$, que $B_1(0,1) \subset B_\infty(0,1)$ et que $B_1(0,1) \subset B_2(0,1)$, situation qu'il est possible de lier à l'équivalence des distances.

Exercice 11 :

1. Démontrer que, dans $\mathbb{R}^2$, tout boule ouverte de centre x et de rayon $r > 0$ pour la norme d_2 contient une boule ouverte de centre r pour la norme d_1, et vice versa
2. Plus généralement, soit E un espace métrique et d_1 et d_2 2 distances équivalentes. Démontrez que toute boule ouverte de centre x pour d_1 contient une boule ouverte de centre x pour d_2, et vice versa
3. Dans un espace métrique (E,d), démontrer que l'image d'une boule ouverte par une homothétie de rapport $\lambda > 0$ est encore une boule ouverte. Que dire d'une translation ?

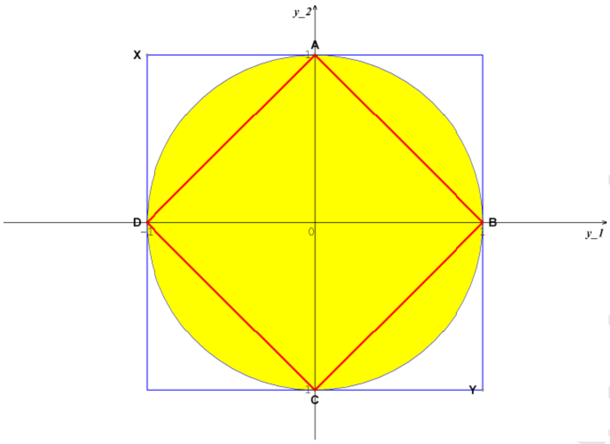

FIGURE 1.5 – Une visualisation des différentes boules avec les distances différentes

1.4 Suites dans un espace métrique

Rappelons qu'une suite d'éléments de E est une application de $\mathbb{N}$ dans E. Par convention l'application est notée $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et l'image de $n \in \mathbb{N}$ est notée x_n

1.4.1 Définition de suite qui admet une limite

Soient (E, d) un espace métrique et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E
On dit que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et admet pour limite un élément $l \in E$ si, pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$, on peut associer un entier naturel $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, tel que, pour tout $n \geqslant N_\varepsilon$, on ait $d(x_n, l) < \varepsilon$

Remarque 8 :

1. En utilisant la formalisation, nous avons :

   La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et admet pour limite un élément $l \in E$ si et seulement si :

   $$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists N \in \mathbb{N})\,(\forall n \in \mathbb{N})\,((n \geqslant N) \Longrightarrow (d(x_n, l) < \varepsilon))$$

2. Soit E un ensemble sur le quel nous avons défini 2 distances d et d_1, faisant de (E, d) et (E, d_1) deux espaces métriques.
   Si d et d_1 sont des distances équivalentes, alors si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et admet pour limite un élément $l \in E$ pour la distance d, elle admet la même limite l pour la distance d_1.
3. C'est bien la définition utilisée pour la limites des suites numériques réelles où la distance utilisée est celle de la valeur absolue.

Exercice 12 :

Démontrez que si d et d_1 sont deux distances équivalentes, alors si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et admet pour limite un élément $l \in E$ pour la distance d, elle admet la même limite l pour la distance d_1.

1.4.2 Définitions équivalentes de la limite

Dans les espaces métriques, nous avons des définitions équivalentes à la définition 1.4.1 :

1. A toute boule ouverte B de centre l, on peut associer un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant N$, on ait : $x_n \in B$
2. Quelle que soit la boule ouverte de centre l, il n'y a qu'un nombre fini qui n'appartiennent pas à cette boule.
3. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet pour limite un élément $l \in E$ si, quel que soit le voisinage $\mathcal{V}$ de l, tous les termes de la suite sauf au plus un nombre fini, appartiennent à $\mathcal{V}$

1.4.3 Unicité de la limite

Soient E, d un espace métrique et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E, admettant une limite $l \in E$
Alors, cette limite est unique

Démonstration

Soient E, d un espace métrique et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E qui admet pout limite $l \in E$.
Supposons que cette suite admette une seconde limite $l' \in E$ telle que $l \neq l'$, et on appelle $r = d(l, l')$; nous avons donc $r > 0$.
Soit $\varepsilon = \dfrac{r}{3}$
Pour ce ε, il existe un entier $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N_1$ alors $d(x_n, l) < \varepsilon$.
De même, pour ce ε, il existe un entier $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N_2$ alors $d(x_n, l') < \varepsilon$.
Ainsi, si $N = \max(N_1, N_2)$, si $n > N$, alors $d(x_n, l) < \varepsilon$ et $d(x_n, l') < \varepsilon$
Ainsi, pour $n > N$, en utilisant l'inégalité triangulaire, nous avons :

$$d(l, l') \leqslant d(l, x_n) + d(x_n, l') < 2\varepsilon \Longleftrightarrow r < \frac{2r}{3}$$

Ce qui est impossible.
L'hypothèse de 2 limites différentes est contradictoire et donc la limite est unique.

Remarque 9 :

On peut donc retenir que dans tout espace métrique, la limite d'une suite est unique.

1.4.4 Suites de Cauchy

Soients (E, d) un espace métrique et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E.
$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy, si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $q \in \mathbb{N}$, si $p > N_\varepsilon$ et $q > N_\varepsilon$, alors $d(x_p, x_q) < \varepsilon$
Ce qui donne en formalisant :

$$(\forall\varepsilon > 0)\,(\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N})\,(\forall p \in \mathbb{N})\,(\forall q \in \mathbb{N})\,((p \geqslant N_\varepsilon)\,(q \geqslant N_\varepsilon) \Longrightarrow (d(x_p, x_q) < \varepsilon))$$

1.4.5 Proposition : toute suite convergente est de Cauchy

Soients E, d un espace métrique et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E convergente
Alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy

Démonstration

Soient donc (E, d) un espace métrique et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E convergente et soit $l \in E$ la limite.
Soit $\varepsilon > 0$.
Pour $\dfrac{\varepsilon}{2}$, il existe un entier N tel que si $n > N$, alors $d(x_n, l) < \dfrac{\varepsilon}{2}$.
Soient $p > N$ et $q > N$. Alors :

$$d(x_p, x_q) \leqslant d(x_p, l) + d(l, x_q) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Nous venons donc de montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy

Remarque 10 :

1. Donc, dans tout espace métrique (E, d), toute suite convergente est de Cauchy
2. **La réciproque est fausse**

   Il existe des espaces métriques dans lesquelles les suites de Cauchy ne convergent pas forcément. Le premier exemple est $\mathbb{Q}$ muni de la distance liée à la valeur absolue :
   La suite définie par $x_0 = 4$ et $x_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(x_n + \dfrac{2}{x_n}\right)$ est une suite de Cauchy, qui converge dans $\mathbb{R}$ vers $\sqrt{2}$, mais pas dans $\mathbb{Q}$, alors qu'elle est de Cauchy dans $\mathbb{Q}$ *(pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in \mathbb{Q}$)*
3. La convergence d'une suite de Cauchy est fortement liée à l'espace métrique considéré

1.4.6 Espace métrique complet

On appelle <u>espace métrique complet</u> tout espace métrique dans lequel les suites de Cauchy convergent

Exemple 5 :

1. $\mathbb{Q}$ n'est donc pas un espace complet
2. Par contre, $\mathbb{R}$ muni de la distance induite par la valeur absolue est un espace métrique complet.

1.4.7 L'espace métrique $\mathbb{C}$

On considère $\mathbb{C}$ muni de la distance induite par le module d'un nombre complexe.
Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombre complexes. On écrit $z_n = x_n + iy_n$ définissant ainsi deux suites réelles $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Soit $z = x + iy$

1. La suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet pour limite z si et seulement si la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet pour limite x et la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet pour limite y
2. La suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{C}$ si et seulement si les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont de Cauchy dans $\mathbb{R}$
3. La suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente dans $\mathbb{C}$ si et seulement si la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{C}$
4. $\mathbb{C}$ est un espace complet

<u>Démonstration</u>

1. **Démontrons la première affirmation**
   (a) <u>Supposons que $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = z$</u>
   Soit $\varepsilon > 0$
   Il existe alors $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N_\varepsilon$, alors $|z_n - z| < \varepsilon$
   Or, $|z_n - z| = |(x_n - x) + i(y_n - y)|$ et donc $|z_n - z| = \sqrt{(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2}$. Donc :

$$|x_n - x| \leqslant \sqrt{(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2} = |z_n - z|$$
ET
$$|y_n - x| \leqslant \sqrt{(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2} = |z_n - z|$$

   Donc, si $n \geqslant N_\varepsilon$, alors $|x_n - x| < \varepsilon$ et $|y_n - y| < \varepsilon$
   Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = y$

(b) <u>Supposons que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = y$</u>

Soit alors $\varepsilon > 0$.
Il existe alors $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N_1$, alors $|x_n - x| < \varepsilon$
De même, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N_2$, alors $|y_n - y| < \varepsilon$
Soit $N = \max\{N_1, N_2\}$; alors, si $n \geqslant N$, $|x_n - x| < \varepsilon$ et $|y_n - y| < \varepsilon$
Ainsi, si $n \geqslant N$, $|z_n - z| = \sqrt{(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2} \leqslant \sqrt{2\varepsilon^2} = \varepsilon\sqrt{2}$
Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = z$ [1]

2. **Démontrons la seconde affirmation**

(a) <u>Supposons que la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy</u>

Alors, des inégalités déjà démontrées $|x_p - x_q| \leqslant |z_p - z_q|$ et $|y_p - y_q| \leqslant |z_p - z_q|$, on déduit que les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont de Cauchy dans $\mathbb{R}$

(b) <u>Réciproquement, supposons que les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont de Cauchy dans $\mathbb{R}$</u>

Nous avons l'inégalité, vraie pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $b \in \mathbb{R}$ $\sqrt{a^2 + b^2} \leqslant |a| + |b|$ [2], donc :

$$|z_p - z_q| = \sqrt{(x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2} \leqslant |x_n - x| + |y_n - y|$$

Ce qui montre que si les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont de Cauchy dans $\mathbb{R}$ alors, la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{C}$

3. **Démontrons la troisième affirmation (et donc la 4°)**

Nous avons les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} (z_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ de Cauchy dans } \mathbb{C} &\iff (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ de Cauchy dans } \mathbb{R} \\ &\iff (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ convergentes dans } \mathbb{R} \\ &\iff (z_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ convergente dans } \mathbb{C} \end{aligned}$$

$\mathbb{C}$ est donc un espace complet

1. En fait, la suite $(|z_n - z|)_{n\in\mathbb{N}}$ égale à la suite réelle $\left(\sqrt{(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tend vers zéro. Donc, la suite $(|z_n - z|)_{n\in\mathbb{N}}$ tend, elle aussi, vers zéro ; et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = z$

2. Pour le démontrer, il suffit d'élever au carré

1.4.8 Propriétés des limites de suites dans $\mathbb{C}$

On considère $\mathbb{C}$ muni de la distance induite par le module d'un nombre complexe.
Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombre complexes. Alors :

1. On suppose $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergentes et de limites respectives z et z'. Nous avons :
   (a) La limite de la somme est la somme des limites, c'est à dire :
   $$\lim_{n\to+\infty}(z_n+z'_n)=z+z'$$
   (b) La limite du produit est le produit des limites, c'est à dire :
   $$\lim_{n\to+\infty}(z_n\times z'_n)=z\times z'$$
   (c) Pour tout $\lambda\in\mathbb{C}$, $\lim\limits_{n\to+\infty}(\lambda\times z_n)=\lambda\times z$
2. Si la limite $z\neq 0$, alors :
   $$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{z_n}\right)=\frac{1}{z}$$
3. En faisant la synthèse des points précédents, si la limite $z'\neq 0$, alors :
   $$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{z_n}{z'_n}\right)=\frac{z}{z'}$$
4. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n=z$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\overline{z_n}=\overline{z}$
5. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n=z$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}|z_n|=|z|$. La réciproque est fausse

Démonstration

La démonstration est laissée au lecteur ; comme indication, il suffit d'utiliser le théorème précédent 1.4.7 en écrivant $z_n=x_n+iy_n$. On pourra démontrer, en particulier que si la limite $z\neq 0$, il existe un entier $\nu\in\mathbb{N}$ tel que si $n>\nu$, $z_n\neq 0$

Remarque 11 :

Pour le point 5, on retrouve le même résultat dans $\mathbb{R}$; pour le démontrer, il faut utiliser un contre-exemple. Un contre-exemple simple est celui-ci :

— On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n=1+\dfrac{i}{n}$. Nous avons : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}|u_n|=1$

— On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $v_n=-1+\dfrac{i}{n}$. Nous avons : $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=-1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}|v_n|=1$

— Nous avons bien $\lim\limits_{n\to+\infty}|u_n|=\lim\limits_{n\to+\infty}|v_n|=1$, mais $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n\neq\lim\limits_{n\to+\infty}v_n$

1.4.9 Limite d'une suite dans $\mathbb{R}^n$

Soit $(a_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}^n$. Pour $p\in\mathbb{N}$, chaque élément de la suite a_p est un n-uplet $a_p=(a_{p,1},\cdots,a_{p,n})$. Donc, pour chaque $i=1\cdots,n$, on rédéfinit une suite numérique réelle $(a_{p,i})_{p\in\mathbb{N}}$

Soit $(a_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}^n$. Pour que la suite $(a_p)_{p\in\mathbb{N}}$ admette pour limite $l=(l_1,\cdots,l_n)\in\mathbb{R}^n$, il faut et il suffit que pour tout $i=1\cdots,n$, la suite $(a_{p,i})_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers l_i

Démonstration

1. On suppose $(a_p)_{p\in\mathbb{N}}$ admette pour limite $l=(l_1,\cdots,l_n)\in\mathbb{R}^n$

   Soit $\varepsilon>0$. Il existe alors $N_\varepsilon\in\mathbb{N}$ tel que si $p>N_\varepsilon$, $\|a_p-l\|_2<\varepsilon$

   Soit $i=1\cdots,n$ Nous avons toujours $|a_{p,i}-l_i|\leqslant\sqrt{\sum_{j=1}^{n}(a_{p,j}-l_j)^2}=\|a_p-l\|_2$.

   Donc, si $p>N_\varepsilon$, nous avons $|a_{p,i}-l_i|\leqslant\|a_p-l\|_2<\varepsilon$.
   Ce qui montre que $\lim\limits_{p\to+\infty}a_{p,i}=l_i$
2. Réciproquement, supposons que pour tout $i=1\cdots,n$, $\lim\limits_{p\to+\infty}a_{p,i}=l_i$

   Soit $\varepsilon>0$.
   Pour chaque $i=1\cdots,n$, il existe $N_\varepsilon^i\in\mathbb{N}$ tel que si $p>N_\varepsilon^i$, $|a_{p,i}-l_i|<\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$

   Soit $N=\max\left\{N_\varepsilon^1,\cdots,N_\varepsilon^n\right\}$.
   Alors, pour $p>N$, pour tout $i=1\cdots,n$, nous avons $|a_{p,i}-l_i|<\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$.

   Or, $\|a_p-l\|_2=\sqrt{\sum_{j=1}^{n}(a_{p,j}-l_j)^2}$, et si $p>N$, nous avons :

   $$\|a_p-l\|_2=\sqrt{\sum_{j=1}^{n}(a_{p,j}-l_j)^2}\leqslant\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\right)^2}=\sqrt{n\times\frac{\varepsilon^2}{n}}=\varepsilon$$

   Ce qui montre bien que la suite $(a_p)_{p\in\mathbb{N}}$ admet pour limite $l=(l_1,\cdots,l_n)$ dans $\mathbb{R}^n$

1.4.10 $\mathbb{R}^n$ est un espace complet

1. Pour qu'une suite $(a_p)_{p\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{R}^n$ soit de Cauchy, il faut et il suffit que pour pour tout $i=1\cdots,n$, la suite $(a_{p,i})_{p\in\mathbb{N}}$ soit de Cauchy dans $\mathbb{R}$
2. $\mathbb{R}^n$ est un espace complet

Démonstration

1. **Démontrons le premier point**
   - Soit $(a_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}^n$ qui est de Cauchy

     Soit $\varepsilon>0$; il existe alors $N_\varepsilon\in\mathbb{N}$ tel que si $p>q>N_\varepsilon$ alors $\|x_p-x_q\|_2\leqslant\varepsilon$

     Ré-écrivons $\|x_p-x_q\|_2$; nous avons :$\|x_p-x_q\|_2=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_{p,i}-x_{q,i})^2}$.

     Or, pour chaque $i=1\cdots,n$, nous avons $|x_{p,i}-x_{q,i}|\leqslant\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_{p,i}-x_{q,i})^2}$. Donc, pour chaque $i=1\cdots,n$, pour tout $\varepsilon>0$; il existe alors $N_\varepsilon\in\mathbb{N}$ tel que si $p>q>N_\varepsilon$ alors $|x_{p,i}-x_{q,i}|\leqslant\varepsilon$.
     Ce qui démontre que chacune des suites $(a_{p,i})_{p\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy
   - Réciproquement, supposons que pour pour tout $i=1\cdots,n$, la suite $(a_{p,i})_{p\in\mathbb{N}}$ soit de Cauchy

     Soit $\varepsilon>0$ Alors, pour chaque $i=1\cdots,n$, il existe $N_\varepsilon^i\in\mathbb{N}$ tel que si $p>q>N_\varepsilon^i$ alors $|x_{p,i}-x_{q,i}|\leqslant\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$.

     Soit $N=\max\left\{N_\varepsilon^1,\cdots,N_\varepsilon^n\right\}$. Alors, si $p>q>N$ alors, pour tout i, $|x_{p,i}-x_{q,i}|\leqslant\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$, et donc, si $p > q > N$:

$$\|x_p - x_q\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_{p,i} - x_{q,i})^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\right)^2} = \sqrt{\varepsilon^2} = \varepsilon$$

Ce qui montre que la suite $(a_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy

2. **Démontrons que $\mathbb{R}^n$ est un espace complet**

Soit $(a_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}^n$; il faut montrer qu'elle est convergente.
D'après le point précédent,

$(a_p)_{p\in\mathbb{N}}$ suite de Cauchy dans $\mathbb{R}^n$ $\iff$ pour tout $i = 1, \cdots, n$ la suite $(a_{p,i})_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$
$\iff$ pour tout $i = 1, \cdots, n$ la suite $(a_{p,i})_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente dans $\mathbb{R}$ vers l_i
$\iff$ la suite $(a_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente dans $\mathbb{R}^n$ vers $l = (l_1, \cdots, l_n)$

$\mathbb{R}^n$ est donc un espace complet

1.5 Vocabulaire dans un espace métrique

1.5.1 Diamètre d'un ensemble, ensemble borné

Soient (E, d) un espace métrique, et $A \subset E$, un sous-ensemble de E non vide
On appelle diamètre de A, le nombre, fini ou infini :

$$\delta(A) = \sup_{\substack{x\in A\\ y\in A}} d(x, y)$$

1.5.2 Ensemble borné d'un espace métrique

Soient (E, d) un espace métrique, et $A \subset E$, un sous-ensemble de E non vide

1. A est dite bornée pour la distance d si son diamètre $\delta(A)$ est fini ($\delta(A) < \infty$)
2. Il est équivalent de dire que A est borné si pour tout $x_0 \in E$, il existe une boule ouverte $B_O(x_0, r)$ telle que $A \subset B_O(x_0, r)$

Exercice 13 :

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments d'un espace métrique (E, d). On appelle section finissante d'ordre p de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'ensemble

$$S_p = \{x_n \text{ tels que } n > p\}$$

Démontrez que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy si et seulement si $\lim\limits_{p\to+\infty} \delta(S_p) = 0$

1.5.3 Point d'accumulation

Soient (E, d) un espace métrique, et $A \subset E$, un sous-ensemble de E non vide
$\alpha \in E$ est dit point d'accumulation de A si toute boule ouverte de centre α contient un point de A autre que α

Remarque 12 :

1. **Dans ce cas, toute boule ouverte de centre α contient une infinité de points de A autre que α**

   En effet, soit $B_O(\alpha, r)$ une boule ouverte de centre α, et supposons que cette boule n'en contienne qu'un nombre fini de points de A. Soient $x_1, \cdots, x_n$ ces n éléments de A dans la boule $B_O(\alpha, r)$ et considérons les n nombres réels strictement positifs $d(x_1, \alpha), \cdots, d(x_n, \alpha)$, et nous appelons $\rho = \inf\{d(x_1, \alpha), \cdots, d(x_n, \alpha)\}$; alors, la boule ouverte $B_O\left(\alpha, \dfrac{\rho}{2}\right)$ ne contient aucun point de A autre que α ; il y a donc une contradiction avec le fait que **toute** boule ouverte de centre α contient un point de A autre que α

2. Donc, seuls les sous-ensembles de E contenant une infinité d'éléments peuvent avoir des points d'accumulation

3. Une autre façon d'écrire que α est un point d'accumulation en utilisant les boules ouvertes de centre α :
$$(\forall r > 0)\,(\exists x \in A \setminus \{\alpha\})\,(x \in B_O(\alpha, r))$$

1.5.4 Suites et points d'accumulation

Soient (E, d) un espace métrique, et $A \subset E$, un sous-ensemble de E non vide. Soit $a \in E$
Pour que a soit un point d'accumulation de A, il faut et il suffit qu'il existe une suite $(a_p)_{p\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A (c'est à dire que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $a_p \in A$) telle que

— $\lim\limits_{p\to+\infty} a_p = a$

— Et $(\forall p \in \mathbb{N})\,(\forall q \in \mathbb{N})\,(p \neq q \Longrightarrow a_p \neq a_q)$

Démonstration

1. Supposons qu'il existe une suite $(a_p)_{p\in\mathbb{N}}$ vérifiant les critères ci-dessus

   Montrons que a est un point d'accumulation de A.
   Il faut donc montrer que dans tout voisinage de a, il y a des éléments de A autre que a.
   Soit alors $B_O(a, r)$ une boule ouverte de centre a et de rayon $r > 0$. Comme $\lim\limits_{p\to+\infty} a_p = a$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $p > N$, alors $a_p \in B_O(a, r)$
   Pour $p > q > N$, alors $a_p \in B_O(a, r)$ et $a_q \in B_O(a, r)$ avec $a_p \neq a_q$. Il existe donc dans tout voisinage de a, des éléments de A autres que a.
   a est donc un point d'accumulation de A.

2. Réciproquement, supposons que a soit un point d'accumulation de A

   Nous allons donc construire une suite $(a_p)_{p\in\mathbb{N}}$ qui vérifiera les conditions du théorème. Nous la construisons par récurrence.
   — On choisit $a_0 \in B_O(a, 1) \cap A$ et $a_0 \neq a$
   — a_p étant construit, on choisit $a_{p+1} \in B_O(a, r_{p+1}) \cap A$ où $r_{p+1} = \inf\left(d(a, a_p), \dfrac{1}{2^{p+1}}\right)$; alors :
     — $a_p \neq a_{p+1}$ car $d(a, a_{p+1}) < d(a, a_p)$
     — De $d(a, a_{p+1}) \leqslant \dfrac{1}{2^{p+1}}$, on tire $\lim\limits_{p\to+\infty} a_p = a$

   Ce que nous voulions.

1.5.5 Point adhérent, adhérence d'un ensemble

Soient (E, d) un espace métrique, et $A \subset E$, un sous-ensemble de E non vide
$\beta \in E$ est dit point d'adhérence de A si toute boule ouverte de centre β contient un point de A
L'adhérence d'un ensemble A est l'ensemble de ses points adhérents. On la note $\overline{A}$ [a]

a. D'où la notation de plus en plus répandue de A^C pour noter le complémentaire de A

Remarque 13 :

1. Un point d'accumulation est donc un point adhérent
2. Tout point $a \in A$ est donc un point adhérent

1.5.6 Proposition

Soient (E, d) un espace métrique, et $A \subset E$, un sous-ensemble de E non vide
Alors, A est fermé si et seulement si $A = \overline{A}$

Démonstration

1. D'après la remarque précédente, nous avons $A \subset \overline{A}$
2. Montrons maintenant que si A est fermé, alors $A = \overline{A}$
   — A est fermé si et seulement si A^c est un ouvert
   — A^c est un ouvert si et seulement si pour tout $x \in A^c$, il existe $V \in \mathcal{V}(x)$ tel que $V \subset A^c$, c'est à dire tel que $V \cap A = \emptyset$
   — V est un voisinage qui ne contient donc aucun point de A, et donc $x \notin \overline{A}$
   Donc $\overline{A} \subset A$ [3]

Remarque 14 :

Donc, l'adhérence de A est le plus petit fermé contenant A

1.5.7 Suite et points adhérents

Soient (E, d) un espace métrique, et $A \subset E$, un sous-ensemble de E non vide. Soit $a \in E$
Pour que a soit adhérent à A, il faut et il suffit qu'il existe une suite $(a_p)_{p\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A (c'est à dire que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $a_p \in A$) telle que $\lim\limits_{p\to+\infty} a_p = a$

Démonstration

1. On suppose qu'il existe une suite $(a_p)_{p\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_p = a$

   Alors, pour tout $r > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que, si $p \geqslant N$, alors $a_p \in B_O(a, r)$. Ainsi, tout voisinazge de A contient un point de A
2. Réciproquement, supposons $a \in \overline{A}$, c'est à dire a adhérent de A

   Considérons les boules ouvertes du type $B_O\left(a, \dfrac{1}{p+1}\right)$ où $p \in \mathbb{N}$

   a étant adhérent de A, $B_O\left(a, \dfrac{1}{p+1}\right) \neq \emptyset$ et il existe $a_p \in A$ tel que $a_p \in B_O\left(a, \dfrac{1}{p+1}\right)$. Nous créons ainsi une suite $(a_p)_{p\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A, telle que $\lim\limits_{p\to+\infty} a_p = a$

   En effet, soit $\varepsilon > 0$. Il esxiste $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N_\varepsilon$, $\dfrac{1}{n+1} < \varepsilon$ et donc, $B_O\left(a, \dfrac{1}{n+1}\right) \subset B_O(a, \varepsilon)$.
   Ainsi, si $n \geqslant N_\varepsilon$, alors $a_n \in B_O(a, \varepsilon)$, et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$

Remarque 15 :

Donc, dans un espace métrique (E, d), A est un fermé si et seulement si pour tout point $a \in A$, il existe une suite $(a_p)_{p\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A telle que $\lim\limits_{p\to+\infty} a_p = a$

3. En fait on utilise le résultat suivant, facile à démontrer : Si, pour tout $x \in X$, $x \notin Y$, alors $Y \subset X^c$

1.5.8 Point adhérent à une suite

Soient (E,d) un espace métrique et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E
$x\in E$ est un <u>point adhérent</u> de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si et seulement si :

$$(\forall\varepsilon>0)\,(\forall p\in\mathbb{N})\,(\exists p\in\mathbb{N})\,((p\geqslant n)\Longrightarrow(d\,(x,x_p)<\varepsilon))$$

Remarque 16 :

1. Il y a une définition équivalente en utilisant le vocabulaire des voisinages :
   Soient (E,d) un espace métrique et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E
   $x\in E$ est un <u>point adhérent</u> de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si et seulement si :
   $$(\forall V\in\mathcal{V}\,(x))\,(\forall p\in\mathbb{N})\,(\exists p\in\mathbb{N})\,((p\geqslant n)\Longrightarrow(x_p\in V))$$

2. Soit $p\in\mathbb{N}$ et nous appelons $S_p=\{x_n \text{ où } n>p\}$; c'est la section finissante d'ordre p de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   x est valeur d'adhérence de la suite si et seulement si, pour tout $p\in\mathbb{N}$ x est adhérent à S_p.
   L'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est exactement $\bigcap\limits_{p\in\mathbb{N}}\overline{S_p}$
3. Si la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l\in E$, l est l'unique valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. La réciproque est fausse.

Exemple 6 :

1. La suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite qui admet 2 valeurs d'adhérence $+1$ et -1
2. La suite $\left\{1,2,\dfrac{1}{2},3,\dfrac{1}{3},4,\dfrac{1}{4},\cdots\right\}$ a un unique point adhérent qui est 0, mais n'est pas convergente.
3. La suite $\{1,-1,+2,-2,+3,-3,+4,\cdots\}$ n'a aucune valeur d'adhérence dans $\mathbb{R}$

Exercice 14 :

1. La suite définie pour tout $n\in\mathbb{N}$ par $\dfrac{2n\times(-1)^n+5}{n+1}$ admet-elle des valeurs d'adhérence ? si oui, lesquelles ? Est-ce une suite qui admet une limite ?
2. Démontrer que $x\in E$ est valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si et seulement si, pour tout $p\in\mathbb{N}$ x est adhérent de la section finissante S_p
3. Démontrer que si la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l\in E$, l est l'unique valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

1.5.9 Recouvrement

Soit E un ensemble quelconque et $\mathcal{F}$ une famille de sous ensembles de E. Soit $A\subset E$
$\mathcal{F}$ est un <u>recouvrement</u> de A si, pour tout $x\in A$, il existe $F\in\mathcal{F}$ tel que $x\in F$, autrement dit, $A\subset\bigcup\limits_{F\in\mathcal{F}}F$

1.5.10 Notion de compact

Soient (E,d) un espace métrique, et $A\subset E$, un sous-ensemble de E non vide
A est dite <u>compacte</u> si et seulement si de toute famille d'ouverts formant un recouvrement de A, on peut en extraire une famille finie qui forme un recouvrement de A

Remarque 17 :

La propriété :
De toute famille d'ouverts formant un recouvrement de A, on peut en extraire une famille finie qui forme un recouvrement de A
Est appelée <u>**Propriété de Borel-Lebesgue**</u>

1.5.11 Propriété de Bolzano-Weierstrass

Soient (E, d) un espace métrique, et $A \subset E$, un sous-ensemble de E non vide
A est dite posséder la propriété de Bolzano-Weierstrass si tout sous-ensemble infini d'éléments de A admet un point d'accumulation appartenant à A

Exemple 7 :

1. $\emptyset$ est un ensemble compact
2. $\mathbb{R}$ n'est pas un semble compact
3. Soit (E, d) un espace métrique. Pour tout $a \in E$, le singleton $\{a\}$ est compact
4. l'ensemble $E = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots\right\}$ n'est pas un compact de $\mathbb{R}$

1.5.12 Equivalence des propriétés de Bolzano-Weierstrass et Borel-Lebesgue

Soient (E, d) un espace métrique, et $A \subset E$, un sous-ensemble de E non vide
Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. A est compact
2. A possède la propriété de Bolzano-Weierstrass

Démonstration

La démonstration de ce résultat n'a rien d'évidente. Il faut bien se concentrer sur les différentes étapes.

1. Supposons que A soit compact, c'est à dire que A vérifie la propriété de Borel-Lebesgue
   Nous allons démontrer que si $B \subset A$ n'admet pas de point d'accumulation, alors B est finie, ce qui montre, par contraposée que si $B \subset A$ est une partie infinie de A, alors B admet un point d'accumulation.
   Soit donc $B \subset A$ n'admettant pas de point d'accumulation. Soit $x \in A$. B ne possédant pas de point d'accumulation, il existe un voisinage $\Omega_x \in \mathcal{V}(x)$ qui contient au plus un point de B *(1 seul point si $x \in B$)*
   La famille de voisinages ouverts $(\Omega_x)_{x \in A}$ forme un recouvrement de A et on peut donc en extraire un recouvrement fini. Il existe donc des points $x_1 \in A, \cdots, x_n \in A$ tels que $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} \Omega_{x_i}$
   Comme $B \subset A$, alors $B \subset \bigcup_{i=1}^{n} \Omega_{x_i}$ et B ne contient donc qu'un nombre fini de points. Nous venons donc de montrer que si A est compact, alors A vérifie la propriété de Bolzano Weierstrass
   Ce que nous voulions
2. Supposons maintenant que A possède la propriété de Bolzano Weierstrass
   Soit $(\Omega_i)_{i \in I}$ un recouvrement de A par des boules ouvertes. Dans notre cas, I est un ensemble quelconque d'indices. Nous avons donc $A \subset \bigcup_{i \in I} \Omega_i$.
   Commençons par démontrer un lemme

   Lemme

   Il existe $r > 0$ tel que, pour tout $a \in A$, il existe $i \in I$ tel que $B_O(x, r) \subset \Omega_i$

   Démonstration du lemme

   Nous allons faire, cette fois ci, un raisonnement par l'absurde. Supposons donc le contraire, c'est à dire :
   $$(\forall r > 0)\,(\exists a \in A)\,(\forall i \in I)\,(B_O(a, r) \not\subset \Omega_i)$$

Donc, pour $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $x_n \in A$ tel que pour tout $i \in I$, $B_O\left(a, \frac{1}{n}\right) \not\subseteq \Omega_i$; on a fait, ici, $r = \frac{1}{n}$
Nous avons créé ainsi, une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A. A ayant la propriété de Bolzano Weierstrass, l'ensemble $\{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$ admet un point d'accumulation $x \in A$

A terminer

1.6 Corrigé de quelques exercices

1.6.1 Les espaces vectoriels normés

Ces premiers exercices sont donnés essentiellement dans le but de manipuler les définitions et propriétés de norme.

Exercice 1 :

Soit E un espace vectoriel normé et $\mathcal{N}_1, \cdots, \mathcal{N}_n$ n normes sur E. Soient $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$, n nombres réels strictement positifs tels que $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$. Montrer que $\mathcal{N} = \lambda_1 \mathcal{N}_1 + \cdots + \lambda_n \mathcal{N}_n$ est une norme.

On peut faire remarquer que $\mathcal{N}$ est, en quelques sortes, un « point moyen » des normes $\mathcal{N}_1, \cdots, \mathcal{N}_n$, de telle sorte qu'il est difficile de douter que $\mathcal{N}$ soit une norme. Nous allons donc vérifier que $\mathcal{N}$ vérifie tous les axiômes de norme.

— Montrons que $\mathcal{N}(x) = 0 \iff x = 0$
L'expression $\mathcal{N}(x) = 0$ est équivalente à $\lambda_1 \mathcal{N}_1(x) + \cdots + \lambda_n \mathcal{N}_n(x) = 0$. Pour chaque $i = 1, \cdots, n$, nous avons $\lambda_i \mathcal{N}_i(x) \geqslant 0$; la somme étant nulle, nous avons, pour chaque $i = 1, \cdots, n$, $\lambda_i \mathcal{N}_i(x) = 0$. Comme $\lambda_i \neq 0$, nous avons, pour chaque $i = 1, \cdots, n$, $\mathcal{N}_i(x) = 0$. Comme $\mathcal{N}_i$ est une norme sur E, nous en déduisons que $x = 0$.
Nous avons donc $\mathcal{N}(x) = 0 \iff x = 0$

— Montrons que, pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$, nous avons $\mathcal{N}(\alpha x) = |\alpha| \mathcal{N}(x)$
Soit $\alpha \in \mathbb{K}$; alors $\mathcal{N}(\alpha x) = \lambda_1 \mathcal{N}_1(\alpha x) + \cdots + \lambda_n \mathcal{N}_n(\alpha x)$.
Des propriétés de norme de chaque $\mathcal{N}_i$, nous tirons que $\lambda_i \mathcal{N}_i(\alpha x) = |\alpha| \lambda_i \mathcal{N}_i(x)$, et donc :

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}(\alpha x) &= |\alpha| \lambda_1 \mathcal{N}_1(x) + \cdots + |\alpha| \lambda_n \mathcal{N}_n(x) \\
&= |\alpha| \left(\lambda_1 \mathcal{N}_1(x) + \cdots + \lambda_n \mathcal{N}_n(x)\right) \\
&= |\alpha| \mathcal{N}(x)
\end{aligned}$$

— Montrons que, pour tout $x \in E$ et tout $y \in E$, $\mathcal{N}(x+y) \leqslant \mathcal{N}(x) + \mathcal{N}(y)$
Soient donc $x \in E$ et $y \in E$. Alors, $\mathcal{N}(x+y) = \lambda_1 \mathcal{N}_1(x+y) + \cdots + \lambda_n \mathcal{N}_n(x+y)$
Des propriétés de norme pour chacune des $\mathcal{N}_i$, nous tirons $\mathcal{N}_i(x+y) \leqslant \mathcal{N}_i(x) + \mathcal{N}_1(y)$, et donc :

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}(x+y) &\leqslant \lambda_1 \left(\mathcal{N}_1(x) + \mathcal{N}_1(y)\right) + \cdots + \lambda_n \left(\mathcal{N}_n(x) + \mathcal{N}_n(y)\right) \\
&\leqslant \left(\lambda_1 \mathcal{N}_1(x) + \cdots + \lambda_n \mathcal{N}_n(x)\right) + \left(\lambda_1 \mathcal{N}_1(y) + \cdots + \lambda_n \mathcal{N}_1(y)\right) \\
&\leqslant \mathcal{N}(x) + \mathcal{N}(y)
\end{aligned}$$

Nous avons donc $\mathcal{N}(x+y) \leqslant \mathcal{N}(x) + \mathcal{N}(y)$

Exercice 2 :

Soit E un espace vectoriel normé, et la norme de E est notée $\|\bullet\|_E$.

1. *Montrez que pour tout $(x, y, z, t) \in E^4$,*

$$\|x-y\|_E + \|z-t\|_E + \|x-z\|_E + \|y-t\|_E \geqslant \|x-t\|_E + \|y-z\|_E$$

Nous allons utiliser l'inégalité triangulaire plusieurs fois :

$$\begin{aligned}
\|x-t\|_E &\leqslant \|x-y\|_E + \|y-t\|_E \\
\|x-t\|_E &\leqslant \|x-z\|_E + \|z-t\|_E \\
\|y-z\|_E &\leqslant \|x-y\|_E + \|x-z\|_E \\
\|y-z\|_E &\leqslant \|y-t\|_E + \|z-t\|_E
\end{aligned}$$

En additionnant, nous obtenons :

$$2\|x-t\|_E + 2\|y-z\|_E \leqslant 2\|x-y\|_E + 2\|y-t\|_E + 2\|x-z\|_E + 2\|z-t\|_E$$

D'où le résultat

2. *Montrez que pour tout* $(x, y, z) \in E^3$,

$$(x+y+z=0) \Longrightarrow \left(\|x-y\|_E + \|y-z\|_E + \|x-z\|_E \geqslant \frac{3}{2} \left(\|x\|_E + \|y\|_E + \|z\|_E \right) \right)$$

Il est tout à fait équivalent de montrer que :

$$(x+y+z=0) \Longrightarrow \left(2\left(\|x-y\|_E + \|y-z\|_E + \|x-z\|_E\right) \geqslant 3\left(\|x\|_E + \|y\|_E + \|z\|_E\right)\right)$$

On remarque, à ce stade que :

$$\begin{aligned} 2\left(\|x-y\|_E + \|y-z\|_E + \|x-z\|_E\right) = \quad & \|x-y\|_E + \|x-y\|_E + \\ & \|z-y\|_E + \|z-y\|_E + \|z-x\|_E + \|z-x\|_E \end{aligned}$$

On regroupe un peu différemment :
— Nous avons

$$\begin{aligned} \|x-y\|_E + \|x-z\|_E \geqslant \quad & \|x-y-z+x\|_E \\ \geqslant \quad & \|2x-y-z\|_E = \|2x+x\|_E \ \text{ car } x = -y-z \end{aligned}$$

Donc $\|x-y\|_E + \|x-z\|_E \geqslant \|3x\|_E = 3\|x\|_E$
— De même $\|x-y\| + \|x-z\| \geqslant \|x-y+z-y\| = \|x+z-2y\|$; de $x+z=-y$, nous tirons $\|x+z-2y\| = \|-3y\| = 3\|y\|$, et donc :

$$\|x-y\| + \|x-z\| \geqslant 3\|y\|$$

— Et, pour terminer,

$$\|y-z\| + \|x-z\| \geqslant \|y-z+x-z\| = \|x+y-2z\| = \|-3z\| = 3\|z\|$$

En additionnant, nous obtenons donc, si $x+y+z=0$

$$\left(2\left(\|x-y\|_E + \|y-z\|_E + \|x-z\|_E\right) \geqslant 3\left(\|x\|_E + \|y\|_E + \|z\|_E\right)\right)$$

Ce que nous voulions

3. *Montrez que pour tout* $(x, y) \in (E \setminus \{0\})^2$,

$$\|x-y\|_E \geqslant \frac{1}{2} \sup\left(\|x\|_E, \|y\|_E\right) \times \left\| \frac{x}{\|x\|_E} - \frac{y}{\|y\|_E} \right\|_E$$

On remarque, dans un premier temps, qu'il est tout à fait équivalent de démontrer que

$$2\|x-y\|_E \geqslant \sup\left(\|x\|_E, \|y\|_E\right) \times \left\| \frac{x}{\|x\|_E} - \frac{y}{\|y\|_E} \right\|_E$$

Dans un second temps, en remarquant la symétrie, nous pouvons supposer que $\|x\| \geqslant \|y\|$ et que, donc, $\sup\left(\|x\|_E, \|y\|_E\right) = \|x\|$. Alors :

$$\sup\left(\|x\|_E, \|y\|_E\right) \times \left\| \frac{x}{\|x\|_E} - \frac{y}{\|y\|_E} \right\|_E = \|x\|_E \times \left\| \frac{x}{\|x\|_E} - \frac{y}{\|y\|_E} \right\|_E = \left\| x - \frac{\|x\|_E}{\|y\|_E} y \right\|$$

Poursuivons :

$$\begin{aligned} \left\| x - \frac{\|x\|}{\|y\|} y \right\| &= \left\| x - y + y - \frac{\|x\|}{\|y\|} y \right\| \\ &= \left\| x - y + \left(1 - \frac{\|x\|}{\|y\|}\right) y \right\| \\ &\leqslant \|x-y\| + \left| 1 - \frac{\|x\|}{\|y\|} \right| \|y\| \end{aligned}$$

Or, $\left|1-\dfrac{\|x\|}{\|y\|}\right| = \dfrac{\|x\|}{\|y\|} - 1$ et $\left|1-\dfrac{\|x\|}{\|y\|}\right| \|y\| = \left(\dfrac{\|x\|}{\|y\|}-1\right)\|y\| = \|x\| - \|y\|$
Par l'inégalité triangulaire, nous avons : $\|x\| - \|y\| \leqslant \|x-y\|$ et donc,

$$\|x\|_E \times \left\| \frac{x}{\|x\|_E} - \frac{y}{\|y\|_E} \right\|_E \leqslant 2\|x-y\|_E$$

D'où le résultat

4. *Montrez que pour tout $(x,y) \in (E\setminus\{0\})^2$,*

$$\|x-y\|_E \geqslant \frac{1}{4}\left(\|x\|_E + \|y\|_E\right) \times \left\| \frac{x}{\|x\|_E} - \frac{y}{\|y\|_E} \right\|_E$$

Nous supposons toujours que $\|x\| \geqslant \|y\|$ et que, donc, $\sup\left(\|x\|_E, \|y\|_E\right) = \|x\|$
D'après la question précédente :

$$\|x\|_E \times \left\| \frac{x}{\|x\|_E} - \frac{y}{\|y\|_E} \right\|_E \leqslant 2\|x-y\|_E$$

Et comme $\|x\| \geqslant \|y\|$, nous avons :

$$\|y\|_E \times \left\| \frac{x}{\|x\|_E} - \frac{y}{\|y\|_E} \right\|_E \leqslant 2\|x-y\|_E$$

Et, en additionnant, nous avons :

$$\left(\|x\|_E + \|y\|_E\right) \times \left\| \frac{x}{\|x\|_E} - \frac{y}{\|y\|_E} \right\|_E \leqslant 4\|x-y\|_E$$

C'est à dire :

$$\|x-y\|_E \geqslant \frac{1}{4}\left(\|x\|_E + \|y\|_E\right) \times \left\| \frac{x}{\|x\|_E} - \frac{y}{\|y\|_E} \right\|_E$$

A PARTIR D'ICI, LES EXERCICES DEMANDENT PLUS DE RÉFLEXION

Exercice 3 :

Dans $\mathbb{R}^2$, on considère l'application $\mathcal{N}$ définie par :

$$\begin{cases} \mathcal{N} : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \quad (x,y) & \longmapsto & \mathcal{N}((x,y)) = \sup\limits_{t\in[0;1]} |x+ty| \end{cases}$$

Avant de commencer à répondre aux questions posées, laissons nous aller à quelques « **bricolages** »

- Tout d'abord, il est clair que $\mathcal{N}((0,0)) = 0$
- D'autre part, comme, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, nous avons $|-x-ty| = |x+ty|$, nous avons $\mathcal{N}((-x,-y)) = \mathcal{N}((x,y))$
- Et, $\mathcal{N}((x,0)) = \sup\limits_{t\in[0;1]} |x| = |x|$
- Tout comme $\mathcal{N}((0,y)) = \sup\limits_{t\in[0;1]} |ty| = |y| \sup\limits_{t\in[0;1]} |t| = |y|$
- Soit $y \in \mathbb{R}$
  - Etudions $\mathcal{N}((y,y))$
    $|y+ty| = |y| \times |1+t|$ et $\sup\limits_{t\in[0;1]} |1+t| = 2$
    Donc, $\mathcal{N}((y,y)) = 2|y|$
  - Etudions $\mathcal{N}((y,-y))$
    $|y-ty| = |y| \times |1-t|$ et $\sup\limits_{t\in[0;1]} |1+t| = 1$
    Donc, $\mathcal{N}((y,-y)) = |y|$

— Calculons, par exemple, $\mathcal{N}((-1,+3)) = \sup\limits_{t\in[0;1]} |-1+3t|$

Nous allons faire une petite étude de la fonction $f(t) = |-1+3t|$, laquelle est des plus classiques.

- Si $0 \leqslant t \leqslant \dfrac{1}{3}$, alors $-1+3t \leqslant 0$ et $|-1+3t| = 1-3t$
- Si $\dfrac{1}{3} \leqslant t \leqslant 1$, alors $-1+3t \geqslant 0$ et $|-1+3t| = -1+3t$
- D'où le graphe

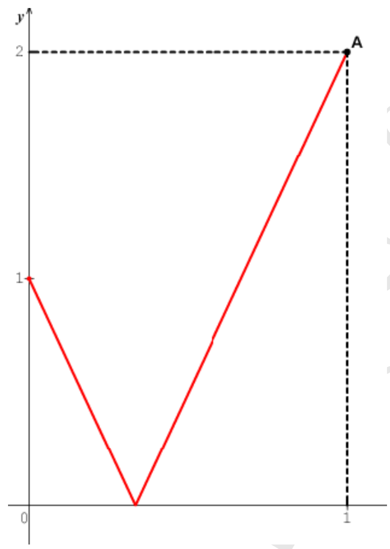

FIGURE 1.6 – Le graphe de $|-1+3t|$ pour $t \in [0;1]$

- Donc, $\mathcal{N}((-1,+3)) = \sup\limits_{t\in[0;1]} |-1+3t| = 2$

— Supposons maintenant $x \neq 0$ et $y \neq 0$ et étudions $\mathcal{N}((x,y))$. Pour ce faire, nous allons étudier, en fonction de x et de y, la fonction $f_{(x,y)}(t) = |x+yt|$

- <u>Supposons $y > 0$</u>
  - ⋆ Alors $u(t) = x+ty$ est une fonction croissante de t qui s'annule en $t_0 = \dfrac{-x}{y}$.
    Ainsi, si $t \leqslant \dfrac{-x}{y}$, alors $u(t) = x+ty \leqslant 0$ et $f_{(x,y)}(t) = |x+yt| = -x-ty$ et si $t \geqslant \dfrac{-x}{y}$, alors $u(t) = x+ty \geqslant 0$ et $f_{(x,y)}(t) = |x+yt| = x+ty$
  - ⋆ Si $\dfrac{-x}{y} < 0$, c'est à dire si $x > 0$, alors $\sup\limits_{t\in[0;1]} |x+ty| = x+y$
  - ⋆ Si $\dfrac{-x}{y} > 1$, c'est à dire si $x < 0$, $-x > y \iff |x| > y$ alors
    $$\sup_{t\in[0;1]} |x+ty| = f_{(x,y)}(0) = |x|$$
  - ⋆ Si, $0 < \dfrac{-x}{y} < 1$, c'est à dire si $x < 0$ et $|x| < y$, alors $\mathcal{N}((x,y)) = \max\{|x|, x+y\}$
    (exemple : $\mathcal{N}((-3,5)) = 3$ et $\mathcal{N}((-1,5)) = 4$)
  - ⋆ Et, pour terminer, $\mathcal{N}((y,y)) = \sup\limits_{t\in[0;1]} |y+ty| = \sup\limits_{t\in[0;1]} (y+ty) = 2y$
- <u>Supposons $y < 0$</u>
  - ⋆ Alors $u(t) = x+ty$ est une fonction décroissante de t qui s'annule toujours en $t_0 = \dfrac{-x}{y}$.
    Ainsi, si $t \leqslant \dfrac{-x}{y}$, alors $u(t) = x+ty \geqslant 0$ et $f_{(x,y)}(t) = |x+yt| = x+ty$ et si $t \geqslant \dfrac{-x}{y}$, alors $u(t) = x+ty \leqslant 0$ et $f_{(x,y)}(t) = |x+yt| = -x-ty$
  - ⋆ Si $\dfrac{-x}{y} < 0$, c'est à dire si $x < 0$, alors $\sup\limits_{t\in[0;1]} |x+ty| = -x-y$

⋆ Si $\dfrac{-x}{y} > 1$, c'est à dire si $x > 0$, $x > -y \Longleftrightarrow x > |y|$ alors

$$\sup_{t\in[0;1]} |x+ty| = f_{(x,y)}(0) = x$$

⋆ Si, $0 < \dfrac{-x}{y} < 1$, c'est à dire si $x > 0$ et $x < |y|$, alors $\mathcal{N}((x,y)) = \max\{x, |x+y|\}$
(exemple : $\mathcal{N}((3,-5)) = 3$ et $\mathcal{N}((1,-5)) = 4$) ; on retrouve, en fait, $\mathcal{N}((-x,-y)) = \mathcal{N}((x,y))$

⋆ Et, pour terminer, $\mathcal{N}((y,y)) = \sup\limits_{t\in[0;1]} |y+ty| = \sup\limits_{t\in[0;1]} |y|(1+t) = 2|y|$

— **En synthèse :**
 ∗ Si x et y sont de même signe, c'est à dire si $xy > 0$, alors $\mathcal{N}((x,y)) = |x| + |y|$
 ∗ Si $xy < 0$ et si $|x| \geqslant |y|$, alors $\mathcal{N}((x,y)) = |x|$
 ∗ Si $xy < 0$ et si $|x| < |y|$, alors $\mathcal{N}((x,y)) = \max\{|x|, |x+y|\}$

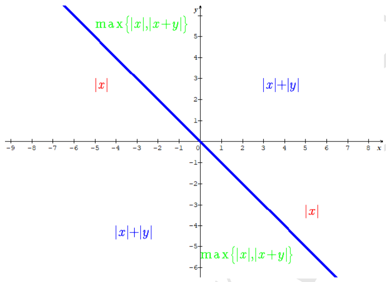

FIGURE 1.7 – Visualisation de la norme $\mathcal{N}$

Ces bricolages ne sont pas nécessaires pour la suite de l'exercice *(quoique !!)* mais nous permettent de mieux nous approprier cette nouvelle norme.

1. *Démontrer que $\mathcal{N}$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$*

— Démontrons que $\mathcal{N}((x,y)) = 0 \Longleftrightarrow (x,y) = (0,0)$
 • On a montré que $\mathcal{N}((0,0)) = 0$
 • Réciproquement, supposons $\mathcal{N}((x,y)) = 0$. Alors, pour tout $t \in [0;1]$, $|x+ty| = 0$, c'est à dire $x + ty = 0$.
 $x + ty$ est un polynôme en t toujours nul sur $[0;1]$, et donc, nul sur $\mathbb{R}$. Donc $x = y = 0$.
 Ainsi, $\mathcal{N}((x,y)) = 0 \Longrightarrow (x,y) = (0,0)$

— Démontrons que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\mathcal{N}(\lambda(x,y)) = |\lambda|\mathcal{N}((x,y))$
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$
Tout d'abord, $|\lambda x + t\lambda y| = |\lambda|\,|x+ty|$ et $\sup\limits_{t\in[0;1]} |\lambda x + t\lambda y| = |\lambda| \sup\limits_{t\in[0;1]} |x+ty|$, c'est à dire

$$\mathcal{N}(\lambda(x,y)) = |\lambda|\mathcal{N}((x,y))$$

— Démontrons L'inégalité triangulaire
Soient $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $(x',y') \in \mathbb{R}^2$. Alors $(x,y) + (x',y') = (x+x', y+y')$ et

$$|x + x' + t(y+y')| = |x + ty + (x' + ty')| \leqslant |x+ty| + |x'+ty'|$$

Donc :

$$\sup_{t\in[0;1]} (|x+x'+t(y+y')|) \leqslant \sup_{t\in[0;1]} (|x+ty| + |x'+ty'|) \leqslant \sup_{t\in[0;1]} (|x+ty|) + \sup_{t\in[0;1]} (|x'+ty'|)$$

C'est à dire :

$$\mathcal{N}((x,y) + (x',y')) \leqslant \mathcal{N}((x,y)) + \mathcal{N}((x',y'))$$

2. *Représenter graphiquement la boule fermée de centre $(0,0)$ et de rayon 1 $B_F(0,1)$ définie par :*

$$B_F(0,1) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } \mathcal{N}((x,y)) \leqslant 1\right\}$$

Exercice 4 :

Soit E un espace vectoriel normé, et la norme de E est notée $\|\bullet\|_E$.
Soient $e_1, \cdots, e_n$ n vecteurs de E. Dans $\mathbb{R}^n$, on considère l'application $\mathcal{N}$ définie par :

$$\left\{\begin{array}{ccl} \mathcal{N} : \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, \cdots, x_n) & \longmapsto & \mathcal{N}((x_1, \cdots, x_n)) = \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \right\|_E \end{array}\right.$$

Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur les $\{e_1, \cdots, e_n\}$ pour que $\mathcal{N}$ soit une norme

Pour nous simplifier la vie, nous allons poser $X = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $Y = (y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, de telle sorte que $X + Y = (x_1 + y_1, \cdots, x_n + y_n)$, et que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda X = (\lambda x_1, \cdots, \lambda x_n)$

1. Nous avons :$\mathcal{N}(X + Y) = \left\| \sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i) e_i \right\|_E = \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i e_i + \sum_{i=1}^{n} y_i e_i \right\|_E$. De l'inégalité tringulaire vérifiée par la norme $\|\bullet\|_E$, nous avons :

$$\mathcal{N}(X + Y) = \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i e_i + \sum_{i=1}^{n} y_i e_i \right\|_E \leqslant \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \right\|_E + \left\| \sum_{i=1}^{n} y_i e_i \right\|_E = \mathcal{N}(X) + \mathcal{N}(Y)$$

   Nous avons donc montré l'inégalité triangulaire $\mathcal{N}(X + Y) \leqslant \mathcal{N}(X) + \mathcal{N}(Y)$

2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $X \in \mathbb{R}^n$. Alors,

$$\mathcal{N}(\lambda X) = \left\| \sum_{i=1}^{n} \lambda x_i e_i \right\|_E = \left\| \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \right\|_E = |\lambda| \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \right\|_E = |\lambda| \mathcal{N}(X)$$

   Nous avons donc démontré que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mathcal{N}(\lambda X) = |\lambda| \mathcal{N}(X)$

3. Démontrons que $\mathcal{N}(X) = 0 \iff X = 0$

   (a) De manière évidente, $\mathcal{N}(0) = \left\| \sum_{i=1}^{n} 0 e_i \right\|_E = \left\| \sum_{i=1}^{n} \vec{0}_E e_i \right\|_E = 0$

   (b) Réciproquement, supposons $\mathcal{N}(X) = 0$; alors $\left\| \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \right\|_E = 0$. Des propriétés de normes de $\|\bullet\|_E$, nous déduisons que $\sum_{i=1}^{n} x_i e_i = \vec{0}_E$; et donc, $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ si et seulement la famille $\{e_1, \ldots, e_n\}$ est une famille libre.
   Donc, si la famille $\{e_1, \ldots, e_n\}$ est libre, $\mathcal{N}(X) = 0 \iff X = 0$

   La condition nécessaire et suffisante pour que $\mathcal{N}$ soit une norme est que la famille $\{e_1, \ldots, e_n\}$ soit libre

Exercice 5 :

Soit E un espace vectoriel normé, et la norme de E est notée $\|\bullet\|_E$.
On note $T : E \longrightarrow E$, l'application définie par :

$$\left\{\begin{array}{ccl} T : E & \longrightarrow & E \\ u & \longmapsto & T(u) = \left\{\begin{array}{ll} u & \text{si } \|u\|_E \leqslant 1 \\ \dfrac{u}{\|u\|_E} & \text{si } \|u\|_E \geqslant 1 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Montrer que pour tout $(u, v) \in E^2$, $\|T(u) - T(v)\|_E \leqslant 2\|u - v\|_E$

1. Il n'y a aucune difficulté si $\|u\|_E \leqslant 1$ et $\|v\|_E \leqslant 1$. En effet :

$$\|T(u) - T(v)\|_E = \|u - v\|_E \leqslant 2\|u - v\|_E$$

2. Supposons maintenant que $\|u\|_E \geqslant 1$ et $\|v\|_E \geqslant 1$; alors $\|T(u) - T(v)\|_E = \left\| \dfrac{u}{\|u\|_E} - \dfrac{v}{\|v\|_E} \right\|_E$
   D'après la question 3 de l'exercice 2 :
   $$2\|u - v\|_E \geqslant \sup(\|u\|_E, \|v\|_E) \times \left\| \frac{u}{\|u\|_E} - \frac{v}{\|v\|_E} \right\|_E$$
   C'est à dire :
   $$\|T(u) - T(v)\|_E \leqslant \frac{2}{\sup(\|u\|_E, \|v\|_E)} \|u - v\|_E$$
   Comme $\sup(\|u\|_E, \|v\|_E) \geqslant \|v\|_E \geqslant 1$, nous avons $\dfrac{2}{\sup(\|u\|_E, \|v\|_E)} \leqslant 2$, et donc
   $$\|T(u) - T(v)\|_E \leqslant 2\|u - v\|_E$$
   Ce que nous voulions
3. Supposons maintenant que $\|u\|_E \geqslant 1$ et $\|v\|_E \leqslant 1$; alors $\|T(u) - T(v)\|_E = \left\| \dfrac{u}{\|u\|_E} - v \right\|_E$
   Or, $\left\| \dfrac{u}{\|u\|_E} - v \right\|_E = \left\| \dfrac{u}{\|u\|_E} + u - u - v \right\|_E \leqslant \left\| \dfrac{u}{\|u\|_E} - u \right\|_E + \|u - v\|_E$
   Regardons $\left\| \dfrac{u}{\|u\|_E} - u \right\|_E = \left(1 - \dfrac{1}{\|u\|_E}\right) \|u\|_E = \|u\|_E - 1$
   De $\|v\|_E \leqslant 1$, nous tirons $-\|v\|_E \geqslant -1$ et donc $\|u\|_E - 1 \leqslant \|u\|_E - \|v\|_E$. De l'inégalité triangulaire, nous avons : $\|u\|_E - \|v\|_E \leqslant \|u - v\|_E$.
   De telle sorte que $\|T(u) - T(v)\|_E \leqslant 2\|u - v\|_E$

Ce que nous voulions

Exercice 6 :

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $\mathcal{L}(E)$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des endomorphismes de E. On sait que $\mathcal{L}(E)$ est isomorphe à $M_n(\mathbb{R})$ espace des matrices carrées de dimension n. Ainsi, $\mathcal{L}(E)$ et $M_n(\mathbb{R})$ sont des $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n^2.
On peut donc définir sur $M_n(\mathbb{R})$ les mêmes normes que sur $\mathbb{R}^{n^2}$ (norme euclidienne, norme infinie, norme 1) *faisant donc de $M_n(\mathbb{R})$ un espace normé.*

1. *Pour $A \in M_n(\mathbb{R})$ où $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}}$, on pose $\mathcal{N}(A) = \sup\limits_{1\leqslant j\leqslant n} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |a_{i,j}| \right)$*
   Montrer que $\mathcal{N}$ est une norme
   Avant de commencer, faisons quelques bricolages. Comment procédons nous pour calculer cette norme ?
   — Tout d'abord, nous faisons la somme des valeurs absolues des coefficients des colonnes
   — Puis, on prend le plus grand
   — Par exemple, pour $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$, nous avons $M \in M_3(\mathbb{R})$. Nous obtenons 3 sommes *(une pour chaque colonne)* : $C_1 = |1| + |-1| + |1| = 3$, $C_2 = |2| + |0| + |-2| = 4$ et $C_3 = |3| + |1| + |-3| = 7$ et donc $\mathcal{N}(M) = 7$
   Démontrons maintenant que $\mathcal{N}$ est une norme
   - Il est clair que, pour toute matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$, nous avons $\mathcal{N}(A) \geqslant 0$
   - On appelle $\mathcal{O} \in M_n(\mathbb{R})$ la matrice nulle, celle dont tous les coefficients sont nuls. Montrons que $\mathcal{N}(A) = 0 \Longleftrightarrow A = \mathcal{O}$
     — Il est évident que $\mathcal{N}(\mathcal{O}) = 0$
     — Réciproquement, soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ avec $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}}$ telle que $\mathcal{N}(A) = 0$

Alors, $\sup\limits_{1\leqslant j\leqslant n}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}|a_{i,j}|\right)=0$, ce qui sous-entend que, pour tout $j=1\cdots,n$, $\sum\limits_{i=1}^{n}|a_{i,j}|=0$, et donc, que pour tout $i=1,\cdots,n$, $|a_{i,j}|=0$, c'est à dire $a_{i,j}=0$
Ainsi, pour tout j et tout i, $a_{i,j}=0$ et donc $A=\mathcal{O}$

- Soit $\lambda\in\mathbb{R}$ et $A\in M_n(\mathbb{R})$; alors, $\lambda A=(\lambda a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}}$

  Nous avons : $\sum\limits_{i=1}^{n}|\lambda a_{i,j}|=|\lambda|\sum\limits_{i=1}^{n}|a_{i,j}|$, de telle sorte que :

$$\sup_{1\leqslant j\leqslant n}\left(\sum_{i=1}^{n}|\lambda a_{i,j}|\right)=\sup_{1\leqslant j\leqslant n}\left(|\lambda|\sum_{i=1}^{n}|a_{i,j}|\right)=|\lambda|\sup_{1\leqslant j\leqslant n}\left(\sum_{i=1}^{n}|a_{i,j}|\right)$$

  Autrement dit : $\mathcal{N}(\lambda A)=|\lambda|\,\mathcal{N}(A)$

- Soient $A\in M_n(\mathbb{R})$ et $B\in M_n(\mathbb{R})$; alors, $A=(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}}$ et $B=(b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}}$ et donc $A+B=(a_{i,j}+b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}}$

  Pour tout $j=1,\cdots,n$ et tout $i=1,\cdots,n$, nous avons $|a_{i,j}+b_{i,j}|\leqslant|a_{i,j}|+|b_{i,j}|$, et donc

$$\sum_{i=1}^{n}|a_{i,j}+b_{i,j}|\leqslant\sum_{i=1}^{n}|a_{i,j}|+\sum_{i=1}^{n}|b_{i,j}|$$

  Et en passant à la borne supérieure,

$$\sup_{1\leqslant j\leqslant n}\left(\sum_{i=1}^{n}|a_{i,j}+b_{i,j}|\right)\leqslant\sup_{1\leqslant j\leqslant n}\left(\sum_{i=1}^{n}|a_{i,j}|+\sum_{i=1}^{n}|b_{i,j}|\right)\leqslant\sup_{1\leqslant j\leqslant n}\left(\sum_{i=1}^{n}|a_{i,j}|\right)+\sup_{1\leqslant j\leqslant n}\left(\sum_{i=1}^{n}|b_{i,j}|\right)$$

  C'est à dire $\mathcal{N}(A+B)\leqslant\mathcal{N}(A)+\mathcal{N}(B)$, ce qui démontre l'inégalité triangulaire.

$\mathcal{N}$ est donc une norme

2. *La norme 1 sur $M_n(\mathbb{R})$ est définie par $\|A\|_1=\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{i,j}|\right)$. Trouver $\lambda>0$ et $\mu>0$ tels que $\mathcal{N}(A)\leqslant\lambda\|A\|_1$ et $\|A\|_1\leqslant\mu\mathcal{N}(A)$ (Autrement dit, ces deux normes sont équivalentes)*

   Une première remarque est de voir que la permutation des indices est possible. Donc :

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}|\right)=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}|a_{i,j}|\right)$$

   Posons, pour tout $j=1,\cdots,n$ $A_j=\sum\limits_{i=1}^{n}|a_{i,j}|$

   Alors $A_j\leqslant\mathcal{N}(A)$, de telle sorte que $\sum\limits_{j=1}^{n}A_j\leqslant n\mathcal{N}(A)$, c'est à dire $\|A\|_1\leqslant n\mathcal{N}(A)$

   Et il est évident que $\mathcal{N}(A)\leqslant\|A\|_1$. Nous avons donc :

$$\mathcal{N}(A)\leqslant\|A\|_1\leqslant n\mathcal{N}(A)\Longleftrightarrow\frac{1}{n}\|A\|_1\leqslant\mathcal{N}(A)\leqslant\|A\|_1$$

3. *Pour $A\in M_n(\mathbb{R})$ et $B\in M_n(\mathbb{R})$, trouvez $\alpha>0$ tel que $\|AB\|_1\leqslant\alpha\|A\|_1\|B\|_1$*

   Nous avons $AB=(c_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}}$ où $c_{i,j}=\sum\limits_{k=1}^{n}a_{i,k}b_{k,j}$.

   Par définition $\|AB\|_1=\sum\limits_{j=1}^{n}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}|c_{i,j}|\right)$. Or :

$$|c_{i,j}|=\left|\sum_{k=1}^{n}a_{i,k}b_{k,j}\right|\leqslant\sum_{k=1}^{n}|a_{i,k}b_{k,j}|=\sum_{k=1}^{n}|a_{i,k}|\,|b_{k,j}|$$

De telle sorte que :

$$\|AB\|_1 \leqslant \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}|a_{i,k}|\,|b_{k,j}|\right)\right)$$

En permutant les indices et les symboles $\sum$, nous obtenons $\|AB\|_1 \leqslant \|A\|_1 \times \|B\|_1$

4. *Pour $A \in M_n(\mathbb{R})$, inversible, démontrer que $\left\|A^{-1}\right\|_1 \geqslant \dfrac{1}{\|A\|_1}$*

   Nous avons $A \times A^{-1} = \mathrm{Id}_n$, et $\|\mathrm{Id}_n\|_1 = n$, c'est à dire $\left\|A \times A^{-1}\right\|_1 = n$
   D'après la quetion précédente, $\left\|A \times A^{-1}\right\|_1 \leqslant \|A\|_1 \times \left\|A^{-1}\right\|_1$, c'est à dire $n \leqslant \|A\|_1 \times \left\|A^{-1}\right\|_1$.
   Nous avons donc $\left\|A^{-1}\right\|_1 \geqslant \dfrac{n}{\|A\|_1} \geqslant \dfrac{1}{\|A\|_1}$
   Ce que nous voulions

1.6.2 Espaces métrique

Exercice 8 :

Soit (E, d) un espace métrique

1. *Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ une application croissante et telle que :*
   — *$f(t) = 0 \Longrightarrow t = 0$*
   — *Pour tout $t \geqslant 0$ et tout $s \geqslant 0$, $f(t+s) \leqslant f(t) + f(s)$*
   Démontrer que $d'(x,y) = f(d(x,y))$ est une distance sur E

   - Premièrement, il est clair que, pour tout $x \in E$ et tout $y \in E$, nous avons $d'(x,y) \geqslant 0$
   - D'autre part, pour tout $x \in E$ et tout $y \in E$, du fait que d soit une distance, $d'(x,y) = f(d(x,y)) = f(d(y,x)) = d'(y,x)$
   - Soient $x \in E$, $y \in E$ et $z \in E$. Alors $d'(x,z) = f(d(x,z))$
     Comme d est une distance, et d'après les propriétés de f, pour tout $x \in E$, $y \in E$ et $z \in E$:

   $$f(d(x,y) + d(y,z)) \leqslant f(d(x,y)) + f(d(y,z)) \Longleftrightarrow d'(x,z) \leqslant d'(x,y) + d'(y,z)$$

   d' est donc une distance sur E

2. *Vérifier que les d_i qui suivent sont des distances sur E :*

   Le principe de cette question est de mettre en évidence, une fonction f_i, vérifiant les conditions de la question 1 et telle que $d_i(x,y) = f_i(d(x,y))$

   (a) *$d_2 = d^r$ avec $0 < r \leqslant 1$*

   Clairement, nous avons ici, $f_2(x) = x^r$, définie pour $x \geqslant 0$, nous avons bien f_2 croissante et $f_2(0) = 0$.
   Il faut maintenant montrer que pour tout $t \geqslant 0$ et tout $s \geqslant 0$, $f_2(t+s) \leqslant f_2(t) + f_2(s)$
   — Si $(s = t = 0)$, $(s = 0$ et $t > 0)$ ou $(s > 0$ et $t = 0)$ nous avons bien $f_2(t+s) \leqslant f_2(t) + f_2(s)$
   — Supposons maintenant $s > 0$ et $t > 0$
   Il faut donc montrer que $(s+t)^r \geqslant s^r + t^r$.
   Comme $s > 0$, nous avons

   $$(s+t)^r \geqslant s^r + t^r \Longleftrightarrow s^r\left[1+\left(\frac{t}{s}\right)\right]^r \leqslant s^r\left[1+\left(\frac{t}{s}\right)^r\right] \Longleftrightarrow \left[1+\left(\frac{t}{s}\right)\right]^r \leqslant 1+\left(\frac{t}{s}\right)^r$$

   Soit $u \geqslant 0$, et considérons $g(u) = (1+u)^r - 1 - u^r$. Pour tout $u \geqslant 0$, nous avons $g(u) \leqslant 0$, c'est à dire $(1+u)^r \leqslant 1 + u^r$.
   En remplaçant, u par $\dfrac{t}{s}$, nous avons bien $\left[1+\left(\dfrac{t}{s}\right)\right]^r \leqslant 1+\left(\dfrac{t}{s}\right)^r$ et d_2 est bien une distance.

   Démontrons que pour tout $u \geqslant 0$, nous avons $g(u) \leqslant 0$

La dérivée de g est donnée par $g'(u) = r(1+u)^{r-1} - ru^{r-1} = r\left[(1+u)^{r-1} - u^{r-1}\right]$
Si $u \geqslant 0$ alors $1+u > u$ et, comme $1-r \geqslant 0$,

$$(1+u)^{1-r} > u^{1-r} \iff \frac{1}{(1+u)^{1-r}} < \frac{1}{u^{1-r}} \iff (1+u)^{r-1} < u^{r-1}$$

Et donc $g'(u) < 0$, ce qui veut dire que g est décroissante sur $\mathbb{R}^+$, et que donc, pour tout $u \in \mathbb{R}^+$, $g(u) \leqslant g(0) = 0$
Ce que nous voulions

(b) $d_3 = \dfrac{d}{1+d}$

Ici, $f_3(x) = \dfrac{x}{1+x}$.
Il est clair que, pour tout $x \geqslant 0$, $f_3(x) \geqslant 0$.
Il faut donc montrer que, pour tout $x \geqslant 0$ et tout $y \geqslant 0$, $f_3(x+y) \leqslant f_3(x) + f_3(y)$.
Tous calculs faits :

$$f_3(x+y) - f_3(x) - f_3(y) = \frac{x+y}{1+x+y} - \frac{x}{1+x} - \frac{y}{1+y} = \frac{-xy(x+y+2)}{(1+x+y)(1+x)(1+y)}$$

Clairement, si $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$, $f_3(x+y) - f_3(x) - f_3(y) \leqslant 0$
Ce que nous voulions.

(c) $d_4 = \ln(1+d)$

Cette fois-ci, $f_4(x) = \ln(1+x)$; Il faut donc montrer que, pour tout $x \geqslant 0$ et tout $y \geqslant 0$, $f_4(x+y) \leqslant f_4(x) + f_4(y)$, c'est à dire :

$$\ln(1+x+y) \leqslant \ln(1+x) + \ln(1+y) \iff \ln(1+x+y) - \ln(1+x) - \ln(1+y) \leqslant 0$$

Or, $\ln(1+x+y) - \ln(1+x) - \ln(1+y) = \ln\left(\dfrac{1+x+y}{(1+x)(1+y)}\right)$

Or, $(1+x)(1+y) = 1+y+x+xy > 1+x+y$, et donc $\dfrac{1+x+y}{(1+x)(1+y)} \leqslant 1$ et donc $\ln\left(\dfrac{1+x+y}{(1+x)(1+y)}\right) = \ln(1+x+y) - \ln(1+x) - \ln(1+y) \leqslant 0$
Ce que nous voulions

(d) $d_5 = \inf\{1, d\}$

Ici, $f_5(x) = \inf\{1, x\}$

— Si $x \geqslant 1$ et $y \geqslant 1$, alors $f_5(x+y) = 1$, $f_5(x) = 1$ et $f_5(y) = 1$. Nous avons bien :

$$1 = f_5(x+y) \leqslant f_5(x) + f_5(y) = 2$$

— Si $0 \leqslant x \leqslant 1$ et $y \geqslant 1$, alors $x+y \geqslant 1$ et $f_5(x+y) = 1$.
D'autre part, $f_5(x) = x$ et $f_5(y) = 1$ et $f_5(x) + f_5(y) = x+1 \geqslant 1$. Nous avons bien :

$$f_5(x+y) \leqslant f_5(x) + f_5(y)$$

— Nous avons un cas symétrique si $0 \leqslant y \leqslant 1$ et $x \geqslant 1$

— Supposons $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$ et $0 \leqslant x+y \leqslant 1$; alors : $f_5(x) = x$, $f_5(y) = y$ et $f_5(x+y) = x+y$, et nous avons bien :

$$f_5(x+y) \leqslant f_5(x) + f_5(y)$$

— Supposons $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$ et $x+y \geqslant 1$; alors : $f_5(x) = x$, $f_5(y) = y$ et $f_5(x+y) = 1$, et comme $f_5(x) + f_5(y) = x+y \geqslant 1$ nous avons bien :

$$f_5(x+y) \leqslant f_5(x) + f_5(y)$$

Ce que nous voulions

Exercice 9 :

Soient E et F 2 ensembles quelconques et $g : E \longrightarrow F$ une bijection. d est une distance sur F faisant de (F, d) un espace métrique.
Soit $d'(x, y) = d(g(x), g(y))$; montrer que d' est une distance sur E

Ce n'est pas un exercice qui présente de grandes difficultés.

1. Clairement, et sans aucune difficulté, pour tout $x \in E$ et tout $y \in E$, $d'(x, y) \geqslant 0$
2. Supposons, maintenant, que $d'(x, y) = 0$; alors $d(g(x), g(y)) = 0$, et d étant une distance, $g(x) = g(y)$ et g étant une bijection, nous avons $x = y$
3. Et maintenant, soient $x \in E$, $y \in E$ et $z \in E$. Alors :

$$d(g(x), g(y)) \leqslant d(g(x), g(z)) + d(g(z), g(y)) \Longleftrightarrow d'(x, y) \leqslant d'(x, z) + d'(z, y)$$

   Nous avons bien l'inégalité triangulaire

Chapitre 2

Les fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$

2.1 Premières définitions

2.1.1 Application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$

On appelle fonction numérique d'une variable réelle, une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, ou d'une partie $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ telle que :

$$\begin{cases} f : \mathcal{U} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, \cdots, x_n) & \longmapsto & f(x_1, \cdots, x_n) \end{cases}$$

Remarque 1 :

Dans le cas où la fonction f considérée est une application d'une partie $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, on dit que $\mathcal{U}$ est le domaine de définition de f ou que f est définie sur $\mathcal{U}$

Exemple 1 :

1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} f : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & \dfrac{x}{x^2 + y^2} \end{cases}$$

   (a) Domaine de définition de f

   f est définie pour les couples $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x^2 + y^2 \neq 0$. Or, $x^2 + y^2 = 0$ si et seulement si $x = y = 0$; donc, le domaine de définition de f est $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$

   (b) Calculer $f[(1, 0)]$ et $f[(1, 1)]$

   Nous avons :

   — $f[(1, 0)] = \dfrac{1}{1^2 + 0^2} = 1$

   — Et $f[(1, 1)] = \dfrac{1}{1^2 + 1^2} = \dfrac{1}{2}$

2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} f : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2} \end{cases}$$

   f définit une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Quel est le domaine de définition de f ?

   C'est assez simple : pour que f soit définie, il faut que $x^2 + y^2 \neq 0$. Le domaine de définition est donc $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$

3. De même, soit $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :
$$\begin{cases} g : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & g(x, y) = \ln\left(\dfrac{y}{x^2 + y^2 - 1}\right) \end{cases}$$
g définit une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Quel est le domaine de définition de g ?
Pour que g soit définie, il faut que $\dfrac{y}{x^2 + y^2 - 1} > 0$. Donc :
— Si $y > 0$, nous devons avoir $x^2 + y^2 - 1 > 0$; donc, le premier domaine est l'extérieur du cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon 1 et d'ordonnée positive
— Si $y < 0$, nous devons avoir $x^2 + y^2 - 1 < 0$; donc, le second domaine est l'intérieur du cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon 1 et d'ordonnée négative
4. Pour $i = 1, \cdots, n$, l'application :
$$\begin{cases} P_i : \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, \cdots, x_n) & \longmapsto & P_i(x_1, \cdots, x_n) = x_i \end{cases}$$
est l'application i-ième projection. toutes les projections sont définies sur $\mathbb{R}^n$ en entier

Exercice 1 :

Dans ces questions, donner le domaine de définition de chacune des fonctions et évaluez la fonction aux points indiqués :

1. $f_1(x, y) = \dfrac{y}{x}$ et calculer $f_1(1, 0)$ et $f_1(1, 1)$
2. $f_2(x, y) = \dfrac{x + y}{x - y}$ et calculer $f_2(1, -1)$ et $f_2(1, 0.9)$
3. $f_3(x, y) = \dfrac{x + y}{x^2 + y^2 - 1}$ et calculer $f_3(1, 1)$ et $f_3(-1, 1)$
4. $f_4(x, y) = \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}$ et calculer $f_4(1, 1)$ et $f_4(-1, 1)$
5. $f_5(x, y) = x^2 - y^2 + 3xy + 5$ et calculer $f_5(1, 0)$ et $f_5(1, 1)$

Exercice 2 :

On considère les fonctions de R^2 dans $\mathbb{R}$, définies par :

1. $\begin{cases} f_1 : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & f_1(x, y) = \dfrac{x^2 + y^2}{x} \end{cases}$
2. $\begin{cases} f_2 : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & f_2(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \end{cases}$
3. $\begin{cases} f_3 : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & f_3(x, y) = \ln(1 - xy) \end{cases}$
4. $\begin{cases} f_4 : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & f_4(x, y) = \arcsin\left(\dfrac{2x + y}{x - y}\right) \end{cases}$

Quels en sont les domaines de définition ?

Remarque 2 :

1. Une application f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ est dite définie au voisinage d'un point $x_0 \in \mathbb{R}^n$ si son ensemble de définition contient un voisinage de x_0, c'est à dire une boule ouverte de centre x_0
2. Soit f une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, définie sur un ensemble $E \subset \mathbb{R}^n$. $f(E)$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, image de E par f :
$$f(E) = \{y \in \mathbb{R} \text{ tel que } \exists x \in E, y = f(x)\}$$
3. Soit f une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, définie sur un ensemble $E \subset \mathbb{R}^n$. Soient $E' \subset \mathbb{R}$ tel que $f(E) \subset E'$ et $g : E' \longrightarrow \mathbb{R}$. On peut donc définir la fonction $g \circ f$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ par :
$$\begin{cases} g \circ f : \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, \cdots, x_n) & \longmapsto & g \circ f(x_1, \cdots, x_n) = g[f(x_1, \cdots, x_n)] \end{cases}$$

Par exemple, soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \sqrt{x} + y^2$ et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = x^2$; alors, $g \circ f(x,y) = \left(\sqrt{x} + y^2\right)^2 = x + y^4 + 2y^2\sqrt{x}$

4. A partir d'une fonction à n variables f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, on peut, en donnant des valeurs fixes à p variables, définir une fonction à $n-p$ variables $f_1 : \mathbb{R}^{n-p} \longrightarrow \mathbb{R}$:

$$\left\{ \begin{array}{ccc} f_1 : \mathbb{R}^{n-p} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, \cdots, x_{n-p}) & \longmapsto & f_1(x_1, \cdots, x_{n-p}) = f(a_1, \cdots, a_p, x_1, \cdots, x_{n-p}) \end{array} \right.$$

Par exemple, soit f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} f : \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & f(x,y,z) = \dfrac{xyz}{x+yz} \end{array} \right.$$

On peut donc définir f_1 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} f_1 : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & f_1(x,y) = f(x,y,2) = \dfrac{2xy}{x+2y} \end{array} \right.$$

2.1.2 Graphe d'une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$

1. Rappel
   Soient E et F 2 ensembles quelconques et $f : E \longrightarrow F$ une application. On appelle graphe de f, l'ensemble :
   $$G = \{(x,y) \in E \times F \text{ tels que } y = f(x)\}$$
2. Graphe d'une fonction à plusieurs variables
   Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$; on appelle graphe de f l'ensemble suivant :
   $$G = \left\{(x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \text{ tels que } x_{n+1} = f(x_1, \cdots, x_n)\right\}$$

Remarque 3 :

1. Dans le cas d'une fonction $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, nous avons $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$
2. Si $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, alors G est une surface de $\mathbb{R}^3$

Exemple 2 :

1. Soit f définie par $f(x,y) = x - y + 2$; le graphe de f est donc l'ensemble des triplets $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ vérifiant $z = x - y + 2$. C'est donc le plan d'équation $x - y - z + 2 = 0$ qui admet pour vecteur normal, le vecteur $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$
   On peut remarquer que les points $A = (0,0,2)$, $B = (-2,0,0)$ et $C = (0,2,0)$ sont des éléments du graphe.
2. Soit g définie par $g(x,y) = 3x$; le graphe de g est donc l'ensemble des triplets $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ vérifiant $z = 3x$. C'est donc le plan d'équation $z - 3x = 0$ qui admet pour vecteur normal, le vecteur $\overrightarrow{n_g} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
   On peut remarquer que le plan d'équation $z - 3x = 0$ contient l'axe des y

2.1.3 Lignes de niveau

Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction à n variables et $c \in \mathbb{R}$.
L'ensemble des couples $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que $f(x_1, \cdots, x_n) = c$ est appelé courbe de niveau c de f

Remarque 4 :

On peut encore dire qu'une courbe de niveau c est l'ensemble $f^{-1}(\{c\})$ des antécédents de c par f

Exemple 3 :

1. Comme premiers exemples de courbes de niveau, on peut citer les courbes isothermes.
2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x, y) = x - y + 2$. Quels sont les courbes de niveau -1, 0 et +1, par f ?
   — La courbe de niveau -1 est l'ensemble des couples $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que
   $$x - y + 2 = -1 \Longleftrightarrow x - y = -3$$
   La courbe de niveau -1 pour f est donc la droite d'équation $y = x + 3$
   — De même la courbe de niveau 0 pour f est la droite d'équation $y = x + 2$
   — Et la courbe de niveau 3 pour f est la droite d'équation $y = x + 1$
   De manière générale, pour cette application f, les courbes de niveau c sont des droites parallèles.
3. Soit $g(x, y) = x^2 + y^2 - 4$.
   — La courbe de niveau 0 pour g est l'ensemble des couples $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que
   $$x^2 + y^2 - 4 = 0 \Longleftrightarrow x^2 + y^2 = 4$$
   La courbe de niveau 0 pour g est donc le cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon 2
   — Plus généralement, soit $c \in \mathbb{R}$. Recherchons les courbe de niveau c pour g ; comme précédemment, la courbe de niveau c est l'ensemble des couples $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que
   $$x^2 + y^2 - 4 = c \Longleftrightarrow x^2 + y^2 = c + 4$$
   — Ainsi, si $c < -4$, il n'y a pas de courbe de niveau c, c'est à dire que $g^{-1}(\{c\}) = \emptyset$
   — Si $c = -4$, $g^{-1}(\{-4\}) = \{(0, 0)\}$
   — Et si $c > -4$, la courbe de niveau c pour g est le cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon $\sqrt{4 + c}$

2.1.4 Représentation graphique

On a souvent besoin de se représenter visuellement ce que sont les surfaces.
Représenter des surfaces est bien plus difficile que de représenter des courbes dans le plan. Il est très rare que la connaissance de quelques points de la surface nous donne une information suffisante pour tracer le graphe entier de la surface. A la place, nous traçons plusieurs courbes de niveau sur ces surfaces, puis, nous faisons une approximation entre ces différentes courbes. c'est la **méthode dite des sections**. L'idée, derrière cette méthode, est d'obtenir un graphe de la surface en regardant les coupes par des plans parallèles aux axes de coordonnées.

Exemple 4 :

1. **Tracer le graphe de la fonction** $f(x, y) = x^2 + y^2$ *(Le graphe est appelé paraboloïde de révolution)*
   Le graphe est donc l'ensemble des points (x, y, z) tels que $z = x^2 + y^2$, et une première remarque que nous devons avoir, est que $z \geqslant 0$. Soit $c \geqslant 0$, les courbes de niveau c sont donc des cercles de centre de rayon $\sqrt{c}$ qui sont placés sur les plan $z = c$, de centre donc, $(0, 0, c)$.
   Dans le plan $x = 0$, nous obtenons la parabole d'équation $z = y^2$, tout comme si nous nous plaçons dans le plan d'équation $y = 1$, nous btenons la parabole d'équation $z = x^2 + 1$.
   La figure 2.1 donne le graphe de cette paraboloïde.
2. **Tracer le graphe de la fonction** $f(x, y) = x^2 + y^2 - 4x - 6y + 13$
   Partir ainsi n'est pas des plus simples. Une bonne idée consiste à « compléter les carrés » ; nous écrirons $z = x^2 + y^2 - 4x - 6y + 13$ comme
   $$\begin{array}{rcccccccc} z = & x^2- & 4x+ & & y^2- & 6y+ & 13 & & \\ = & x^2- & 4x+ & 4+ & y^2- & 6y+ & 9 & +13 & -4-9 \\ = & (x-2)^2 & + & (y-3)^2 & & & & & \end{array}$$

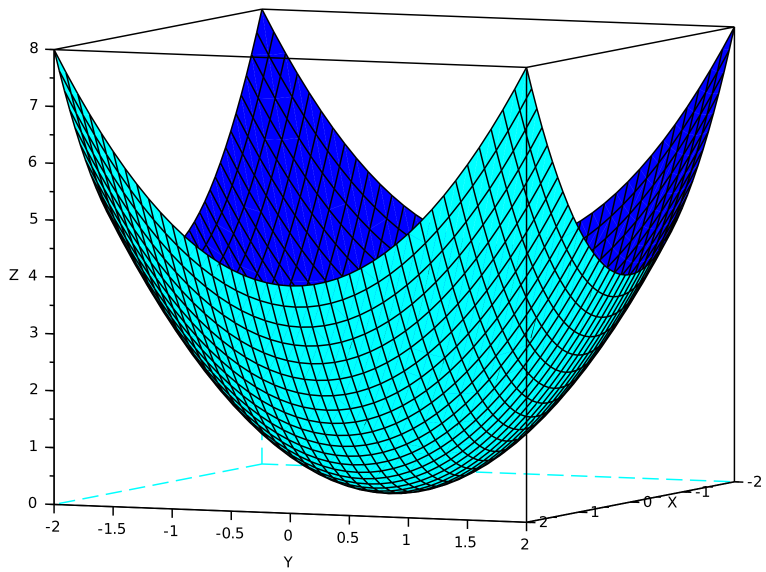

FIGURE 2.1 – Le graphe de la fonction $f(x, y) = x^2 + y^2$

Le graphe est donc l'ensemble des points (x, y, z) tels que $z = (x-2)^2 + (y-3)^2$, et une première remarque que nous devons avoir, est que $z \geqslant 0$. Soit $c \geqslant 0$, les courbes de niveau c sont donc des cercles de centre de rayon $\sqrt{c}$ qui sont placés sur les plan $z = c$, de centre donc, $(2, 3)$.
La figure 2.2 donne le graphe de ce qui est aussi une paraboloïde *(d'axe de symétrie différent)*

Construire des surfaces : la méthode des sections

Comment faire pour créer un graphe dans l'espace ?

1. Notez toutes les symétries du graphe
2. Remarquer si l'une des variables manque, et si c'est le cas, alors, l
   à l'axe manquant
3. Rechercher les lignes de niveau $z = c$, et essayer de voir ce qu
   remarquables ($x = 0$, $y = 0$, ou toute autre valeur qui induit, pa

2.1.5 Utilisation d'un logiciel

Bien entendu, le plus simple est d'utiliser un logiciel qui trace des graphes. Ma préférence va à `Scilab` ou `Python`

Exemple 5 :

Tracer la graphe de la fonction $f(x, y) = x^2 - y^2$.
Cette fonction est appelée fonction « selle » ; le graphe vous fera comprendre pourquoi.

1. On peut remarquer la symétrie : $f(x, y) = f(-x, -y)$
2. Les lignes de niveaux c sont du type $x^2 - y^2 = c$, et la "coupe" sur le plan $z = c$ est une hyperbole équilatère.

   Nous avons :

$$x^2 - y^2 = c \Longleftrightarrow y^2 = x^2 - c \Longleftrightarrow y = \sqrt{x^2 - c} \text{ ou } y = -\sqrt{x^2 - c}$$

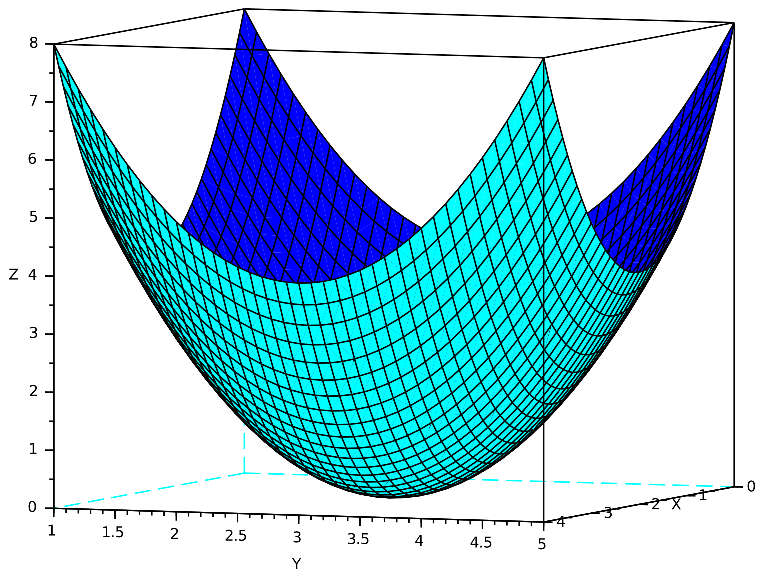

FIGURE 2.2 – Le graphe de la fonction $f(x,y) = x^2 + y^2 - 4x - 6y + 13$. Remarquez que le minimum se situe en $(2,3,0)$

La ligne de niveau c est donc la réunion des graphes des fonctions $y = \sqrt{x^2 - c}$ ou y=$-\sqrt{x^2 - c}$. La figure 2.3 ci-dessous est la ligne de niveau 1, c'est à dire l'intersection du graphe avec le plan $z = 1$

Le petit programme `Scilab` ci-dessous construit le graphe de la fonction selle. Avec `Scilab`, il est possible d'avoir plusieurs vues du même graphe

```
//*************************************************************************

//Fonction Selle

//*************************************************************************

//definition de la fonction
function [z]=selle(x,y)
  z=x**2-y**2  //calcul sur des listes
endfunction
//definition des intervalles d'affichage
x=[-2:0.1:2]; // Les commandes d'itération permettent de
//construire des vecteurs de nombres séparés
//par des pas positifs ou négatifs.
//La syntaxe de base, [deb:pas:fin], retourne un vecteur ligne de valeurs
//allant de deb à fin par valeurs séparées par des multiples de pas.
//Les crochets sont facultatifs. Par défaut, pas vaut 1 .
//Selon que fin-deb est ou non un multiple entier de pas,
//le vecteur se terminera ou non par fin.
y=x;
//Calcul de selle(x,y) et stockage dans z
z=feval(x,y,selle);
//Affichage de la surface
plot3d(x,y,z)
```

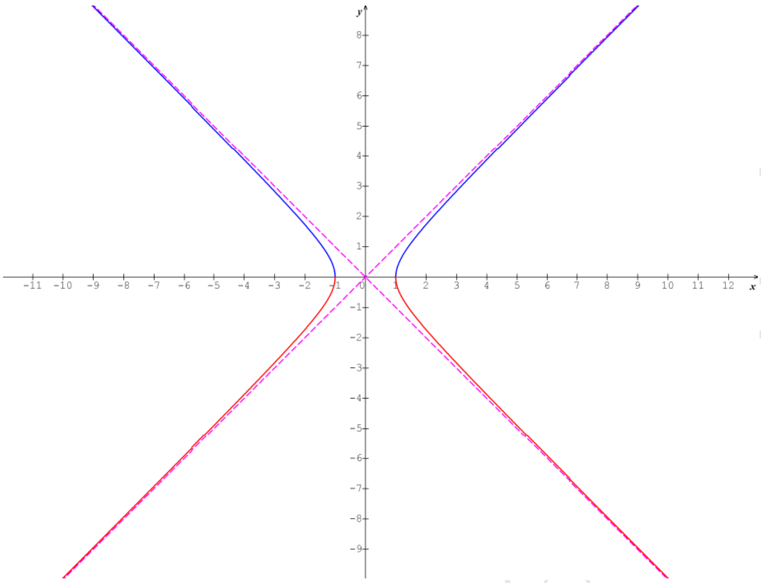

FIGURE 2.3 – La ligne de niveau 1 fonction $f(x, y) = x^2 - y^2$. C'est une hyperbole équilatère

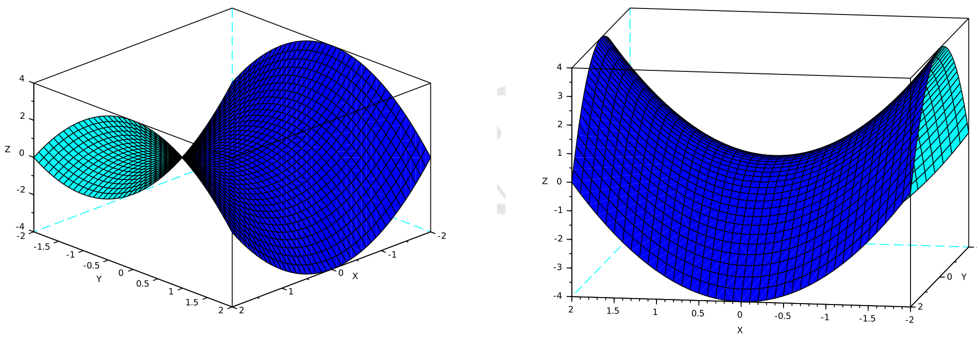

FIGURE 2.4 – 2 vues différentes dans l'espace de la courbe « Selle »

Exemple 6 :

Retour à l'exemple de l'introduction $f_5[(x, y)] = x^2 - y^2 + 3xy + 5$

```
// definition de la fonction
function [z]=f5(x,y)
  z=x**2-y**2+3*x*y+5
endfunction
//calcul sur des listes
//definition des intervalles d'affichage
x=[-10:0.1:10];
y=x;

//Calcul de f5(x,y) et stockage dans z
z=feval(x,y,f5);

//Affichage de la surface

plot3d(x,y,z)
```

Exercice 3 :

Soit $f[(x,y)] = y^2 - x^3 + x$; f est une fonction à 2 variables.

1. Construire le graphe avec `Scilab`
2. La courbe de niveau $f[(x,y)] = 0$ est une courbe elliptique. Tracer cette courbe de niveau.

   Corrigé
   Voici le code `Scilab` qui construit ces courbes

```
function [z]=f(x,y)
  z=y**2-x**3+x
endfunction

//definition des intervalles d'affichage
x=[-4:0.1:4];
y=x;

//Calcul de f(x,y) et stockage dans z
z=feval(x,y,f);

//Affichage de la surface
plot3d(x,y,z)

// definition de la fonction g qui sera le plan z=0
function [z]=g(x,y)
  z=0
endfunction

//Calcul de g(x,y) et stockage dans la matrice z2
z2=feval(x,y,g);

//Affichage de la surface
plot3d(x,y,z2)
 a=gca();//"axes" courant
  p=a.children(2);//
  p.color_mode=3;//dessus vert
  p.hiddencolor=5;//dessous rouge
```

   Et le graphe figure 2.5

2.1.6 Exercices

Exercice 4 :

1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction à 2 variables, définie, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ par $f[(x,y)] = 1-x-y$. Quelles sont les lignes de niveau 1 et -1 ?
2. Même question pour $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction à 2 variables, définie, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ par $g[(x,y)] = -1 - x - y$.

Exercice 5 :

Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction à 2 variables, définie, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ par $f[(x,y)] = \dfrac{x+y}{x^2+y^2-1}$.
Quelles sont les courbes de niveau -2, -1, 1 et 2. Généraliser pour $c \in \mathbb{R}$

Exercice 6 :

Tracer le graphe (`Scilab` ou `Python`) des fonctions à 2 variables suivantes :

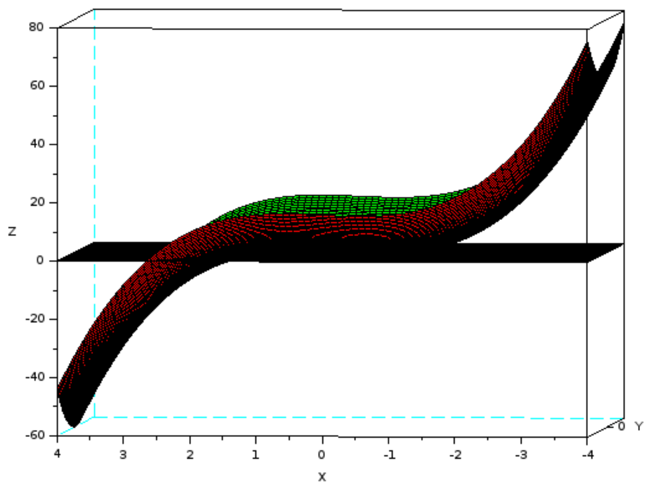

FIGURE 2.5 – Le graphe de la fonction, et la coupe du plan $z = 0$

1. $f_1\left[(x,y)\right] = x^2 + 2$
2. $f_2\left[(x,y)\right] = (x-1)^2 + y^2$
3. $f_3\left[(x,y)\right] = x^2 + y^2 - 2x + 8$
4. $f_4\left[(x,y)\right] = 3x^2 + 3y^2 - 6x + 12y + 15$

Exercice 7 :

On s'intéresse aux lignes de niveau suivantes qui sont sur la colonne de gauche. Faire la correspondance entre les équations et les descriptions appropriées.

$x^2 + 3y^2 = 0$	Aucun point
$y^2 = 0$	Un singleton
$x^2 + y^2 + 1 = 0$	Une droite
$x^2 - y^2 = 0$	2 droites

Exercice 8 :

Etudier le comportement, en fonction de $c \in \mathbb{R}$ des courbes de niveau $f\left[(x,y)\right] = c$ pour chacune des fonctions suivantes :

1. $f_1\left[(x,y)\right] = x^2 + y^2 + 1$
2. $f_2\left[(x,y)\right] = 1 - x^2 - y^2$
3. $f_3\left[(x,y)\right] = x^2 + xy$

2.2 Applications de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$

2.2.1 Définition

Une fonction f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$, ou d'une partie $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$, à un point $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ fait correspondre un point $y = (y_1, \cdots, y_p) \in \mathbb{R}^p$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} f : \mathcal{U} & \longrightarrow & \mathbb{R}^p \\ (x_1, \cdots, x_n) & \longmapsto & f(x_1, \cdots, x_n) = (y_1, \cdots, y_p) \end{array} \right.$$

Exemple 7 :

Un premier exemple de fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ ce sont les applications linéaires que l'on peut représenter par des matrices à p lignes et n colonnes. Il est donc possible d'étudier les matrices d'un point de vue de l'analyse

Remarque 5 :

1. Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$; pour $y = (y_1, \cdots, y_p) \in \mathbb{R}^p$ et tel que il existe $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $y = f(x)$, on peut écrire, pour $i = 1, \cdots, p$, $y_i = f_i(x_1, \cdots, x_n)$
   (a) L'application $f_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est appelée application composante
   (b) Si $p_i : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ est une projection alors $f_i = p_i \circ f$
   (c) f détermine donc les fonctions f_i pour $i = 1, \cdots, p$, et réciproquement, les fonctions f_i déterminent la fonction f
2. Ainsi, la donnée d'une fonction $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ est équivalente à la donnée de p fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$

2.2.2 Opérations sur les fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ et $f : E \longrightarrow \mathbb{R}^p$.
On peut définir plusieurs opérations sur les fonctions :

1. Addition
   Pour $g : E \longrightarrow \mathbb{R}^p$, on peut définir l'addition par :
$$\begin{array}{rcl} f+g : E & \longrightarrow & \mathbb{R}^p \\ x & \longmapsto & (f+g)(x) = f(x) + g(x) \end{array}$$
2. Multiplication
   Pour $\lambda : E \longrightarrow \mathbb{R}$, on peut définir la multiplication par λ par :
$$\begin{array}{rcl} \lambda \times f : E & \longrightarrow & \mathbb{R}^p \\ x & \longmapsto & (\lambda \times f)(x) = \lambda(x) \times f(x) \end{array}$$
3. Multiplication par un réel
   Pour tout $\mu \in \mathbb{R}$, on peut définir la multiplication par μ par :
$$\begin{array}{rcl} \mu \times f : E & \longrightarrow & \mathbb{R}^p \\ x & \longmapsto & (\mu \times f)(x) = \mu \times f(x) \end{array}$$

Remarque 6 :

Si nous appelons $\mathcal{E}$ l'ensemble des applications de E dans $\mathbb{R}^p$, on vérifie facilement que $\mathcal{E}$, muni des opérations d'addition et de multiplication par un réel est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel

2.2.3 Composition des fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$, $f : E \longrightarrow \mathbb{R}^p$, $F \subset \mathbb{R}^p$ et $g : F \longrightarrow \mathbb{R}^q$. On suppose $f(E) \subset F$
On peut alors définir une fonction $g \circ f$ par :
$$\begin{array}{rcl} g \circ f : E & \longrightarrow & \mathbb{R}^q \\ x & \longmapsto & (g \circ f)(x) = g[f(x)] \end{array}$$

Remarque 7 :

Voici une remarque toute simple : $g \circ f$ est entièrement déterminée par $g_i \circ f = p_i \circ g \circ f$ pour $i = 1, \cdots, q$

2.3 Limites et continuité d'une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$

2.3.1 Limite d'une fonction f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ et $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur E et $x_0 \in E$. On suppose f définie au voisinage de x_0, sauf peut-être en x_0.
On dit que la fonction f admet pour limite le nombre $l \in \mathbb{R}$ au point x_0 si :
Pour tout nombre $\varepsilon > 0$, il existe un nombre $\eta_\varepsilon > 0$ tel que, pour tour $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $0 < \|x - x_0\| < \eta_\varepsilon$ nous avons $|f(x) - l| < \varepsilon$
On écrit alors : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$

Remarque 8 :

1. Dans l'énonce 2.3.1, la norme $\|x - x_0\|$ représente n'importe quelle norme déjà définie sur $\mathbb{R}^n$
2. Le résultat est indépendant du choix des normes.

2.3.2 Proposition

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$, $x_0 \in E$, $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : E \longrightarrow \mathbb{R}$

1. Si f admet une limite en x_0, alors cette limite est unique
2. Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ et si $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l_1$, alors :
   (a) $\lim\limits_{x \to x_0} (f + g)(x) = l + l_1$
   (b) $\lim\limits_{x \to x_0} (f \times g)(x) = l \times l_1$
   (c) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ $\lim\limits_{x \to x_0} (\lambda f)(x) = \lambda l$
3. Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ et si $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l_1$ avec $l_1 \neq 0$, alors :

$$\lim_{x \to x_0} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{l}{l_1}$$

Démonstration

La démonstration de cette proposition est semblable à celles que nous faisons pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ *(comme quoi, c'est le domaine d'arrivée qui importe)*
En particulier, l'unicité est une conséquence de l'inégalité triangulaire, vraie pour tout $x \in E$, et si nous avons supposé $l \neq l'$, c'est à dire $0 < |l - l'|$:

$$|l - l'| = |l - f(x) + f(x) - l'| \leqslant |f(x) - l| + |f(x) - l'|$$

2.3.3 Limite infinie d'une fonction f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ en $x_0 \in \mathbb{R}^n$

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ et $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur E et $x_0 \in E$. On suppose f définie au voisinage de x_0, sauf peut-être en x_0.

1. On dit que la fonction f admet pour limite $+\infty$ en $x_0 \in E$ si :
   Pour tout nombre $A > 0$, il existe un nombre $\eta_A > 0$ tel que, pour tour $x \in$ tel que $0 < \|x - x_0\| < \eta_A$ nous avons $f(x) > A$
   On écrit alors : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$
2. On dit que la fonction f admet pour limite $-\infty$ en $x_0 \in E$ si :
   Pour tout nombre $A > 0$, il existe un nombre $\eta_A > 0$ tel que, pour tour $x \in$ tel que $0 < \|x - x_0\| < \eta_A$ nous avons $f(x) < -A$
   On écrit alors : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$

Exemple 8 :

1. On considère la fonction suivante, définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ par :

$$\begin{cases} f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto f(x,y) = \dfrac{1+x+y}{x^2-y^2} \end{cases}$$

Cette fonction admet-elle une limite en $(0,0)$?

Il y a plusieurs façons pour un couple $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ de tendre vers $(0,0)$; il peut tendre suivant une droite d'équation $y = \lambda x$, suivant une parabole ou une spirale !!

De l'unicité de la limite, quelle que soit la façon de se rapprocher de $(0,0)$, la limite sera toujours la même.

— Supposons que que nous nous rapprochions de $(0,0)$ par les droites $y = \lambda x$

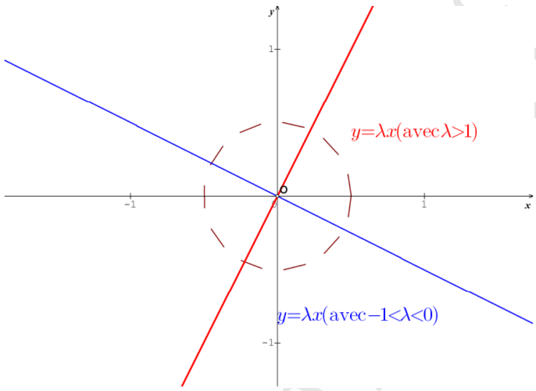

FIGURE 2.6 – Etude de la limite en $(0,0)$ pare les droites $y = \lambda x$

Nous étudions alors

$$f(x,\lambda x) = \frac{1+x+\lambda x}{x^2-\lambda^2 x^2} = \frac{1+(1+\lambda)x}{(1-\lambda^2)x^2}$$

Donc, au voisinage de $x=0$, nous avons $f(x,\lambda x) \underset{x=0}{\approx} \dfrac{1}{(1-\lambda^2)x^2}$, et donc :

∗ Si $|\lambda| > 1$, alors $\lim\limits_{x\to 0} f(x,\lambda x) = -\infty$

∗ Si $|\lambda| < 1$, alors $\lim\limits_{x\to 0} f(x,\lambda x) = +\infty$

Et f n'admet donc pas de limite en $(0,0)$

— Nous aurions pu aussi étudier $f(0,y) = \dfrac{1+y}{-y^2}$ qui tend vers $-\infty$ lorsque y tend vers zéro, ainsi que $f(x,0) = \dfrac{1+x}{x^2}$ qui tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers zéro.

La conclusion est donc aussi que f n'admet donc pas de limite en $(0,0)$

2. On considère la fonction suivante, définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ par :

$$\begin{cases} f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^4+y^2} \end{cases}$$

Cette fonction admet-elle une limite en $(0,0)$?

On peut déjà remarquer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f(x,0) = 0$ et pour tout $y \in \mathbb{R}^*$, $f(0,y) = 0$

Recherchons des limites "candidates" en regardant, comme tout à l'heure, $f(x,\lambda x)$ avec $\lambda \neq 0$

$$f(x,\lambda x) = \frac{x(\lambda x)^2}{x^4+(\lambda x)^2} = \frac{\lambda^2 x^3}{x^4+(\lambda x)^2} = \frac{\lambda^2 x}{x^2+\lambda^2}$$

Et nous obtenons donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x,\lambda x) = 0$. Ainsi, si une limite existe, cette limite ne peut être que nulle.

Cherchons à le démontrer.

Pour tout $y \in \mathbb{R}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons $x^4+y^2 \geqslant y^2$, c'est à dire $\dfrac{1}{x^4+y^2} \leqslant \dfrac{1}{y^2}$, et donc :

$$|f(x,y)| = \left|\frac{xy^2}{x^4+y^2}\right| = \frac{|x|\,y^2}{x^4+y^2} \leqslant \frac{|x|\,y^2}{y^2} = |x| \leqslant |x|+|y| = \|(x,y)\|_1$$

Nous avons donc : $|f(x,y)| \leqslant \|(x,y)\|_1$. Ainsi, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$

3. On considère la fonction suivante, définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(\lambda, \lambda) \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}\}$ par :

$$\begin{cases} f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(\lambda,\lambda) \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}\} & \longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ \qquad\qquad (x,y) & \longmapsto \quad f(x,y) = \dfrac{xy}{x+y} \end{cases}$$

Cette fonction admet-elle une limite en $\{(0,0)\}$?

Regardons la limite suivant la droite d'équation $y = \lambda x$.

— Supposons que que nous nous rapprochions de $(0,0)$ par les droites $y = \lambda x$

$$f(x, \lambda x) = \frac{\lambda x^2}{x + \lambda x} = \frac{\lambda x}{1+\lambda}$$

Et donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x, \lambda x) = 0$

— Etudions, maintenant, la convergence vers $(0,0)$ par la parabole $y = -x + x^2$

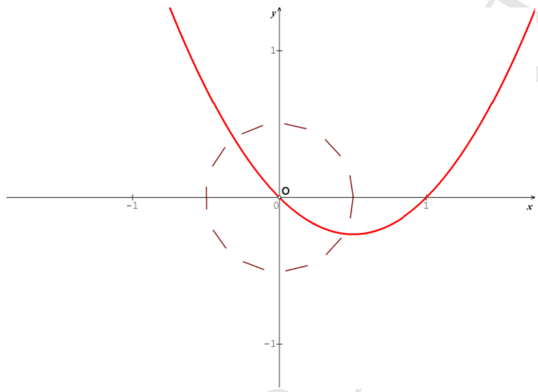

FIGURE 2.7 – Etude de la limite en $(0,0)$ par la parabole $y = -x + x^2$

Nous avons alors $f\left(x, -x+x^2\right) = \dfrac{-x^2+x^3}{x^2} = -1 + x$ Donc, nous avons $\lim\limits_{x\to 0} f\left(x, -x+x^2\right) = -1$.

Et f n'admet donc pas de limite en $(0,0)$

4. On considère la fonction suivante, définie sur $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ où } y \in \mathbb{R}^*\right\}$ par :

$$\begin{cases} f : \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ où } y \in \mathbb{R}^*\right\} & \longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ \qquad\qquad (x,y) & \longmapsto \quad f(x,y) = \dfrac{1+x^2+y^2}{y} \times \sin y \end{cases}$$

Cette fonction admet-elle une limite en $(0,0)$?

Pour étudier cette fonction f, il est possible de considérer 2 fonctions à 2 variables :

— $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $g(x,y) = 1 + x^2 + y^2$

— $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $h(x,y) = \dfrac{\sin y}{y}$

De manière évidente, nous avons $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin y}{y} = 1$.

D'autre part, on peut supposer que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} 1 + x^2 + y^2 = 1$. Démontrons le :

$$|g(x,y) - 1| = x^2 + y^2 = \|(x,y)\|_2^2$$

Ce qui montre que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = 1$. Comme $f(x,y) = g(x,y) \times h(x,y)$, nous avons

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) \times \lim_{(x,y)\to(0,0)} h(x,y)$$

Et donc, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 1$

2.3.4 Quelques exercices

Exercice 9 :

Etudier l'existence d'une limite en $(0,0)$ pour les fonctions $f_i : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ suivantes, pour lesquelles on donne $f_i(x,y)$

1. $f_1(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$
   (Étudier $f_1(x,2x)$ et $f_1(x,3x)$)
2. $f_2(x,y) = \dfrac{(x+y)^2}{x^2+y^2}$
3. $f_3(x,y) = \dfrac{x^2}{|x-y|}$
4. $f_4(x,y) = \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$
   Écrire $x^3+y^3 = (x+y)\left(x^2-xy+y^2\right)$, puis démontrer que $|f_4(x,y)| \leqslant \dfrac{3}{2}(|x|+|y|)$ et conclure

Exercice 10 :

On considère la fonction suivante, définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\begin{cases} f : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|y|}{x^2} e^{-\frac{|y|}{x^2}} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases} \end{cases}$$

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Etudier $\lim\limits_{x \to 0} f(x, \lambda x)$
2. Pour $x \neq 0$, calculer $f\left(x, x^2\right)$
3. Conclure quant à $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

Exercice 11 :

1. Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x,y,z) = \dfrac{xyz}{x+y+z}$; la fonction f admet-elle une limite en $(0,0,0)$?
2. Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x,y,z) = \dfrac{x+y}{x^2-y^2+z^2}$; la fonction f admet-elle une limite en $(2,-2,0)$? *(Etudier, pour $h \in \mathbb{R}$, étudier $f(2+h,-2-h,h)$, puis $f(2+h,-2+h,0)$ et conclure)*

2.3.5 Continuité en un point d'une fonction f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$

Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}^n$.
On dit que la fonction f est continue en $x_0 \in \mathbb{R}^n$ si :

— $f(x_0)$ existe
— Et $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

C'est à dire que :
Pour tout nombre $\varepsilon > 0$, il existe un nombre $\eta_\varepsilon > 0$ tel que, pour tour $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $0 < \|x - x_0\| < \eta_\varepsilon$ nous avons $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Exemple 9 :

1. L'addition est une fonction continue.
   En effet, posons
   $$\begin{cases} S : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & S(x,y) = x+y \end{cases}$$
   S est une fonction continue en $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. En effet :
   $$|S(x,y) - S(x_0,y_0)| = |(x+y) - (x_0+y_0)| \leqslant |x-x_0| + |y-y_0| = \|(x,y) - (x_0,y_0)\|_1$$
   Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, si $\|(x,y) - (x_0,y_0)\|_1 \leqslant \varepsilon$, alors $|S(x,y) - S(x_0,y_0)| \leqslant \varepsilon$, ce qui montre que S est continue pour tout $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$
   De la même manière, la soustraction $S(x,y) = x - y$ est continue sur $\mathbb{R}^2$
2. La multiplication est une fonction continue

En effet, posons

$$\left\{\begin{array}{rcl} P:\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & P(x,y)=xy \end{array}\right.$$

P est une fonction continue en $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$. En effet :

$$\begin{array}{rcl} |P(x,y)-P(x_0,y_0)| = & & |xy-x_0y_0| \\ & = & |xy-x_0y+x_0y-x_0y_0| \\ & \leqslant & |xy-x_0y|+|x_0y-x_0y_0| \\ & \leqslant & |y|\,|x-x_0|+|x_0|\,|y-y_0| \end{array}$$

Comme (x,y) est « voisin » de (x_0,y_0), il existe $M>0$ tel que $|y|<M$ et $|x|<M$, et donc

$$|P(x,y)-P(x_0,y_0)|\leqslant M(|x-x_0|+|y-y_0|)=M\,\|(x,y)-(x_0,y_0)\|_1$$

Ainsi, pour tout $\varepsilon>0$, si $\|(x,y)-(x_0,y_0)\|_1\leqslant\dfrac{\varepsilon}{M}$, alors $|P(x,y)-P(x_0,y_0)|\leqslant\varepsilon$, ce qui montre que P est continue pour tout $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$

Remarque 9 :

1. Soit $f:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$, continue en $A=(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^n$. Alors, si nous considérons φ_1 définie par

$$\left\{\begin{array}{rcl} \varphi_1:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \varphi(x)=f(x,a_2,a_3,\cdots,a_n) \end{array}\right.$$

Alors, φ_1 est continue en $x=a_1$
Plus généralement, si nous considérons φ_i définie par

$$\left\{\begin{array}{rcl} \varphi_i:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \varphi(x)=f(a_1,a_2,a_3,\cdots,a_i,x,a_{i+1},\cdots,a_n) \end{array}\right.$$

Alors, φ_i est continue en $x=a_i$
On dit alors que f **est continue en chacune de ses variables** $x_1,\cdots,x_n$

2. <u>**Mais, la réciproque est fausse**, c'est à dire que la continuité des fonctions $\varphi_1,\cdots,\varphi_n$ n'implique pas la continuité de f.</u>

Par exemple.
Soit $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ définie par $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ si $(x,y)\neq(0,0)$ et $f(0,0)=0$.

— Nous définissions $\varphi:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ par $\varphi(x)=f(x,0)=0$; cette fonction φ est continue en $x=0$ puisque constante.
De même, nous définissions $\psi:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ par $\psi(x)=f(0,x)=0$; cette fonction ψ est continue en $x=0$ puisque constante.
Mais, $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ n'est pas continue en $(0,0)$. En effet :
  - ⋆ $f(x,2x)=\dfrac{2x^2}{x^2+4x^2}=\dfrac{2}{5}$
  - ⋆ $f(x,3x)=\dfrac{3x^2}{x^2+9x^2}=\dfrac{3}{10}$

On remarque donc que f est constante sur les droites $y=2x$, $y=3x$, et pls généralement, sur les droites $y=\lambda x$, où nous avons $f(x,\lambda x)=\dfrac{\lambda x^2}{x^2+\lambda^2x^2}=\dfrac{\lambda}{1+\lambda^2}$

— Autre remarque, si nous étudions le comportement de f sur les cercles de centre $(0,0)$ en calculant $f(r\cos\theta,r\sin\theta)$ avec r fixé et $\theta\in[0;2\pi]$

$$f(r\cos\theta,r\sin\theta)=\frac{r^2\cos\theta\sin\theta}{r^2}=\frac{1}{2}\sin 2\theta$$

Ainsi, sur chaque cercle de rayon r aussi petit que l'on souhaite, f varie toujours entre $-\dfrac{1}{2}$ et $+\dfrac{1}{2}$; f ne peut donc être continue en $(0,0)$

— Remarque supplémentaire : f est une fonction bornée.
En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y \in \mathbb{R}$, nous avons $|xy| \leqslant \frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)$, et donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y \in \mathbb{R}$

$$|f(x,y)| = \frac{|xy|}{x^2+y^2} \leqslant \frac{1}{2}\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = \frac{1}{2}$$

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y \in \mathbb{R}$, $|f(x,y)| \leqslant \frac{1}{2}$ et f est bien bornée sur $\mathbb{R}^2$.
On peut même ajouter que cette borne est atteinte. En faisant $\theta = \frac{\pi}{4}$, pour $r > 0$, nous avons $f\left(r\frac{\sqrt{2}}{2}, r\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2}$

2.3.6 Proposition

Soient $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \mathcal{U}$, $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$
On suppose que :

— f continue en x_0

— g continue en x_0

Alors :

1. $f+g$ est continue en x_0
2. $g \times f$ est continue en x_0

Démonstration

La démonstration n'est qu'une application de 2.3.2 sur les opérations sur les limites

2.3.7 Proposition

Soit $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \mathcal{U}$, $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ avec $f(x_0) \neq 0$
Si la fonction f est continue en x_0, alors, il existe un voisinage $V \subset \mathbb{R}^n$ de x_0 tel que :

— Pour tout $x \in V \cap \mathcal{U}$ alors, $f(x) \neq 0$

— La fonction $\frac{1}{f} : V \cap \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue en x_0

Démonstration

Remarquons, tout d'abord que $f(x_0) \neq 0 \Longleftrightarrow |f(x_0)| > 0$
Comme f est continue en x_0, il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, nous ayions l'implication :

$$\|x - x_0\| \leqslant \eta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| \leqslant \frac{|f(x_0)|}{2}$$

L'inégalité $|f(x) - f(x_0)| \leqslant \frac{|f(x_0)|}{2}$ montre que $|f(x_0)| - |f(x)| \leqslant \frac{|f(x_0)|}{2}$, c'est à dire

$$\frac{|f(x_0)|}{2} < |f(x)|$$

Et donc, nous avons $|f(x)| > 0$ dès que $\|x - x_0\| \leqslant \eta$.
Ce que nous voulions

2.3.8 Quelques exercices

Exercice 12 :

Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$. Montrer que f n'est pas continue en $(0,0)$, mais que la restriction de f à toute droite passant par $(0,0)$ est continue en $(0,0)$.

Exercice 13 :

Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^2+y^4}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$. Montrer que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, nous avons $|f(x,y)| \leqslant |y|$ et que donc f est continue en $(0,0)$.

Exercice 14 :

Etudier la continuité au point $(0,0)$ des fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définies pour chaque élément $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ par :

1. $h(x,y) = \left(x^2+y^2\right)\sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $h(0,0) = 0$
2. $f(x,y) = \dfrac{(x+y)^2}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$

Exercice 15 :

1. Montrer que la fonction Φ définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ par $\Phi(x,y) = \dfrac{x^2+y^2-xy}{x^2+y^2}$ est bornée.
2. Etudier la continuité au point $(0,0)$ de la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie pour chaque élément $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ par : $g(x,y) = \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $g(0,0) = 0$

Exercice 16 :

Déterminer $f(0,0)$ pour que la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ pour $(x,y) \neq (0,0)$ par :

$$f(x,y) = \frac{1-\cos\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2}$$

soit continue au point $(0,0)$

Exercice 17 :

Pour cet exercice, nous rappelons [1] que pour tout $u \in \mathbb{R}$, nous avons $|1-\cos u| \leqslant \dfrac{u^2}{2}$
Est-il possible de prolonger par continuité au point $(0,0)$ la fonction f définie sur l'ensemble $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } xy > 0\right\}$ par :

$$f(x,y) = \frac{1-\cos\sqrt{xy}}{y}$$

2.4 Limite et continuité d'une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$

Dans cette section, nous notons d_n la distance sur $\mathbb{R}^n$ et d_p, celle dans $\mathbb{R}^p$; ces distances sont définies par les normes classiques équivalentes déjà étudiées.

1. Il est possible de redémontrer !

2.4.1 Définition

Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$, une fonction définie au moins au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Soit $l = (l_1, \cdots, l_p) \in \mathbb{R}^p$
On dit que f admet pour limite l aupoint x_0 si, à tout $\varepsilon > 0$, onpeut associer un nombre $\eta > 0$ tel que, pour tout élément $x \in \mathbb{R}^n$ vérifiant $d_n(x, x_0) \leqslant \eta$, on ait $d_p(f(x), l) \leqslant \varepsilon$

Remarque 10 :

Voici la définition formalisée : $(\exists l \in \mathbb{R}^p)\,(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \eta > 0)\,(\forall x \in \mathbb{R}^n)\,((d_n(x, x_0) \leqslant \eta) \Longrightarrow (d_p(f(x), l) \leqslant \varepsilon)$

2.4.2 Unicité de la limite

Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$, une fonction définie au moins au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}^n$ qui admet en x_0 une limite $l \in \mathbb{R}^p$
Alors, cette limite est unique

Démonstration

La démonstration est classique et laissée au lecteur. Elle s'appuie, comme à chaque fois, sur l'inégalité triangulaire, en supposant qu'il y ait 2 limites l et l' telles que $l \neq l'$:

$$d_p(l, l') \leqslant d_p(l, f(x)) + d_p(f(x), l')$$

2.4.3 Opérations sur les limites

Soient $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \overline{\mathcal{U}}$, $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^p$, $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^p$ et $\lambda : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$
On suppose que :

- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l_f$
- $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l_g$
- $\lim\limits_{x \to x_0} \lambda(x) = l_\lambda$

Alors :

1. $\lim\limits_{x \to x_0} (f + g)(x) = l_f + l_g$
2. $\lim\limits_{x \to x_0} (\lambda f)(x) = l_\lambda \times l_f$
3. Pour tout $\mu \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to x_0} (\mu \times f)(x) = \mu \times l_f$

Démonstration

Cette démonstration est très simple et les méthodes utilisées sont celles des fonctions numériques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ou de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.
Les normes choisies sont les normes classiques de $\mathbb{R}^n$ et de $\mathbb{R}^p$

1. On démontre que $\lim\limits_{x \to x_0} (f + g)(x) = l_f + l_g$

   Soit $\varepsilon > 0$; nous allons donc évaluer $\|(f+g)(x) - (l_f + l_g)\|$:

   $$\|(f+g)(x) - (l_f + l_g)\| = \|(f(x) - l_f) + (g(x) - l_g)\| \leqslant \|(f(x) - l_f)\| + \|(g(x) - l_g)\|$$

   - ⋆ Comme $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l_f$, il existe $\eta_f > 0$ tel que si $\|x - x_0\| \leqslant \eta_f$, alors $\|(f(x) - l_f)\| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$
   - ⋆ De même, comme $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l_g$, il existe $\eta_g > 0$ tel que si $\|x - x_0\| \leqslant \eta_g$, alors $\|(g(x) - l_g)\| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$

   En posant $\eta = \inf\{\eta_f, \eta_g\}$, si $\|x - x_0\| \leqslant \eta$, alors $\|(g(x) - l_g)\| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$ et $\|(f(x) - l_f)\| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$. Donc,
   Si $\|x - x_0\| \leqslant \eta$, alors :

   $$\|(f(x) - l_f) + (g(x) - l_g)\| \leqslant \|(f(x) - l_f)\| + \|(g(x) - l_g)\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Nous avons donc : $\lim\limits_{x\to x_0}(f+g)(x) = l_f + l_g$

2. On démontre que $\lim\limits_{x\to x_0}(\lambda f)(x) = l_\lambda \times l_f$

Nous pouvons donc écrire :

$$\begin{aligned} l_\lambda l_f - \lambda(x) f(x) = & \; l_\lambda l_f - l_f\lambda(x) + \lambda(x) l_f - \lambda(x) f(x) \\ = & \; l_f(l_\lambda - \lambda(x)) + \lambda(x)(l_f - f(x)) \end{aligned}$$

En passant aux normes, nous avons :

$$\|l_\lambda l_f - \lambda(x) f(x)\| \leqslant \|l_f(l_\lambda - \lambda(x))\| + \|\lambda(x)(l_f - f(x))\|$$

Or, $\|l_f(l_\lambda - \lambda(x))\| = \|l_f\|\,|l_\lambda - \lambda(x)|$ et $\|\lambda(x)(l_f - f(x))\| = |\lambda(x)|\,\|l_f - f(x)\|$

Soit $\varepsilon > 0$

— Il existe $\eta_1 > 0$ tel que si $\|x - x_0\| \leqslant \eta_1$, alors nous avons $|l_\lambda - \lambda(x)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2} \times a$ où $a = 1$ si $l_f = 0$ et $a = \dfrac{1}{l_f}$ si $l_f \neq 0$

— L'inégalité triangulaire classique $||l_\lambda| - |\lambda(x)|| \leqslant |l_\lambda - \lambda(x)|$ nous conduit à écrire

$$|\lambda(x)| \leqslant |l_\lambda - \lambda(x)| + |l_\lambda|$$

Et donc, si $\|x - x_0\| \leqslant \eta_1$, alors $|\lambda(x)| \leqslant |l_\lambda - \lambda(x)| + |l_\lambda| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2} \times a + |l_\lambda| = M$

Ce qui montre que si $\|x - x_0\| \leqslant \eta_1$, alors la fonction λ est bornée

— Il existe aussi $\eta_2 > 0$ tel que si $\|x - x_0\| \leqslant \eta_2$, alors nous avons $\|l_f - f(x)\| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2M}$

Soit $\eta = \inf(\eta_1, \eta_2)$; alors, si $\|x - x_0\| \leqslant \eta$ nous avons :

$$\begin{aligned} \|l_\lambda l_f - \lambda(x) f(x)\| \leqslant & \; \|l_f\|\,|l_\lambda - \lambda(x)| + |\lambda(x)|\,\|l_f - f(x)\| \\ \leqslant & \; \|l_f\| \times \frac{\varepsilon}{2} \times a + |\lambda(x)| \times \frac{\varepsilon}{2M} \\ \leqslant & \; \frac{\varepsilon}{2} + M \times \frac{\varepsilon}{2M} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Ce que nous voulions

3. On démontre que pour tout $\mu \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to x_0}(\mu \times f)(x) = \mu \times l_f$

— Si $\mu = 0$, il n'y a pas de démonstration ! ! En effet, $\mu \times f = \mathcal{O}$ où $\mathcal{O}$ est la fonction nulle ; nous avons alors $\lim\limits_{x\to x_0}(\mu \times f)(x) = \lim\limits_{x\to x_0}\mathcal{O}(x) = 0 = \mu \times l_f$

— Supposons $\mu \neq 0$

Alors, $\mu \times l_f - \mu \times f(x) = \mu(l_f - f(x))$, et donc $\|\mu \times l_f - \mu \times f(x)\| = |\mu| \times \|l_f - f(x)\|$

Soit $\varepsilon > 0$.

Alors, il existe $\eta > 0$ tel que si $\|x - x_0\| \leqslant \eta$ nous avons : $\|l_f - f(x)\| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{|\mu|}$

Donc, $\|x - x_0\| \leqslant \eta$ nous avons :

$$\|\mu \times l_f - \mu \times f(x)\| = |\mu| \times \|l_f - f(x)\| \leqslant |\mu| \times \frac{\varepsilon}{|\mu|} = \varepsilon$$

Ce que nous voulions

2.4.4 Théorème

Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$, une fonction définie au moins au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}^n$; Pour $i = 1, \cdots, p$, on considère $f_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ les applications composantes, c'est à dire :

$$f(x_1, \cdots, x_n) = (f_1(x_1, \cdots, x_n), \cdots, f_p(x_1, \cdots, x_n))$$

Soit $l = (l_1, \cdots, l_p) \in \mathbb{R}^p$

f admet pour limite l en x_0 si et seulement si, pour tout $i = 1, \cdots, p$, f_i admet pour limite l_i en x_0

Démonstration

1. **On suppose que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$**

   Soit $\varepsilon > 0$.
   Il existe alors $\eta > 0$ tel que si $d_n(x, x_0) \leqslant \eta$ alors $d_p(f(x), l) \leqslant \varepsilon$.

   Prenons comme expression de la distance : $d_p(f(x), l) = \sum\limits_{i=1}^{p} |f_i(x) - l_i|$.

   Alors, pour tout $i = 1, \cdots p$, nous avons $|f_i(x) - l_i| \leqslant d_p(f(x), l) \leqslant \varepsilon$.
   Ainsi, pour tout $i = 1, \cdots, p$, pour tout $\varepsilon > 0$, Il existe alors $\eta > 0$ tel que si $d_n(x, x_0) \leqslant \eta$ alors $|f_i(x) - l_i| \leqslant \varepsilon$
   Et donc, pour tout $i = 1, \cdots, p$ $\lim\limits_{x \to x_0} f_i(x) = l_i$

2. **Réciproquement, on suppose que pour tout $i = 1, \cdots, p$, nous avons $\lim\limits_{x \to x_0} f_i(x) = l_i$**

   Soit $\varepsilon > 0$
   Comme pour tout $i = 1, \cdots, p$, nous avons $\lim\limits_{x \to x_0} f_i(x) = l_i$, il existe $\eta_i > 0$ tel que si $d_n(x, x_0) \leqslant \eta_i$ alors $|f_i(x) - l_i| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{p}$
   On pose $\eta = \inf\limits_{i=1,\cdots,p} \eta_i$

   Alors, si $d_n(x, x_0) \leqslant \eta$ nous avons $d_p(f(x), l) = \sum\limits_{i=1}^{p} |f_i(x) - l_i| \leqslant \sum\limits_{i=1}^{p} \dfrac{\varepsilon}{p} = p \times \dfrac{\varepsilon}{p} = \varepsilon$.

   Ainsi, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$

Remarque 11 :

La démonstration aurait été semblable avec toute autre norme *(norme euclidienne ou norme infinie)* ; la faire à titre d'exercice.

2.4.5 Continuité en un point $x_0 \in \mathbb{R}^n$

Une application $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ définie au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}^n$ est dite continue en x_0 si et seulement si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Remarque 12 :

1. La définition de fonction continue peut donc être écrite :

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \eta > 0)\,(\forall x \in B_n(x_0, \eta))\,(f(x) \in B_p(f(x_0), \varepsilon))$$

2. Autre forme de la définition :

   f est continue en $x_0 \in \mathbb{R}^n$ si et seulement si
   Pour toute boule ouverte $B_p \in \mathbb{R}^p$ de centre $f(x_0)$, on peut associer une boule $B_n \in \mathbb{R}^n$ de centre x_0 telle que $f(B_n) \subset B_p$

2.4.6 Proposition

Soient $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \mathcal{U}$, $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^p$, $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^p$ et $\lambda : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$
On suppose que :

— f continue en x_0 — g continue en x_0 — λ continue en x_0

Alors :

1. $f + g$ est continue en x_0
2. $\lambda \times f$ est continue en x_0
3. Pour tout $\mu \in \mathbb{R}$, $\mu \times f$ est continue en x_0

Démonstration

La démonstration n'est qu'une application de 2.4.3 sur les opérations sur les limites

Remarque 13 :

1. La continuité en un point x_0 est une propriété locale
2. Soit $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$, $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^p$, $F \subset \mathcal{U}$ et $x_0 \in F$.
   Si f est continue en x_0, la restriction f_F de f à F est aussi continue en x_0, mais la réciproque n'est pas toujours vraie.

   Reprenons l'exemple $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$.

   On considère $F = \{(x, 0) \text{ avec } x \in \mathbb{R}\}$; alors, la restriction f_F de f à F est continue sur F puisque constante et nulle sur F.
   C'est le même problème avec $F' = \{(0, y) \text{ avec } y \in \mathbb{R}\}$.
   Mais, f n'est pas continue en $(0, 0)$

2.4.7 Composition des applications

Soit $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ et $x_0 \in \mathcal{U}$. On considère $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^p$, continue en x_0
Soit $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^p$ et on suppose $f(\mathcal{U}) \subset \mathcal{V}$. On considère $g : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}^q$, continue en $f(x_0)$
Alors, $g \circ f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^q$ est continue en x_0

La démonstration de cette proposition est tout à fait classique et est semblable aux fonctions numériques des variables réelles, vues en L_0 et L_1. Nous allons cependant la faire.

Démonstration

Soit $\varepsilon > 0$

— Comme g est continue en $f(x_0)$, il existe $\eta_\varepsilon > 0$ tel que si $\|f(x) - f(x_0)\| \leqslant \eta_\varepsilon$, alors $\|g(f(x)) - g(f(x_0))\| \leqslant \varepsilon$

— De même, comme f est continue en x_0, il existe $\alpha_{\eta_\varepsilon} > 0$ tel que si $\|x - x_0\| \leqslant \alpha_{\eta_\varepsilon}$, alors $\|f(x) - f(x_0)\| \leqslant \eta_\varepsilon$

Donc, si $\|x - x_0\| \leqslant \alpha_{\eta_\varepsilon}$, alors $\|g(f(x)) - g(f(x_0))\| \leqslant \varepsilon$. Et nous avons démontré que $g \circ f$ est continue en x_0

Remarque 14 :

Soit $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^p$. Soient $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^p$ et on suppose $f(\mathcal{U}) \subset \mathcal{V}$ et $g : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}^q$. On peut avoir $g \circ f$ continue, l'une des deux fonctions f ou g continue sans que l'autre le soit : il suffit de prendre $g : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}^q$, constante

2.4.8 Proposition

Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ qui à $x_0 \in \mathbb{R}^n$ fait correspondre $f(x_0) \in \mathbb{R}^p$
On suppose que $f(x_0) = (f_1(x_0), f_2(x_0), \cdots, f_p(x_0))$ où les $f_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ sont les applications composantes.
Alors f en continue en x_0 si et seulement si pour $i = 1, \cdots, p$, les f_i sont continues en x_0

Remarque 15 :

On peut écrire $f_i = p_i \circ f$ où p_i représente la i-ème projection

Démonstration

La démonstration de cette proposition est évidente, c'est une conséquence de 2.4.4

2.4.9 Suites et fonctions continues

Soit $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ et $x_0 \in \mathcal{U}$. On considère $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^p$.
Pour que f soit continue en x_0, il faut et il suffit que :
Pour toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers x_0 (c'est à dire telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = x_0$), la suite $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x_0)$

Démonstration

Comme nous devons montrer une équivalence, nous allons procéder en 2 temps Nous avons à démontrer :

$$(f \text{ continue en } x_0) \Longleftrightarrow \left(\left(\text{Toute suite } (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \to x_0\right) \Longrightarrow \left((f(a_n))_{n\in\mathbb{N}} \to f(x_0)\right)\right)$$

Nous sommes devant une expression logique du type : $A \Longleftrightarrow (B \Longrightarrow C)$ Où :
- A est la proposition : $(f$ continue en $x_0)$
- B est la proposition : La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = x_0$
- C est la proposition : La suite $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x_0)$

1. Démontrons que $A \Longrightarrow (B \Longrightarrow C)$
   Supposons donc f continue en x_0
   Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}^n$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = x_0$. Nous allons démontrer que la suite $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x_0)$
   Soit $\varepsilon > 0$
   (a) f étant continue en x_0, il existe $\eta_\varepsilon > 0$ tel que si $x \in \mathbb{R}^n$ est tel que $\|x - x_0\| \leqslant \eta_\varepsilon$, alors $\|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$
   (b) Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = x_0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N$, alors $\|a_n - x_0\| \leqslant \eta_\varepsilon$ et donc, nous avons $\|f(a_n) - f(x_0)\| < \varepsilon$

   Ainsi, pour $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N$, alors $\|f(a_n) - f(x_0)\| < \varepsilon$, et ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(a_n) = f(x_0)$
2. Démontrons que $(B \Longrightarrow C) \Longrightarrow A$
   Pour démontrer cette implication, nous allons utiliser la contraposée, c'est à dire :

   $$\neg A \Longrightarrow \neg(B \Longrightarrow C) \text{ qui est équivalent à } \neg A \Longrightarrow (B \text{ et } \neg C)$$

   Supposons donc que f ne soit pas continue, c'est à dire qu'il existe une boule $B(f(x_0), \varepsilon)$ telle que, pour toute boule $B(x_0, \eta)$ de centre x_0, $f(B(x_0, \eta)) \not\subseteq B(f(x_0), \varepsilon)$
   Soit $\eta > 0$; il existe donc $P \in \mathbb{N}$ tel que si $p > P$ alors $a_p \in B(x_0, \eta)$ et $f(a_p) \notin B(f(x_0), \varepsilon)$. La suite $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers $f(x_0)$
   Ce que nous voulions

2.5 Continuité sur une partie $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$

2.5.1 Définition

Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ une application et $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$. f est dite continue sur $\mathcal{U}$ si et seulement si pour tout $x_0 \in \mathcal{U}$, f est continue en x_0

Exemple 10 :

Soient $a \in \mathbb{R}^n$ et $b \in \mathbb{R}^n$, non nuls et tels que $a \neq b$. On considère :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ t & \longmapsto & f(t) = ta + (1-t)\,b \end{array} \right.$$

f est continue sur $\mathbb{R}$

La démonstration est simple. Soit $t_0 \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$.
Evaluons $\|f(t) - f(t_0)\|$. Nous avons :

$$\begin{aligned} \|f(t) - f(t_0)\| &= \|ta + (1-t)\,b - (t_0 a + (1-t_0)\,b)\| \\ &= \|ta - tb + b - t_0 a - b + t_0 b\| \\ &= \|(ta - tb) - (t_0 a - t_0 b)\| \\ &= \|(t - t_0)(a - b)\| \\ &= |t - t_0|\,\|a - b\| \end{aligned}$$

En posant $\eta = \dfrac{\varepsilon}{\|a-b\|}$, si $|t - t_0| \leqslant \eta$ alors $\|f(t) - f(t_0)\| \leqslant \varepsilon$

Ci-après, de 2.5.2 à 2.5.5, une « rafale » de résultats non démontrés, mais qui sont des applications simples de théorèmes précédents.

2.5.2 Opérations sur les fonctions continues

Soient $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$, $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^p$, $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^p$ et $\lambda : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$
On suppose que :

— f continue sur $\mathcal{U}$ — g continue sur $\mathcal{U}$ — λ continue sur $\mathcal{U}$

Alors :

1. $f + g$ est continue sur $\mathcal{U}$
2. $\lambda \times f$ est continue sur $\mathcal{U}$
3. Pour tout $\mu \in \mathbb{R}$, $\mu \times f$ est continue sur $\mathcal{U}$

2.5.3 Composition des applications

Soit $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$. On considère $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^p$, continue sur $\mathcal{U}$
Soit $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^p$ et on suppose $f(\mathcal{U}) \subset \mathcal{V}$. On considère $g : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}^q$, continue sur $\mathcal{V}$
Alors, $g \circ f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^q$ est continue en $\mathcal{U}$

2.5.4 Proposition

Soit $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ et $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que f soit continue sur $\mathcal{U}$ et ne s'annule pas sur $\mathcal{U}$
Alors, la fonction $\dfrac{1}{f} : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue sur $\mathcal{U}$

2.5.5 Proposition

Soit $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ et $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^p$ On suppose que pour tout $x \in \mathcal{U}$, nous avons :$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \cdots, f_p(x))$ où les $f_i : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ sont les applications composantes.
Alors f en continue sur $\mathcal{U}$ si et seulement si pour $i = 1, \cdots, p$, les f_i sont continues sur $\mathcal{U}$

Exemple 11 :

Un exemple de fonctions continues sur $\mathbb{R}^n$, ce sont les polynômes :

$$\left\{\begin{array}{rcl} P:\mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1,\cdots,x_n) & \longmapsto & P(x_1,\cdots,x_n) = \displaystyle\sum_{(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\in A} a_{\alpha_1\cdots\alpha_n} x_1^{\alpha_1}\dots x_n^{\alpha_n} \end{array}\right.$$

où : $\left\{\begin{array}{l} A \text{ est une partie finie de } \mathbb{N}^n \\ \text{Pour tout } (\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\in A \text{ nous avons } a_{\alpha_1\cdots\alpha_n}\in\mathbb{R} \end{array}\right.$

Une fonction polynôme P est continue sur $\mathbb{R}^n$

Par exemple, le polynôme $P(X,Y,Z) = 2X^3YZ^5 + 5XY - 5YZ$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}^3$

2.6 Exemples de fonctions continues

2.6.1 Les applications linéaires

Exercice 18 :

Soit $V \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ *(V est la matrice d'une application linéaire f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$).* On suppose V inversible *(c'est à dire que f est bijective et que $V \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ appelé groupe linéaire).* Soit $\mathcal{N}$ une norme sur $\mathbb{R}^n$. On construit, pour $x\in\mathbb{R}^n$ une application Ψ définie par $\Psi(x) = \mathcal{N}(V(x))$. Démontrer que Ψ est une norme sur $\mathbb{R}^n$

2.7 Corrigé de quelques exercices

Dans cette section, tous les exercices ne sont pas corrigés; ce sont ceux qui semblent présenter plus de difficultés ou d'intérêt qui le sont

2.7.1 Premières définitions

Exercice 2 :

Quel est le domaine de définition de $\left\{\begin{array}{lll} f:\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & f_4(x,y)=\arcsin\left(\dfrac{2x+y}{x-y}\right)\end{array}\right.$

Clairement, pour que f soit définie, il faut que $\left|\dfrac{2x+y}{x-y}\right| \leqslant 1$ qui est donc équivalente à $-1 \leqslant \dfrac{2x+y}{x-y} \leqslant +1$

— Supposons $x>y \Longleftrightarrow x-y>0$

Alors $-1 \leqslant \dfrac{2x+y}{x-y} \leqslant +1 \Longleftrightarrow -(x-y) \leqslant 2x+y \leqslant x-y$

De cette double inégalité, nous tirons : $y-x \leqslant 2x+y \Longleftrightarrow x \geqslant 0$ et $2x+y \leqslant x-y \Longleftrightarrow x+2y \leqslant 0$ D'où l'ensemble solution : $\left\{\begin{array}{l} x>y \\ x \geqslant 0 \\ x+2y \leqslant 0\end{array}\right.$ qui est "modélisé par la figure 2.8 ci-dessous

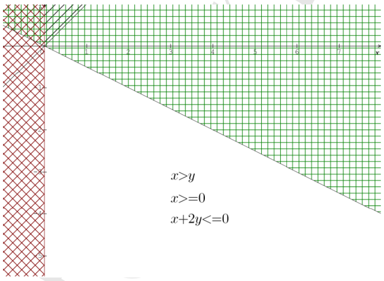

Figure 2.8 – Une représentation d'un premier ensemble solution

— Supposons $x<y \Longleftrightarrow y-x>0$

Alors $-1 \leqslant \dfrac{2x+y}{x-y} \leqslant +1 \Longleftrightarrow -1 \leqslant \dfrac{2x+y}{y-x} \leqslant +1 \Longleftrightarrow -(y-x) \leqslant 2x+y \leqslant y-x$

De cette double inégalité, nous tirons : $x-y \leqslant 2x+y \Longleftrightarrow x+2y \geqslant 0$ et $2x+y \leqslant y-x \Longleftrightarrow x \leqslant 0$ D'où l'ensemble solution : $\left\{\begin{array}{l} x<y \\ x \leqslant 0 \\ x+2y \geqslant 0\end{array}\right.$ qui est "modélisé par la figure 2.9 ci-dessous

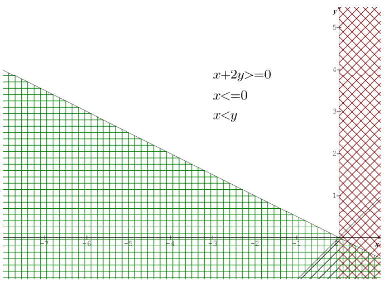

Figure 2.9 – Une représentation du second ensemble solution

L'ensemble solution est la réunion des 2 domaines

2.7.2 Graphes courbes de niveaux

Exercice 5 :

Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction à 2 variables, définie, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ par $f[(x,y)] = \dfrac{x+y}{x^2+y^2-1}$.
Quelles sont les courbes de niveau $c \in \mathbb{R}$

Tout d'abord, il faut remarquer que le domaine de définition de f est $\mathbb{R}^2$ privé du cercle unité

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } x^2+y^2=1\right\}$$

1. Supposons $c=0$
   Alors, nous devons avoir $x+y=0 \iff y=-x$; la courbe de niveau c est donc la droite $t=-x$ sauf les points $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ pour les quels nous avons $x^2+y^2=1$
2. Supposons $c \neq 0$
   Il faut donc trouver tous les couples $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $f[(x,y)] = c$, c'est à dire tels que $\dfrac{x+y}{x^2+y^2-1} = c$. Or :

$$\begin{aligned}
\frac{x+y}{x^2+y^2-1} = c \iff & \quad x+y = cx^2+cy^2-c \\
\iff & \quad cx^2 - x + cy^2 - y = c \\
\iff & \quad x^2 - \frac{x}{c} + y^2 - \frac{y}{c} = 1 \\
\iff & \quad \left(x - \frac{1}{2c}\right)^2 - \frac{1}{4c^2} + \left(y - \frac{1}{2c}\right)^2 - \frac{1}{4c^2} = 1 \\
\iff & \quad \left(x - \frac{1}{2c}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2c}\right)^2 = 1 + \frac{1}{2c^2}
\end{aligned}$$

   La ligne de niveau $c \neq 0$ est donc un cercle de centre $\Omega\left(\dfrac{1}{2c}, \dfrac{1}{2c}\right)$ et de rayon $\sqrt{1+\dfrac{1}{2c^2}}$

2.7.3 Des études de limite

Exercice 9 :

Etudier l'existence d'une limite en $(0,0)$ pour les fonctions $f_i : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ suivantes, pour lesquelles on donne $f_i(x,y)$

1. $f_1(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$
2. $f_2(x,y) = \dfrac{(x+y)^2}{x^2+y^2}$
3. $f_3(x,y) = \dfrac{x^2}{|x-y|}$
4. $f_4(x,y) = \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$

1. On regarde ce qui se passe pour les droites d'équation $y = \lambda x$. Ainsi,

$$f_1(x, \lambda x) = \frac{x \times \lambda x}{x^2 + \lambda^2 x^2} = \frac{\lambda x^2}{x^2(1+\lambda^2)} = \frac{\lambda}{1+\lambda^2}$$

   Ce qui montre que la limite en $(0,0)$ de f_1 n'existe pas.
2. Il suffit de remarquer que $f_2(x,y) = 1 + 2f_1(x,y)$, et que donc, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$f_2(x, \lambda x) = 1 + \frac{2\lambda}{1+\lambda^2} = \frac{(1+\lambda)^2}{1+\lambda^2}$$

   Ce qui montre que la limite en $(0,0)$ de f_2 n'existe pas.

3. Pour f_3, on fait comme toujours, on regarde d'abord ce qui se passe sur les droites ; donc, pour $\lambda \neq 1$:
$$f_3(x, \lambda x) = \frac{x^2}{|x - \lambda x|} = \frac{|x|}{|1-\lambda|}$$
Et donc, $\lim\limits_{x\to 0} f_3(x, \lambda x) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{|x|}{|1-\lambda|} = 0$
Ainsi, si f_3 admet une limite en $(0,0)$, cette limite ne peut être que 0. Or, si nous nous intéressons aux points situés sur la parabole $y = x - x^2$, nous avons :
$$f_3\left(x, x - x^2\right) = \frac{x^2}{|x - x + x^2|} = \frac{x^2}{x^2} = 1$$
f_3 ne peut donc avoir de limite en $(0,0)$
4. De la factorisation classique, nous avons $x^3 + y^3 = (x+y)\left(x^2 - xy + y^2\right)$, et donc
$$f_4(x,y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = \frac{(x+y)\left(x^2-xy+y^2\right)}{x^2+y^2} = (x+y) - \frac{(x+y)\,xy}{x^2+y^2}$$
et donc, $|f_4(x,y)| \leqslant |x+y| + \frac{|x+y|\,|xy|}{x^2+y^2}$
Or, il existe une inégalité toute classique : $|xy| \leqslant \frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)$, et nous avons donc :
$$\frac{|x+y|\,|xy|}{x^2+y^2} \leqslant \frac{1}{2}|x+y|$$
De telle sorte que $|f_4(x,y)| \leqslant \frac{3}{2}|x+y| \leqslant \frac{3}{2}(|x|+|y|)$
Comme $|x| + |y| = \|(x,y)\|_1$, nous avons $|f_4(x,y)| \leqslant \frac{3}{2}\|(x,y)\|_1$. Ce qui montre que f_4 admet une liùite en $(0,0)$, et que cette limite est 0.

Exercice 10 :

On considère la fonction suivante, définie sur $\mathbb{R}^2$ par :
$$\left\{\begin{array}{lcl} f : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & f(x,y) = \left\{\begin{array}{l} \frac{|y|}{x^2} e^{-\frac{|y|}{x^2}} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

1. *Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Etudier $\lim\limits_{x\to 0} f(x, \lambda x)$*
2. *Pour $x \neq 0$, calculer $f\left(x, x^2\right)$*
3. *Conclure quant à $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$*

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $f(x, \lambda x) = \frac{|\lambda|\,|x|}{x^2} e^{-\frac{|\lambda|\,|x|}{x^2}} = \frac{|\lambda|}{|x|} e^{-\frac{|\lambda|}{|x|}}$
Comme $\lim\limits_{x\to 0} \frac{|\lambda|}{|x|} = +\infty$, nous avons $\lim\limits_{x \to 0} f(x, \lambda x) = 0$
2. Maintenant, pour $x \neq 0$, $f\left(x, x^2\right) = \frac{1}{e}$
3. Donc, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ n'existe pas.

Exercice 11 :

1. *Soit* $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par* $f(x,y,z) = \dfrac{xyz}{x+y+z}$ *; la fonction* f *admet-elle une limite en* $(0,0,0)$ *?*
2. *Soit* $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par* $f(x,y,z) = \dfrac{x+y}{x^2-y^2+z^2}$ *; la fonction* f *admet-elle une limite en* $(2,-2,0)$ *?*

1. Il faut étudier $f\left(x,x,-2x+x^4\right)$; en effet, nous avons
$$f\left(x,x,-2x+x^4\right) = \frac{x^2\left(-2x+x^4\right)}{x^4} = \frac{-2}{x} + x^2$$
Nous avons donc $\lim\limits_{x\to 0} f\left(x,x,-2x+x^4\right) = \infty$. f n'admet donc pas de limite en $(0,0,0)$
2. Nous allons donc faire 2 calculs :
   — $f(2+h,-2-h,h) = 0$; ainsi, $\lim\limits_{h\to 0} f(2+h,-2-h,h) = 0$. Ainsi, une limite candidate de f en $(2,-2,0)$ est donc 0.
   — $f(2+h,-2+h,h) = \dfrac{2h}{8h+h^2} = \dfrac{2}{8+h}$ et donc $\lim\limits_{h\to 0} f(2+h,-2+h,h) = \dfrac{1}{4}$
   Cette fonction f ne peut donc admettre de limite en $(2,-2,0)$

2.7.4 Etudes de continuité

Exercice 12 :

Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par* $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$ *si* $(x,y) \neq (0,0)$ *et* $f(0,0) = 0$. *Montrer que* f *n'est pas continue en* $(0,0)$*, mais que la restriction de* f *à toute droite passant par* $(0,0)$ *est continue en* $(0,0)$.

— Si nous considérons la courbe $x = y^2$, nous avons, sur cette courbe :
$$f\left(y^2,y\right) = \frac{y^4}{y^4+y^4} = \frac{1}{2}$$
Comme $f(0,0) = 0$, f ne peut pas être continue en $(0,0)$

— Par contre, si nous considérons les droites $y = \lambda x$, nous avons :
$$f(x,\lambda x) = \frac{x\lambda^2x^2}{x^2+\lambda^4x^4} = \frac{\lambda^2 x}{1+\lambda^4x^2}$$
Et nous avons bien $\lim\limits_{x\to 0} f(x,\lambda x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\lambda^2 x}{1+\lambda^4x^2} = 0$; ce qui montre que la restriction de f à la droite $y = \lambda x$ est bien continue.

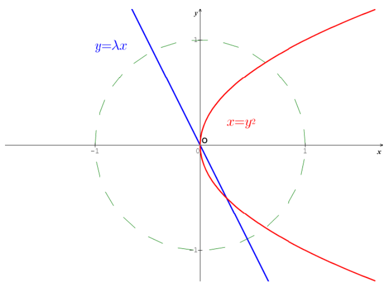

FIGURE 2.10 – Les différents moyens de tendre vers $(0,0)$; f est constante sur la courbe $x = y^2$

Exercice 13 :

Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \dfrac{x^2 y}{x^2+y^4}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$. Montrer que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, nous avons $|f(x,y)| \leqslant |y|$ et que donc f est continue en $(0,0)$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y \in \mathbb{R}$, nous avons $x^2 \geqslant 0$, $y^4 \geqslant 0$ et $x^2 \leqslant x^2 + y^4$; donc, $0 \leqslant \dfrac{x^2}{x^2+y^4} \leqslant 1$, de telle sorte que :

$$|f(x,y)| = \frac{x^2\,|y|}{x^2+y^4} \leqslant |y| \leqslant |x| + |y| = \|(x,y)\|_1$$

Nous avons donc $|f(x,y)| \leqslant \|(x,y)\|_1$, ce qui montre que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$

f est donc continue en $(0,0)$.

Exercice 14 :

Etudier la continuité au point $(0,0)$ de la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie pour chaque élément $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ par : $h(x,y) = \left(x^2+y^2\right)\sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $h(0,0) = 0$

C'est une quiestion classique qui ne pose pas de difficultés. Nous avons :

$$|h(x,y)| = \left(x^2+y^2\right)\left|\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\right| \leqslant x^2+y^2 = \|(x,y)\|_2^2$$

Nous avons donc $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} h(x,y) = 0$, ce qui montre que h est continue en $(0,0)$

Exercice 16 :

Déterminer $f(0,0)$ pour que la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ pour $(x,y) \neq (0,0)$ par :

$$f(x,y) = \frac{1-\cos\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2}$$

soit continue au point $(0,0)$

L'objet de cet exercice est donc de trouver $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$. Rappelons le développement limité de $\cos u$, à l'ordre 2, au voisinage de 0 : $\cos u = 1 - \dfrac{u^2}{2} + u^2\varepsilon(u)$

Si (x,y) est voisin de 0, il en est de même de $\sqrt{x^2+y^2}$; on peut donc écrire :

$$\cos\sqrt{x^2+y^2} = 1 - \frac{x^2+y^2}{2} + \left(x^2+y^2\right)\varepsilon\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$$

Et donc, $1-\cos\sqrt{x^2+y^2} = \dfrac{x^2+y^2}{2} + \left(x^2+y^2\right)\varepsilon\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$, d'où $f(x,y) = \dfrac{1}{2} + \varepsilon\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$.

Nous avons donc : $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \dfrac{1}{2}$. Pour que f soit continue, il faut donc poser $f(0,0) = \dfrac{1}{2}$

Exercice 17 :

Montrons que pour tout $u \in \mathbb{R}$, nous avons $|1-\cos u| \leqslant \dfrac{u^2}{2}$

On utilise la formule de Taylor avec reste intégral entre 0 et u à l'ordre 2.

— Si $u > 0$, alors $f(u) = f(0) + xf'(0) + \int_0^u tf''(t)\,dt$, c'est à dire, si $f(u) = \cos u$, $f'(u) = -\sin u$ et $f''(u) = -\cos u$, donc :

$$\cos u = 1 - \int_0^u t\cos t\,dt \Longleftrightarrow 1 - \cos u = \int_0^u t\cos t\,dt$$

En passant à la valeur absolue, nous avons

$$1-\cos u = |1-\cos u| = \left|\int_0^u t\cos t\ dt\right| \leqslant \int_0^u |t\cos t|\ dt \leqslant \int_0^u |t|\ dt = \int_0^u t\ dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^u = \frac{u^2}{2}$$

Nous en déduisons donc que si $u > 0$, alors $|1-\cos u| \leqslant \dfrac{u^2}{2}$

— Si $u < 0$, alors $-u > 0$, et en remplaçant dans le point précédent u par $-u$, nous obtenons :

$$1 - \cos -u = \int_0^{-u} t\cos t\,dt \Longleftrightarrow 1 - \cos u = \int_0^{-u} t\cos t\,dt$$

Et de la même manière, $|1-\cos u| \leqslant \displaystyle\int_0^{-u} |t|\ dt = \int_0^{-u} t\,dt = \frac{u^2}{2}$

Ainsi, pour tout $u \in \mathbb{R}$, nous avons $|1-\cos u| \leqslant \dfrac{u^2}{2}$

Est-il possible de prolonger par continuité au point $(0,0)$ la fonction f définie sur l'ensemble $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } xy > 0\right\}$ par :

$$f(x,y) = \frac{1-\cos\sqrt{xy}}{y}$$

En utilisant ce qui a été démontré ci-dessus, nous avons :

$$|f(x,y)| = \frac{\left|1-\cos\sqrt{xy}\right|}{|y|} \leqslant \frac{xy}{2|y|}$$

— Si $y > 0$ (alors $x > 0$), nous avons $|f(x,y)| \leqslant \dfrac{x}{2} = \dfrac{1}{2} \times |x| \leqslant \dfrac{1}{2}(|x|+|y|) = \dfrac{1}{2}\|(x,y)\|_1$

— Si $y < 0$ (alors $x < 0$), nous avons $|f(x,y)| \leqslant \dfrac{-x}{2} = \dfrac{1}{2} \times |x| \leqslant \dfrac{1}{2}(|x|+|y|) = \dfrac{1}{2}\|(x,y)\|_1$

A chaque fois, nous avons $|f(x,y)| \leqslant \dfrac{1}{2}\|(x,y)\|_1$ et donc $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$; on prolonge par continuité en posant $f(0,0) = 0$

Exercice 18 :

Soit $V \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose V inversible. Soit $\mathcal{N}$ une norme sur $\mathbb{C}^n$.
On construit, pour $x \in \mathbb{C}^n$ une application Ψ définie par $\Psi(x) = \mathcal{N}(V(x))$. Démontrer que Ψ est une norme sur $\mathbb{C}^n$

Le fait que V soit inversible, signifie que l'application linéaire sous-jacente est bijective.
On va démontrer que Ψ vérifie tous les axiômes des normes.

— Vérifions l'inégalité triangulaire
Soient $x \in \mathbb{C}^n$ et $y \in \mathbb{C}^n$. Alors,

$$\begin{aligned}
\Psi(x+y) &= \mathcal{N}(V(x+y)) \\
&= \mathcal{N}(V(x)+V(y)) \text{ Par linéarité de } V \\
&\leqslant \mathcal{N}(V(x)) + \mathcal{N}(V(y)) \text{ Inégalité triangulaire de la norme } \mathcal{N} \\
&\leqslant \Psi(x) + \Psi(y)
\end{aligned}$$

Nous avons donc $\Psi(x+y) \leqslant \Psi(x) + \Psi(y)$

— Démontrons que $\Psi(x) = 0 \iff x = 0$
  - ⋆ Nous avons $\Psi(0) = \mathcal{N}(V(0))$. Comme $V(0) = 0$, nous avons $\Psi(0) = \mathcal{N}(0) = 0$, ceci étant déduit des propriétés de norme de $\mathcal{N}$
  - ⋆ Réciproquement, si $\Psi(x) = 0$, alors $\mathcal{N}(V(x)) = 0$, et des propriétés de norme de $\mathcal{N}$ nous déduisons que $V(x) = 0$. V étant bijective *(inversible)*, nous avons alors $x = 0$

  Nous avons donc $\Psi(x) = 0 \iff x = 0$

— Démontrons que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $\Psi(\lambda x) = |\lambda| \Psi(x)$
  Nous avons $\Psi(\lambda x) = \mathcal{N}(V(\lambda x))$. De la linéarité de V, nous avons $V(\lambda x) = \lambda V(x)$, et donc, en utilisant les propriétés de norme de $\mathcal{N}$:

$$\Psi(\lambda x) = \mathcal{N}(V(\lambda x)) = \mathcal{N}(\lambda V(x)) = |\lambda| \mathcal{N}(V(x)) = |\lambda| \Psi(x)$$

  Ce que nous voulions

Chapitre 3

Notions sur les fonctions à valeurs complexes

VOLONTAIREMENT, CE CHAPITRE N'EST QU'UNE INTRODUCTION AUX FONCTIONS COMPLEXES. NOUS FAISONS D'UNE PART, UNE SYNTHÈSE DES FONCTIONS DE $\mathbb{R}$ DANS $\mathbb{C}$ ET DE L'AUTRE UN EXPOSÉ DES DÉFINITIONS DE BASE ; NOUS N'ÉTUDIERONS PAS, EN PARTICULIER, L'INTÉGRATION DES FONCTIONS DE VARIABLE COMPLEXE.

3.1 Rappels sur les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$

Ce paragraphe est une synthèse de ce qui a été déjà vu dans différents chapitres précédents. Il y aura donc peu de démonstrations
On met en évidence que l'étude des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, en se concentrant sur les parties réelles et imaginaires et en prenant néanmoins quelques précautions élémentaires, se réduisent à l'étude des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

3.1.1 Définition

Une fonction complexe d'une variable réelle est une application d'un sous ensemble $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ qui, à un nombre $x \in \mathcal{D}$ fait correspondre $F(x) \in \mathbb{C}$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} F : \mathcal{D} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & F(x) \end{array} \right.$$

L'ensemble $\mathcal{D}_F$ est appelé ensemble de définition de F

Remarque 1 :

1. Si $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ alors $F : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ est une application, à tout $x \in \mathcal{D}$ fait correspondre un nombre complexe $F(x) = f(x) + ig(x)$.
   Nous avons, en fait, $f(x) = \mathrm{Re}(F(x))$ et $g(x) = \mathrm{Im}(F(x))$.
   f et g sont des fonctions réelles d'une variable réelle définies sur l'ensemble $\mathcal{D}$. Nous avons donc $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$
2. Réciproquement, la donnée de 2 applications $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ définit une application $F : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{C}$. C'est l'application

$$\left\{ \begin{array}{rcl} F : \mathcal{D} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & F(x) = f(x) + ig(x) \end{array} \right.$$

3. Si $F : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ est l'application définie par $F(x) = f(x) + ig(x)$, l'application conjuguée de F est l'application $\overline{F}$ définie par $\overline{F}(x) = f(x) - ig(x)$, c'est à dire que $\overline{F}(x) = \overline{F(x)}$

4. La topologie de $\mathbb{C}$ est la topologie induite par celle du module d'un nombre complexe, comme celle de $\mathbb{R}$ est induite par la valeur absolue d'un nombre réel

3.1.2 Définition de la limite

Soit $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction complexe d'une variable réelle.
Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, et on suppose que F est définie dans un voisinage de x_0, sauf, peut-être en x_0.
On dit que la fonction $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ admet une limite $L \in \mathbb{C}$ en x_0 si :

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \eta_\varepsilon)\,(|x - x_0| < \eta_\varepsilon \Longrightarrow |F(x) - L| < \varepsilon)$$

On écrit alors $\lim\limits_{x \to x_0} F(x) = L$

3.1.3 Proposition

Soit $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction complexe d'une variable réelle.
Pour tout $x \in \mathcal{D}_F$, nous écrivons $F(x) = f(x) + ig(x)$
Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, et on suppose que F est définie dans un voisinage de x_0, sauf, peut-être en x_0.
La fonction $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ admet une limite $L = A + iB \in \mathbb{C}$ en x_0 si et seulement si

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \mathrm{Re}\,(F(x)) = A = \mathrm{Re}\,(L) \text{ et } \lim_{x \to x_0} g(x) = \lim_{x \to x_0} \mathrm{Im}\,(F(x)) = B = \mathrm{Im}\,(L)$$

Démonstration

La démonstration a déjà été faite en L_1 et réside surtout dans le fait que $|f(x) - A| \leqslant |F(x) - L|$ et $|g(x) - B| \leqslant |F(x) - L|$

3.1.4 Proposition

Soient $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ et $G : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ 2 fonctions complexes d'une variable réelle.
Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, et nous supposons que F et G sont définies dans un voisinage de x_0, sauf, peut-être en x_0.
Nous supposons que $\lim\limits_{x \to x_0} F(x) = L_1$ et $\lim\limits_{x \to x_0} G(x) = L_2$. Alors :

1. La limite de la somme est la somme des limites, c'est à dire :

$$\lim_{x \to x_0} (F(x) + G(x)) = \lim_{x \to x_0} F(x) + \lim_{x \to x_0} G(x) = L_1 + L_2$$

2. La limite du produit est le produit des limites, c'est à dire :

$$\lim_{x \to x_0} (F(x) \times G(x)) = \lim_{x \to x_0} F(x) \times \lim_{x \to x_0} G(x) = L_1 \times L_2$$

3. Si $L_2 \neq 0$, la limite du quotient est le quotient des limites, c'est à dire :

$$\lim_{x \to x_0} \left(\frac{F(x)}{G(x)}\right) = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} F(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} G(x)} = \frac{L_1}{L_2}$$

Démonstration

Nous n'utiliserons ici que les théorèmes des fonctions numériques d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{R}$
Nous appelons, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = f(x) + ig(x)$ et $G(x) = h(x) + ik(x)$.
Nous écrivons $L_1 = A_1 + iB_1$ et $L_2 = A_2 + iB_2$

1. **La somme**
   Nous avons $F(x) + G(x) = (f(x) + h(x)) + i(g(x) + k(x))$

Comme $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+h(x))=A_1+A_2$ et $\lim\limits_{x\to x_0}(g(x)+k(x))=B_1+B_2$, il est clair que

$$\lim_{x\to x_0}(F(x)+G(x))=(A_1+A_2)+i(B_1+B_2)=L_1+L_2$$

2. **Le produit**
Regardons, maintenant $F(x)\times G(x)=(f(x)+ig(x))\times(h(x)+ik(x))$

$$F(x)\times G(x)=(f(x)h(x)-g(x)k(x))+i(f(x)k(x)+g(x)h(x))$$

Nous avons :

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)h(x)-g(x)k(x))= & A_1A_2-B_1B_2\\ \lim\limits_{x\to x_0}(f(x)k(x)+g(x)h(x))= & A_1B_2+B_1A_2\end{cases}$$

Donc $\lim\limits_{x\to x_0}F(x)\times G(x)=(A_1A_2-B_1B_2)+i(A_1B_2+B_1A_2)=(A_1+iB_1)(A_2+iB_2)=L_1\times L_2$

3. **Le quotient**
Si $L_2\neq 0$, alors $|L_2|>0$ et $\dfrac{F(x)}{G(x)}=\dfrac{f(x)+ig(x)}{h(x)+ik(x)}$. Nous avons alors :

$$\begin{aligned}\frac{F(x)}{G(x)} &= \frac{f(x)+ig(x)}{h(x)-ik(x)}\\ &= \frac{(f(x)+ig(x))(h(x)-ik(x))}{(h(x)+ik(x))(h(x)-ik(x))}\\ &= \frac{(f(x)h(x)+g(x)k(x))+i(g(x)h(x)-f(x)k(x))}{(h(x))^2+(k(x))^2}\\ &= \frac{(f(x)h(x)+g(x)k(x))}{(h(x))^2+(k(x))^2}+i\frac{(g(x)h(x)-f(x)k(x))}{(h(x))^2+(k(x))^2}\end{aligned}$$

Nous avons

$$\lim_{x\to x_0}\frac{(f(x)h(x)+g(x)k(x))}{(h(x))^2+(k(x))^2}=\frac{A_1A_2+B_1B_2}{A_2^2+B_2^2}$$

Et

$$\lim_{x\to x_0}\frac{(g(x)h(x)-f(x)k(x))}{(h(x))^2+(k(x))^2}=\frac{B_1A_2-A_1B_2}{A_2^2+B_2^2}$$

C'est à dire que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}\frac{F(x)}{G(x)} &= \frac{A_1A_2+B_1B_2}{A_2^2+B_2^2}+i\frac{B_1A_2-A_1B_2}{A_2^2+B_2^2}\\ &= \frac{A_1A_2+B_1B_2+i(B_1A_2-A_1B_2)}{A_2^2+B_2^2}=\frac{L_1\times\overline{L_2}}{|L_2|^2}\\ &= \frac{L_1\times\overline{L_2}}{L_2\times\overline{L_2}}=\frac{L_1}{L_2}\end{aligned}$$

Ce que nous voulions

Exemple 1 :

1. Supposons que $\lim\limits_{x\to x_0}F(x)=L$, que dire de $\lim\limits_{x\to x_0}\overline{F}(x)$?
   Nous appelons $F(x)=f(x)+ig(x)$ et $L=A+iB$.
   D'après 3.1.3, comme $\lim\limits_{x\to x_0}F(x)=L$, nous avons $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ et $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$.
   Ce qui fait que $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)-ig(x))=A-iB$ et donc $\lim\limits_{x\to x_0}\overline{F}(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\overline{F(x)}=A-iB=\overline{L}$
   La limite du conjugué de F est le conjugué de la limite
2. Supposons toujours que $\lim\limits_{x\to x_0}F(x)=L$, que dire de $\lim\limits_{x\to x_0}|F(x)|$?
   De $F(x)=f(x)+ig(x)$, nous tirons $|F(x)|=\sqrt{(f(x))^2+(g(x))^2}$.
   Classiquement, $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{(f(x))^2+(g(x))^2}=\sqrt{A^2+B^2}=|L|$
   Donc, si $\lim\limits_{x\to x_0}F(x)=L$, alors $\lim\limits_{x\to x_0}|F(x)|=|L|$

3.1.5 Définition de la continuité

Soit $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction complexe d'une variable réelle.
Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, et on suppose que F est définie dans un voisinage de x_0 et que $F(x_0)$ existe.
On dit que la fonction $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ est continue en x_0 si et seulement si $\lim\limits_{x \to x_0} F(x) = F(x_0)$

3.1.6 Proposition

Soit $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction complexe d'une variable réelle.
Pour tout $x \in \mathcal{D}_F$, nous écrivons $F(x) = f(x) + ig(x)$
Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, et on suppose que F est définie dans un voisinage de x_0 et que $F(x_0)$ existe.
La fonction $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ est continue en x_0 si et seulement si les fonctions f et g sont continues en x_0

3.1.7 Conséquences immédiates

Soient $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ et $G : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ 2 fonctions complexes d'une variable réelle continues en $x_0 \in \mathbb{R}$. Alors :

1. La fonction $F + G$ est continue en x_0
2. La fonction $F \times G$ est continue en x_0
3. Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, la fonction λF est continue en x_0
4. Si $G(x_0) \neq 0$, la fonction $\dfrac{F}{G}$ est continue en x_0

Démonstration

Ceci résulte bien entendu des résultats sur les limites vus en 3.1.4

3.1.8 Dérivation

Soit $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction complexe d'une variable réelle de domaine de définition $\mathcal{D}_F$.
On dit que F est dérivable en $x_0 \in \mathcal{D}_F$ si et seulement si $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0}$ existe.
Nous notons $F'(x_0)$ cette dérivée

3.1.9 Proposition

Soit $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction complexe d'une variable réelle de domaine de définition $\mathcal{D}_F$. Nous notons $F(x) = f(x) + ig(x)$
Alors F est dérivable en $x_0 \in \mathcal{D}_F$ si et seulement si f et g sont dérivables en x_0 et nous avons :

$$F'(x_0) = f'(x_0) + ig'(x_0)$$

Démonstration

Ecrivons différemment le rapport $\dfrac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0}$.

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) + ig(x) - (f(x_0) + ig(x_0))}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + i\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

Ainsi, $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0}$ existe si et seulement si $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ et $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$ existent, c'est à dire si et seulement si $f'(x_0)$ et $g'(x_0)$ existent.
Nous avons alors, dans ces cas $F'(x_0) = f'(x_0) + ig'(x_0)$

Remarque 2 :

Les résultats relatifs aux opérations sur les fonctions dérivables *(addition, multiplication, quotient)* sont les mêmes que pour une fonction numérique d'une variable réelle

1. $(F+G)' = F' + G'$
2. $(F \times G)' = F'G + G'F$
3. $\left(\dfrac{F}{G}\right)' = \dfrac{F'G - G'F}{G^2}$

Exemple 2 :

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et $F(x) = e^{\lambda x}$. Calculons $F'(x)$.
On appelle $\lambda = \alpha + i\beta$. Alors $F(x) = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x)$. Nous avons donc :

$$\begin{aligned}
F'(x) = &\ \alpha e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x) + e^{\alpha x}(-\beta\sin\beta x + i\beta\cos\beta x) \\
= &\ e^{\alpha x}(\alpha(\cos\beta x + i\sin\beta x) + (-\beta\sin\beta x + i\beta\cos\beta x)) \\
= &\ e^{\alpha x}[(\alpha+i\beta)\cos\beta x + i(\alpha+i\beta)\sin\beta x] \\
= &\ (\alpha+i\beta)e^{\alpha x}[\cos\beta x + i\sin\beta x] \\
= &\ \lambda e^{\alpha x} \times e^{i\beta x} = \lambda e^{\alpha x + i\beta x} \\
= &\ \lambda e^{\lambda x}
\end{aligned}$$

Et donc, $\left(e^{\lambda x}\right)' = \lambda e^{\lambda x}$

3.1.10 Intégration

Soit $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction complexe d'une variable réelle de domaine de définition $\mathcal{D}_F$. Nous notons $F(x) = f(x) + ig(x)$
Alors F est intégrable sur le segment $[a;b] \subset \mathcal{D}_F$ si et seulement si f et g sont intégrables sur le segment $[a;b] \subset \mathcal{D}_F$. S'il en est ainsi, nous poserons, par définition :

$$\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + i\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

Remarque 3 :

1. De la définition, nous déduisons immédiatement que :
   (a) $\displaystyle\int_a^b (F(x)+G(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b G(x)\,\mathrm{d}x$
   (b) Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, nous avons $\displaystyle\int_a^b \lambda F(x)\,\mathrm{d}x = \lambda\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x$
   (c) Nous vérifions aussi aisément que $\displaystyle\overline{\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x} = \int_a^b \overline{F(x)}\,\mathrm{d}x = \int_a^b \overline{F}(x)\,\mathrm{d}x$

   Pour démontrer ces résultats, il n'y a rien de difficile : il suffit d'écrire $\lambda = \alpha + i\beta$ et $F(x) = f(x) + ig(x)$ et d'utiliser les théorèmes d'intégrations des fonctions numériques réelles d'une variable réelle.
2. Nous devons aussi remarquer que, pour les parties réelles et imaginaires :

   $\rightarrow \operatorname{Re}\left(\displaystyle\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x\right) = \int_a^b \operatorname{Re}(F(x))\,\mathrm{d}x$ $\quad\rightarrow \operatorname{Im}\left(\displaystyle\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x\right) = \int_a^b \operatorname{Im}(F(x))\,\mathrm{d}x$

Exemple 3 :

- ▷ Il faut bien noter que, d'après la définition 3.1.10, pour calculer l'intégrale d'une fonction $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ il faut écrire cette fonction sous la forme $F(x) = f(x) + ig(x)$
- ▷ **Calculons, par exemple** $\displaystyle\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{ix+1}$

$$\begin{aligned}
\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{ix+1} &= \int_a^b \frac{(1-ix)}{(ix+1)(1-ix)}\,\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{(1-ix)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_a^b \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x - i\int_a^b \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= [\arctan x]_a^b - \frac{i}{2}\left[\ln\left(1+x^2\right)\right]_a^b \\
&= (\arctan b - \arctan a) - \frac{i}{2}\ln\left(\frac{1+b^2}{1+a^2}\right)
\end{aligned}$$

3.1.11 Proposition

Soit $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction complexe d'une variable réelle de domaine de définition $\mathcal{D}_F$ intégrable sur $\mathcal{D}_F$. Alors :

$$\left|\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |F(x)|\,\mathrm{d}x$$

Démonstration

Ici, il faut bien remarquer que ce ne sont plus les valeurs absolues, mais des modules de nombres complexes. Cette démonstration a déjà été faite dans le cours de L_1

1. Supposons que $\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x = 0$, alors $\left|\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x\right| = 0$, et comme $\int_a^b |F(x)|\,\mathrm{d}x \geqslant 0$, nous avons donc
$$\left|\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |F(x)|\,\mathrm{d}x$$
2. Supposons, maintenant que $\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x \neq 0$

$\Longrightarrow$ Soit $\theta \in [0; 2\pi[$, alors $e^{-i\theta}\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b e^{-i\theta}F(x)\,\mathrm{d}x$. En particulier, nous avons aussi :
$$\mathrm{Re}\left(e^{-i\theta}\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x\right) = \int_a^b \mathrm{Re}\left(e^{-i\theta}F(x)\right)\,\mathrm{d}x$$

$\Longrightarrow$ Pour tout $z \in \mathbb{C}$, nous avons $\mathrm{Re}\left(e^{-i\theta}z\right) \leqslant |z|$

En effet, on peut écrire z sous forme trigonométrique : $z = |z|\,e^{i\arg z}$ et donc
$$e^{-i\theta}z = e^{-i\theta}\,|z|\,e^{i\arg z} = e^{-i(\theta-\arg z)}\,|z|$$
Comme $\mathrm{Re}\left(e^{-i\theta}z\right) = |z|\cos(\theta - \arg z)$, nous avons donc, puisque $\cos(\theta - \arg z) \leqslant 1$, $\mathrm{Re}\left(e^{-i\theta}z\right) \leqslant |z|$

$\Longrightarrow$ Nous pouvons donc appliquer cette inégalité à $\mathrm{Re}\left(e^{-i\theta}F(x)\right)$ d'où nous pouvons conclure que $\mathrm{Re}\left(e^{-i\theta}F(x)\right) \leqslant |F(x)|$

Comme nous avons affaire à des fonctions numériques d'une variable réelle, nous avons
$$\int_a^b \mathrm{Re}\left(e^{-i\theta}F(x)\right)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b |F(x)|\,\mathrm{d}x$$

$\Longrightarrow$ Comme $\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x \neq 0$, nous pouvons écrire $\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x$ comme un nombre complexe avec un module et un argument.

Si nous posons $\theta = \arg\left(\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x\right)$, nous avons $\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x = \left|\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x\right| e^{i\theta}$ et donc $e^{-i\theta}\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x = \left|\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x\right|$

$\Longrightarrow$ De là, nous déduisons que $e^{-i\theta}\displaystyle\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x$ est un nombre réel et que donc,

$$\mathrm{Re}\left(e^{-i\theta}\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x\right)=\left|\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x\right|$$

$\Longrightarrow$ Nous avons démontré que $\mathrm{Re}\left(e^{-i\theta}\displaystyle\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x\right)=\displaystyle\int_a^b \mathrm{Re}\left(e^{-i\theta}F(x)\right)\mathrm{d}x$ et ensuite que $\displaystyle\int_a^b \mathrm{Re}\left(e^{-i\theta}F(x)\right)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b |F(x)|\,\mathrm{d}x$, nous pouvons donc en déduire que

$$\left|\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_a^b |F(x)|\,\mathrm{d}x$$

Remarque 4 :

1. Au passage, nous avons démontré que, pour tout $z\in\mathbb{C}$ et tout $\theta\in[0;2\pi[$, nous avons $\mathrm{Re}\left(e^{-i\theta}z\right)\leqslant|z|$.
2. Rappelons les inégalités vraies, pour tout $z\in\mathbb{C}$, $|\mathrm{Re}(z)|\leqslant|z|$ et $|\mathrm{Im}(z)|\leqslant|z|$

3.1.12 Suites de fonctions complexes

Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions numériques d'une variable réelle à valeurs complexes et définies sur $\mathcal{D}\subset\mathbb{R}$
Une suite de ces fonctions est une application de l'ensemble $\mathbb{N}$ dans l'ensemble $\mathcal{F}$:

$$\left\{\begin{array}{rcl}(F_n)_{n\in\mathbb{N}}:\mathbb{N} & \longrightarrow & \mathcal{F}\\ n & \longmapsto & F_n\end{array}\right.$$

Où, pour tout $x\in\mathcal{D}$, $F_n(x)=f_n(x)+ig_n(x)$

Remarque 5 :

Ainsi, la donnée d'une suite de fonctions d'une variable réelle à valeurs complexes $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ équivaut à la donnée de 2 suites $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions numériques réelles d'une variable réelle

3.1.13 Convergence simple des suites de fonctions complexes

Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions numériques d'une variable réelle à valeurs complexes et définies sur $\mathcal{D}\subset\mathbb{R}$

1. La suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathcal{D}\subset\mathbb{R}$ vers la fonction $F=f+ig$ définie sur $\mathcal{D}\subset\mathbb{R}$ si et seulement si :

$$(\forall x\in\mathcal{D})\,(\forall\varepsilon>0)\,(\exists N\in\mathbb{N})\,(\forall n\in\mathbb{N})\,((n\geqslant N)\Longrightarrow(|F_n(x)-F(x)|<\varepsilon))$$

2. La suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathcal{D}\subset\mathbb{R}$ vers la fonction $F=f+ig$ si et seulement si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathcal{D}\subset\mathbb{R}$ vers la fonction f **et** la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathcal{D}\subset\mathbb{R}$ vers la fonction g

3.1.14 Convergence uniforme des suites de fonctions complexes

Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions numériques d'une variable réelle à valeurs complexes et définies sur $\mathcal{D}\subset\mathbb{R}$

1. La suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathcal{D}\subset\mathbb{R}$ vers la fonction $F=f+ig$ définie sur $\mathcal{D}\subset\mathbb{R}$ si et seulement si :

$$(\forall\varepsilon>0)\,(\exists N\in\mathbb{N})\,(\forall n\in\mathbb{N})\,(\forall x\in\mathcal{D})\,((n\geqslant N)\Longrightarrow(|F_n(x)-F(x)|<\varepsilon))$$

2. La suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathcal{D}\subset\mathbb{R}$ vers la fonction $F=f+ig$ si et seulement si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathcal{D}\subset\mathbb{R}$ vers la fonction f **et** la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathcal{D}\subset\mathbb{R}$ vers la fonction g

Remarque 6 :

1. Nous pouvons aussi utiliser une autre définition pour la convergence uniforme :

$$(\forall\varepsilon>0)\,(\exists N\in\mathbb{N})\,(\forall n\in\mathbb{N})\left((n\geqslant N)\Longrightarrow\left(\sup_{x\in\mathcal{D}}|F_n(x)-F(x)|<\varepsilon\right)\right)$$

2. Si la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions continues convergeant uniformément sur $\mathcal{D}\subset\mathbb{R}$ vers la fonction F définie sur $\mathcal{D}\subset\mathbb{R}$, alors F est continue

3.2 Fonctions de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$

3.2.1 Définition

Une fonction complexe d'une variable complexe est une application F d'un sous ensemble $\mathcal{D}\subset\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ qui, à un nombre $z\in\mathcal{D}$ fait correspondre $F(z)\in\mathbb{C}$

$$\left\{\begin{array}{rcl} F:\mathcal{D} & \longrightarrow & \mathbb{C}\\ z & \longmapsto & z'=F(z)\end{array}\right.$$

L'ensemble $\mathcal{D}$ est appelé ensemble de définition de F

Exemple 4 :

1. Commençons par un premier exemple qu'est une application affine $F(z)=az+b$ avec $a\in\mathbb{C}$ et $b\in\mathbb{C}$; F est définie dans tout le plan complexe ; c'est en fait la représentation complexe d'une similitude directe du plan
2. Soit l'application R définie par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} R:\mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C}\\ z & \longmapsto & R(z)=\dfrac{1}{|z|}\end{array}\right.$$

Le domaine de définition de R, noté $\mathcal{D}_R$ est donc $\mathbb{C}^*$. L'image de cette fonction est l'intervalle $]0;+\infty[\subset\mathbb{R}$

C'est très loin d'être une bijection car l'image d'un cercle $\rho e^{i\theta}$ est le seul nombre réel strictement positif $\dfrac{1}{\rho}$

3. Soit l'application Φ définie par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \Phi:\mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C}\\ z=x+iy & \longmapsto & \Phi(z)=\ln xy\end{array}\right.$$

Le domaine de définition de Φ, noté $\mathcal{D}_\Phi$ est donc : $\mathcal{D}_\Phi=\{z=x+iy\in\mathbb{C}\text{ tels que }xy>0\}$

Remarque 7 :

Soit $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ un sous-ensemble de $\mathbb{C}$ et $F : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction d'une variable complexe à valeurs dans $\mathbb{C}$. Alors :

$$\begin{cases} F : \mathcal{D} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z = x + iy & \longmapsto & F(z) = F(x+iy) = P(x,y) + iQ(x,y) \end{cases}$$

En fait, $P = \mathrm{Re}(F)$ et $Q = \mathrm{Im}(F)$.
Les fonctions P et Q apparaissent donc comme des fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$

3.2.2 Limite d'une fonction complexe

Soient $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ et $F : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction complexe contenant un disque de centre $z_0 = x_0 + iy_0$, mais non nécessairement définie en z_0.
Soit $L = \alpha + i\beta$ un nombre complexe.
On dit que F admet comme limite L en z_0 si et seulement si

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \eta > 0)\,(\forall z \in \mathcal{D})\,(z \neq z_0)\,(|z - z_0| < \eta \Longrightarrow |F(z) - L| < \varepsilon)$$

Et on écrit $\lim\limits_{z \to z_0} F(z) = L$

Remarque 8 :

Nous avons aussi, comme pour les fonctions numériques d'une variable réelle :

1. **Somme :** $\lim\limits_{z \to z_0} (F + G)(z) = \lim\limits_{z \to z_0} F(z) + \lim\limits_{z \to z_0} G(z)$
2. **Produit :** $\lim\limits_{z \to z_0} (F \times G)(z) = \lim\limits_{z \to z_0} F(z) \times \lim\limits_{z \to z_0} G(z)$
3. **Quotient :** Si $\lim\limits_{z \to z_0} G(z) \neq 0$, alors $\lim\limits_{z \to z_0} \left(\dfrac{F}{G}\right)(z) = \dfrac{\lim\limits_{z \to z_0} F(z)}{\lim\limits_{z \to z_0} G(z)}$

Les démonstrations sont tout à fait identiques *(Voir donc le cours de L_1)*

3.2.3 Proposition

Soient $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ et $F : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction complexe contenant un disque de centre $z_0 = x_0 + iy_0$, mais non nécessairement définie en z_0.
Soit $L = \alpha + i\beta$ un nombre complexe et nous posons $F(z) = F(x + iy) = P(x,y) + iQ(x,y)$ où P et Q sont 2 fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Alors :
$\lim\limits_{z \to z_0} F(z) = L$ si et seulement si $\lim\limits_{(x,y) \to (x_0,y_0)} P(x,y) = \alpha$ **et** $\lim\limits_{(x,y) \to (x_0,y_0)} Q(x,y) = \beta$

Démonstration

$\Longrightarrow$ Tout d'abord, faisons remarquer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|z| = \sqrt{(\mathrm{Re}\,z)^2 + (\mathrm{Im}\,z)^2}$ et que, donc, $|z| \geqslant \sqrt{(\mathrm{Re}\,z)^2} \Longleftrightarrow |z| \geqslant |\mathrm{Re}\,z|$. De la même manière, $|z| \geqslant |\mathrm{Im}\,z|$

$\Longrightarrow$ Nous avons :

$$F(z) - L = (P(x,y) + iQ(x,y)) - (\alpha + i\beta) = (P(x,y) - \alpha) + i(Q(x,y) - \beta)$$

Et donc, de cette remarque, nous tirons :

$$|F(z) - L| \leqslant |P(x,y) - \alpha| + |Q(x,y) - \beta| \text{ et } |P(x,y) - \alpha| \leqslant |F(z) - L| \text{ et } |Q(x,y) - \beta| \leqslant |F(z) - L|$$

$\Longrightarrow$ Ainsi :

$\rightarrow$ Si $\lim\limits_{z \to z_0} F(z) = L \Longleftrightarrow \lim\limits_{z \to z_0} F(z) - L = 0$ alors $\lim\limits_{(x,y) \to (x_0,y_0)} P(x,y) = \alpha$ et $\lim\limits_{(x,y) \to (x_0,y_0)} Q(x,y) = \beta$

→ Réciproquement, si $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} P(x,y) = \alpha$ et $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} Q(x,y) = \beta$, ce qui est équivalent à $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} P(x,y) - \alpha = 0$ et $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} Q(x,y) - \beta = 0$, nous en déduisons $\lim\limits_{z\to z_0} F(z) - L = 0$, c'est à dire $\lim\limits_{z\to z_0} F(z) = L$

3.2.4 Limites infinies

1. Soient $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ et $F : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction complexe contenant un disque de centre $z_0 = x_0 + iy_0$, mais non nécessairement définie en z_0.
   On dit que F admet comme limite ∞ en z_0 si et seulement si
   $$(\forall A > 0)\,(\exists \eta > 0)\,(\forall z \in \mathcal{D})\,(z \neq z_0)\,(|z - z_0| < \eta \Longrightarrow |F(z)| > A)$$
   Et on écrit $\lim\limits_{z\to z_0} F(z) = \infty$
2. Soit $F : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction complexe
   On dit que F admet comme limite ∞ en ∞ si et seulement si
   $$(\forall A > 0)\,(\exists B > 0)\,(\forall z \in \mathbb{C})\,(|z| > B \Longrightarrow |F(z)| > A)$$
   Et on écrit $\lim\limits_{z\to\infty} F(z) = \infty$

Remarque 9 :

On remarque bien qu'il n'y a pas de signe en ∞, puisqu'il n'y a pas de relation d'ordre total dans $\mathbb{C}$

3.2.5 Continuité

Soient $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ et $F : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction complexe contenant un disque de centre $z_0 = x_0 + iy_0$, définie au voisinage de z_0.
On dit que F est continue en z_0 si et seulement si $\lim\limits_{z\to z_0} F(z) = F(z_0)$

Remarque 10 :

1. Une définition formalisée est donc :
   F est continue en z_0 si et seulement si
   $$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \eta > 0)\,(\forall z \in \mathcal{D})\,(|z - z_0| < \eta \Longrightarrow |F(z) - F(z_0)| < \varepsilon)$$
2. Si $z_0 = x_0 + iy_0$ et $F(z) = F(x + iy) = P(x,y) + iQ(x,y)$, alors F est continue en z_0 si et seulement si, les 2 applications P et Q de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ sont continues en (x_0, y_0)
3. Comme pour les limites,
   (a) **Somme et produit :** Si F et G sont continues en z_0, alors $F + G$ et $F \times G$ sont continues en z_0
   (b) **Quotient :** Si $G(z_0) \neq 0$, alors $\dfrac{F}{G}$ est continue en z_0
   Retrouver les démonstrations dans le cours de L_1.

Exemple 5 :

1. De l'inégalité $||z| - |z_0|| \leqslant |z - z_0|$, on démontre facilement que l'application
   $$\left\{\begin{array}{rcl} M : \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & M(z) = |z| \end{array}\right.$$
   est continue
2. Si F est continue en z_0, alors $|F|$ est aussi continue en z_0.
   Il suffit d'utiliser l'inégalité $||F(z)| - |F(z_0)|| \leqslant |F(z) - F(z_0)|$

3.3 Fonctions holomorphes

3.3.1 Définition

1. Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$, un ouvert de $\mathbb{C}$ et $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ une application.
   On dit que la fonction F est holomorphe en $z_0 \in \Omega$ si la fonction Φ définie sur $\Omega \setminus \{z_0\}$ par :
   $$\Phi(z) = \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0}$$
   admet une limite lorsque z tend vers z_0, c'est à dire $\lim\limits_{z \to z_0} \Phi(z)$ existe.
   Cette limite est notée $F'(z_0)$; c'est le nombre dérivé de F en z_0.
   On dit que F admet une dérivée par rapport à la variable complexe
2. Si l'application $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ est holomorphe en tout point $z_0 \in \Omega$, F est dite holomorphe sur Ω
3. Si la fonction
   $$\begin{cases} F' : \Omega & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \quad z & \longmapsto & F'(z) \end{cases}$$
   est continue, F est dite continuement différentiable dans le champ complexe.

3.3.2 Théorème : les conditions de Cauchy

Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$, un ouvert de $\mathbb{C}$ et $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ une application définie par

$$\begin{cases} F : \Omega & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z = x + iy & \longmapsto & F(z) = F(x+iy) = P(x,y) + iQ(x,y) \end{cases}$$

1. La fonction F est holomorphe au point $z_0 = x_0 + iy_0$ **si et seulement si**
   (a) Les fonctions $P : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ et $Q : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ sont différentiables en (x_0, y_0)
   (b) Et leurs dérivées partielles vérifient les conditions suivantes :
   $$\frac{\partial P}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0,y_0) \text{ et } \frac{\partial Q}{\partial x}(x_0,y_0) = -\frac{\partial P}{\partial y}(x_0,y_0) \tag{3.1}$$
2. La fonction F est continuement différentiable au point $z_0 = x_0 + iy_0$ **si et seulement si**
   (a) Les fonctions $P : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ et $Q : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ sont continuement différentiables en (x_0, y_0)
   (b) Et leurs dérivées partielles vérifient les conditions 3.1

Dans les deux cas, la dérivée de la fonction F en z_0 est alors donnée par :

$$\begin{cases} F'(z_0) = & \dfrac{\partial P}{\partial x}(x_0,y_0) + i\dfrac{\partial Q}{\partial x}(x_0,y_0) \\ \quad = & \dfrac{\partial Q}{\partial y}(x_0,y_0) - i\dfrac{\partial P}{\partial y}(x_0,y_0) = \dfrac{\dfrac{\partial P}{\partial y}(x_0,y_0) + i\dfrac{\partial Q}{\partial y}(x_0,y_0)}{i} \end{cases}$$

Démonstration

Pour $z = x + iy \in \Omega$ et $z_0 = x_0 + iy_0 \in \Omega$, nous posons $h = x - x_0$, $k = y - y_0$, $u = z - z_0 = (x - x_0) + i(y - y_0) = h + ik$

1. **Supposons F holomorphe en $z_0 \in \Omega$**
   (a) Posons $\varpi(u) = \dfrac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} - F'(z_0) = \dfrac{F(z) - F(z_0)}{u} - F'(z_0)$; nous avons $\lim\limits_{u \to 0} \varpi(u) = 0$
   Nous pouvons alors écrire, comme $u = z - z_0 \iff z = z_0 + u$,
   $$F(z_0 + u) = F(z_0) + uF'(z_0) + u\varpi(u)$$

(b) Le nombre $F'(z_0)$ existant, nous posons : $F'(z_0) = F'(x_0 + iy_0) = A(x_0, y_0) + iB(x_0, y_0)$

(c) Nous posons aussi $\varpi(u) = \varpi(h + ik) = \alpha(h, k) + i\beta(h, k)$ où $\alpha : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\beta : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ sont, puisque $\lim\limits_{u \to 0} \varpi(u) = 0$, des fonctions telles que $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \alpha(h, k) = \lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \beta(h, k) = 0$

(d) Ré-écrivons l'égalité $F(z_0 + u) = F(z_0) + uF'(z_0) + u\varpi(u)$:

$$F[(x_0 + h) + i(y_0 + k)] = F(x_0 + iy_0) + (h + ik) F'(x_0 + iy_0) + (h + ik)(\alpha(h, k) + i\beta(h, k))$$

C'est à dire

$$\begin{aligned} P(x_0 + h, y_0 + k) + iQ(x_0 + h, y_0 + k) = \ & P(x_0, y_0) + iQ(x_0, y_0) + (h + ik)[A(x_0, y_0) + iB(x_0, y_0)] + \\ & (h + ik)(\alpha(h, k) + i\beta(h, k)) \\ = \ & P(x_0, y_0) + hA(x_0, y_0) - kB(x_0, y_0) + h\alpha(h, k) - k\beta(h, k) \\ & + i[Q(x_0, y_0) + hB(x_0, y_0) + kA(x_0, y_0) + h\beta(h, k) + k\alpha(h, k)] \end{aligned}$$

(e) En identifiant parties réelles et parties imaginaires, nous obtenons :

$$P(x_0 + h, y_0 + k) = P(x_0, y_0) + hA(x_0, y_0) - kB(x_0, y_0) + h\alpha(h, k) - k\beta(h, k)$$

Et

$$Q(x_0 + h, y_0 + k) = Q(x_0, y_0) + hB(x_0, y_0) + kA(x_0, y_0) + h\beta(h, k) + k\alpha(h, k)$$

Avec $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \alpha(h, k) = \lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \beta(h, k) = 0$

(f) Les deux égalités précédentes montrent que les fonctions $P : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ et $Q : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ sont différentiables en $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ et leurs dérivées partielles vérifient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) &= A(x_0, y_0) \\ \frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0) &= -B(x_0, y_0) \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0) &= B(x_0, y_0) \\ \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0) &= A(x_0, y_0) \end{aligned}$$

Ce qui montre bien que $\dfrac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) = \dfrac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0)$ et $\dfrac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0) = -\dfrac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0)$.

Ces identités montrent que :

$$F'(z_0) = \frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0) - i\frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0)$$

2. **Supposons $P : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ et $Q : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ différentiables en (x_0, y_0) et vérifiant 3.1**

(a) Nous allons poser

$$\begin{cases} A(x_0, y_0) = \dfrac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) = \dfrac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0) \\ B(x_0, y_0) = \dfrac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0) = -\dfrac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0) \end{cases} \tag{3.2}$$

(b) Ecrivons que P et Q sont différentiables en (x_0, y_0)
$\longrightarrow$ Tout d'abord

$$\begin{aligned} P(x_0 + h, y_0 + k) = \ & P(x_0, y_0) + h\frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) + k\frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0) + \\ & h\alpha_1(h, k) + k\beta_1(h, k) \end{aligned}$$

Avec $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \alpha_1(h, k) = \lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \beta_1(h, k) = 0$

$\longrightarrow$ Puis

$$\begin{aligned} Q(x_0+h,y_0+k) = \quad & Q(x_0,y_0) + h\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0,y_0) + k\frac{\partial Q}{\partial y}(x_0,y_0) + \\ & h\alpha_2(h,k) + k\beta_2(h,k) \end{aligned}$$

Avec $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \alpha_2(h,k) = \lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \beta_2(h,k) = 0$

(c) Regardons maintenant $F(z_0+u) - F(z_0)$. Nous avons :

$$\begin{aligned} F(z_0+u) - F(z_0) = \quad & F((x_0+h) + i(y_0+k)) - F(x_0+iy_0) \\ = \quad & P(x_0+h,y_0+k) + iQ(x_0+h,y_0+k) - P(x_0,y_0) - iQ(x_0,y_0) \\ = \quad & P(x_0+h,y_0+k) - P(x_0,y_0) + i(Q(x_0+h,y_0+k) - Q(x_0,y_0)) \end{aligned}$$

Et alors :

$$\begin{aligned} F(z_0+u) - F(z_0) = \quad & h\frac{\partial P}{\partial x}(x_0,y_0) + k\frac{\partial P}{\partial y}(x_0,y_0) + h\alpha_1(h,k) + k\beta_1(h,k) \\ & +i\left(h\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0,y_0) + k\frac{\partial Q}{\partial y}(x_0,y_0) + h\alpha_2(h,k) + k\beta_2(h,k)\right) \end{aligned}$$

En utilisant les égalités de 3.2, nous obtenons :

$$\begin{aligned} F(z_0+u) - F(z_0) = \quad & hA(x_0,y_0) - kB(x_0,y_0) + h\alpha_1(h,k) + k\beta_1(h,k) \\ & +i(hB(x_0,y_0) + kA(x_0,y_0) + h\alpha_2(h,k) + k\beta_2(h,k)) \\ = \quad & (h+ik)A(x_0,y_0) + (h+ik)iB(x_0,y_0) \\ & \quad +h(\alpha_1(h,k) + i\alpha_2(h,k)) + k(\beta_1(h,k) + i\beta_2(h,k)) \\ = \quad & (h+ik)(A(x_0,y_0) + iB(x_0,y_0)) + h\alpha(u) + k\beta(u) \end{aligned}$$

Où nous avons posé $\alpha(u) = \alpha_1(h,k) + i\alpha_2(h,k)$ et $\beta(u) = \beta_1(h,k) + i\beta_2(h,k)$.
Remarquons que $\lim\limits_{u\to 0} \alpha(u) = \lim\limits_{u\to 0} \beta(u) = 0$

(d) Nous avons :

$$\frac{F(z_0+u) - F(z_0)}{u} = A(x_0,y_0) + iB(x_0,y_0) + \frac{h\alpha(u) + k\beta(u)}{u}$$

Et nous devons rechercher $\lim\limits_{u\to 0} \dfrac{F(z_0+u) - F(z_0)}{u}$, c'est à dire $\lim\limits_{u\to 0} \dfrac{h\alpha(u) + k\beta(u)}{u}$

Pour commencer, $\left|\dfrac{h\alpha(u) + k\beta(u)}{u}\right| \leqslant \dfrac{|h|\,|\alpha(u)| + |k|\,|\beta(u)|}{|u|}$

Posons $\rho(u) = \max\{|\alpha(u)|, |\beta(u)|\}$; nous avons aussi $\lim\limits_{u\to 0} \rho(u) = 0$ et :

$$\left|\frac{h\alpha(u) + k\beta(u)}{u}\right| \leqslant \rho(u)\left(\frac{|h|+|k|}{|u|}\right) = \rho(u)\left(\frac{|h|+|k|}{\sqrt{h^2+k^2}}\right)$$

(e) Interviennent, ici, des inégalités classiques vues en L_0 :

$\star$ Tout d'abord :

$$(|h|+|k|)^2 = h^2 + k^2 + 2|h|\,|k|$$

Puis, $2|h|\,|k| \leqslant h^2+k^2$, et donc

$$(|h|+|k|)^2 = 2\left(h^2+k^2\right)$$

$\star$ Ainsi :

$$\left(\frac{|h|+|k|}{\sqrt{h^2+k^2}}\right)^2 = \frac{(|h|+|k|)^2}{h^2+k^2} \leqslant \frac{2\left(h^2+k^2\right)}{h^2+k^2} = 2$$

$\star$ Et donc $\rho(u)\left(\dfrac{|h|+|k|}{\sqrt{h^2+k^2}}\right) \leqslant 2\rho(u)$, c'est à dire

$$\left|\frac{h\alpha(u) + k\beta(u)}{u}\right| \leqslant 2\rho(u)$$

(f) Il en résulte que $\lim\limits_{u \to 0} \left| \dfrac{h\alpha(u) + k\beta(u)}{u} \right| = 0$, c'est à dire $\lim\limits_{u \to 0} \dfrac{h\alpha(u) + k\beta(u)}{u} = 0$

(g) Nous avons donc $\lim\limits_{u \to 0} \dfrac{F(z_0 + u) - F(z_0)}{u} = A(x_0, y_0) + iB(x_0, y_0)$.
F est donc holomorphe en z_0 et de dérivée

$$F'(z_0) = A(x_0, y_0) + iB(x_0, y_0) = \frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0)$$

Ce qu'il fallait démontrer

Exemple 6 :

1. Soit $\Lambda \in \mathbb{C}$, et $F : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ qui est la fonction constante telle que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $F(z) = \lambda$. Alors F est holomorphe sur $\mathbb{C}$ en entier et de dérivée $F'(z) = 0$

   La démonstration est simple : ou bien utiliser le rapport de dérivation $\dfrac{F(z_0 + u) - F(z_0)}{u}$, lequel est toujours nul ou les conditions de Cauchy.

2. La fonction
$$\begin{cases} F : \mathbb{C} & \longrightarrow \mathbb{C} \\ \quad z & \longrightarrow F(z) = z \end{cases}$$
est, elle aussi, holomorphe sur $\mathbb{C}$ entier et de dérivée $F'(z) = 1$. Il suffit, une fois de plus d'utiliser le rapport de dérivation $\dfrac{F(z_0 + u) - F(z_0)}{u}$ ou les conditions de Cauchy.

3. La fonction
$$\begin{cases} F : \mathbb{C} & \longrightarrow \mathbb{C} \\ \quad z & \longrightarrow F(z) = |z| \end{cases}$$
n'est pas holomorphe.

   Pour le voir, il suffit de voir que $F(z) = F(x + iy) = \sqrt{x^2 + y^2}$ et nous avons $P(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ alors que $Q(x, y) = 0$. F ne vérifie pas les conditions de Cauchy 3.1

Exercice 1 :

Démontrer que $F(z) = e^z$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ en entier et donner $F'(z)$

Remarque 11 :

Les résultats énoncés dans les points qui suivent, ont pour démonstrations **mot pour mot**, celles données pour les fonctions numériques d'une variable réelle.

1. Il est bien entendu que **si la fonction F est holomorphe en $z_0 \in \mathbb{C}$, alors elle y est continue.**

   En effet :
   Supposons F holomorphe en $z_0 \in \mathbb{C}$.
   Alors $\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} = F'(z_0)$
   Posons $\varpi(z) = \dfrac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} - F'(z_0)$, nous avons alors $\lim\limits_{z \to z_0} \varpi(z) = 0$. Or :

$$\varpi(z) = \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} - F'(z_0) \Longleftrightarrow F(z) = F(z_0) + (z - z_0) F'(z_0) + (z - z_0)\varpi(z)$$

   Et nous avons $\lim\limits_{z \to z_0} F(z) = F(z_0)$; F est donc continue en z_0

   C'est la même démonstration que pour les fonctions numériques d'une variable réelle

2. Si F et G sont holomorphes en $z_0 \in \mathbb{C}$ de dérivées respectives $F'(z_0)$ et $G'(z_0)$

   (a) **Somme :** $F + G$ est dérivable en z_0 et $(F + G)'(z_0) = F'(z_0) + G'(z_0)$

(b) **Produit :** $F \times G$ est dérivable en z_0 et $(F \times G)'(z_0) = F'(z_0)\,G(z_0) + F(z_0)\,G'(z_0)$
En particulier, la dérivée de λF, où $\lambda \in \mathbb{C}$ est $\lambda F'$

(c) **Quotient :** Si $G(z) \neq 0$, alors $\left(\dfrac{F}{G}\right)$ est dérivable en z_0 et $\left(\dfrac{F}{G}\right)'(z_0) = \dfrac{F'(z_0)\,G(z_0) - F(z_0)\,G'(z_0)}{(G(z_0))^2}$

3. Si F est holomorphe en $z_0 \in \mathbb{C}$ et G holomorphes en $F(z_0)$ alors $G \circ F$ est holomorphe en z_0 et de dérivée $(G \circ F)'(z_0) = F'(z_0) \times G'(F(z_0))$ qui s'écrit souvent : $(G \circ F)' = F' \times G' \circ F$

Exemple 7 :

La dérivée de $F(z) = z^n$ où $n \in \mathbb{N}$ est donnée par $F'(z) = nz^{n-1}$

Exercice 2 :

Démontrer que $F(z) = \sin z$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ en entier et donner $F'(z)$

Exercice 3 :

Soit $F : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction complexe. Démontrer que si F est holomorphe, alors les conditions suivantes sont équivalentes

1. F est constante
2. $\operatorname{Re} F$ est constante
3. $\operatorname{Im} F$ est constante

3.4 Correction d'exercices

Exercice 1 :

Démontrer que $F(z) = e^z$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ en entier et donner $F'(z)$

- Pour tout $z = x + iy \in \mathbb{C}$, nous avons $e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$ de telle sorte que si $F(z) = F(x+iy) = P(x,y) + iQ(x,y)$, nous avons :

$$P(x,y) = e^x \cos y \text{ et } Q(x,y) = e^x \sin y$$

D'où :

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x,y) = e^x \cos y \qquad \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = -e^x \sin y$$
$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = e^x \sin y \qquad \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) = e^x \cos y$$

Nous avons : $\dfrac{\partial P}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial Q}{\partial y}(x,y)$ et $\dfrac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = -\dfrac{\partial P}{\partial y}(x,y)$

F vérifie bien les conditions de Cauchy 3.1

- La fonction dérivée est donnée par :

$$F'(z) = \frac{\partial P}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^z$$

Nous avons donc $F'(z) = e^z$

Exercice 2 :

Démontrer que $F(z) = \sin z$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ en entier et donner $F'(z)$

On écrit $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ et nous utilisons les théorèmes de dérivation classique :

$$(\sin z)' = \frac{ie^{iz} + ie^{-iz}}{2i} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z$$

Exercice 3 :

Soit $F : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction complexe. Démontrer que si F est holomorphe, alors les conditions suivantes sont équivalentes

1. F est constante *2. $\operatorname{Re} F$ est constante* *3. $\operatorname{Im} F$ est constante*

1. Si F est constante, alors $\operatorname{Re} F$ et $\operatorname{Im} F$ sont constantes
2. Maintenant, supposons $\operatorname{Re} F$ constante. Si nous posons $F(z) = F(x+iy) = P(x,y) + iQ(x,y)$, alors P est donc constante, et nous avons :

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = 0$$

F étant holomorphe, par les conditions de Cauchy 3.1, nous avons :

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) = 0$$

Ce qui prouve que la fonction Q est, elle aussi, constante

Donc, la fonction F est constante

3. Nous avons une démonstration semblable pour montrer que si $\operatorname{Im} F$ est constante, alors F est constante.

Il est possible de ré-utiliser ce résultat sur la fonction $F(z) = |z|$ puisque $\operatorname{Im} F = 0$ et est donc constante alors que la fonction F n'est pas constante. Donc $F(z) = |z|$ n'est pas holomorphe.

Deuxième partie

Calcul intégral

Chapitre 4

Intégrales généralisées

.

Nous avons étudié, dans le cours de L_1 l'intégrale de Riemann. Dans cette théorie, les fonctions intégrables étaient bornées, et nous ne considérions que des intervalles bornés.
Que se passe-t-il si les intervalles ne sont plus bornés ou si les fonctions elles mêmes ne sont plus bornées ?
L'objet de cette séquence est d'étendre l'intégrale de Riemann.
Nous ne considérons dans ce chapitre, que des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ ou un sous ensemble de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$ ou l'un de ses sous-ensembles qui peut être $\mathbb{R}$.
La décomposition d'une de ces fonctions en sa partie réelle et sa partie imaginaire, nous conduit souvent, à ne considérer que les fonctions à valeurs réelles.

4.1 Premières définitions ; premières propriétés

4.1.1 Définition

Soit f, une fonction continue par morceaux sur l'intervalle $[a; b[$, intégrable au sens de Riemann sur chacun des intervalles $[x; y] \subset [a; b[$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$. On définit

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

Si $\lim\limits_{\substack{x \to b \\ x < b}} F(x) = \lim\limits_{\substack{x \to b \\ x < b}} \int_a^x f(t)\, dt$ existe, on dit que l'intégrale impropre $\int_a^b f(t)\, dt$ **a un sens**, et on écrit :

$$\lim_{\substack{x \to b \\ x < b}} \int_a^x f(t)\, dt = \int_a^b f(t)\, \mathrm{d}t$$

Remarque 1 :

1. **Notion d'intégrale impropre**
   Dans l'intégration généralisée, on utilise beaucoup le mot **d'intégrale impropre** qui désigne une extension de l'intégrale usuelle, définie par une forme de passage à la limite dans des intégrales. On note en général les intégrales impropres sans les distinguer des véritables intégrales ou intégrales définies, ainsi $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ est un exemple très classique d'intégrale impropre convergente, mais qui n'est pas définie au sens de l'intégration usuelle *(que ce soit l'intégration des fonctions continues par morceaux, l'intégrale de Riemann)*.
2. **Remarques-vocabulaire**

(a) Si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ a un sens, <u>on dit qu'elle converge</u>, ou que c'est <u>une intégrale convergente</u> ; elle diverge, sinon.

(b) **Déterminer la nature d'une intégrale**, c'est déterminer si elle converge ou si elle diverge

(c) On ne parle pas d'intégrale impropre lorsqu'on peut prolonger f par continuité en b.

Exemple : $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin t}{t}dt$ [1] ; le problème pourrait être posé en 0 ; or, $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = 1$; on peut donc prolonger $\dfrac{\sin t}{t}$ par continuité en 0,ce n'est donc pas une intégrale impropre ; on parle plutôt d'intégrale **faussement impropre** .

(d) La définition s'étend, bien évidemment, au cas où f est une fonction continue par morceaux sur l'intervalle $]a;b]$, intégrable au sens de Riemann sur chacun des intervalles $[x;y] \subset]a;b]$; si $\displaystyle\lim_{\substack{x\to a\\x>a}} F(x) = \lim_{\substack{x\to a\\x>a}} \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$ existe, on dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ converge.

3. Si f est à valeurs complexes, $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ converge si et seulement si, $\displaystyle\int_a^b \mathrm{Re}(f(t))\,dt$ **et** $\displaystyle\int_a^b \mathrm{Im}(f(t))\,dt$ convergent en même temps

Exemple 1 :

1. Soit $B > 0$. $\displaystyle\int_0^B \frac{1}{t^\alpha}dt$ n'a de sens que si et seulement si : $\alpha < 1$

(a) Comment faire pour le démontrer ?

C'est très simple : On étudie d'abord $\displaystyle\int_x^B \frac{1}{t^\alpha}\,dt$ pour $x > 0$, qui ne pose pas de problème puisque continue sur $]0;B]$, puis, ensuite, $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} \int_x^B \frac{1}{t^\alpha}\,dt$.

(b) Par un calcul de primitives classique, $\displaystyle\int_x^B \frac{1}{t^\alpha}\,dt = \left[\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_x^B$, cette égalité étant vraie, bien sûr pour $\alpha \neq 1$; nous avons donc :

$$\int_x^B \frac{1}{t^\alpha}\,dt = \left[\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_x^B = \frac{1}{1-\alpha}\left\{B^{1-\alpha} - x^{1-\alpha}\right\}$$

(c) Il devient donc évident que si $1-\alpha > 0$, c'est à dire si $\alpha < 1$ alors, $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} x^{1-\alpha} = 0$, et donc,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} \int_x^B \frac{1}{t^\alpha}\,dt = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{1-\alpha}\left\{B^{1-\alpha} - x^{1-\alpha}\right\} = \frac{B^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

(d) De la même manière, si $1-\alpha < 0$, c'est à dire si $\alpha > 1$ alors, $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^{1-\alpha} = +\infty$ et l'intégrale $\displaystyle\int_0^B \frac{1}{t^\alpha}\,dt$ n'existe pas.

(e) Si $\alpha = 1$, $\displaystyle\int_x^B \frac{1}{t}\,dt = [\ln t]_x^B = \ln B - \ln x$, et comme $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^B \frac{1}{t}\,dt$ diverge.

(f) **Par exemple,** *(cf figures 4.1)* l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^2}dt$ est une intégrale divergente *(nous avons* $2 > 1$*)*, alors que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}dt$ est convergente *(nous avons* $\dfrac{1}{2} < 1$*)* et nous avons $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}dt = 2$

1. Quelle est la différence avec l'exemple 1 précédent ?

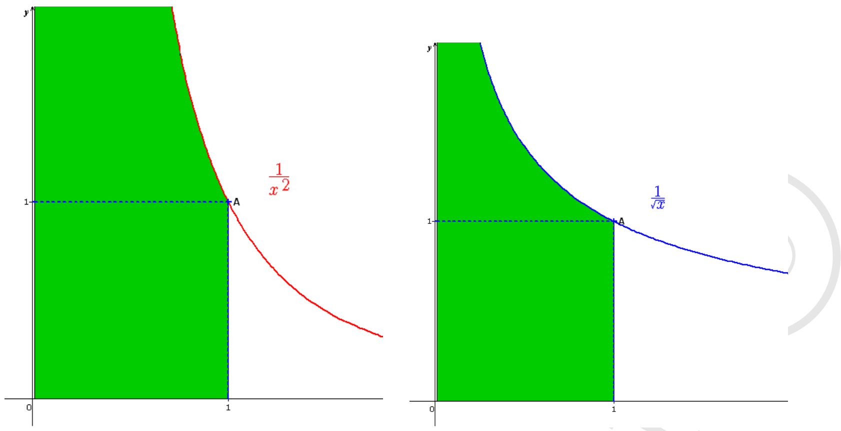

FIGURE 4.1 – Les graphes de $\dfrac{1}{x^2}$ et $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ sur $]0,1]$. Nous avons $\displaystyle\int_{0,01}^{1} \frac{1}{t^2}dt = 99,47$ et $\displaystyle\int_{0,01}^{1} \frac{1}{\sqrt{t}}dt = 1,800$

2. **L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln t \, dt$ converge**

De la même manière, on calcule $\displaystyle\int_x^1 \ln t \; dt$, et nous avons, en utilisant une intégration par parties :

$$\int_x^1 \ln t \; dt = [t \ln t - t]_x^1 = -1 - x \ln x + x$$

De la limite classique $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} x \ln x = 0$, on tire :

$$\boxed{\int_0^1 \ln t \; dt = -1}$$

Ce que nous voulions.

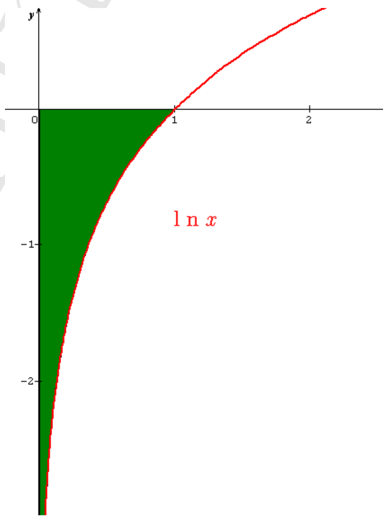

FIGURE 4.2 – Le graphe de $\ln x$ sur $]0,1]$. Nous avons $\displaystyle\int_{0,01}^{1} \ln t dt = -0,944$

3. Est ce que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arccos t}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ existe ?

 (a) Comme précédemment , on étudie $\displaystyle\int_x^1 \frac{\arccos t}{\sqrt{t}}\,dt$.

 On peut remarquer que la fonction $\dfrac{\arccos t}{\sqrt{t}}$ n'est pas bornée sur $]0;1]$

 En effet, comme $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} \arccos t = \frac{\pi}{2}$, nous avons $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} \frac{\arccos t}{\sqrt{t}} = +\infty$

 (b) On fait le changement de variable : $s = \sqrt{t}$, donc $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2\sqrt{t}} = \dfrac{1}{2s}$; d'où $2s\ \mathrm{d}s = \mathrm{d}t$, et si $t \in [x;1]$, alors $s \in [\sqrt{x};1]$, donc $\displaystyle\int_x^1 \frac{\arccos t}{\sqrt{t}}\,dt = \int_{\sqrt{x}}^1 \left(\arccos s^2\right) \times (2s)\ ds$; or, $f(s) = \left(\arccos s^2\right) \times (2s)$ est continue sur $[0;1]$.

 (c) Donc, $\displaystyle\lim_{x\to 0} \int_x^1 \frac{\arccos t}{\sqrt{t}}\,dt = \lim_{x\to 0} \int_{\sqrt{x}}^1 \left(\arccos s^2\right) \times (2s)\ ds = \int_0^1 \left(\arccos s^2\right) \times (2s)\ ds$

 (d) Reste à calculer $\displaystyle\int_0^1 \left(\arccos s^2\right) \times (2s)\ ds$.

 Le calcul de $\displaystyle\int_0^1 \left(\arccos s^2\right) \times (2s)\ ds$ ne pose pas tant de difficultés est ressort du cours de $L1$.

 On effectue le changement de variables $u = s^2$, alors $\dfrac{du}{ds} = 2s$ et nous avons :

$$\int_0^1 \left(\arccos s^2\right) \times (2s)\ ds = \int_0^1 (\arccos u)\ du$$

 La primitive de $\arccos x$ s'obtient par une intégration par parties classique, et nous avons :

$$\int_0^1 \left(\arccos s^2\right) \times (2s)\ ds = \int_0^1 (\arccos u)\ du = \left[x \arccos x - \sqrt{1-x^2}\right]_0^1 = 1$$

 Donc, $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arccos t}{\sqrt{t}}\,dt = 1$

Remarque 2 :

Si $f : [a;b[\longrightarrow \mathbb{C}$ est une fonction continue par morceaux et si $c \in [a;b[$ alors l'intégrale de f est convergente sur $[a;b[$ si, et seulement si, l'intégrale de f est convergente sur $[c;b[$ *(le problème de la convergence se pose en b)* c'est à dire :

$$\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t \text{ est convergente si et seulement si } \int_c^b f(t)\ \mathrm{d}t \text{ est convergente}$$

Et dans ce cas, nous avons :

$$\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\ \mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\ \mathrm{d}t$$

Cela résulte immédiatement de la relation de Chasles pour les intégrales définies :

$$(\forall x \in]a;b[) \left(\int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\ \mathrm{d}t + \int_c^x f(t)\ \mathrm{d}t\right)$$

4.1.2 Rappel du critère de Cauchy pour les fonctions

Soit f une fonction définie au voisinage d'un point a, sauf, peut-être en a.
Pour que f ait une limite finie lorsque x tend vers a, par valeurs différentes de a, il faut et il suffit que :
Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tels que :

$$(x \neq a\ y \neq a\ |x-a| \leqslant \eta\ |y-a| \leqslant \eta) \Longrightarrow (|f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon)$$

Remarque 3 :

Pour la démonstration et plus de développement, il faut aller voir le cours de $L1$

4.1.3 Proposition : le critère de Cauchy

Critère difficile à utiliser en pratique, mais d'une grande importance théorique.

Soit f, une fonction continue par morceaux sur l'intervalle$[a;b[$ ou sur $]a;b]$, intégrable au sens de Riemann sur chacun des intervalles $[x;y] \subset [a;b[$ ou sur $[x;y] \subset]a;b]$
Alors, $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$ a un sens, si et seulement si,
$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \eta_\varepsilon > 0)$ tels que :

$$((b - \eta_\varepsilon < x < y < b)) \Longrightarrow \left(\left|\int_x^y f(t)\ dt\right| < \varepsilon\right)$$

Ou bien :$(\forall \varepsilon > 0)$ $(\exists \eta_\varepsilon > 0)$ tels que

$$((a < x < y < a + \eta_\varepsilon)) \Longrightarrow \left(\left|\int_x^y f(t)\ dt\right| < \varepsilon\right)$$

Démonstration

On applique, très simplement, le critère de Cauchy pour les fonctions, dans le premier cas à la fonction $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\ dt$ ou à la fonction $G(x) = \displaystyle\int_x^b f(t)\ dt$ dans le second cas

4.1.4 Proposition

Soit f, une fonction continue par morceaux sur l'intervalle $[a;b[$. Si f est bornée sur $[a;b[$ alors, $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$ converge

Démonstration

C'est le moment d'utilise le critère de Cauchy.
On suppose donc que f est bornée, et nous écrivons qu'elle est bornée :

Il existe $M > 0$ tel que $\forall x \in [a;b[$, $|f(x)| \leqslant M$.

Soient $x \in [a;b[$ et $y \in [a;b[$; alors, $\left|\displaystyle\int_x^y f(t)\ \mathrm{d}t\right| \leqslant \displaystyle\int_x^y |f(t)|\ \mathrm{d}t \leqslant M|x-y|$
Ce qui montre que si $\eta_\varepsilon = \dfrac{\varepsilon}{M}$

$$|x-y| \leqslant \eta_\varepsilon \Longrightarrow \left|\int_x^y f(t)\ \mathrm{d}t\right| \leqslant M \times \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$$

D'après le critère de Cauchy, l'intégrale converge donc.

Exemple 2 :

1. Bien que $\lim\limits_{x\to 0} \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ n'existe pas, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin\left(\frac{1}{t}\right)\ dt$ existe, car la fonction $\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ est bornée sur $[0;\pi]$ *(cf figure 4.3)*

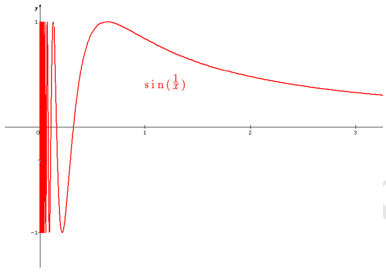

FIGURE 4.3 – Le graphe de $\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ x sur $\mathbb{R}^{*+}$. Nous avons $\displaystyle\int_{0,01}^{\pi} \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt = 1,56413$

2. **Est ce que** $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1}{t}\sin\left(\frac{1}{t}\right)\ dt$ **est définie ? *(cf figure 4.4)***

   (a) Dans un premier temps, comme dans tous les exemples précédents, nous étudions $\displaystyle\int_x^{\pi} \frac{1}{t}\sin\left(\frac{1}{t}\right)\ dt$ en en faisant une intégration par parties.

   (b) On remarque que : $\dfrac{1}{t}\sin\left(\dfrac{1}{t}\right) = t\times\left(\dfrac{1}{t^2}\sin\left(\dfrac{1}{t}\right)\right)$, et en utilisant cette remarque, nous avons :

$$\begin{cases} u' = \dfrac{1}{t^2}\sin\left(\dfrac{1}{t}\right) & u = \cos\left(\dfrac{1}{t}\right) \\ v = t & v' = 1 \end{cases}$$

   (c) Donc,

$$\int_x^{\pi} \frac{1}{t}\sin\left(\frac{1}{t}\right)\ dt = \left[t\cos\left(\frac{1}{t}\right)\right]_x^{\pi} - \int_x^{\pi} \cos\left(\frac{1}{t}\right)\ dt = \pi\cos\left(\frac{1}{\pi}\right) - x\cos\left(\frac{1}{x}\right) - \int_x^{\pi} \cos\left(\frac{1}{t}\right)\ dt$$

   (d) Comme, $\lim\limits_{x\to 0} x\cos\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$, et que $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos\left(\frac{1}{t}\right)\ dt$ existe **car** $\cos\left(\dfrac{1}{t}\right)$ **est bornée,** $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1}{t}\sin\left(\frac{1}{t}\right)\ dt$ existe et, mieux que cela, nous avons : $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1}{t}\sin\left(\frac{1}{t}\right)\ dt = \pi\cos\left(\frac{1}{\pi}\right) - \int_0^{\pi} \cos\left(\frac{1}{t}\right)\ dt$

   (e) Reste à calculer $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos\left(\frac{1}{t}\right)\ dt$, ce qui est une autre affaire !

4.1.5 Définition

Soit f, continue par morceaux sur l'intervalle $[a;+\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ et telle que $\forall x \geqslant a$ et $\forall y \geqslant a$, f soit intégrable sur l'intervalle $[x;y]$.

On définit $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\ dt$

Si $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \displaystyle\int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$ existe, on dit que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$ **a un sens,** et on écrit :

$$\lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t = \int_a^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$$

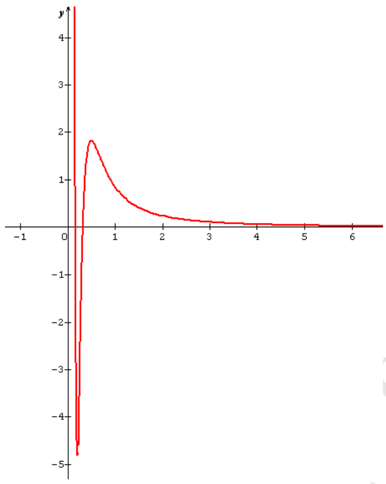

FIGURE 4.4 – Le graphe de $\frac{1}{x}\sin\left(\frac{1}{x}\right)x$ sur $\mathbb{R}^{*+}$.

Remarque 4 :

1. On dit que l'intégrale converge si $\int_a^{+\infty} f(t)\ dt$ a un sens ; elle diverge, sinon.
2. Déterminer **la nature d'une intégrale**, c'est déterminer l'existence de $\int_a^{+\infty} f(t)\ dt$
3. Pour tout $c \geqslant a$, les intégrales $\int_a^{+\infty} f(t)\ dt$ et $\int_c^{+\infty} f(t)\ dt$ ont même nature. C'est le comportement à l'infini qui nous importe.

Exemple 3 :

Nous allons commencer par des exemples élémentaires, mais néanmoins très importants

1. Existence de $\int_a^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\ dt$

   On calcule $\int_a^x \frac{1}{t^\alpha}\ dt$, puis on étudie $\lim_{x\to+\infty}\int_a^x \frac{1}{t^\alpha}\ dt$

   (a) Commençons par le plus simple : si $\alpha = 1$, nous avons $\int_a^x \frac{1}{t}\ dt = \ln x - \ln a$, et comme $\lim_{x\to+\infty}\ln x = +\infty$, l'intégrale $\int_a^{+\infty}\frac{1}{t^\alpha}\ dt$ diverge

   (b) Si $\alpha \neq 1$, $\int_a^x \frac{1}{t^\alpha}\ dt = \left[\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_a^x = \frac{1}{1-\alpha}\left\{x^{1-\alpha} - a^{1-\alpha}\right\}$
   Donc,
   — Si $1-\alpha < 0$, alors $\lim_{x\to+\infty} x^{1-\alpha} = 0$,
   — Si $1-\alpha > 0$, $\lim_{x\to+\infty} x^{1-\alpha} = +\infty$

   (c) En conclusion, $\int_a^{+\infty}\frac{1}{t^\alpha}\ dt$ n'existe que si $\alpha > 1$ *(cf figure 4.5)*

2. Existence de $\int_a^{+\infty} e^{At}\ dt$ avec $A \neq 0$

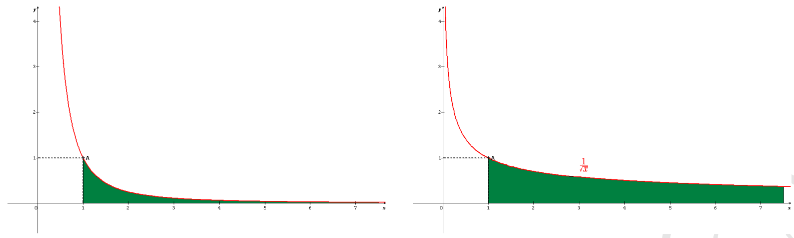

FIGURE 4.5 – Les graphes de $\dfrac{1}{x^2}$ et $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ sur $]0, +\infty[$.

(a) Nous calculons $\displaystyle\int_a^x e^{At}\,dt$; ici, nous avons un calcul très simple. Donc, $\displaystyle\int_a^x e^{At}\,dt = \left[\frac{e^{At}}{A}\right]_a^x = \frac{e^{Ax} - e^{Aa}}{A}$;

i. D'où, si $A < 0$, nous avons $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} e^{Ax} = 0$, et donc $\displaystyle\int_a^{+\infty} e^{At}\,dt = \frac{-e^{Aa}}{A}$

ii. D'où, si $A > 0$, nous avons $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} e^{Ax} = +\infty$, et donc $\displaystyle\int_a^{+\infty} e^{At}\,dt$ n'existe pas.

(b) En conclusion, $\displaystyle\int_a^{+\infty} e^{At}\,dt$ n'existe que si et seulement si $A < 0$

Exercice 1 :

Etudier l'existence de $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{(\ln t)^m}{t}\,dt$ pour $a \geqslant 1$

Exercice 2 :

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ un nombre complexe. Étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{\lambda t}\,\mathrm{d}t$ en précisant sa valeur en cas de convergence

4.1.6 Définition

Cette définition est identique à la définition précédente 4.1.5

Soit f, continue par morceaux sur l'intervalle $]-\infty; a]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ et telle que pour tout $x \leqslant a$ et pour tout $y \leqslant a$, f soit intégrable sur l'intervalle $[x; y]$.

On définit $F(x) = \displaystyle\int_x^a f(t)\,\mathrm{d}t$

Si $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} F(x) = \lim_{x \to -\infty} \int_x^a f(t)\,\mathrm{d}t$ existe, on dit que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^a f(t)\,\mathrm{d}t$ **a un sens,** et on écrit :

$$\lim_{x \to -\infty} \int_x^a f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^a f(t)\,\mathrm{d}t$$

4.1.7 Critère de Cauchy

1. Pour que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ soit convergente, il faut et il suffit que :

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists B_0) \text{ tel que } \left((y \geqslant x \geqslant B_0) \Longrightarrow \left(\left|\int_x^y f(t)\,dt\right| \leqslant \varepsilon\right)\right)$$

2. De même, pour que l'intégrale $\int_{-\infty}^{a} g(t)\,dt$ soit convergente, il faut et il suffit que :

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists B_0) \text{ tel que } \left((y \leqslant x \leqslant B_0) \Longrightarrow \left(\left|\int_x^y g(t)\,dt\right| \leqslant \varepsilon\right)\right)$$

Démonstration

C'est le critère de Cauchy appliqué aux fonctions $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ et $G(x) = \int_x^a g(t)\,dt$

4.1.8 Généralisation

1. Soit f, une fonction continue par morceaux sur l'intervalle$]a;b]$, intégrable au sens de Riemann sur chacun des intervalles $[x;y] \subset [a;b[$.
   On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)\ dt$ a un sens, si, pour tout $c \in\ ]a;b]$, $\int_a^c f(t)\ dt$ et $\int_c^b f(t)\ dt$ ont un sens, et on a alors $\int_a^b f(t)\ dt = \int_a^c f(t)\ dt + \int_c^b f(t)\ dt$
2. Soit f, une fonction continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, intégrable au sens de Riemann sur chacun des intervalles $[x;y] \subset \mathbb{R}$. On dit que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt$ a un sens, si, pour tout $c \in \mathbb{R}$, $\int_{-\infty}^{c} f(t)\ dt$ et $\int_c^{+\infty} f(t)\ dt$ ont un sens, et on a alors $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt = \int_{-\infty}^{c} f(t)\ dt + \int_c^{+\infty} f(t)\ dt$

Remarque 5 :

1. Il faut bien noter que la divergence de **l'une des deux intégrales** $\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$ ou $\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ équivaut à la divergence de $\int_a^b f(t)\ dt$
2. Dans le cas où $a = -\infty$ et $b = +\infty$ l'existence de $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_{-x}^{+x} f(t)\,\mathrm{d}t$ ne prouve pas la convergence de l'intégrale de f sur $]-\infty;+\infty[$

   Par exemple pour $f(t) = t$ on a $\int_{-x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ et pourtant l'intégrale diverge.

   En effet $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^x t\,\mathrm{d}t = +\infty$

   Pour prouver la convergence de l'intégrale de f sur $]-\infty;+\infty[$ on doit prouver indépendamment la convergence de $\int_{-\infty}^{c} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_c^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$, et ce, pour tout $c \in \mathbb{R}$.*(Après les exemples qui suivent, allez voir aussi dans les travaux dirigés)*

Exemple 4 :

1. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\, dt$ *a un sens*

   En effet, soit $c \in \mathbb{R}$; alors, $\displaystyle\int_{c}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\, dt = \lim_{x\to+\infty} \int_{c}^{x} \frac{1}{1+t^2}\, dt$; or,

   $$\int_{c}^{x} \frac{1}{1+t^2}\, dt = \arctan x - \arctan c$$

   Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (\arctan x) = \frac{\pi}{2}$, $\displaystyle\int_{c}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\, dt = \frac{\pi}{2} - \arctan c$

   De même, $\displaystyle\int_{-\infty}^{c} \frac{1}{1+t^2}\, dt = \arctan c - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \arctan c + \frac{\pi}{2}$, c'est à dire

   $$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\, dt = \pi}$$

2. *L'intégrale impropre* $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \sin t\, dt$ *n'existe pas.*

   En effet, soit $c \in \mathbb{R}$; $\displaystyle\int_{c}^{x} \sin t\, dt = \cos c - \cos x$ qui n'admet pas de limite lorsque x tend vers $+\infty$

3. *Est-ce que l'intégrale* $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{t^2}\, dt$ *a un sens ?*

   La fonction $f(t) = \dfrac{1}{t^2}$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}^{\star+}$

   Or $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{t^2}\, dt$ n'a pas de sens, donc, l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{t^2}\, dt$ n'existe pas.

   Une autre façon de faire, est de considérer l'intégrale $\displaystyle\int_{\varepsilon}^{A} \frac{1}{t^2}\, dt$, puis de regarder les limites lorsque ε tend vers 0 et A vers $+\infty$.

   Or, $\displaystyle\int_{\varepsilon}^{A} \frac{1}{t^2}\, dt = \left[\frac{-1}{t}\right]_{\varepsilon}^{A} = \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{A}$ et $\displaystyle\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ A\to+\infty}} \left(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{A}\right) = +\infty$ et, donc, l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{t^2}\, dt$ n'existe pas.

4.1.9 Proposition

Soit f, une fonction continue par morceaux sur l'intervalle $[a;b[$, à valeurs dans $\mathbb{C}$ et telle que l'intégrale $\displaystyle\int_{a}^{b} f(t)\ dt$ ait un sens.

De même, soit g une fonction continue par morceaux sur l'intervalle $[a;b[$ telle que l'intégrale $\displaystyle\int_{a}^{b} g(t)\ dt$ ait aussi un sens.

Alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ et tout $\mu \in \mathbb{C}$, $\displaystyle\int_{a}^{b} \lambda f(t) + \mu g(t)\ dt$ a un sens, et

$$\int_{a}^{b} \lambda f(t) + \mu g(t)\ dt = \int_{a}^{b} \lambda f(t)\ dt + \int_{a}^{b} \mu g(t)\ dt = \lambda \int_{a}^{b} f(t)\ dt + \mu \int_{a}^{b} g(t)\ dt$$

L'ensemble des fonctions continues par morceaux sur l'intervalle $[a;b[$, à valeurs dans $\mathbb{C}$ et telles que l'intégrale $\displaystyle\int_{a}^{b} f(t)\ dt$ soit convergente est donc un $\mathbb{C}$-espace vectoriel

Démonstration

C'est très facile ; soit $x \in \mathbb{R}$:

$$\int_a^x \lambda f(t) + \mu g(t) \ dt = \int_a^x \lambda f(t) \ dt + \int_a^x \mu g(t) \ dt = \lambda \int_a^x f(t) \ dt + \mu \int_a^x g(t) \ dt$$

Et le reste s'obtient par passage à la limite.

Remarque 6 :

1. On peut, évidemment, généraliser à $]a;b]$, $]a;b]$, avec des bornes éventuellement infinies.
2. Si $\displaystyle\int_a^b f(t) \ dt$ converge, alors que $\displaystyle\int_a^b g(t) \ dt$ diverge, $\displaystyle\int_a^b f(t) + g(t) \ dt$ diverge
3. On ne peut rien affirmer sur $\displaystyle\int_a^b f(t) + g(t) \ dt$ lorsque $\displaystyle\int_a^b f(t) \ dt$ diverge et $\displaystyle\int_a^b g(t) \ dt$ diverge.

4.1.10 Proposition

1. Soit f, une fonction continue par morceaux sur l'intervalle $[a;b[$, à valeurs dans $\mathbb{C}$ et telle que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t) \,\mathrm{d}t$ ait un sens.

   Alors, l'intégrale $\displaystyle\int_a^b \overline{f(t)}\,\mathrm{d}t$ a un sens, et $\displaystyle\int_a^b f(t) \,\mathrm{d}t = \overline{\int_a^b f(t) \,\mathrm{d}t}$
2. Soit f, une fonction continue par morceaux sur l'intervalle $[a;b[$, à valeurs dans $\mathbb{C}$. Alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t) \,\mathrm{d}t$ a un sens si et seulement si $\displaystyle\int_a^b \mathrm{Re}(f)(t) \,\mathrm{d}t$ **et** $\displaystyle\int_a^b \mathrm{Im}(f)(t) \,\mathrm{d}t$ ont un sens, et alors

$$\int_a^b f(t) \,\mathrm{d}t = \int_a^b \mathrm{Re}(f)(t) \,\mathrm{d}t + i \int_a^b \mathrm{Im}(f)(t) \,\mathrm{d}t$$

Démonstration

Résulte du fait que $f = \mathrm{Re}(f) + i \,\mathrm{Im}(f)$ et de $\mathrm{Re}(f) = \dfrac{f+\overline{f}}{2}$ et $\mathrm{Im}(f) = \dfrac{f-\overline{f}}{2}$. En effet

1. Supposons que $\displaystyle\int_a^b f(t) \,\mathrm{d}t$ a un sens, alors $\displaystyle\int_a^b \overline{f(t)}\,\mathrm{d}t$ a aussi un sens et comme $\mathrm{Re}(f) = \dfrac{f+\overline{f}}{2}$, nous avons

$$\int_a^b \mathrm{Re}(f)(t) \,\mathrm{d}t = \int_a^b \frac{f+\overline{f}}{2}(t) \,\mathrm{d}t$$

   Nous en déduisons donc $\displaystyle\int_a^b \mathrm{Re}(f)(t) \,\mathrm{d}t$ est une intégrale convergente.

   On démontre que la même manière que $\displaystyle\int_a^b \mathrm{Im}(f)(t) \,\mathrm{d}t$ est une intégrale convergente.
2. Réciproquement, supposons que $\displaystyle\int_a^b \mathrm{Re}(f)(t) \,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b \mathrm{Im}(f)(t) \,\mathrm{d}t$ ont un sens.

   Alors, $\displaystyle\int_a^b f(t) \,\mathrm{d}t = \int_a^b \mathrm{Re}(f)(t) + i \,\mathrm{Im}(f)(t) \,\mathrm{d}t = \int_a^b \mathrm{Re}(f)(t) \,\mathrm{d}t + i \int_a^b \mathrm{Im}(f)(t) \,\mathrm{d}t$ qui montre bien que $\displaystyle\int_a^b f(t) \,\mathrm{d}t$ a un sens.

Exercice 3 :

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ deux nombres réels. Étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{at} \cos bt \, dt$ en précisant sa valeur en cas de convergence

4.1.11 Définition et proposition

Soit f, une fonction continue par morceaux sur l'intervalle $[a; b[$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ telle que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b |f(t)| \; dt$ ait un sens.

Alors, l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t) \; dt$ a un sens, et nous avons :

$$\left| \int_a^b f(t) \; dt \right| \leqslant \int_a^b |f(t)| \; dt$$

Si $\displaystyle\int_a^b |f(t)| \; dt$ existe, on dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t) \; dt$ est **absolument convergente**

Démonstration

Pour démontrer cette proposition, on utilise le critère de Cauchy vu en 4.1.3 et 4.1.7.
Soit donc $\varepsilon > 0$

On sait que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b |f(t)| \; dt$ converge ; elle vérifie donc le critère de Cauchy .

Il existe donc $\eta_\varepsilon > 0$, tel que $((b - \eta_\varepsilon < x < y < b)) \Longrightarrow \left(\left| \displaystyle\int_x^y |f(t)| \; dt \right| < \varepsilon \right)$

Nous avons $\left| \displaystyle\int_x^y |f(t)| \; dt \right| = \displaystyle\int_x^y |f(t)| \; dt$. Donc, nous avons aussi $\displaystyle\int_x^y |f(t)| \; dt < \varepsilon$

De l'inégalité *(toujours vraie)* $\left| \displaystyle\int_x^y f(t) \; dt \right| \leqslant \displaystyle\int_x^y |f(t)| \; dt$, nous en déduisons que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t) \; dt$ vérifie aussi le critère de Cauchy ; elle est donc convergente.

Remarque 7 :

Il existe des intégrales convergentes sans être absolument convergentes : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \, dt$, par exemple.

4.2 Sens d'une intégrale

Lorsque nous sommes en présence d'une intégrale, la question la plus importante que nous devons nous poser, avant tout calcul, est la **question de son sens** [2], de l'existence de cette intégrale.

— **Première question :** Est ce que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t) \; dt$ est propre ? Si elle l'est, il n'y a pas de problème

— **Seconde question :** Est ce que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t) \; dt$ est impropre ? Si elle l'est, il faut alors, étudier son sens. Une fois que nous aurons démontré la convergence, il nous restera à la calculer. Pour certaines intégrales, le calcul sera très difficile, voire impossible avec des outils élémentaires.

2. Du sens de l'intégrale, bien sûr

4.2.1 Théorème pour des fonctions positives

Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur l'intervalle $[a; b[$ *(b pouvant être fini ou infini)* et telles que, pour tout $x \in [a; b[$, nous avons l'inégalité $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$

1. Si $\int_a^b f(t)\ dt$ diverge, alors $\int_a^b g(t)\ dt$ diverge
2. Si $\int_a^b g(t)\ dt$ converge, alors $\int_a^b f(t)\ dt$ converge

Démonstration

L'une des implications étant la contrapposée de l'autre, on ne démontre qu'une seule implication.

Supposons que $\int_a^b g(t)\ dt$ converge.

On appelle $G(x) = \int_a^x g(t)\ dt$; Comme $g(x) \geqslant 0$, alors $G(x)$ est croissante, $\lim_{x \to b} G(x) = \int_a^b g(t)\ dt$;

$G(x)$ est donc majorée par $\int_a^b g(t)\ dt$

De l'inégalité $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$, nous tirons $0 \leqslant \int_a^x f(t)\ dt \leqslant \int_a^x g(t)\ dt \leqslant \int_a^b g(t)\ dt$

Si $F(x) = \int_a^x f(t)\ dt$, F est croissante et majorée et donc convergente ; donc, $\lim_{x \to b} F(x) = \lim_{x \to b} \int_a^x f(t)\ dt$;

l'intégrale $\int_a^b f(t)\ dt$ converge donc

Exemple 5 :

1. **Existence de** $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$

   (a) Il est évident que la fonction $f(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^4}}$ est positive, mais n'est pas bornée sur l'intervalle $[0; 1[$, et donc que **l'intégrale** $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$ **est impropre.**

   Il faut donc d'abord, en étudier son sens ou sa convergence. L'idée est de majorer cette intégrale.

   (b) Pour $t \in [0; 1[$, nous avons : $t^4 \leqslant t^2$, donc $-t^4 \geqslant -t^2$, c'est à dire $\sqrt{1-t^4} \geqslant \sqrt{1-t^2}$, et donc : $\frac{1}{\sqrt{1-t^4}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$, et donc, $\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^4}}\ dt \leqslant \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\ dt$, pour tout $x \in [0; 1[$

   (c) La dérivée de la fonction $\arcsin x$ est donnée par $\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$, que donc, $\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\ dt = \arcsin x$, qu'en particulier $\lim_{x \to 1} \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\ dt = \lim_{x \to 1} \arcsin x = \frac{\pi}{2}$

   (d) L'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\ dt$ est convergente, nous avons même $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\ dt = \frac{\pi}{2}$, on en conclue donc que $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$ est aussi convergente

   Une autre question sera d'en faire le calcul !

2. **Existence de** $\int_0^1 \frac{e^t}{t}\ dt$

   Bien sûr, une fois de plus, le problème, pour la fonction $\frac{e^t}{t}$ se pose en 0 ; or, pour $t \in]0; 1]$, nous avons : $\frac{e^t}{t} \geqslant \frac{1}{t}$, et donc, pour $x \in]0; 1]$, $\int_x^1 \frac{e^t}{t}\ dt \geqslant \int_x^1 \frac{1}{t}\ dt$;or, nous avons $\int_x^1 \frac{1}{t}\ dt = -\ln x$,

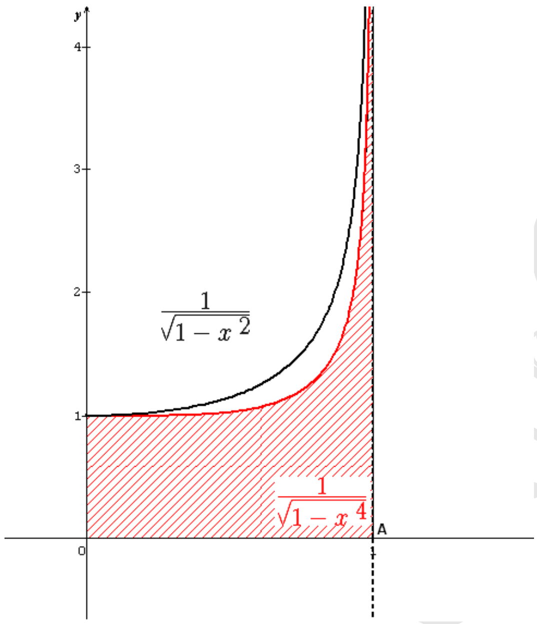

FIGURE 4.6 – Les graphes de $\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ et $\dfrac{1}{\sqrt{1-t^4}}$ sur $[0;1[$. Nous avons $\displaystyle\int_0^{0,999} \frac{1}{\sqrt{1-t^4}} dt = 1,34884$

que donc, mes braves, comme $\lim\limits_{x\to 0}(-\ln x) = +\infty$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^t}{t}\, dt$ n'existe pas ; voilà ! !

3. Existence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^p e^{-t}\, dt$, où $p > 0$

CETTE QUESTION EST UN GRAND CLASSIQUE ET POURRAIT ÊTRE UNE QUESTION DE COURS

(a) Il y a d'abord, un chose qu'il faut absolument bien connaître et savoir utiliser, et ré-utiliser, c'est : $\lim\limits_{t\to+\infty} t^\lambda e^{-t} = 0$, et ceci, pour tout $\lambda > 0$. ce résultat fait partie de ce qu'on appelle des comparaisons de fonctions :

L'exponentielle l'emporte sur les puissances qui l'emportent sur les logarithmes

(b) Nous avons, en particulier, $\lim\limits_{t\to+\infty} t^{p+2}e^{-t} = 0$; pourquoi $p+2$?. . . . . .À suivre ! !

(c) Il existe donc un nombre $A > 0$ tel que, si $t > A$ alors, $t^{p+2}e^{-t} < 1$; donc, si $t > A$, alors, $t^p e^{-t} < \dfrac{1}{t^2}$.

(d) Alors, à partir d'ici, nous allons découper l'intégrale en deux.

Nous avons : $\displaystyle\int_0^x t^p e^{-t}\, dt = \int_0^A t^p e^{-t}\, dt + \int_A^x t^p e^{-t}\, dt$

— En ce qui concerne l'intégrale $\displaystyle\int_0^A t^p e^{-t}\, dt$, pas de problème : elle est propre ; on peut même la calculer ! ![3]

— Par contre, $\displaystyle\int_A^x t^p e^{-t}\, dt$ pose un peu plus de problèmes, et c'est là que l'étude précédente sur $\lim\limits_{t\to+\infty} t^{p+2}e^{-t} = 0$ intervient ; en effet : $\displaystyle\int_A^x t^p e^{-t}\, dt \leqslant \int_A^x \frac{1}{t^2}\, dt$; comme $\displaystyle\int_A^{+\infty} \frac{1}{t^2}\, dt$, existe, il en est de même de $\displaystyle\int_A^{+\infty} t^p e^{-t}\, dt$

3. Mais, c'est un peu long !

En conclusion, $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^p e^{-t}\, dt$ existe, pour tout $p > 0$

4.2.2 Théorème

Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur l'intervalle $[a;b[$ *(b pouvant être fini ou infini)* et telles que $\forall x \in [a;b[$, $|f(x)| \leqslant g(x)$
Si $\displaystyle\int_a^b g(t)\, \mathrm{d}t$ converge, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\, \mathrm{d}t$ converge

Démonstration

D'après le théorème 4.2.1 précédent, l'intégrale $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\, dt$ est convergente *(comparaison des fonctions positives)*; l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt$ est donc absolument convergente, donc convergente.

4.2.3 Théorème : utilisation des équivalents

Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur l'intervalle $[a;b[$ *(b pouvant être fini ou infini)* et toutes les deux positives sur l'intervalle $[a;b[$
On suppose que $f(x) \underset{x\to b}{\approx} g(x)$ au voisinage de b
Alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)\, dt$ ont même nature

Démonstration

Que $f(x) \underset{x\to b}{\approx} g(x)$ au voisinage de b, veut dire $\displaystyle\lim_{x\to b} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$
Il existe donc $A > 0$, tel que si $|x - b| < A$, alors, $\left|\dfrac{f(x)}{g(x)} - 1\right| < \dfrac{1}{2}$, c'est à dire que si $|x - b| < A$, alors $\dfrac{1}{2} < \dfrac{f(x)}{g(x)} < \dfrac{3}{2}$.
Ainsi, si $b - A < x < b$, alors,

$$\frac{1}{2} g(x) < f(x) < \frac{3}{2} g(x) \tag{4.1}$$

Cette double inégalité est donc très forte, puisqu'elle montre comment sont liées $f(x)$ et $g(x)$ au voisinage de b
On découpe toujours l'intégrale :

$$\int_a^b f(t)\, dt = \int_a^{b-A} f(t)\, dt + \int_{b-A}^b f(t)\, dt$$

L'intégrale $\displaystyle\int_a^{b-A} f(t)\, dt$ ne pose pas de problème.
De même,

$$\int_a^b g(t)\, dt = \int_a^{b-A} g(t)\, dt + \int_{b-A}^b g(t)\, dt$$

Des inégalités (4.1), du fait que f et g sont deux fonctions positives, nous tirons que les intégrales $\displaystyle\int_{b-A}^b f(t)\, dt$ et $\displaystyle\int_{b-A}^b g(t)\, dt$ ont même nature.

Exemple 6 :

1. Pour commencer une remarque : **De la nécessité de connaître des intégrales remarquables** comme $\displaystyle\int_0^1 t^\alpha dt$ ou $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^\alpha dt$ etc.....
2. **Existence de** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^5+x+1}}dx$

   Premièrement, la fonction $f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x^5+x+1}}$ est positive et continue sur $[+1 \; +\infty[$

   Lorsque x tend vers $+\infty$, nous avons $x^5+x+1 \underset{+\infty}{\simeq} x^5$ et donc $\sqrt{x^5+x+1} \underset{+\infty}{\simeq} x^{\frac{5}{2}}$, et donc
$$\frac{2x}{\sqrt{x^5+x+1}} \underset{+\infty}{\simeq} \frac{2x}{x^{\frac{5}{2}}} = 2x^{\frac{-3}{2}}$$
   Or, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} 2x^{\frac{-3}{2}}dx = 2\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}dx$ converge, et donc, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^5+x+1}}dx$ converge aussi
3. **Existence de** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)\, dt$

   On peut d'ores et déjà, faire remarquer que la fonction $\dfrac{1}{t}\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)$ est positive pour $t \geqslant 1$ et le théorème précédent est susceptible d'être appliqué

   Deux méthodes peuvent être utilisées pour résoudre cette question.

   (a) La première : utiliser les limites classiques, du type : $\displaystyle\lim_{u\to 0}\frac{e^u-1}{u} = 1$; nous avons donc, ici, $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\frac{e^{\frac{1}{t}}-1}{\frac{1}{t}} = 1$; comme, $\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right) = \dfrac{\frac{1}{t}\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)}{\frac{1}{t}}$, nous avons $\dfrac{\frac{1}{t}\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)}{\frac{1}{t}\times\frac{1}{t}} = \dfrac{\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)}{\frac{1}{t}}$ et donc, $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\frac{\frac{1}{t}\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)}{\frac{1}{t}\times\frac{1}{t}} = 1$, ce qui montre que $\dfrac{1}{t}\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right) \underset{+\infty}{\approx} \dfrac{1}{t^2}$; comme $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^2}\, dt$ converge, il en est de même de $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{t}\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)\, dt$

   (b) La seconde donne un autre moyen de trouver un équivalent, est de faire un **développement asymptotique.** En effet, le développement limité de e^x en zéro est donné par :
$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + x^4\varepsilon(x)$$
   Or, si t est voisin de $+\infty$, $\dfrac{1}{t}$ est voisin de zéro, et, au voisinage de $+\infty$
$$e^{\frac{1}{t}} = 1 + \frac{1}{t} + \frac{\frac{1}{t^2}}{2} + \frac{\frac{1}{t^3}}{6} + \frac{\frac{1}{t^4}}{24} + \frac{1}{t^4}\varepsilon\left(\frac{1}{t}\right)$$
   C'est à dire que :
$$\frac{1}{t}\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right) = \frac{1}{t}\left(\frac{1}{t} + \frac{\frac{1}{t^2}}{2} + \frac{\frac{1}{t^3}}{6} + \frac{\frac{1}{t^4}}{24} + \frac{1}{t^4}\varepsilon\left(\frac{1}{t}\right)\right)$$
   Ce qui montre donc, mais d'une autre façon, que $\dfrac{1}{t}\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right) \underset{+\infty}{\approx} \dfrac{1}{t^2}$
4. **Existence de** $B(p,q) = \displaystyle\int_0^1 t^p(1-t)^q\, dt$**, où** $p\in\mathbb{R}$**, et** $q\in\mathbb{R}$

   Ce n'est pas un problème aussi simple que cela, surtout parce que $p\in\mathbb{R}$ et $q\in\mathbb{R}$.

   (a) Il faut d'abord remarquer que si $p \geqslant 0$ **et** $q \geqslant 0$, alors il n'y a aucun problème de continuité de la fonction $f(t) = t^p(1-t)^q$ sur l'intervalle $[0;1]$; l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t^p(1-t)^q\, dt$ est propre donc bien convergente.

(b) Il reste donc à étudier les autres cas, du type, par exemple $p < 0$ et $q \in \mathbb{R}$. Les problèmes, pour cette intégrale, se posent donc en 0 et en 1. Nous allons donc scinder l'intervalle $[0;1]$ en deux, et nous allons étudier $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} t^p (1-t)^q \ dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 t^p (1-t)^q \ dt$

— Etudions premièrement $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} t^p (1-t)^q \ dt$

En 0, la fonction $f(t) = t^p (1-t)^q$ est équivalente à la fonction $g(t) = t^p$; en effet,

$$\lim_{t \to 0} \frac{t^p (1-t)^q}{t^p} = \lim_{t \to 0} (1-t)^q = +1$$

Nous avons étudié *(cf 4.1.1)* $\displaystyle\int_0^B \frac{1}{t^\alpha} \ dt = \int_0^B t^{-\alpha} \ dt$ et nous avons montré que

$$\int_0^B \frac{1}{t^\alpha} \ dt = \int_0^B t^{-\alpha} \ dt$$

n'a de sens que si et seulement si : $\alpha < 1$ i.e. si $-\alpha > -1$; donc, $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} t^p \ dt$ n'a de sens que si $p > -1$.

On en déduit que $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} t^p (1-t)^q \ dt$ **n'existe que si** $p > -1$

— Etudions maintenant $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 t^p (1-t)^q \ dt$

Intelligents comme vous êtes, vous avez sûrement vu tout de suite, qu'un changement de variable s'imposait.

Effectivement, si nous faisons le changement : $u = 1-t$, nous obtenons $\mathrm{d}u = -\mathrm{d}t$, alors, c'est là que le miracle s'opère, $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 t^p (1-t)^q \ dt = \int_{\frac{1}{2}}^0 u^q (1-u)^p \ -du = \int_0^{\frac{1}{2}} u^q (1-u)^p \ du$

Nous retombons alors sur l'étude du point précédent ; nous pouvons alors conclure, tout bonnement, que $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} u^q (1-u)^p \ du$ n'existe que si $q > -1$

Autre forme de de l'énoncé précédent : $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 t^p (1-t)^q \ dt$ **n'existe que si** $q > -1$

(c) Conclusion :$B(p,q) = \displaystyle\int_0^1 t^p (1-t)^q \ dt$ **n'existe que si** $p > -1$ **et** $q > -1$

4.3 Quelques idées pratiques

4.3.1 Plan d'étude d'une intégrale généralisée

Nous résumons ici l'ensemble des techniques vues dans ce chapitre pour l'étude de l'intégrale d'une fonction f sur un intervalle non borné de $\mathbb{R}$, la fonction étant éventuellement non bornée au voisinage d'un ou plusieurs points de l'intervalle. Pour illustrer le plan d'étude, nous détaillerons l'exemple :

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} |t|^{\frac{-3}{2}} \sin t dt$$

1. **Identifier le ou les points incertains**

   La fonction $|t|^{\frac{-3}{2}} \sin t$ est impaire, elle tend vers 0 en oscillant quand t tend vers $-\infty$ et $+\infty$, elle tend vers $-\infty$ en 0^- et vers $-\infty$ en 0^+. Il y a donc 4 points incertains à étudier.

2. **Isoler les points incertains**

Pour cela, il faut découper l'intervalle d'étude en autant de sous-intervalles qu'il y a de points incertains, de manière à ce que les problèmes soient tous situés sur une borne de chaque intervalle. Dans notre exemple, on divisera en 4 intervalles.

$$I_1 = \int_{-\infty}^{-1} |t|^{\frac{-3}{2}} \sin t dt \qquad I_2 = \int_{-1}^{0} |t|^{\frac{-3}{2}} \sin t dt$$
$$I_3 = \int_{0}^{+1} |t|^{\frac{-3}{2}} \sin t dt \quad I_4 = \int_{1}^{+\infty} |t|^{\frac{-3}{2}} \sin t dt$$

Chacune des intégrales obtenues doit être étudiée séparément. L'intégrale I n'est définie que si chacun des morceaux converge.

3. **Se ramener à une intégrale sur** $[a, +\infty[$ **ou sur** $]a, b]$
   Pour cela, il suffit d'effectuer le changement de variable $t \mapsto -t$. Dans notre cas, puisque la fonction est impaire, $I_1 = I_4$ et $I_2 = I_3$.
4. **Calculer une primitive si c'est possible**
   Ayant une primitive, le problème est ramené à un calcul de limite. Si on n'a pas de primitive explicite, alors :
   (a) **Si la fonction est de signe constant**
   Changer éventuellement le signe pour se ramener à une fonction positive. Calculer un équivalent au voisinage du point incertain et utiliser le théorème sur les équivalents.
   Si l'équivalent ne donne pas la réponse directement, utiliser les théorèmes de comparaison.
   Dans notre exemple, l'intégrale I_3 est celle d'une fonction positive, tendant vers $+\infty$ en 0^+.
   $$|t|^{\frac{-3}{2}} \sin t \underset{0}{\approx} t^{\frac{-1}{2}}$$
   Or l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t^{\frac{-1}{2}} dt$ converge, donc I_3 converge.
   (b) **Si la fonction n'est pas de signe constant**
   Commencer par étudier l'intégrale de $|f|$, comme dans le cas précédent *(équivalent ou comparaison)*.
   Si elle converge, l'intégrale étudiée est absolument convergente, donc convergente.
   Dans notre exemple, l'intégrale I_4 est absolument convergente : on le déduit du théorème de comparaison, car, très simplement,
   $$\left| |t|^{\frac{-3}{2}} \sin t \right| \leqslant |t|^{\frac{-3}{2}} = t^{\frac{-3}{2}}$$
   et l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^{\frac{-3}{2}} dt$ est convergente. Donc l'intégrale I_4 est absolument convergente, donc convergente.

4.3.2 Tableau redonnant quelques primitives

Intervalle de définition	Fonction	Fonction primitive
$\mathbb{R}$	x^m avec $m \in \mathbb{N}$	$\dfrac{x^{m+1}}{m+1} + k$
$\mathbb{R}^*$	x^m avec $m \in \mathbb{Z}$ et $m < -1$	$\dfrac{x^{m+1}}{m+1} + k$
$]0,\ +\infty[$	x^α avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\alpha \neq -1$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + k$
$\{x \in \mathbb{R}$ tq $f(x) \in]0,\ +\infty[\}$	$f'(x) \times f(x)^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\alpha \neq -1$	$\dfrac{f(x)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + k$
$\mathbb{R}^*$	$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + k$
$\{x \in \mathbb{R}$ tq $u(x) > 0\}$	$\dfrac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln\lvert u(x)\rvert + k$
$\mathbb{R}$	e^x	$e^x + k$
$\mathbb{R}$	$u'(x)\, e^{u(x)}$	$e^{u(x)} + k$
$\mathbb{R}$	a^x avec $a > 0$ et $a \neq +1$	$\dfrac{a^x}{\ln a} + k$
$\mathbb{R}$	$\sin x$	$-\cos x + k$
$\mathbb{R}$	$\cos x$	$\sin x + k$
$\left]-\dfrac{\pi}{2}\ \dfrac{\pi}{2}\right[$	$\tan x$	$-\ln\lvert\cos x\rvert + k$
$]-1\ \ +1[$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + k$
$]-1\ \ +1[$	$\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos x + k$
$\mathbb{R}$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\arctan x + k$
$\left]-\dfrac{\pi}{2}\ \dfrac{\pi}{2}\right[$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + k$

4.4 Travaux dirigés

4.4.1 Application directe du cours

Exercice 4 :

Etudier la convergence des intégrales suivantes et, le cas échéant, indiquer leur valeur :

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx$
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} x e^{-x} dx$
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{\arctan x}}{1+x^2} dx$
4. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2-1}$
5. $\displaystyle\int_0^{\frac{+\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} dx$
6. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2} dx$
7. $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x}$
8. $\displaystyle\int_0^1 x^n \ln x\, dx$ avec $n \in \mathbb{N}^*$
9. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(x-1)^2} dx$

Exercice 5 :

Etudier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{dx}{x(x+1)}$ et, le cas échéant, en indiquer sa valeur

Exercice 6 :

Etudier, suivant la valeur du réel positif α, la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b \frac{dt}{(t-a)^\alpha}$ avec $a < b$

Exercice 7 :

Déterminer la nature des intégrales suivantes.

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}dx$
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{x^{\frac{17}{5}}+1}dx$
3. $\displaystyle\int_0^{+1} \frac{e^x}{x}dx$
4. $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{e^{\cos x}}{x}dx$
5. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{t^3+1}dt$
6. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2}{t^4+1}dt$
7. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^2+1}dx$
8. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+e^{at}}\,dt$ avec $a>0$
9. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan x}dx$ *(effectuer un changement de variables)*
10. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}$
11. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{(x^2+1)\,x}dx$
12. $\displaystyle\int_0^{4} \frac{dx}{\sqrt{4-x}}$

Exercice 8 :

Etude de quelques faux amis

1. Etudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(t+1)\,dt}{t^2+1}$, puis calculer $\displaystyle\lim_{a\to+\infty}\int_{-a}^{+a} \frac{(t+1)\,dt}{t^2+1}$.
2. De la même manière, étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{(1-2t)\,dt}{t\,(1-t)}$, puis calculer $\displaystyle\lim_{a\to 0}\int_a^{1-a} \frac{(1-2t)\,dt}{t\,(1-t)}$.
3. Démontrez que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x}\,dx$ est divergente alors que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_{\frac{1}{n}}^{n} \frac{\ln x}{x}\,dx = 0$
4. Quelles conclusions tirer ?

Exercice 9 :

Montrer que si $t \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right]$, alors $\dfrac{1}{\sin t} \geqslant \dfrac{1}{t} > 0$; que conclure pour $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin t}\,dt$?

Exercice 10 :

1. a est un réel ; étudier suivant les valeurs de a la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 x^a\left(6x-\left(6+x^2\right)\sin x\right)\,dx$
2. Montrer qu'au voisinage de 0, $\dfrac{1}{\sqrt{x\,(1-x)}} \underset{x\to 0}{\approx} \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, et qu'au voisinage de 1 $\dfrac{1}{\sqrt{x\,(1-x)}} \underset{x\to 1}{\approx} \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$; en déduire la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x\,(1-x)}}\,dx$

Exercice 11 :

On considère l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha\left(1+t^\beta\right)}$ où α et β sont deux réels strictement positifs ; pour quelles valeurs de α et β cette intégrale est-elle convergente ?

Exercice 12 :

Calcul d'intégrales généralisées

1. Montrer la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$, puis calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$ *(pour faire ce calcul, trouver A, B, et C, tels que* $\dfrac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \dfrac{A}{x+1} + \dfrac{B}{x+2} + \dfrac{C}{x+3}$*)*
2. Montrer la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\,dx}{x^3+x^2+x+1}$, puis calculer cette intégrale *(indications : trouver A, B, et C, tels que* $\dfrac{x}{x^3+x^2+x+1} = \dfrac{Ax+B}{x^2+1} + \dfrac{C}{x+1}$*)*

4.4.2 Quelques problèmes

Exercice 13 :

Soit f une fonction définie et continue par morceaux sur un intervalle $[a;+\infty[$. On suppose que $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = L$ et que L est finie.

Est-il possible, suivant la valeur de L de conclure quant à la nature de $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$?

Exercice 14 :

La convergence d'une intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ n'implique que pas que f admette une limite en $+\infty$

Soit f définie sur $\mathbb{R}^+$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$\begin{cases} f(n) = 1 \\ f\left(n - \dfrac{1}{2^n}\right) = 0 \\ f\left(n + \dfrac{1}{2^n}\right) = 0 \\ f \text{ est affine sur } \left[n - \dfrac{1}{2^n}; n\right] \text{ et sur } \left[n; n + \dfrac{1}{2^n}\right] \\ f(x) = 0 \text{ ailleurs} \end{cases}$$

Une autre façon d'exprimer f peut être donnée par :

$$\begin{cases} f(x) = 2^n\left(x - \left(n - \dfrac{1}{2^n}\right)\right) \text{ si } x \in \left[n - \dfrac{1}{2^n}; n\right] \\ f(x) = -2^n\left(x - \left(n + \dfrac{1}{2^n}\right)\right) \text{ si } x \in \left[n; n + \dfrac{1}{2^n}\right] \\ f(x) = 0 \text{ ailleurs} \end{cases}$$

Le graphe de la fonction est donné dans la figure 4.7

Montrer que f n'admet pas de limite lorsque t tend vers $+\infty$, mais que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge

Exercice 15 :

Soit f, une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ (autrement dit, $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$. On suppose que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L_1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L_2$

1. Démontrez l'existence de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (f(x+1) - f(x))\,dx$, puis calculer $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (f(x+1) - f(x))\,dx$ *(Considérer* $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$*)*
2. Calculer $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (\arctan(x+1) - \arctan(x))\,dx$

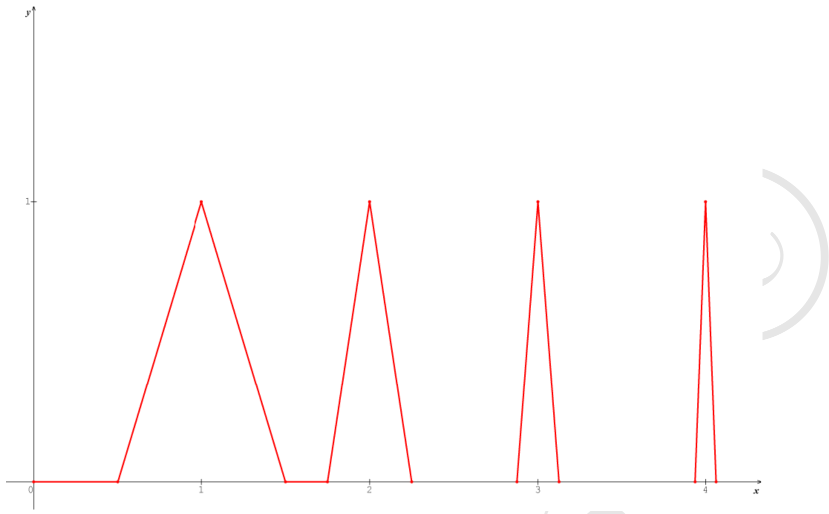

FIGURE 4.7 – le graphe de f

Exercice 16 :

1. Démontrer la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{x-1}{\ln x}\,dx$
2. Utiliser le théorème des accroissements finis pour démontrer que pour tout $x \in \,]0;1[$,

$$1 - \frac{1}{x} < \ln x < x - 1$$

3. Soit $T \in \,]0;1[$; démontrer que $\displaystyle\int_0^T \frac{x}{\ln x}\,dx = \int_0^{T^2} \frac{1}{\ln x}\,dx$
4. En déduire un encadrement de $\displaystyle\int_0^T \frac{x-1}{\ln x}\,dx$ et démontrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{x-1}{\ln x}\,dx = \ln 2$

Exercice 17 :

Soit $f(x) = \ln(\sin x)$ et $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)\,dx$

1. En écrivant $f(x) = \ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right) + \ln x$, démontrer qu'au voisinage de 0, nous avons $f(x) \underset{0}{\approx} \ln x$.
   Etablir alors la convergence de l'intégrale I
2. Montrer que nous avons $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x)\,dx$, puis que $2I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{\sin 2x}{2}\right)dx$
3. Démontrer que $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin 2x)\,dx = I$
4. En déduire la valeur de I

Exercice 18 :

Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, continue, telle que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,dt$ converge.
Soient $0 < a < b$ et $0 < x < y$, et on pose :

$$F(x,y) = \int_x^y \frac{f(at) - f(bt)}{t}\,dt$$

1. Montrer que $F(x,y) = \int_{ax}^{bx} \frac{f(t)}{t}\,dt - \int_{ay}^{by} \frac{f(t)}{t}\,dt$
2. On appelle $G(x) = \int_{ax}^{bx} \frac{f(t)}{t}\,dt$; montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} G(x) = 0$
3. Montrer que $G(x) = \int_{ax}^{bx} \frac{f(t)-f(0)}{t}\,dt + f(0)\ln\left(\frac{b}{a}\right)$
4. Montrer que $\lim\limits_{x\to 0} G(x) = f(0)\ln\left(\frac{b}{a}\right)$
5. Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{f(at)-f(bt)}{t}\,dt = f(0)\ln\left(\frac{b}{a}\right)$
6. Application : Démontrer que $\int_0^{+\infty} \frac{2\sin t - \sin(2t)}{t^2}\,dt = \ln 2$
7. Prolongements
   (a) Soit $f :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, continue et telle que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \alpha$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \beta$

   Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{f(at)-f(bt)}{t}\,dt = (\alpha-\beta)\ln\left(\frac{b}{a}\right)$

   (b) Application :

   i. Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(t) - \arctan(2t)}{t}\,dt = -\frac{\pi}{2}\ln 2$

   ii. Etude et existence de $\int_0^{+\infty} \frac{\tanh(3t) - \tanh t}{t}\,dt$

   iii. On considère $A = \int_0^1 \frac{x}{\ln(1-x)}dx$; montrer que $A = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-2x}-e^{-x}}{x}dx$; en déduire A

Exercice 19 :

Les intégrales de Bertrand

1. Dans cette question, nous considérons l'intégrale $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha (\ln x)^\beta}dx$

   (a) On suppose $\alpha = 1$. L'intégrale $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^\beta}dx$ est-elle convergente ?

   (b) Etudier la convergence de l'intégrale $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha (\ln x)^\beta}dx$ lorque $\alpha \neq 1$

2. Etudier maintenant la convergence de $\int_0^{\frac{1}{e}} \frac{1}{x^\alpha (|\ln x|)^\beta}dx$

Exercice 20 :

La fonction Γ dans le domaine réel

1. Etudier la convergence de $\int_1^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$
2. Montrer que $\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt$ ne converge que si $x > 0$
3. Quel est le domaine de définition de $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$?
4. Démontrer que, pour tout $x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$
5. Calculer $\Gamma(1)$, et en déduire $\Gamma(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$

6. Calculer $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)$
7. Démontrer, par récurrence que, pour $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma\left(n+\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{\pi}\,(2n)!}{2^{2n}n!}$

Exercice 21 :

1. 2 nombres réels $p \in \mathbb{R}$ et $q \in \mathbb{R}$ sont dits **conjugués** si :
$$(p > 1) \text{ et } (q > 1) \text{ et } \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$$
Démontrer que si p et q sont 2 nombres conjugués, alors, pour tout $a \in \mathbb{R}^+$ et tout $b \in \mathbb{R}^+$, $ab \leqslant \dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q}$
2. **Démonstration de l'inégalité de Hölder**
Soient $p \in \mathbb{R}$ et $q \in \mathbb{R}$ 2 nombres réels conjugués
   (a) Soient $[a;b] \subset \mathbb{R}$ un segment inclus dans $\mathbb{R}$, f et g 2 fonctions continues et positives sur $[a;b]$, c'est à dire que $f \in \mathrm{C}^0\left([a;b], \mathbb{R}^+\right)$ et $g \in \mathrm{C}^0\left([a;b], \mathbb{R}^+\right)$. Démontrer que :
$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \left(\int_a^b (f(x))^p\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \times \left(\int_a^b (g(x))^q\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}$$
   (b) On suppose maintenant que f et g sont 2 fonctions continues et positives sur $\mathbb{R}^+$, c'est à dire que, cette fois-ci,$f \in \mathrm{C}^0\left(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+\right)$ et $g \in \mathrm{C}^0\left(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+\right)$ et que, de plus, $\displaystyle\int_0^{+\infty} (f(x))^p\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} (g(x))^q\,\mathrm{d}x$ existent. Démontrer que nous avons :
$$\int_0^{+\infty} f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \left(\int_0^{+\infty} (f(x))^p\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \times \left(\int_0^{+\infty} (g(x))^q\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}$$
3. Soit $f \in \mathrm{C}^0\left(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+\right)$.
Nous appelons F la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :
$$\begin{cases} F : \mathbb{R}^+ & \longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ \quad x & \longmapsto \quad F(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \text{ si } x > 0 \\ f(0) \text{ si } x = 0 \end{cases} \end{cases}$$
   (a) Démontrer que F est continue
   (b) Démontrer que $\left(\displaystyle\int_0^{+\infty} (F(x))^p\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \dfrac{p}{p-1}\left(\displaystyle\int_0^{+\infty} (f(x))^p\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}$

4.5 Quelques exercices corrigés

4.5.1 Exercices proches du cours

C'est le type d'exercices dont on peut se passer de faire le corrigé, tellement ils sont élémentaires ; leur intérêt est de donner des méthodes de résolution simples

Exercice 1 :

Etudier l'existence de $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{(\ln t)^m}{t}\, dt$ pour $a \geqslant 1$

Tout d'abord, nous allons **calculer** $\displaystyle\int_a^X \frac{(\ln t)^m}{t}\, dt$, puis, nous allons **calculer** $\displaystyle\lim_{X\to+\infty} \int_a^X \frac{(\ln t)^m}{t}\, dt$

$\displaystyle\int_a^X \frac{(\ln t)^m}{t}\, dt$ se calcule par un simple calcul de primitives

1. Pour $m \neq -1$:

$$\int_a^X \frac{(\ln t)^m}{t}\, dt = \left[\frac{(\ln t)^{m+1}}{m+1}\right]_a^X = \frac{(\ln X)^{m+1} - (\ln a)^{m+1}}{m+1}$$

   — Si $m+1 > 0$, c'est à dire $m > -1$, nous avons $\displaystyle\lim_{X\to+\infty} (\ln X)^{m+1} = +\infty$ et donc l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{(\ln t)^m}{t}\, dt$ diverge

   — Si $m+1 < 0$, c'est à dire $m < -1$, nous avons $\displaystyle\lim_{X\to+\infty} (\ln X)^{m+1} = 0$ et donc l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{(\ln t)^m}{t}\, dt$ converge et nous avons $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{(\ln t)^m}{t}\, dt = \frac{-(\ln a)^{m+1}}{m+1}$

2. Pour $m = -1$, nous avons cette fois-ci $\displaystyle\int_a^X \frac{(\ln t)^m}{t}\, dt = \int_a^X \frac{1}{t\ln t}\, dt$. Or :

$$\int_a^X \frac{1}{t\ln t}\, dt = [\ln|\ln t|]_a^X = \ln|\ln X| - \ln|\ln a|$$

   Comme $\displaystyle\lim_{X\to+\infty} \ln|\ln X| = +\infty$, l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{(\ln t)^m}{t}\, dt$ diverge pour $m = -1$

En conclusion, $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{(\ln t)^m}{t}\, dt$ converge si et seulement si $m < -1$

Exercice 2 :

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ un nombre complexe. Étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{\lambda t}\, \mathrm{d}t$ en précisant sa valeur en cas de convergence

1. Nous allons nous intéresser à $F(x) = \displaystyle\int_0^x e^{\lambda t}\, \mathrm{d}t$

   $\rightarrow$ Si $\lambda = 0$, alors $F(x) = \displaystyle\int_0^x \mathrm{d}t = x$

   $\rightarrow$ Si $\lambda \neq 0$, alors $F(x) = \displaystyle\int_0^x e^{\lambda t}\, \mathrm{d}t = \left[\frac{e^{\lambda t}}{\lambda}\right]_0^x = \frac{e^{\lambda x} - 1}{\lambda}$

2. Donc, si $\lambda = 0$ alors $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$ et l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{\lambda t}\, \mathrm{d}t$ est donc divergente

3. Supposons, maintenant, $\lambda \neq 0$

   Alors, $F(x) = \dfrac{e^{\lambda x} - 1}{\lambda} = \dfrac{e^{\lambda x}}{\lambda}\left(1 - e^{-\lambda x}\right)$, et en passant au module, nous avons :

$$|F(x)| = \left|\frac{e^{\lambda x}}{\lambda}\left(1 - e^{-\lambda x}\right)\right| = \frac{\left|e^{\lambda x}\right|}{|\lambda|}\left|1 - e^{-\lambda x}\right|$$

4. Nous supposons $\lambda = \alpha + i\beta$.
Alors, $\left|e^{\lambda x}\right| = \left|e^{\alpha x + i\beta x}\right| = e^{\alpha x}$ et $\left|e^{-\lambda x}\right| = \left|e^{-\alpha x - i\beta x}\right| = e^{-\alpha x}$

(a) Dans un premier temps, remarquons, par l'inégalité triangulaire vraie pour tout $z \in \mathbb{C}$ et $z' \in \mathbb{C}$, $||z| - |z'|| \leqslant |z - z'|$, nous avons :

$$\left|1 - e^{-\lambda x}\right| \geqslant \left|1 - \left|e^{-\lambda x}\right|\right| = 1 - e^{-\alpha x}$$

Et donc, $|F(x)| \geqslant \dfrac{e^{\alpha x}}{|\lambda|}(1 - e^{-\alpha x})$

Si $\alpha > 0$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty}(1 - e^{-\alpha x}) = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{\alpha x} = +\infty$ et donc, par la minoration $\lim\limits_{x \to +\infty} |F(x)| = +\infty$, ce qui signifie que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{\lambda t}\,\mathrm{d}t$ n'existe pas.

Donc, en conclusion, si $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$, alors l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{\lambda t}\,\mathrm{d}t$ est divergente.

(b) Regardons maintenant le cas où $\alpha < 0$
Revenons à la valeur de $F(x)$.
Nous avons : $F(x) = \dfrac{e^{\lambda x} - 1}{\lambda} = \dfrac{e^{\lambda x}}{\lambda} - \dfrac{1}{\lambda}$

Le comportement de $F(x)$ ne dépend que de celui de $\dfrac{e^{\lambda x}}{\lambda}$. Or : $\left|\dfrac{e^{\lambda x}}{\lambda}\right| = \dfrac{e^{\alpha x}}{|\lambda|}$

Comme $\alpha < 0$, nous avons $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{\alpha x}}{|\lambda|} = 0$, c'est à dire $\lim\limits_{x \to +\infty} \left|\dfrac{e^{\lambda x}}{\lambda}\right| = 0$ et donc

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = -\frac{1}{\lambda}$$

Donc, en conclusion, si $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$, alors l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{\lambda t}\,\mathrm{d}t$ est convergente et

$$\int_0^{+\infty} e^{\lambda t}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{\lambda}$$

(c) Si $\alpha = 0$, alors $\lambda = i\beta$ avec $\beta \neq 0$ *(Nous avons déjà traité le cas où $\alpha = 0$ et $\beta = 0$ lorsque nous avons traité $\lambda = 0$)*

Alors $F(x) = \dfrac{e^{i\beta x} - 1}{i\beta}$

Considérons la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $x_n = \dfrac{n\pi}{\beta}$. Alors

$$F(x_n) = \frac{e^{i\beta x_n} - 1}{i\beta} = \frac{e^{i\beta \frac{n\pi}{\beta}} - 1}{i\beta} = \frac{e^{i\pi n} - 1}{i\beta}$$

Ainsi, si n est pair, alors $F(x_n) = 0$ et si n est impair, $F(x_n) = \dfrac{-2}{i\beta} = \dfrac{2i}{\beta}$ et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} F(x_n)$ n'existe pas.

Donc, en conclusion, si $\mathrm{Re}(\lambda) = 0$, alors l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{\lambda t}\,\mathrm{d}t$ est divergente

Exercice 3 :

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ deux nombres réels. Étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{at}\cos bt\,\mathrm{d}t$ en précisant sa valeur en cas de convergence

Cet exercice est une continuation du précédent

Posons $f(t) = e^{(a+ib)t}$. Nous avons $e^{at}\cos bt = \operatorname{Re}(f)(t)$. Nous pourrons alors écrire, en utilisant 4.1.10 que $\int_0^{+\infty} e^{at}\cos bt\,\mathrm{d}t$ existe si et seulement si $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ existe

En écrivant $\lambda = (a+ib)\,t$, nous avons $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{\lambda t}\,\mathrm{d}t$

1. D'après l'exercice précédent, $\int_0^{+\infty} e^{\lambda t}\,\mathrm{d}t$ ne converge que si $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$ et nous avons, dans ce cas $\int_0^{+\infty} e^{\lambda t}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{\lambda}$
2. Nous avons $\operatorname{Re}(\lambda) < 0 \iff a < 0$.
   Ainsi $\int_0^{+\infty} e^{at}\cos bt\,\mathrm{d}t$ est convergente si et seulement si $a < 0$
3. Nous avons alors, si $a < 0$:
   $$\int_0^{+\infty} e^{at}\cos bt\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \operatorname{Re}(f)(t)\,\mathrm{d}t = \operatorname{Re}\left(\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t\right) = \operatorname{Re}\left(-\frac{1}{\lambda}\right) = \operatorname{Re}\left(-\frac{1}{a+ib}\right) = -\frac{a}{a^2+b^2}$$

En conclusion, $\int_0^{+\infty} e^{at}\cos bt\,\mathrm{d}t$ ne converge que si $a < 0$, et si $a < 0$, alors $\int_0^{+\infty} e^{at}\cos bt\,\mathrm{d}t = -\frac{a}{a^2+b^2}$

Question : faites le même exercice pour $\int_0^{+\infty} e^{at}\sin bt\,\mathrm{d}t$

Exercice 4 :

Etudier la convergence des intégrales suivantes et, le cas échéant, indiquer leur valeur :

1. $\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx$

   Il suffit de commencer par étudier $\int_0^{T} xe^{-x^2}dx$, puis d'en étudier la limite lorsque T tend vers $+\infty$
   $$\begin{aligned}\int_0^T xe^{-x^2}dx &= \frac{-1}{2}\int_0^T -2xe^{-x^2}dx\\ &= \frac{-1}{2}\left[e^{-x^2}\right]_0^T\\ &= \frac{-1}{2}\left(e^{-T^2}-1\right)\end{aligned}$$
   Donc, l'intégrale $\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx$ est convergente et $\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx = \frac{1}{2}$
2. $\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx$

   Une jolie intégration par parties nous montre que :
   $$\int_0^T xe^{-x}dx = Te^{-T} - e^{-T} + 1$$
   Conclusion, l'intégrale $\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx$ est convergente et $\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx = 1$
3. $\int_0^{+\infty} \frac{e^{\arctan x}}{1+x^2}dx$

   Lorsqu'on écrit $\int_0^T \frac{e^{\arctan x}}{1+x^2}dx$, nous sommes devant une intégrale du type $\int_0^T u'(x)\,e^{u(x)}dx$; la fonction $u'(x)\,e^{u(x)}$ admet pour primitive $e^{u(x)}$

Donc, $\displaystyle\int_0^T \frac{e^{\arctan x}}{1+x^2}dx = \left[e^{\arctan x}\right]_0^T = e^{\arctan T} - 1$

Nous en déduisons que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{\arctan x}}{1+x^2}dx$ est convergente et que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{\arctan x}}{1+x^2}dx = e^{\frac{\pi}{2}} - 1$

4. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2-1}$

Nous étudions $\displaystyle\int_2^T \frac{dx}{x^2-1}$ et pour ce faire, nous décomposons $\dfrac{1}{x^2-1}$ en éléments simples.

Un calcul simple, montre que : $\dfrac{1}{x^2-1} = \dfrac{\frac{1}{2}}{x-1} - \dfrac{\frac{1}{2}}{x+1}$, de telle sorte que :

$$\begin{aligned}\int_2^T \frac{dx}{x^2-1} &= \frac{1}{2}\int_2^T \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}dx \\ &= \frac{1}{2}\left[\ln|x-1| - \ln|x+1|\right]_2^T \\ &= \frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{|T-1|}{|T+1|}\right) + \ln 3\right)\end{aligned}$$

L'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2-1}$ est convergente et nous trouvons donc $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2-1} = \frac{\ln 3}{2}$

5. $\displaystyle\int_0^{\frac{+\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}dx$

Ici, le problème se situe en 0. Nous allons étudier $\displaystyle\int_\varepsilon^{\frac{+\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}dx$.

Il est possible d'écrire différemment $\displaystyle\int_\varepsilon^{\frac{+\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}dx$; en effet, $\displaystyle\int_\varepsilon^{\frac{+\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}dx = \int_\varepsilon^{\frac{+\pi}{2}} \cos x\,(\sin x)^{\frac{-1}{2}}\,dx$

Si nous remarquons que la dérivée de $\sin x$ est $\cos x$, nous avons une intégrale de la forme $\displaystyle\int_\varepsilon^{\frac{+\pi}{2}} u'(x)\,(u(x))^{\frac{-1}{2}}\,dx$ dont une primitive est donnée par $\dfrac{(u(x))^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{u(x)}$

Donc, $\displaystyle\int_\varepsilon^{\frac{+\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}dx = \left[2\sqrt{\sin x}\right]_\varepsilon^{\frac{+\pi}{2}} = 2 - \sqrt{\sin\varepsilon}$

Donc, $\displaystyle\int_0^{\frac{+\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}dx$ est convergente et $\displaystyle\int_0^{\frac{+\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}dx = 2$

6. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2}dx$

L'intégrale $\displaystyle\int_0^T \frac{\arctan x}{1+x^2}dx$ est type $\displaystyle\int_0^T u'(x)\,u(x)\,dx$, et donc

$$\int_0^T \frac{\arctan x}{1+x^2}dx = \left[\frac{(\arctan x)^2}{2}\right]_0^T = \frac{(\arctan T)^2}{2}$$

D'où $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2}dx$ est convergente et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2}dx = \frac{\pi^2}{8}$

7. $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x\ln x}$

C'est le cas $m = -1$ de l'exercice 1 !

L'intégrale $\displaystyle\int_0^T \frac{dx}{x\ln x}dx$ est type $\displaystyle\int_e^T \frac{u'(x)}{u(x)}dx$, et donc $\displaystyle\int_e^T \frac{dx}{x\ln x}dx = \left[\ln|\ln x|\right]_e^T = \ln|\ln T|$

Et on retrouve $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x\ln x}$ divergente

8. $\displaystyle\int_0^1 x^n \ln x \, dx$ *avec* $n \in \mathbb{N}^*$

Le problème, pour cette intégrale, se pose en 0. Or, pour $n \geqslant 1$, $\lim\limits_{x\to 0} x^n \ln x = 0$. On peut donc prolonger $x^n \ln x$, par continuité en 0. C'est, ce qu'on appelle une **intégrale faussement impropre**. Il n'y a donc pas de problème, elle est donc convergente.

Pour la calculer, nous faisons $\displaystyle\int_\varepsilon^1 x^n \ln x \; dx$ que nous intégrons par parties. Puis, nous ferons tendre ε vers 0.

$$u' = x^n \qquad u = \frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad v = \ln x \qquad v' = \frac{1}{x}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\int_\varepsilon^1 x^n \ln x \, dx &= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \times \ln x\right]_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 \frac{x^n}{n+1} dx \\
&= -\frac{\varepsilon^{n+1}}{n+1} \ln \varepsilon - \left[\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}\right]_\varepsilon^1 \\
&= -\frac{\varepsilon^{n+1}}{n+1} \ln \varepsilon - \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{\varepsilon^{n+1}}{(n+1)^2}
\end{aligned}$$

En faisant tendre ε vers 0, nous obtenons $\displaystyle\int_0^1 x^n \ln x \, dx = -\frac{1}{(n+1)^2}$

9. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(x-1)^2} dx$

Le problème se pose en $x = 1$. Le plus simple serait de faire un changement de variables du type $t = x - 1$. Alors,

$$\int_0^1 \frac{x}{(x-1)^2} dx = \int_{-1}^0 \frac{1+u}{u^2} du$$

Comme souvent, nous allons calculer $\displaystyle\int_{-1}^\varepsilon \frac{1+u}{u^2} du$, puis, rechercher la limite de cette intégrale lorsque ε tend vers 0.

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^\varepsilon \frac{1+u}{u^2} du &= \int_{-1}^\varepsilon \frac{1}{u} + \frac{1}{u^2} du \\
&= \left[\ln|u| - \frac{1}{u}\right]_{-1}^\varepsilon \\
&= \ln|\varepsilon| - \frac{1}{\varepsilon} - 1
\end{aligned}$$

Or, $\displaystyle\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon<0}} \ln|\varepsilon| - \frac{1}{\varepsilon} = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon<0}} \frac{1}{\varepsilon}(\varepsilon \ln|\varepsilon| - 1) - 1 = +\infty$

L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(x-1)^2} dx$ est donc divergente.

Exercice 5 :

Etudier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{dx}{x(x+1)}$ *et, le cas échéant, en indiquer sa valeur*

Il se trouve que cette intégrale a des problèmes aux 2 bornes et qu'elle converge, si et seulement si pour tout $c \in [-1\,;\,0]$ les intégrales $\displaystyle\int_{-1}^c \frac{dx}{x(x+1)}$ **et** $\displaystyle\int_c^0 \frac{dx}{x(x+1)}$ convergent

En 0, la fonction $\dfrac{1}{x(x+1)}$ est équivalente à la fonction $\dfrac{1}{x}$; or l'intégrale $\displaystyle\int_c^0 \frac{1}{x}$ est divergente et donc l'intégrale $\displaystyle\int_c^0 \frac{dx}{x(x+1)}$ est aussi divergente.

En conclusion, l'intégrale $\int_{-1}^{0} \frac{dx}{x(x+1)}$ est divergente.
P.S. : il aurait aussi été possible d'utiliser des changements de variables.

Exercice 6 :

Etudier, suivant la valeur du réel positif α, la convergence de l'intégrale $\int_{a}^{b} \frac{dt}{(t-a)^{\alpha}}$ avec $a < b$

Cet exercice est une généralisation de ce qui a été vu en cours.

En faisant le changement de variables $u = t - a$, nous avons $\int_{a}^{b} \frac{dt}{(t-a)^{\alpha}} = \int_{0}^{b-a} \frac{du}{u^{\alpha}}$.

Cette intégrale ne converge que si $\alpha < 1$

Exercice 7 :

Déterminer la nature des intégrales suivantes.

1. $\int_{0}^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2} dx$

   Il se pose, à priori, 2 questions : l'une en 0 et l'autre en $+\infty$.
   — En 0, on peut faire un développement limité de $\cos x$:

   $$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x) \Longleftrightarrow 1 - \cos x = \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x) \Longleftrightarrow \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2} + \varepsilon(x)$$

   De telle sorte que $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

   On peut donc prolonger $\frac{1-\cos x}{x^2}$ en 0, et l'intégrale $\int_{0}^{c} \frac{1-\cos x}{x^2} dx$ où $c > 0$ est une intégrale définie qui ne pose pas de problème

   — Nous allons donc étudier $\int_{c}^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2} dx$

   La fonction $\frac{1-\cos x}{x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$, en particulier sur tout intervalle inclus dans $[c; +\infty[$.

   Il faut donc regarder le comportement de $\frac{1-\cos x}{x^2}$ en $+\infty$.

   Or, $\left|\frac{1-\cos x}{x^2}\right| = \frac{|1-\cos x|}{x^2} \leqslant \frac{2}{x^2}$.

   L'intégrale $\int_{c}^{+\infty} \frac{2}{x^2} dx$ est une intégrale de Riemann convergente. Nous en déduisons que l'intégrale $\int_{c}^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2} dx$ est absolument convergente, donc convergente.

   En conclusion, l'intégrale $\int_{0}^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2} dx$ est bien convergente.

2. $\int_{0}^{+\infty} \frac{x^2}{x^{\frac{17}{5}}+1} dx$

   Le dénominateur $x^{\frac{17}{5}} + 1$ ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}^+$; il faut donc étudier le comportement de $\frac{x^2}{x^{\frac{17}{5}}+1}$ en $+\infty$

   — Nous avons $x^{\frac{17}{5}} + 1 \geqslant x^{\frac{17}{5}}$, et donc $\frac{1}{x^{\frac{17}{5}}+1} \leqslant \frac{1}{x^{\frac{17}{5}}}$, ce qui nous permet d'écrire que $\frac{x^2}{x^{\frac{17}{5}}+1} \leqslant \frac{x^2}{x^{\frac{17}{5}}} = \frac{1}{x^{\frac{7}{5}}}$

   L'intégrale $\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{7}{5}}} dx$ est une intégrale de Riemann convergente, et comme $\frac{x^2}{x^{\frac{17}{5}}+1} \leqslant \frac{1}{x^{\frac{7}{5}}}$, l'intégrale $\int_{1}^{+\infty} \frac{x^2}{x^{\frac{17}{5}}+1} dx$ est convergente. Comme nous avons montré que l'intégrale

$\int_0^1 \frac{x^2}{x^{\frac{17}{5}}+1}dx$ était définie, nous en déduisons que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{x^{\frac{17}{5}}+1}dx$ est bien convergente.

— Une autre méthode consiste à utiliser les équivalents.

En effet, on vient de voir que $\int_0^1 \frac{x^2}{x^{\frac{17}{5}}+1}dx$ était définie.

En $+\infty$, nous avons $\frac{x^2}{x^{\frac{17}{5}}+1} \underset{+\infty}{\approx} \frac{1}{x^{\frac{7}{5}}}$. Comme l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{7}{5}}}dx$ est une intégrale de Riemann convergente, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{x^2}{x^{\frac{17}{5}}+1}dx$ est de même nature, c'est à dire convergente.

Comme dans le point précédent, on déduit que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{x^{\frac{17}{5}}+1}dx$ est bien convergente.

3. $\int_0^{+1} \frac{e^x}{x}dx$

Pas très difficile :

— Pour $x \in [0;+1]$, nous avons $e^x \geqslant 1$, et donc $\frac{e^x}{x} \leqslant \frac{1}{x}$. Comme $\int_0^{+1} \frac{1}{x}dx$ est divergente, il en est de même de $\int_0^{+1} \frac{e^x}{x}dx$

— Autre méthode, celle qui consiste à dire qu'au voisinage de 0, $\frac{e^x}{x} \underset{0}{\approx} \frac{1}{x}$, et comme l'intégrale $\int_0^{+1} \frac{1}{x}dx$ est divergente, il en est de même de $\int_0^{+1} \frac{e^x}{x}dx$

4. $\int_{-\infty}^{-1} \frac{e^{\cos x}}{x}dx$

Je commence par faire le changement de variables $x = -u$, et alors

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{e^{\cos x}}{x}dx = \int_{+\infty}^{+1} \frac{e^{\cos -u}}{-u} - du = -\int_1^{+\infty} \frac{e^{\cos u}}{u}du$$

Comme $-1 \leqslant \cos u \leqslant +1$, nous avons $e^{-1} \leqslant e^{\cos u} \leqslant e$, donc, pour $x \geqslant 1$, nous avons $\frac{e^{-1}}{u} \leqslant \frac{e^{\cos u}}{u}$

Comme $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-1}}{u}du$ est une intégrale divergente, il en est de même de $\int_1^{+\infty} \frac{e^{\cos u}}{u}du$, c'est à dire de $\int_{-\infty}^{-1} \frac{e^{\cos x}}{x}dx$

Il faut remarquer que la résolution de la question était d'autant plus facile que la fonction $\frac{e^{\cos x}}{x}$ est impaire.

5. $\int_0^{+\infty} \frac{t}{t^3+1}dt$

La fonction $\frac{t}{t^3+1}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et sur tout intervalle inclus dans $\mathbb{R}^+$. Le problème se situe donc en $+\infty$. Or, en $+\infty$, $\frac{t}{t^3+1} \underset{+\infty}{\approx} \frac{1}{t^2}$.

Comme l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$ est une intégrale de Riemann convergente, il en est de même de $\int_1^{+\infty} \frac{t}{t^3+1}dt$. Nous pouvons donc conclure que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{t}{t^3+1}dt$ est convergente.

6. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2}{t^4+1}dt$

Cette intégrale est convergente si et seulement si, pour tout $c \in \mathbb{R}$ les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{c} \frac{t^2}{t^4+1}dt$ et $\displaystyle\int_{c}^{+\infty} \frac{t^2}{t^4+1}dt$ convergent.

Supposons $c > 0$ *(la question sera la même si $c < 0$)*, alors $\displaystyle\int_{-\infty}^{c} \frac{t^2}{t^4+1}dt = \int_{-\infty}^{-c} \frac{t^2}{t^4+1}dt + \int_{-c}^{c} \frac{t^2}{t^4+1}dt$

L'intégrale $\displaystyle\int_{-c}^{c} \frac{t^2}{t^4+1}dt$ ne pose pas de problème puisque $\dfrac{t^2}{t^4+1}$ est continue sur cet intervalle.

De la parité de $\dfrac{t^2}{t^4+1}$, par le changement de variables $t = -u$, on déduit que $\displaystyle\int_{-\infty}^{-c} \frac{t^2}{t^4+1}dt = \int_{c}^{+\infty} \frac{t^2}{t^4+1}dt$; il faut donc étudier $\displaystyle\int_{c}^{+\infty} \frac{t^2}{t^4+1}dt$. Le problème de cette intégrale se situant en $+\infty$.

Or, en $+\infty$, nous avons $\dfrac{t^2}{t^4+1} \underset{+\infty}{\approx} \dfrac{1}{t^2}$. Comme l'intégrale $\displaystyle\int_{c}^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$ est une intégrale de Riemman convergente, il en est de même de $\displaystyle\int_{c}^{+\infty} \frac{t^2}{t^4+1}dt$

Nous en déduisons que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2}{t^4+1}dt$ est convergente, et que, par la parité de $\dfrac{t^2}{t^4+1}$, nous avons

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2}{t^4+1}dt = 2\int_{0}^{+\infty} \frac{t^2}{t^4+1}dt$$

7. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^2+1}dx$

De manière évidente, nous avons $\displaystyle\int_{+1}^{+\infty} \frac{x}{x^2+1}dx$ qui diverge, puisque $\dfrac{x}{x^2+1} \underset{+\infty}{\approx} \dfrac{1}{x}$.

On en conclue donc que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^2+1}dx$ est divergente.

8. $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{1+e^{at}}\ dt$ *avec* $a > 0$

Pour tout $t \geqslant 0$, nous avons $1 + e^{at} > e^{at}$, c'est à dire $\dfrac{1}{1+e^{at}} < e^{-at}$. Comme $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} e^{-at}\ dt$ converge, il en est de même de $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{1+e^{at}}\ dt$

9. $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan x}dx$

Nous faisons le changement de variable qui semble le plus approprié : $u = \tan x$; alors $\dfrac{du}{dx} = 1 + \tan^2 x = 1 + u^2$, et donc :

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan x}dx = \int_{0}^{+\infty} \frac{u^{\frac{1}{2}}}{1+u^2}du$$

En $+\infty$, nous avons $\dfrac{u^{\frac{1}{2}}}{1+u^2} \underset{+\infty}{\approx} \dfrac{1}{u^{\frac{3}{2}}}$. Or, $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{u^{\frac{3}{2}}}du$ est une intégrale de Riemann convergente. Donc $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{u^{\frac{1}{2}}}{1+u^2}du$ converge, et comme $\displaystyle\int_{0}^{+1} \frac{u^{\frac{1}{2}}}{1+u^2}du$ est une intégrale définie, l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{u^{\frac{1}{2}}}{1+u^2}du$ est convergente, et donc, en conclusion, $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan x}dx$ est convergente.

10. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}$

Ici, le problème se pose aux deux bornes. Pour que cette intégrale converge, il faut que, pour tout $c > 0$, les intégrales $\displaystyle\int_0^c \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}$ et $\displaystyle\int_c^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}$ convergent

— Pour l'intégrale $\displaystyle\int_0^c \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}$, le problème se situe en 0. Or, en 0, $\displaystyle\frac{1}{(x+1)\sqrt{x}} \underset{0}{\approx} \frac{1}{\sqrt{x}}$ et comme l'intégrale $\displaystyle\int_0^c \frac{dx}{\sqrt{x}}$ est convergente, il en est de même de l'intégrale $\displaystyle\int_0^c \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}$

— Cette fois ci, pour l'intégrale $\displaystyle\int_c^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}$, le problème se situe en $+\infty$.

Or, en $+\infty$, $\displaystyle\frac{1}{(x+1)\sqrt{x}} \underset{+\infty}{\approx} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$ et comme l'intégrale $\displaystyle\int_c^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}dx$ est une intégrale de Riemann convergente, il en est de même de l'intégrale $\displaystyle\int_c^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}$

On en déduit donc que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}$ est convergente.

11. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{(x^2+1)\,x}dx$

Comme souvent, depuis quelques questions, il y a un problème aux deux bornes : en $+\infty$ et en 0

— Commençons par le plus simple, en 0 :

Nous avons, de manière classique, $\displaystyle\lim \frac{\sin x}{x} = 1$, et donc $\displaystyle\lim \frac{\sin x}{(x^2+1)\,x} = 1$. Il est donc possible de prolonger par continuité $\displaystyle\frac{\sin x}{(x^2+1)\,x}$ en 0. c'est donc une intégrale faussement impropre en 0, et donc, pour tout $c > 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^c \frac{\sin x}{(x^2+1)\,x}dx$ existe

— Pour $c > 0$, et $x > c$, nous avons $\displaystyle\left|\frac{\sin x}{(x^2+1)\,x}\right| \leqslant \frac{1}{(x^2+1)\,x} \leqslant \frac{1}{x^3}$. L'intégrale $\displaystyle\int_c^{+\infty} \frac{1}{x^3}dx$ est une intégrale de Riemann convergente, donc l'intégrale $\displaystyle\int_c^{+\infty} \frac{\sin x}{(x^2+1)\,x}dx$ est convergente

Donc, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{(x^2+1)\,x}dx$ est convergente.

12. $\displaystyle\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{4-x}}$

Question très simple ; le problème se pose en $x_0 = 4$. Pour la rendre encore plus simple, on peut faire le changement de variables $u = 4 - x$, et alors :

$$\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{4-x}} = -\int_4^0 \frac{du}{\sqrt{u}} = \int_0^4 \frac{du}{\sqrt{u}} = \int_0^4 u^{\frac{-1}{2}}du$$

L'intégrale $\displaystyle\int_0^4 u^{\frac{-1}{2}}du$ est bel et bien convergente. Nous avons même : $\displaystyle\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{4-x}} = 4$

Exercice 8 :

1. (a) *Etudier la nature de l'intégrale* $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(t+1)\,dt}{t^2+1}$

L'intégrale converge si et seulement si, pour tout $c \in \mathbb{R}$, les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{c} \frac{(t+1)\,dt}{t^2+1}$ et $\displaystyle\int_c^{+\infty} \frac{(t+1)\,dt}{t^2+1}$ convergent

Or, en $+\infty$, $\dfrac{t+1}{t^2+1} \underset{+\infty}{\approx} \dfrac{1}{t}$; comme l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\,dt$ est divergente, il en est de même de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{(t+1)\,dt}{t^2+1}$

Donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(t+1)\,dt}{t^2+1}$ est une intégrale divergente.

(b) *Calculer* $\displaystyle\lim_{a\to+\infty} \int_{-a}^{+a} \frac{(t+1)\,dt}{t^2+1}$.

Nous allons calculer $\displaystyle\int_{-a}^{+a} \frac{(t+1)\,dt}{t^2+1}$

$$\begin{aligned}
\int_{-a}^{+a} \frac{(t+1)\,dt}{t^2+1} &= \int_{-a}^{+a} \frac{t}{t^2+1}\,dt + \int_{-a}^{+a} \frac{1}{t^2+1}\,dt \\
&= \frac{1}{2}\int_{-a}^{+a} \frac{2t}{t^2+1}\,dt + [\arctan t]_{-a}^{+a} \\
&= \frac{1}{2}\left[\ln\left(t^2+1\right)\right]_{-a}^{+a} + 2\arctan a \\
&= +2\arctan a
\end{aligned}$$

Or, $\displaystyle\lim_{a\to+\infty} +2\arctan a = \pi$, et donc $\displaystyle\lim_{a\to+\infty} \int_{-a}^{+a} \frac{(t+1)\,dt}{t^2+1} = \pi$

2. (a) *De la même manière, étudier la nature de l'intégrale* $\displaystyle\int_0^1 \frac{(1-2t)\,dt}{t\,(1-t)}$

Commençons par étudier $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(1-2t)\,dt}{t\,(1-t)}$

En 0, $\dfrac{(1-2t)\,dt}{t\,(1-t)} \underset{0}{\approx} \dfrac{1}{t}$. Comme l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{t}\,dt$ est divergente, il en est de même de $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(1-2t)\,dt}{t\,(1-t)}$, et donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{(1-2t)\,dt}{t\,(1-t)}$ est divergente

(b) *Calculer* $\displaystyle\lim_{a\to0} \int_a^{1-a} \frac{(1-2t)\,dt}{t\,(1-t)}$

Comme tout à l'heure, on va calculer $\displaystyle\int_a^{1-a} \frac{(1-2t)\,dt}{t\,(1-t)}$

On commence par décomposer $\dfrac{(1-2t)\,dt}{t\,(1-t)}$ en éléments simples :

$$\frac{(1-2t)\,dt}{t\,(1-t)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{1-t}$$

De telle sorte que :

$$\begin{aligned}
\int_a^{1-a} \frac{(1-2t)\,dt}{t\,(1-t)} &= \int_a^{1-a} \frac{1}{t} - \frac{1}{1-t}\,dt \\
&= \int_a^{1-a} \frac{1}{t}\,dt + \int_a^{1-a} \frac{-1}{1-t}\,dt \\
&= [\ln t]_a^{1-a} + [\ln|1-t|]_a^{1-a} \\
&= \ln(1-a) - \ln a + \ln a - \ln(1-a) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Nous avons donc $\displaystyle\lim_{a\to0} \int_a^{1-a} \frac{(1-2t)\,dt}{t\,(1-t)} = 0$

3. *Démontrez que l'intégrale* $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x}\, dx$ *est divergente alors que* $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_{\frac{1}{n}}^{n} \frac{\ln x}{x}\, dx = 0$

   On "coupe" l'intégrale en 2. Soit $c > 0$ fixé

   Soient $T > 0$; alors $\int_c^T \frac{\ln x}{x}\, dx = \left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_c^T = \frac{(\ln T)^2}{2} - \frac{(\ln c)^2}{2}$

   Or, $\lim\limits_{T\to+\infty} \frac{(\ln T)^2}{2} = +\infty$

   Donc l'intégrale $\int_c^{+\infty} \frac{\ln x}{x}\, dx$ et donc, $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x}\, dx$ est aussi divergente.

   Si nous regardons $\int_{\frac{1}{n}}^{n} \frac{\ln x}{x}\, dx$, nous avons :

   $$\int_{\frac{1}{n}}^{n} \frac{\ln x}{x}\, dx = \left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_{\frac{1}{n}}^{n} = \frac{(\ln n)^2}{2} - \frac{(\ln \frac{1}{n})^2}{2} = \frac{(\ln n)^2}{2} - \frac{(-\ln n)^2}{2} = 0$$

   Nous avons donc bien $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_{\frac{1}{n}}^{n} \frac{\ln x}{x}\, dx = 0$

4. *Quelles conclusions tirer ?*

   C'EST UNE REMARQUE TRÈS IMPORTANTE QU'IL FAUT TIRER :

   Ce n'est pas parce que $\lim\limits_{a\to+\infty} \int_{-a}^{+a} f(t)\, dt$ existe que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt$ converge. La définition de la convergence de $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt$ est :

   <u>Pour tout</u> $c \in \mathbb{R}$ les intégrales $\int_{-\infty}^{c} f(t)\, dt$ <u>ET</u> $\int_{c}^{+\infty} f(t)\, dt$ convergent

   Dans les exemples ci-dessus, aucune des intégrales ne converge, bien que $\lim\limits_{a\to+\infty} \int_{-a}^{a} f(t)\, dt$ existe, souvent grâce à des des phénomènes de symétrie.
   On peut par contre affirmer que :
   Si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt$ converge, alors $\lim\limits_{a\to+\infty} \int_{-a}^{+a} f(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt$.
   Mais, la réciproque est donc fausse

Exercice 9 :

1. *Montrer que si* $t \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right]$*, alors* $\frac{1}{\sin t} \geqslant \frac{1}{t} > 0$.

   On démontre facilement que si $0 < t \leqslant \frac{\pi}{2}$ alors $0 < \sin t \leqslant t$ *(formule de Taylor, étude de* $\sin t - t$*)* et donc nous avons le résultat :
   Si $t \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right]$, alors $\frac{1}{\sin t} \geqslant \frac{1}{t} > 0$.

2. *Que conclure pour* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin t}\, dt$ *?*

Comme $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{t}\, dt$ diverge, il en est de même de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin t}\, dt$

Exercice 10 :

1. *a est un réel ; étudier suivant les valeurs de a la convergence de l'intégrale* $\displaystyle\int_0^1 x^a\left(6x-\left(6+x^2\right)\sin x\right)\ dx$

   Il faut faire un développement limité de la fonction $x^a\left(6x-\left(6+x^2\right)\sin x\right)$ pour trouver une fonction équivalente au voisinage de 0.

   Or, à l'ordre 5, nous avons : $\sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120} + x^5\varepsilon(x)$, et à l'ordre 5, $\left(6+x^2\right)\sin x = 6x - \dfrac{7x^5}{60} + x^5\varepsilon(x)$, ce qui, après les calculs, nous donne $x^a\left(6x-\left(6+x^2\right)\sin x\right) = \dfrac{7x^{a+5}}{60} + x^5\varepsilon(x)$

   On peut donc dire qu'au voisinage de 0, $x^a\left(6x-\left(6+x^2\right)\sin x\right) \underset{0}{\approx} \dfrac{7x^{a+5}}{60}$

   Or, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 x^\alpha\, dx$ ne converge que si $\alpha > -1$. Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 x^a\left(6x-\left(6+x^2\right)\sin x\right)\ dx$ ne converge que si $a+5>-1$, c'est à dire $a>-6$

2. (a) *Montrer qu'au voisinage de 0,* $\dfrac{1}{\sqrt{x(1-x)}} \underset{x\to 0}{\approx} \dfrac{1}{\sqrt{x}}$*, et qu'au voisinage de 1* $\dfrac{1}{\sqrt{x(1-x)}} \underset{x\to 1}{\approx} \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$.

   Aucune difficulté : on fait le rapport des fonctions, et on démontre que la limite est 1

   (b) *En déduire la convergence de l'intégrale* $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\, dx$

   Soit $c \in]0;+1[$

   — Considérons l'intégrale $\displaystyle\int_0^c \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\, dx$. Au voisinage de 0, $\dfrac{1}{\sqrt{x(1-x)}} \underset{x\to 0}{\approx} \dfrac{1}{\sqrt{x}}$. L'intégrale $\displaystyle\int_0^c \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$ est convergente, et donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^c \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\, dx$ est, elle aussi, convergente.

   — Considérons maintenant l'intégrale $\displaystyle\int_c^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\, dx$. Cette fois ci, au voisinage de 1, $\dfrac{1}{\sqrt{x(1-x)}} \underset{x\to 1}{\approx} \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$.

   Nous avons, par le changement de variables $= 1-x$, $\displaystyle\int_c^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\, dx = \int_0^{1-c} \frac{1}{\sqrt{u}}\, du$ qui converge. Donc, l'intégrale $\displaystyle\int_c^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\, dx$ est aussi convergente.

   En conclusion, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\, dx$ est bien convergente.

Exercice 11 :

On considère l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha\left(1+t^\beta\right)}$ *où α et β sont deux réels strictement positifs ; pour quelles valeurs de α et β cette intégrale est-elle convergente ?*

On suppose donc $\alpha>0$ et $\beta>0$, et soit $c>0$

— Alors, en 0, $\dfrac{1}{t^\alpha\left(1+t^\beta\right)} \underset{0}{\approx} \dfrac{1}{t^\alpha}$. L'intégrale $\displaystyle\int_0^c \frac{dt}{t^\alpha}$ ne converge que si $\alpha<+1$, et donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^c \frac{dt}{t^\alpha\left(1+t^\beta\right)}$ ne converge que si $\alpha<+1$

— En $+\infty$, $\dfrac{1}{t^\alpha\left(1+t^\beta\right)} \underset{+\infty}{\approx} \dfrac{1}{t^{\beta+\alpha}}$. L'intégrale $\displaystyle\int_c^{+\infty} \frac{dt}{t^{\beta+\alpha}}$ ne converge que si $\beta+\alpha>+1$, et donc l'intégrale $\displaystyle\int_c^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha\left(1+t^\beta\right)}$ ne converge que si $\beta+\alpha>+1$

En synthèse, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha\left(1+t^\beta\right)}$ converge si $\begin{cases} 0<\alpha<+1 \\ \beta+\alpha>+1 \end{cases}$

Exercice 12 :

1. (a) *Montrer la convergence de l'intégrale* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$,

   Il n'y a pas de problème en 0, puisque la fonction $\dfrac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$; il faut donc s'intéresser à $+\infty$.
   En $+\infty$, la fonction $\dfrac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)}$ est équivalente à $\dfrac{1}{x^3}$; comme l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}dx$ est une intégrale de Riemann convergente, il en est de même de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$

   (b) *Calculer* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$

   La première étape consiste à décomposer $\dfrac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)}$ en éléments simples. Tout calculs faits, on trouve :

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)}=\frac{\frac{1}{2}}{x+1}-\frac{1}{x+2}+\frac{\frac{1}{2}}{x+3}$$

   Soit $T>0$. Nous allons calculer $\displaystyle\int_0^{T} \frac{dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$, puis calculer $\displaystyle\lim_{T\to+\infty}\int_0^{T} \frac{dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$.
   D'après la décomposition en éléments simples, nous avons :

$$\begin{aligned}
\int_0^{T} \frac{dx}{(x+1)(x+2)(x+3)} &= \frac{1}{2}\left[\ln(x+1)\right]_0^T-\left[\ln(x+2)\right]_0^T+\frac{1}{2}\left[\ln(x+3)\right]_0^T \\
&= \left(\frac{1}{2}\ln(T+1)-\ln(T+2)+\frac{1}{2}\ln(T+3)\right)-\left(-\ln(2)+\frac{1}{2}\ln(3)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\ln(T+1)-2\ln(T+2)+\ln(T+3)\right)-\ln\frac{\sqrt{3}}{2} \\
&= \frac{1}{2}\ln\frac{(T+1)(T+3)}{(T+2)^2}-\ln\frac{\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}$$

   Or, nous avons $\displaystyle\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2}\ln\frac{(T+1)(T+3)}{(T+2)^2}=0$

   Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}=\ln\frac{2}{\sqrt{3}}$

2. (a) *Montrer la convergence de* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\,dx}{x^3+x^2+x+1}$

   Pas de grande difficulté ; la fonction $\dfrac{x}{x^3+x^2+x+1}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$; il faut donc s'intéresser à $+\infty$. Or, en $+\infty$ la fonction $\dfrac{x}{x^3+x^2+x+1}$ est équivalente à $\dfrac{1}{x^2}$. Comme l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}$ est une intégrale de Riemann convergente, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\,dx}{x^3+x^2+x+1}$ est donc aussi convergente.

   (b) *Calculer cette intégrale*

   La première étape consiste à décomposer $\dfrac{x}{x^3+x^2+x+1}$ en éléments simples. Tout calculs faits, on trouve :

$$\frac{x}{x^3+x^2+x+1}=\frac{\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}{x^2+1}-\frac{\frac{1}{2}}{x+1}=\frac{1}{2}\left(\frac{x+1}{x^2+1}-\frac{1}{x+1}\right)$$

Soit $T > 0$. Comme tout à l'heure, nous allons calculer $\displaystyle\int_0^T \frac{x\ dx}{x^3+x^2+x+1}$, puis calculer $\displaystyle\lim_{T\to+\infty}\int_0^T \frac{x\ dx}{x^3+x^2+x+1}$.

Nous allons calculer $\displaystyle\int_0^T \frac{x+1}{x^2+1} - \frac{1}{x+1}\,dx = \int_0^T \frac{x+1}{x^2+1}\,dx - \int_0^T \frac{1}{x+1}\,dx$

— $\displaystyle\int_0^T \frac{1}{x+1}\,dx = [\ln x+1]_0^T = \ln(T+1)$

— $\displaystyle\int_0^T \frac{x+1}{x^2+1}\,dx = \int_0^T \frac{x}{x^2+1}\,dx + \int_0^T \frac{1}{x^2+1}\,dx$

  — $\displaystyle\int_0^T \frac{1}{x^2+1}\,dx = [\arctan x]_0^T = \arctan T$

  — $\displaystyle\int_0^T \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^T \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\left[\ln x^2+1\right]_0^T = \frac{1}{2}\ln\left(T^2+1\right)$

— Donc, $\displaystyle\int_0^T \frac{x+1}{x^2+1} - \frac{1}{x+1}\,dx = \frac{1}{2}\ln\left(T^2+1\right) + \arctan T - \ln(T+1) = \ln\left(\frac{\sqrt{T^2+1}}{T+1}\right) +$ $\arctan T$

Or, $\displaystyle\ln\left(\frac{\sqrt{T^2+1}}{T+1}\right) = \ln\left(\frac{T\sqrt{1+\frac{1}{T^2}}}{T\left(1+\frac{1}{T}\right)}\right) = \ln\left(\frac{\sqrt{1+\frac{1}{T^2}}}{\left(1+\frac{1}{T}\right)}\right)$. Comme $\displaystyle\lim_{T\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{T^2}}}{\left(1+\frac{1}{T}\right)} = 1$, nous avons $\displaystyle\lim_{T\to+\infty}\ln\left(\frac{\sqrt{1+\frac{1}{T^2}}}{\left(1+\frac{1}{T}\right)}\right) = 0$.

D'autre part, $\displaystyle\lim_{T\to+\infty}\arctan T = \frac{\pi}{2}$, nous avons donc $\displaystyle\lim_{T\to+\infty}\int_0^T \frac{x+1}{x^2+1} - \frac{1}{x+1}\,dx = \frac{\pi}{2}$, c'est à dire $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x\ dx}{x^3+x^2+x+1} = \frac{\pi}{4}$

Exercice 13 :

Soit f une fonction définie et continue par morceaux sur un intervalle $[a;+\infty[$. On suppose que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f(t) = L$ et que L est finie.

Est-il possible, suivant la valeur de L de conclure quant à la nature de $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\ dt$?

La réponse est NON : connaissant la valeur de L, on ne peut rien conclure

— Supposons $L > 0$

Il existe $A \in [a;+\infty[$ tel que, si $t > A$, alors $|f(t) - L| \leqslant \frac{L}{2}$, c'est à dire, de manière équivalente, si $t > A$, alors $\frac{L}{2} \leqslant f(t) \leqslant \frac{3L}{2}$

Soit $X > A$, alors, $\displaystyle\int_a^X f(t)\ dt = \int_a^A f(t)\ dt + \int_A^X f(t)\ dt$

f étant continue par morceaux sur l'intervalle $[a;+\infty[$, l'intégrale $\displaystyle\int_a^A f(t)\ dt$ ne pose pas de problème.

Par contre, $\displaystyle\int_A^X f(t)\ dt \geqslant \frac{L}{2}(X-A)$.

Donc, $\displaystyle\int_a^X f(t)\ dt \geqslant \int_a^A f(t)\ dt + \frac{L}{2}(X-A)$

Comme $\displaystyle\lim_{X\to+\infty}\frac{L}{2}(X-A) = +\infty$, nous avons $\displaystyle\lim_{X\to+\infty}\int_a^X f(t)\ dt = +\infty$. L'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\ dt$ est donc divergente.

— Supposons $L < 0$

Considérons $g = -f,$; alors, $\lim\limits_{t \to +\infty} g(t) = -L$, et $-L > 0$; donc, l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(t)\,dt$ est divergente, c'est à dire que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ est donc divergente

Ainsi, si $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = L$, il est nécessaire que $L = 0$, mais cette condition n'est pas suffisante ; par exemple :

— $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^3}\,dt = \frac{1}{2}$ et $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t^3} = 0$

— Mais, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt$ diverge, alors que $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} = 0$

Exercice 14 :

Soit f définie sur $\mathbb{R}^+$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$\begin{cases} f(n) = 1 \\ f\left(n - \dfrac{1}{2^n}\right) = 0 \\ f\left(n + \dfrac{1}{2^n}\right) = 0 \\ f \text{ est affine sur } \left[n - \dfrac{1}{2^n}; n\right] \text{ et sur } \left[n; n + \dfrac{1}{2^n}\right] \\ f(x) = 0 \text{ ailleurs} \end{cases}$$

Une autre façon d'exprimer f peut être donnée par :

$$\begin{cases} f(x) = 2^n \left(x - \left(n - \dfrac{1}{2^n}\right)\right) \text{ si } x \in \left[n - \dfrac{1}{2^n}; n\right] \\ f(x) = -2^n \left(x - \left(n + \dfrac{1}{2^n}\right)\right) \text{ si } x \in \left[n; n + \dfrac{1}{2^n}\right] \\ f(x) = 0 \text{ ailleurs} \end{cases}$$

Montrer que f n'admet pas de limite lorsque t tend vers $+\infty$, mais que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge

Il est tout à fait clair que, par construction, f est continue, positive et bornée par 1 (nous avons, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $0 \leqslant f(t) \leqslant 1$. D'autre part, f n'admet pas de limite en $+\infty$

Il n'est pas inintéressant de calculer $\displaystyle\int_{n-\frac{1}{2^n}}^{n+\frac{1}{2^n}} f(t)\,dt$. C'est, en fait, l'aire d'un triangle de base de longueur $\dfrac{2}{2^n}$ et de hauteur 1. Nous avons donc $\displaystyle\int_{n-\frac{1}{2^n}}^{n+\frac{1}{2^n}} f(t)\,dt = \frac{1}{2^n}$

Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Nous allons considérer l'intégrale $\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$, puis, rechercher $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \int_0^x f(t)\,dt$

Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n - \dfrac{1}{2} \leqslant x < n + \dfrac{1}{2}$; en fait, n est tel que $n = \left[x + \dfrac{1}{2}\right]$

Alors, $\displaystyle\int_0^{n-\frac{1}{2}} f(t)\,dt \leqslant \int_0^x f(t)\,dt < \int_0^{n+\frac{1}{2}} f(t)\,dt$, c'est à dire :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^k} \leqslant \int_0^x f(t)\,dt < \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^k}$$

Or, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^k}$ est la somme des termes d'une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^k} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

Par la définition de n, lors que x tend vers $+\infty$, n tend également vers $+\infty$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x f(t)\ dt = 1$, c'est à dire $\int_0^{+\infty} f(t)\ dt = 1$, alors que le fonction f n'admet pas de limite.

Exercice 15 :

Soit f, une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ (autrement dit, $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$. On suppose que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L_1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L_2$

1. *Démontrez l'existence de $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+1) - f(x)\ dx$, puis calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+1) - f(x)\ dx$*

   Considérons $F(x) = \int_0^x f(t)\ dt$; f étant continue sur $\mathbb{R}$, F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et de dérivée $F' = f$.Nous allons étudier $\int_0^x f(t+1) - f(t)\ dt$

   $$\begin{aligned}\int_0^x f(t+1) - f(t)\ dt &= \int_0^x f(t+1)\ dt - \int_0^x f(t)\ dt \\ &= \int_0^x f(t+1)\ dt - F(x) \\ &= \int_1^{x+1} f(u)\ du - F(x) \text{ par le changement de variables } u = t+1 \\ &= F(x+1) - F(1) - F(x) \\ &= F(x+1) - F(x) - F(1)\end{aligned}$$

   D'après le théorème des accroissements finis, il existe $\theta_x \in]x; x+1[$ tel que $F(x+1) - F(x) = f(\theta_x)$

   Lorsque x tend vers $+\infty$, θ_x tend aussi vers $+\infty$; on en déduit alors que $\int_0^{+\infty} f(t+1) - f(t)\ dt = L_1 - F(1)$

   Si nous considérons, maintenant $\int_x^0 f(t)\ dt$, par une démonstration semblable, nous obtenons $\int_{-\infty}^0 f(t+1) - f(t)\ dt = F(1) - L_2$

   Nous avons donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+1) - f(x)\ dx = L_1 - L_2$

2. *Calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} \arctan(x+1) - \arctan(x)\ dx$*

   Nous avons $\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$, et donc

   $$\int_{-\infty}^{+\infty} \arctan(x+1) - \arctan(x)\ dx = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$

Exercice 16 :

1. *Démontrer la convergence de l'intégrale $\int_0^1 \frac{x-1}{\ln x}\ dx$*

   Il y a deux problèmes qui se posent à cette intégrale : en 0 et en 1. Posons $f(x) = \frac{x-1}{\ln x}$

   — <u>En 1</u>

   En utilisant la limite remarquable $\lim\limits_{x\to1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$, on peut donc prolonger $\frac{x-1}{\ln x}$ en 1 en posant $f(1) = 1$.

   Nous sommes devant une intégrale « faussement impropre » en 1

— En 0

Nous avons $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x}\left(\dfrac{x-1}{\ln x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}x^{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{x-1}{\ln x}\right)=0$, c'est à dire qu'il existe $\alpha<1$, $\alpha=\dfrac{1}{2}$ tel que $\lim\limits_{x\to 0}x^{\frac{1}{2}}f(x)=0$ et donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^c\frac{x-1}{\ln x}\,dx$ existe, pour tout $c\in\,]0;1[$

Donc, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1\frac{x-1}{\ln x}\,dx$ est convergente.

2. *Utiliser le théorème des accroissements finis pour démontrer que pour tout $x\in\,]0;1[$,*

$$1-\frac{1}{x}<\ln x<x-1$$

Soit $x\in\,]0;1[$. Ecrivons le théorème des accroissements finis entre x et 1 pour la fonction $\ln x$
Il existe donc $c\in\,]x;1[$ tel que

$$\frac{\ln x-\ln 1}{x-1}=\frac{\ln x}{x-1}=\ln' c=\frac{1}{c}$$

Comme $x<c<1$, nous avons $1<\dfrac{1}{c}<\dfrac{1}{x}$, c'est à dire $1<\dfrac{\ln x}{x-1}<\dfrac{1}{x}$.
Tout en remarquant que $x-1<0$, nous multiplions par $x-1$, et nous obtenons :

$$\frac{x-1}{x}<\ln x<x-1$$

Ce que nous voulions.

3. *Soit $T\in\,]0;1[$; démontrer que* $\displaystyle\int_0^T\frac{x}{\ln x}\,dx=\int_0^{T^2}\frac{1}{\ln x}\,dx$

En faisant le changement de variable $u=x^2$, nous avons $\dfrac{du}{dx}=2x\iff x\,dx=\dfrac{du}{2}$, et alors :

$$\int_0^T\frac{x}{\ln x}\,dx=\int_0^{T^2}\frac{1}{\frac{1}{2}\ln u}\,\frac{du}{2}=\int_0^{T^2}\frac{1}{\ln u}\,du$$

4. (a) *En déduire un encadrement de* $\displaystyle\int_0^T\frac{x-1}{\ln x}\,dx$

Nous avons :

$$\int_0^T\frac{x-1}{\ln x}\,dx=\int_0^T\frac{x}{\ln x}\,dx-\int_0^T\frac{1}{\ln x}\,dx=\int_0^{T^2}\frac{1}{\ln x}\,dx-\int_0^T\frac{1}{\ln x}\,dx=\int_T^{T^2}\frac{1}{\ln x}\,dx$$

Nous avons, pour $0<x<1$, $\dfrac{x-1}{x}<\ln x<x-1$, c'est à dire $\dfrac{x}{x-1}<\dfrac{1}{\ln x}<\dfrac{1}{x-1}$, et donc :

$$\int_T^{T^2}\frac{1}{x-1}\,dx<\int_T^{T^2}\frac{1}{\ln x}\,dx<\int_T^{T^2}\frac{x}{x-1}\,dx$$

— Or, $\displaystyle\int_T^{T^2}\frac{1}{x-1}\,dx=[\ln|x-1|]_T^{T^2}=\ln\left|T^2-1\right|-\ln|T-1|=\ln|T+1|$

— Et $\dfrac{x}{x-1}=\dfrac{x-1+1}{x-1}=1+\dfrac{1}{x-1}$ et donc

$$\begin{aligned}\int_T^{T^2}\frac{x}{x-1}\,dx &= \int_T^{T^2}1+\frac{1}{x-1}\,dx\\ &= [x+\ln|x-1|]_T^{T^2}\\ &= T^2-T+\left|T^2-1\right|-|T-1|\\ &= T^2-T+\ln|T+1|\end{aligned}$$

Nous avons donc

$$< T^2 - T + \ln|T+1| < \int_T^{T^2} \frac{1}{\ln x}\, dx < \ln|T+1|$$

(b) *Démontrer que* $\int_0^1 \frac{x-1}{\ln x}\, dx = \ln 2$

Nous avons $\int_0^1 \frac{x-1}{\ln x}\, dx = \lim_{T\to 1} \int_0^T \frac{x-1}{\ln x}\, dx = \lim_{T\to 1} \int_T^{T^2} \frac{1}{\ln x}\, dx$.
Or, $\lim_{T\to 1} \ln|T+1| = \lim_{T\to 1} T^2 - T + \ln|T+1| = \ln 2$. De l'encadrement

$$< T^2 - T + \ln|T+1| < \int_T^{T^2} \frac{1}{\ln x}\, dx < \ln|T+1|$$

Nous avons $\lim_{T\to 1} \int_T^{T^2} \frac{1}{\ln x}\, dx = \ln 2$, c'est à dire $\lim_{T\to 1} \int_0^T \frac{x-1}{\ln x}\, dx = \ln 2$

Nous avons donc bien : $\int_0^1 \frac{x-1}{\ln x}\, dx = \ln 2$

Exercice 17 :

Soit $f(x) = \ln(\sin x)$ *et* $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)\, dx$

1. *En écrivant* $f(x) = \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) + \ln x$*, démontrer qu'au voisinage de 0, nous avons* $f(x) \underset{0}{\approx} \ln x$.

   Le fait que $f(x) = \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) + \ln x$ ne pose pas de difficultés.

   Nous avons $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, et donc $\lim_{x\to 0} \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) = 0$

   En écrivant $\frac{f(x)}{\ln x} = 1 + \frac{\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)}{\ln x}$, nous voyons que $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{\ln x} = 1$ et que donc, $f(x) \underset{0}{\approx} \ln x$
   Etablir alors la convergence de l'intégrale I

   Comme l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln x\, dx$ est convergente, que $f(x) \underset{0}{\approx} \ln x$, il en est de même de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\, , dx$; donc I est convergente.

2. *Montrer que nous avons* $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x)\, dx$

   Le problème de l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x)\, dx$ se situe en $\frac{\pi}{2}$

   Pour $\varepsilon > 0$, nous étudions donc $\int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \ln(\cos x)\, dx$

   En faisant le changement de variables $t = -x + \frac{\pi}{2} \Longrightarrow x = \frac{\pi}{2} - t$ et $dt = -dx$, nous avons :

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \ln(\cos x)\, dx &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\varepsilon} \ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\right) - dt \\ &= \int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t)\, dt \end{aligned}$$

   Comme $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t)\, dt$ existe, il en est de même de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x)\, dx$, et, de plus :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t)\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos t)\, dt = I$$

Puis que $2I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{\sin 2x}{2}\right)\, dx$

Il faut remarquer que $\sin 2x = 2\sin x \cos x$, et que, donc, $\dfrac{\sin 2x}{2} = \sin x \cos x$.
De ce fait :

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{\sin 2x}{2}\right)\, dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t)\, dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos t)\, dt \\ &= 2I\end{aligned}$$

3. *Démontrer que* $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin 2x)\, dx = I$

   On effectue le changement de variables $u = 2x$ (donc $du = 2dx \Longleftrightarrow dx = \dfrac{du}{2}$)

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin 2x)\, dx &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln(\sin u)\, du \\ &= \frac{1}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin u)\, du + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin u)\, du\right)\end{aligned}$$

   Il faut donc, maintenant, étudier $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin u)\, du$. En faisant un nouveau changement de variables $v = u - \dfrac{\pi}{2}$, nous avons :

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin u)\, du &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\sin\left(v + \frac{\pi}{2}\right)\right)\, dv \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos v)\, dv = I\end{aligned}$$

   Donc, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin 2x)\, dx = I$

4. *En déduire la valeur de* I

   Faisons une synthèse :
   - $2I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{\sin 2x}{2}\right)\, dx$
   - $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin 2x)\, dx = I$

   Donc :

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{\sin 2x}{2}\right)\, dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(sin2x) - \ln 2\, dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(sin2x)\, dx - \frac{\pi}{2}\ln 2\end{aligned}$$

   Nous avons donc $2I = I - \dfrac{\pi}{2}\ln 2$; d'où $\boxed{I = -\dfrac{\pi}{2}\ln 2}$

5. *Question de prolongement(non résolue) Que dire de* $I = \displaystyle\int_0^1 \ln(\sin x)\, dx$ *?*

Exercice 18 :

Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$*, continue, telle que* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\, dt$ *converge.*
Soient $0 < a < b$ *et* $0 < x < y$*, et on pose :*

$$F(x, y) = \int_x^y \frac{f(at) - f(bt)}{t}\, dt$$

1. *Montrer que* $F(x,y)=\displaystyle\int_{ax}^{bx}\frac{f(t)}{t}\,dt-\int_{ay}^{by}\frac{f(t)}{t}\,dt$

   C'est une question qui ne pose pas trop de difficultés. Nous allons procéder en plusieurs temps :

   — Dans un premier temps, on écrit :

   $$F(x,y)=\int_{x}^{y}\frac{f(at)}{t}\,dt-\int_{x}^{y}\frac{f(bt)}{t}\,dt$$

   — Dans un second temps, on étudie $\displaystyle\int_{x}^{y}\frac{f(at)}{t}\,dt$

   On fait le changement de variables $u=at\Longrightarrow du=adt$. Alors :

   $$\int_{x}^{y}\frac{f(at)}{t}\,dt=\int_{ax}^{ay}\frac{f(u)}{\frac{u}{a}}\,\frac{du}{a}=\int_{ax}^{ay}\frac{f(u)}{u}\,du$$

   De la même manière, nous aurions $\displaystyle\int_{x}^{y}\frac{f(bt)}{t}\,dt=\int_{bx}^{by}\frac{f(u)}{u}\,du$

   — Faisons une synthèse :

   $$\begin{aligned}F(x,y)&=\int_{ax}^{ay}\frac{f(u)}{u}\,du-\int_{bx}^{by}\frac{f(u)}{u}\,du\\&=\int_{ax}^{0}\frac{f(u)}{u}\,du+\int_{0}^{ay}\frac{f(u)}{u}\,du-\int_{bx}^{0}\frac{f(u)}{u}\,du-\int_{0}^{by}\frac{f(u)}{u}\,du\\&=\int_{ax}^{0}\frac{f(u)}{u}\,du+\int_{0}^{bx}\frac{f(u)}{u}\,du-\left(\int_{ay}^{0}\frac{f(u)}{u}\,du+\int_{0}^{by}\frac{f(u)}{u}\,du\right)\\&=\int_{ax}^{bx}\frac{f(u)}{u}\,du-\int_{ay}^{by}\frac{f(u)}{u}\,du\end{aligned}$$

2. *On appelle* $G(x)=\displaystyle\int_{ax}^{bx}\frac{f(t)}{t}\,dt$ *; montrer que* $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}G(x)=0$

   Remarquons que $F(x,y)=G(x)-G(y)$

   On peut écrire $G(x)=\displaystyle\int_{1}^{bx}\frac{f(t)}{t}\,dt-\int_{1}^{ax}\frac{f(t)}{t}\,dt.$

   Par hypothèse, $\displaystyle\int_{0}^{+\infty}\frac{f(t)}{t}\,dt$ converge, et on appelle $L=\displaystyle\int_{0}^{+\infty}\frac{f(t)}{t}\,dt$; nous avons alors

   $$\lim_{x\to+\infty}G(x)=\lim_{x\to+\infty}G(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\int_{1}^{bx}\frac{f(t)}{t}\,dt-\int_{1}^{ax}\frac{f(t)}{t}\,dt\right)=L-L=0$$

3. *Montrer que* $G(x)=\displaystyle\int_{ax}^{bx}\frac{f(t)-f(0)}{t}\,dt+f(0)\ln\left(\frac{b}{a}\right)$

   Enfin une question facile!!

   $$\begin{aligned}G(x)&=\int_{ax}^{bx}\frac{f(t)-f(0)+f(0)}{t}\,dt\\&=\int_{ax}^{bx}\frac{f(t)-f(0)}{t}\,dt+I_{ax}^{bx}\frac{f(0)}{t}\,dt\\&=\int_{ax}^{bx}\frac{f(t)-f(0)}{t}\,dt+f(0)\,[\ln t]_{ax}^{bx}\end{aligned}$$

   Or,$\ln(bx)-\ln(ax)=\ln\left(\dfrac{bx}{ax}\right)=\ln\left(\dfrac{b}{a}\right)$. Donc

   $$G(x)=\int_{ax}^{bx}\frac{f(t)-f(0)}{t}\,dt+f(0)\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

4. *Montrer que* $\lim_{x\to 0} G(x) = f(0)\ln\left(\frac{b}{a}\right)$

   Il faut donc montrer que $\lim_{x\to 0}\int_{ax}^{bx}\frac{f(t)-f(0)}{t}\,dt = 0$
   Pour ce faire, soit donc $\varepsilon > 0$
   Par hypothèse, f est continue en 0. Il existe donc $\eta_\varepsilon > 0$ tel que si $0 < t < \eta_\varepsilon$ alors $|f(t)-f(0)| < \varepsilon$
   Soit maintenant x tel que $0 < ax < bx < \eta_\varepsilon$, c'est à dire x tel que $0 < x < \frac{\eta_\varepsilon}{b}$. Alors,

$$\left|\int_{ax}^{bx}\frac{f(t)-f(0)}{t}\,dt\right| \leqslant \int_{ax}^{bx}\frac{|f(t)-f(0)|}{t}\,dt < \varepsilon\int_{ax}^{bx}\frac{1}{t}\,dt = \varepsilon\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

   Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta_\varepsilon > 0$ tel que, si $0 < x < \eta_\varepsilon$, alors, $\left|\int_{ax}^{bx}\frac{f(t)-f(0)}{t}\,dt\right| \leqslant \varepsilon$

   Donc $\lim_{x\to 0}\int_{ax}^{bx}\frac{f(t)-f(0)}{t}\,dt = 0$ et on conclue que $\lim_{x\to 0} G(x) = f(0)\ln\left(\frac{b}{a}\right)$

5. *Montrer que* $\int_0^{+\infty}\frac{f(at)-f(bt)}{t}\,dt = f(0)\ln\left(\frac{b}{a}\right)$

   Soit $c > 0$ fixé tel que $x < c < y$
   Nous avons :

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \int_x^y \frac{f(at)-f(bt)}{t}\,dt \\ &= \int_x^c \frac{f(at)-f(bt)}{t}\,dt + \int_c^y \frac{f(at)-f(bt)}{t}\,dt \\ &= G(x) - G(c) + G(c) - G(y) \end{aligned}$$

   — On a démontré que $\lim_{y\to+\infty} G(y) = 0$; donc $\lim_{y\to+\infty}\int_c^y \frac{f(at)-f(bt)}{t}\,dt = G(c)$

   — On a démontré que $\lim_{x\to 0} G(x) = f(0)\ln\left(\frac{b}{a}\right)$; donc $\lim_{x\to x}\int_x^c \frac{f(at)-f(bt)}{t}\,dt = f(0)\ln\left(\frac{b}{a}\right) - G(c)$

   Donc, $\int_0^{+\infty}\frac{f(at)-f(bt)}{t}\,dt$ existe et $\int_0^{+\infty}\frac{f(at)-f(bt)}{t}\,dt = f(0)\ln\left(\frac{b}{a}\right)$

6. *Démontrer que* $\int_0^{+\infty}\frac{2\sin t - \sin(2t)}{t^2}\,dt = \ln 2$

   La fonction $f(t) = \frac{\sin t}{t}$ est continue sur $[0;+\infty[$ lorsqu'on a posé $f(0) = 1$.

   D'autre part, l'intégrale $\int_1^{+\infty}\frac{f(t)}{t}\,dt = \int_1^{+\infty}\frac{\sin t)}{t^2}\,dt$ converge *(elle converge même absolument)*
   Donc, nous avons, pour tout $a > 0$ et tout $b > 0$ tels que $0 < a < b$:

$$\int_0^{+\infty}\frac{\frac{\sin at}{at} - \frac{\sin bt}{bt}}{t}\,dt = \int_0^{+\infty}\frac{b\sin at - a\sin bt}{abt^2}\,dt = \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

   En particulier si $a = 1$ et $b = 2$, nous avons $\int_0^{+\infty}\frac{2\sin t - \sin 2t}{2t^2}\,dt = \ln 2$

7. (a) *Soit* $f :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, *continue et telle que* $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \alpha$ *et* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \beta$

   Montrer que $\int_0^{+\infty}\frac{f(at)-f(bt)}{t}\,dt = (\alpha-\beta)\ln\left(\frac{b}{a}\right)$

   Nous écrivons toujours $F(x,y) = \int_x^y \frac{f(at)-f(bt)}{t}\,dt$, $G(x) = \int_{ax}^{bx}\frac{f(t)}{t}\,dt$, et nous avons toujours $F(x,y) = G(x) - G(y)$

— Tout d'abord, nous avons $G(y) = \displaystyle\int_{ay}^{by} \frac{f(t)}{t}\,dt = \int_{ay}^{by} \frac{f(t)-\beta}{t}\,dt + \int_{ay}^{by} \frac{\beta}{t}\,dt$, c'est à dire que $G(y) = \displaystyle\int_{ay}^{by} \frac{f(t)-\beta}{t}\,dt + \beta \ln\left(\frac{b}{a}\right)$

Nous allons démontrer que $\displaystyle\lim_{y\to+\infty} \int_{ay}^{by} \frac{f(t)-\beta}{t}\,dt = 0$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $A > 0$ tel que, si $x > A$, alors $|f(x) - \beta| < \varepsilon$

Ainsi, pour y tel que $A < ay < by$, c'est à dire $y > \dfrac{A}{a}$, nous avons :

$$\left|\int_{ay}^{by} \frac{f(t)-\beta}{t}\,dt\right| \leqslant \int_{ay}^{by} \frac{|f(t)-\beta|}{t}\,dt \leqslant \varepsilon \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Donc, $\displaystyle\lim_{y\to+\infty} \int_{ay}^{by} \frac{f(t)-\beta}{t}\,dt = 0$, et $\displaystyle\lim_{y\to+\infty} G(y) = \beta \ln\left(\frac{b}{a}\right)$

— On démontrerait de la même manière que $\displaystyle\lim_{x\to 0} G(x) = \alpha \ln\left(\frac{b}{a}\right)$

— On conclue donc, avec les mêmes arguments que dans la question 6, que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(at)-f(bt)}{t}\,dt = (\alpha-\beta)\ln\left(\frac{b}{a}\right)$

(b) *Applications*

i. *Montrer que* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(t) - \arctan(2t)}{t}\,dt = -\frac{\pi}{2}\ln 2$

Nous avons $\displaystyle\lim_{t\to 0} \arctan t = 0$ et $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \arctan t = \frac{\pi}{2}$, et nous appliquns les résultats de la question précédente avec $a = 1$ et $b = 2$

ii. *Etude et existence de* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\tanh(3t) - \tanh t}{t}\,dt$

Nous avons $\tanh t = \dfrac{e^t - e^{-t}}{e^t - e^{-t}}$, et donc $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \tanh t = 1$ et $\displaystyle\lim_{t\to 0} \tanh t = 0$

Donc, d'après l'étude précédente, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\tanh(3t) - \tanh t}{t}\,dt = -1\ln\left(\frac{1}{3}\right) = \ln 3$

iii. *On considère* $A = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\ln(1-x)}\,dx$ *; montrer que* $A = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-2x} - e^{-x}}{x}\,dx$ *; en déduire* A

Dans l'exercice 13, nous avons réussi à montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{x-1}{\ln x}\,dx$ existait, et que même $\displaystyle\int_0^1 \frac{x-1}{\ln x}\,dx = \ln 2$

Dans $A = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\ln(1-x)}\,dx$, il est possible de faire le changement de variables $u = 1 - x$, donc $x = 1 - u$ et $dx = -du$.

Donc, $A = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\ln(1-x)}\,dx = \int_1^0 \frac{1-u}{\ln(u)} - du = \int_0^1 \frac{u-1}{\ln(u)}\,du = -\ln 2$

La question posée ici, propose une autre façon de calculer cette intégrale

En faisant un autre changement de variables :

$$u = \ln(1-x) \Longleftrightarrow 1 - x = e^u \Longleftrightarrow x = 1 - e^u$$

Et donc, en passant aux différentielles :

$$\frac{du}{dx} = \frac{-1}{1-x} = \frac{1}{x-1} = \frac{1}{(1-e^u)-1} = -e^{-u} \Longleftrightarrow dx = -e^u du$$

D'où $A = \displaystyle\int_0^{-\infty} \frac{1-e^u}{u} - e^u du = \int_{-\infty}^0 \frac{e^u - e^{2u}}{u} du$. En faisant un nouveau changement de variables $v = -u$, nous avons :

$$A = \int_{-\infty}^0 \frac{e^u - e^{2u}}{u} du = \int_{+\infty}^0 \frac{e^{-v} - e^{-2v}}{-v} - dv = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-2v} - e^{-v}}{v} dv$$

Sachant que $\displaystyle\lim_{v\to 0} e^{-v} = 1$ et que $\displaystyle\lim_{v\to+\infty} e^{-v} = 0$, nous avons :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-2v} - e^{-v}}{v} dv = 1 \times \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2$$

Ce que nous savions déjà ! !

Remarque : Quel lien y-a-t-il entre les questions 1 à 6 et la question 7 ?

Dans la question 7, on ne s'intéresse pas à la convergence d'une intégrale du type $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt$, seulement à l'existence de limites finies en 0 et $+\infty$

— Il aurait été impossible d'appliquer les questions 1 à 6 à la fonction $\arctan t$ puisque l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\arctan t}{t} dt$ diverge.

— Il aurait, par contre, été tout à fait possible d'appliquer la question 7 à la fonction $\dfrac{\sin t}{t}$

Exercice 19 :

1. *Dans cette question, nous considérons l'intégrale* $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha (\ln x)^\beta} dx$

   (a) *On suppose $\alpha = 1$. L'intégrale $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^\beta} dx$ est-elle convergente ?*

   — On suppose $\beta \neq 1$

   Soit $T > e$, et on considère $\displaystyle\int_e^T \frac{1}{x(\ln x)^\beta} dx$. Nous avons :

$$\begin{aligned}\int_e^T \frac{1}{x(\ln x)^\beta} dx &= \int_e^T \frac{1}{x} (\ln x)^{-\beta} dx \\ &= \left[\frac{(\ln x)^{-\beta+1}}{-\beta+1}\right]_e^T \\ &= \frac{1}{1-\beta}\left(\frac{1}{(\ln x)^{\beta-1}} - 1\right)\end{aligned}$$

   - Si $\beta > 1$, alors, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (\ln x)^{\beta-1} = +\infty$, et donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_e^T \frac{1}{x(\ln x)^\beta} dx = \frac{1}{\beta - 1}$.

     L'intégrale $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^\beta} dx$ est donc convergente.
   - Si $\beta < 1$, alors $\dfrac{1}{(\ln x)^{\beta-1}} = (\ln x)^{1-\beta}$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (\ln x)^{1-\beta} = +\infty$; l'intégrale est donc divergente.

   — Si $\beta = 1$, alors $\displaystyle\int_e^T \frac{1}{x\ln x} dx = [\ln(|\ln x|)]_e^T = \ln(|\ln T|)$

   Comme $\displaystyle\lim_{T\to+\infty} \ln(|\ln T|) = +\infty$, l'intégrale $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{1}{x\ln x} dx$ est divergente.

(b) *Etudier la convergence de l'intégrale* $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha (\ln x)^\beta} dx$ *lorque* $\alpha \neq 1$

— On suppose $\alpha < 1$

Alors, pour tout $\gamma \in \mathbb{R}$, nous avons $\dfrac{1}{x^\alpha (\ln x)^\beta} = \dfrac{1}{x^\gamma} \times \dfrac{x^{\gamma-\alpha}}{(\ln x)^\beta}$

On peut choisir γ tel que $\alpha < \gamma < 1$, et alors $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{x^{\gamma-\alpha}}{(\ln x)^\beta} = +\infty$

Il existe donc $A > 0$ tel que, si $x > A$, alors $\dfrac{x^{\gamma-\alpha}}{(\ln x)^\beta} > 1$, et alors, si $t > A$, $\dfrac{1}{x^\alpha (\ln x)^\beta} = \dfrac{1}{x^\gamma} \times \dfrac{x^{\gamma-\alpha}}{(\ln x)^\beta} > \dfrac{1}{x^\gamma}$

Or, $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{1}{x^\gamma} dx$ diverge si $\gamma < 1$, et donc $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha (\ln x)^\beta} dx$ diverge

— On suppose maintenant $\alpha > 1$

Pour $\gamma \in \mathbb{R}$, nous avons $x^\gamma \times \left(\dfrac{1}{x^\alpha (\ln x)^\beta}\right) = \dfrac{1}{x^{\alpha-\gamma} (\ln x)^\beta}$

On peut choisir γ tel que $\alpha > \gamma > 1$ et alors, $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} x^{\alpha-\gamma} (\ln x)^\beta = +\infty$, c'est à dire

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^{\alpha-\gamma} (\ln x)^\beta} = 0$$

Nous avons bien, $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} x^\gamma \times \left(\frac{1}{x^\alpha (\ln x)^\beta}\right) = 0$, et donc $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha (\ln x)^\beta} dx$ converge.

Synthèse

	$\alpha < 1$	$\alpha = 1$	$\alpha > 1$
$\beta < 1$	Diverge	Diverge	Converge
$\beta = 1$	Diverge	Diverge	Converge
$\beta > 1$	Diverge	Converge	Converge

2. *Etudier maintenant la convergence de* $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{e}} \frac{1}{x^\alpha (|\ln x|)^\beta} dx$

On fait le changement de variables $u = \dfrac{1}{t}$ donc $\dfrac{du}{dt} = -\dfrac{1}{t^2} \iff dt = -u^2 du$; d'où :

$$\int_0^{\frac{1}{e}} \frac{1}{x^\alpha (|\ln x|)^\beta} dx = \int_{+\infty}^{e} \frac{-du}{u^{-\alpha} u^2 (|\ln u|)^\beta} = \int_e^{+\infty} \frac{du}{u^{2-\alpha} (\ln u)^\beta}$$

Donc :

— Si $2 - \alpha < 1 \iff \alpha > 1$, alors l'intégrale diverge.

— Si $2 - \alpha > 1 \iff \alpha < 1$, alors l'intégrale converge.

— Si $2 - \alpha = 1$ et $\beta > 1 \iff \alpha = 1$ et $\beta > 1$, alors l'intégrale converge.

— Si $2 - \alpha = 1$ et $\beta \leqslant 1 \iff \alpha = 1$ et $\beta \leqslant 1$, alors l'intégrale diverge

Exercice 20 :

1. *Étudier la convergence de* $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$

Question des plus classiques ! !

Nous avons $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} t^2 \left(t^{x-1} e^{-t}\right) = \lim_{t \to +\infty} \left(t^{x+1} e^{-t}\right) = 0$

Il existe donc $A > 0$ tel que si $t > A$, alors $t^2 \left(t^{x-1} e^{-t}\right) < 1$, et donc, si $t > A$, alors $\left(t^{x-1} e^{-t}\right) < \dfrac{1}{t^2}$

Comme $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge, il en est de même de $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$

2. *Montrer que* $\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt$ *ne converge que si* $x > 0$

   Au voisinage de 0, $t^{x-1}e^{-t} \underset{0}{\approx} t^{x-1}$ et l'intégrale $\int_0^1 t^{x-1}dt = \int_0^1 \frac{1}{t^{1-x}}e^{-t}dt$ converge si et seulement si $1-x<1$, c'est à dire $x>0$
   Ce que nous voulions

3. *Quel est le domaine de définition de* $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ *?*

   On découpe l'intégrale. Soit donc $c>0$; alors, $\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt = \int_0^c t^{x-1}e^{-t}dt + \int_c^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$
   Nous avons montré que $\int_c^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}$
   Nous avons montré que $\int_0^c t^{x-1}e^{-t}dt$ converge pour tout $x>0$
   Donc, l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ ne converge que pour $x>0$, et le domaine de définition de $\Gamma(x)$ est donc $\mathbb{R}^{*+}$

4. *Démontrer que, pour tout* $x>0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$

   Nous avons $\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t}dt$.
   Nous allons décomposer l'intégrale en 2.
   Soit donc $c>0$, alors $\int_0^{+\infty} t^x e^{-t}dt = \int_0^c t^x e^{-t}dt + \int_c^{+\infty} t^x e^{-t}dt$

   — Calcul de $\int_0^c t^x e^{-t}dt$
   On fait une intégration par parties :

$$\begin{array}{ll} u = t^x & u' = xt^{x-1} \\ v' = e^{-t} & v = -e^{-t} \end{array}$$

   D'où $\int_0^c t^x e^{-t}dt = \left[-t^x e^{-t}\right]_0^c + x\int_0^c t^{x-1}e^{-t}dt$
   Or, $t^x e^{-t} = e^{x\ln t}e^{-t}$ et $\lim\limits_{t\to 0} e^{x\ln t} = 0$; donc $\left[-t^x e^{-t}\right]_0^c = -c^x e^{-c}$, et nous en déduisons :

$$\int_0^c t^x e^{-t}dt = -c^x e^{-c} + x\int_0^c t^{x-1}e^{-t}dt$$

   — Calcul de $\int_c^{+\infty} t^x e^{-t}dt$
   Nous faisons toujours une intégration par parties :

$$\begin{array}{ll} u = t^x & u' = xt^{x-1} \\ v' = e^{-t} & v = -e^{-t} \end{array}$$

   D'où $\int_c^{+\infty} t^x e^{-t}dt = \left[-t^x e^{-t}\right]_c^{+\infty} + x\int_c^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$
   Or, $\lim\limits_{t\to+\infty} t^x e^{-t} = 0$; donc $\left[-t^x e^{-t}\right]_c^{+\infty} = c^x e^{-c}$, et nous en déduisons :

$$\int_c^{+\infty} t^x e^{-t}dt = c^x e^{-c} + x\int_c^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$$

   D'où $\Gamma(x+1) = -c^x e^{-c} + x\int_0^c t^{x-1}e^{-t}dt + c^x e^{-c} + x\int_c^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt = x\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$
   Nous avons bien $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$

5. *Calculer* $\Gamma(1)$

   De manière évidente, $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = \left[-e^{-t}\right]_0^{+\infty} = 1$

   En déduire $\Gamma(n)$ *pour* $n \in \mathbb{N}^*$

   En utilisant la relation $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, et le fait que $\Gamma(1) = 1$, pour $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons :

$$\begin{aligned}
\Gamma(n) &= (n-1)\,\Gamma(n-1)\\
\Gamma(n-1) &= (n-2)\,\Gamma(n-2)\\
\Gamma(n-2) &= (n-3)\,\Gamma(n-3)\\
&\vdots\\
\Gamma(3) &= 2\Gamma(2)\\
\Gamma(2) &= \Gamma(1)
\end{aligned}$$

   Et en faisant le produit télescopique, qui arrive à des simplifications termes à termes, nous obtenons ;

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

6. *Calculer* $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$

   Nous avons $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} t^{\frac{-1}{2}} e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$

   On effectue le changement de variable $u = \sqrt{t}$ alors $\frac{du}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{t}} \Longleftrightarrow dt = 2udu$

   Alors :

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u^2}}{u} 2u\, du = 2\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\, du = \sqrt{\pi}$$

   Nous avons donc $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

7. *Démontrer, par récurrence que, pour* $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}\,(2n)!}{2^{2n} n!}$

   Nous allons donc démontrer, par récurrence, que pour $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}\,(2n)!}{2^{2n} n!}$

   * **Vérifions pour** $n = 0$

     Pour $n = 0$, $\Gamma\left(0+\frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

     $\frac{\sqrt{\pi}\,(2\times 0)!}{2^{2\times 0} 0!} = \frac{\sqrt{\pi}\,(1)}{1\times 1} = \sqrt{\pi}$ puisque $0! = 1$. La proposition est donc vraie pour $n = 0$
   * **Supposons qu'au rang** n**, nous ayions :** $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}\,(2n)!}{2^{2n} n!}$
   * **Démontrons la propriété à l'ordre** $n+1$

     $\Gamma\left(n+1+\frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(n+\frac{1}{2}+1\right) = \left(n+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)$. Donc :

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(n+1+\frac{1}{2}\right) &= \Gamma\left(n+\frac{1}{2}+1\right) = \left(n+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\\
&= \frac{2n+1}{2} \times \frac{\sqrt{\pi}\,(2n)!}{2^{2n} n!}\\
&= \frac{(2n+1)(2n+2)}{2(2n+2)} \times \frac{\sqrt{\pi}\,(2n)!}{2^{2n} n!}\\
&= \frac{(2(n+1))!\sqrt{\pi}}{2^2(n+1)\times 2^{2n} n!}\\
&= \frac{(2(n+1))!\sqrt{\pi}}{2^{2(n+1)}(n+1)!}
\end{aligned}$$

     La propriété est donc vraie à l'ordre $n+1$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}\,(2n)!}{2^{2n}n!}$

Exercice 21 :

1. *Démontrer que si p et q sont 2 nombres conjugués, alors, pour tout $a \in \mathbb{R}^+$ et tout $b \in \mathbb{R}^+$, $ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$*

   Dans le cours de L_1 sur les fonctions convexes, nous avons démontré que la fonction $-\ln x$ était convexe, c'est à dire que pour tout $x > 0$, tout $y > 0$ et tout $\lambda \in [0;+1]$:

$$-\ln\left(\lambda x + (1-\lambda)\,y\right) \leqslant -\lambda \ln x - (1-\lambda)\ln y \Longleftrightarrow \ln\left(\lambda x + (1-\lambda)\,y\right) \geqslant \lambda \ln x + (1-\lambda)\ln y$$

   En prenant $\lambda = \frac{1}{p}$ et en remarquant que $1-\lambda = \frac{1}{q}$, nous avons :

$$\ln\left(\frac{x}{p}+\frac{y}{q}\right) \geqslant \frac{\ln x}{p} + \frac{\ln y}{q} \Longleftrightarrow \ln\left(\frac{x}{p}+\frac{y}{q}\right) \geqslant \ln\left(x^{\frac{1}{p}}y^{\frac{1}{q}}\right)$$

   De là, nous déduisons $x^{\frac{1}{p}}y^{\frac{1}{q}} \leqslant \frac{x}{p}+\frac{y}{q}$.
   En choisissant, maintenant, $x = a^p$ et $y = b^q$ avec $a > 0$ et $b > 0$, nous avons :

$$\left(a^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(b^q\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q} \Longleftrightarrow ab \leqslant \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}$$

   Remarquons que l'inégalité $ab \leqslant \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}$ est aussi vraie lorsque $a = 0$ ou $b = 0$

   Ce que nous voulions

2. *Soient $p \in \mathbb{R}$ et $q \in \mathbb{R}$ 2 nombres réels conjugués*

   (a) *Soient $[a;b] \subset \mathbb{R}$ un segment inclus dans $\mathbb{R}$, f et g 2 fonctions continues et positives sur $[a;b]$. Démontrer que :*

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \left(\int_a^b (f(x))^p\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \times \left(\int_a^b (g(x))^q\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}$$

   La démonstration de cette inégalité est très subtile.

   - ▷ f et g étant continues et positives sur l'intervalle $[a;b]$, bien sûr que $(f(x))^p$ et $(g(x))^q$ le sont aussi.
     Les intégrales $\left(\int_a^b (f(x))^p\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}$ et $\left(\int_a^b (g(x))^q\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}$ existent bien
   - ▷ Nous appelons $f_1 = \frac{f}{\left(\int_a^b (f(x))^p\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}}$ et $g_1 = \frac{g}{\left(\int_a^b (g(x))^q\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}}$.
     D'après la question 1, nous avons $f_1 \times g_1 \leqslant \frac{f_1^p}{p} + \frac{g_1^q}{q}$ et c'est cette inégalité qui nous sera très utile.
   - ▷ Nous avons $\frac{f_1^p}{p} = \frac{1}{p} \times \frac{1}{\int_a^b (f(x))^p\,\mathrm{d}x} \times (f(x))^p$ et donc

$$\int_a^b \frac{(f_1(x))^p}{p}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{p} \times \frac{1}{\int_a^b (f(x))^p\,\mathrm{d}x} \times \int_a^b (f(x))^p\,\mathrm{d}x = \frac{1}{p}$$

- ▷ Nous démontrerions de même que $\displaystyle\int_a^b \frac{(g_1(x))^q}{q}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{q}$
- ▷ De telle sorte que :

$$\int_a^b \left(\frac{(f_1(x))^p}{p} + \frac{(g_1(x))^q}{q}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

- ▷ Nous avons donc $\displaystyle\int_a^b f_1(x) \times g_1(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 1$. Il nous faut calculer $\displaystyle\int_a^b f_1(x) \times g_1(x)\,\mathrm{d}x$

$$\begin{aligned}\int_a^b f_1(x) \times g_1(x)\,\mathrm{d}x &= \int_a^b \frac{f(x)}{\left(\int_a^b (f(x))^p\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}} \times \frac{g(x)}{\left(\int_a^b (g(x))^q\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\left(\int_a^b (f(x))^p\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}} \times \frac{1}{\left(\int_a^b (g(x))^q\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}} \int_a^b f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

De $\displaystyle\int_a^b f_1(x) \times g_1(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 1$, nous déduisons

$$\frac{1}{\left(\int_a^b (f(x))^p\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}} \times \frac{1}{\left(\int_a^b (g(x))^q\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}} \int_a^b f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 1$$

C'est à dire

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \left(\int_a^b (f(x))^p\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \times \left(\int_a^b (g(x))^q\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}$$

Ce que nous voulions.

(b) *On suppose maintenant que f et g sont 2 fonctions continues et positives sur $\mathbb{R}^+$ et que $\displaystyle\int_0^{+\infty} (f(x))^p\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} (g(x))^q\,\mathrm{d}x$ existent. Démontrer que nous avons :*

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \left(\int_0^{+\infty} (f(x))^p\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \times \left(\int_0^{+\infty} (g(x))^q\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}$$

Nous allons avoir la même démarche que dans la question précédente.

Soient donc f et g 2 fonctions continues et positives sur $\mathbb{R}^+$ telles que $\displaystyle\int_0^{+\infty} (f(x))^p\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} (g(x))^q\,\mathrm{d}x$ existent

- ▷ Nous allons démontrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x$ existe.

  Nous avons, d'après la question 1 $fg \leqslant \dfrac{f^p}{p} + \dfrac{g^q}{q}$

  Comme $\displaystyle\int_0^{+\infty} (f(x))^p\,\mathrm{d}x$ existe, il en est de même de $\displaystyle\frac{1}{p}\int_0^{+\infty} (f(x))^p\,\mathrm{d}x$.

  De même $\displaystyle\frac{1}{q}\int_0^{+\infty} (g(x))^q\,\mathrm{d}x$ existe.

  Par la majoration $fg \leqslant \dfrac{f^p}{p} + \dfrac{g^q}{q}$, nous déduisons que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x$ existe.

▷ Nous posons, une nouvelle fois $f_1 = \dfrac{f}{\left(\displaystyle\int_0^{+\infty} (f(x))^p \, \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}}$, et nous démontrons simplement, comme tout à l'heure que

$$\int_0^{+\infty} \frac{(f_1(x))^p}{p} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{p} \times \frac{1}{\displaystyle\int_0^{+\infty} (f(x))^p \, \mathrm{d}x} \times \int_0^{+\infty} (f(x))^p \, \mathrm{d}x = \frac{1}{p}$$

▷ Si nous posons aussi $g_1 = \dfrac{g}{\left(\displaystyle\int_0^{+\infty} (g(x))^q \, \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}}$, nous démontrons que

$$\int_0^{+\infty} \frac{(g_1(x))^q}{q} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{q}$$

▷ Et nous avons, comme tout à l'heure $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_1(x) \times g_1(x) \, \mathrm{d}x \leqslant 1$ et de cette inégalité nous tirons

$$\int_0^{+\infty} f(x)\, g(x) \, \mathrm{d}x \leqslant \left(\int_0^{+\infty} (f(x))^p \, \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \times \left(\int_0^{+\infty} (g(x))^q \, \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}$$

Pour aller plus loin

⇒ L'inégalité démontrée dans cette question est l'inégalité de Hölder

⇒ Pour $p \geqslant 1$, nous notons [4] :

$$\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+) = \left\{ f \in \mathrm{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+) \text{ telles que } \int_0^{+\infty} (f(x))^p \, \mathrm{d}x < +\infty \right\}$$

Nous pouvons démontrer que $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel .

⇒ Pour $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$, nous notons $\|f\|_p = \left(\displaystyle\int_0^{+\infty} (f(x))^p \, \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}$

On démontre que $\|\bullet\|_p$ est une norme sur $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$

⇒ L'inégalité de Hölder s'écrit alors pour p et q réels conjugués, $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ et $g \in \mathcal{L}^q(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$:

$$\|f \times g\|_1 \leqslant \|f\|_p \times \|g\|_q$$

3. *Soit $f \in \mathrm{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$.*
Nous appelons F la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\begin{cases} F : \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \quad x & \longmapsto & F(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} \displaystyle\int_0^x f(t) \, \mathrm{d}t \text{ si } x > 0 \\ f(0) \text{ si } x = 0 \end{cases} \end{cases}$$

(a) *Démontrer que F est continue*

▷ pour $x \in \mathbb{R}^+$, nous appelons $u(x) = \displaystyle\int_0^x f(t) \, \mathrm{d}t$; nous avons alors $F(x) = \dfrac{u(x)}{x}$ si $x > 0$

Alors, f étant continue sur $\mathbb{R}^+$, u est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et de dérivée $u'(x) = f(x)$.
u est en particulier dérivable en $x_0 = 0$ et de dérivée $u'(0) = f(0)$.
En fait, u est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$

4. Ce n'est pas une notation habituelle ; elle juste valable pour cette question

▷ u étant dérivable en 0, nous avons $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \dfrac{u(x)-u(0)}{x} = u'(0)$.

Comme $u(0) = \displaystyle\int_0^0 f(t)\,\mathrm{d}t = 0$, nous avons

$$\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} \frac{u(x)-u(0)}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} \frac{u(x)}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} F(x) = u'(0) = f(0)$$

F est donc une fonction continue sur $\mathbb{R}^+$; elle est même de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$.

(b) *Démontrer que* $\left(\displaystyle\int_0^{+\infty} (F(x))^p\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \dfrac{p}{p-1}\left(\displaystyle\int_0^{+\infty} (f(x))^p\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}$

⟶ Soit $A>0$ et étudions $\displaystyle\int_0^A (F(x))^p\,\mathrm{d}x$

Nous avons $\displaystyle\int_0^A (F(x))^p\,\mathrm{d}x = \int_0^A \left(\frac{u(x)}{x}\right)^p \mathrm{d}x = \int_0^A \frac{(u(x))^p}{x^p}\,\mathrm{d}x$
Faisons une intégration par parties :

$$\left[\begin{array}{ll} u = (u(x))^p & u' = p(u(x))^{p-1}u'(x) = p(u(x))^{p-1}f(x) \\ v' = x^{-p} & v = \dfrac{x^{-p+1}}{-p+1} = \dfrac{1}{(1-p)x^{p-1}} \end{array}\right]$$

D'où :

$$\begin{aligned}\int_0^A (F(x))^p\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{(u(x))^p}{(1-p)x^{p-1}}\right]_0^A - \frac{p}{1-p}\int_0^A f(x)\left(\frac{u(x)}{x}\right)^{p-1}\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{(u(x))^p}{(1-p)x^{p-1}}\right]_0^A + \frac{p}{p-1}\int_0^A f(x)(F(x))^{p-1}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

⟶ En fait, l'expression $\left[\dfrac{(u(x))^p}{(1-p)x^{p-1}}\right]_0^A$ pose un problème en 0. Telle qu'elle est écrite, elle n'est pas rigoureuse. Nous l'allons donc étudier rigoureusement.

⋆ Pour commencer, remarquons que $\dfrac{(u(x))^p}{x^{p-1}} = \left(\dfrac{u(x)}{x}\right)^p \times x = (F(x))^p \times x$.

⋆ Ensuite, nous avons :

$$\left[\frac{(u(x))^p}{(1-p)x^{p-1}}\right]_0^A = \frac{1}{1-p}\left[(F(x))^p \times x\right]_0^A = \frac{1}{1-p}\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}}\left[(F(x))^p\times x\right]_\varepsilon^A$$

⋆ Or, $\dfrac{1}{1-p}\left[(F(x))^p\times x\right]_\varepsilon^A = \dfrac{1}{1-p}\left((F(A))^p\times A - (F(\varepsilon))^p\times\varepsilon\right)$
Et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} (F(\varepsilon))^p \times \varepsilon = (f(0))^p \times 0 = 0$

⋆ Nous pouvons donc écrire que :

$$\left[\frac{(u(x))^p}{(1-p)x^{p-1}}\right]_0^A = \frac{1}{1-p}\left[(F(x))^p\times x\right]_0^A = \frac{1}{1-p}(F(A))^p\times A$$

⋆ En conclusion, $\displaystyle\int_0^A (F(x))^p\,\mathrm{d}x = \frac{1}{1-p}(F(A))^p \times A + \frac{p}{p-1}\int_0^A f(x)(F(x))^{p-1}\,\mathrm{d}x$

⟶ Comme $p>1$, $1-p<0$, que pour tout $A>0$,$F(A)\geqslant 0$ et donc $\dfrac{1}{1-p}(F(A))^p\times A<0$ nous avons alors :

$$\int_0^A (F(x))^p\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{p}{p-1}\int_0^A f(x)(F(x))^{p-1}\,\mathrm{d}x$$

$\longrightarrow$ Appliquons l'inégalité de Hölder aux fonctions $f \times F^{p-1}$ sur l'intervalle $[0; A]$:

$$\begin{aligned}\int_0^A f(x)\,(F(x))^{p-1}\,\mathrm{d}x &\leqslant \left(\int_0^A (f(x))^p\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^A \left((F(x))^{p-1}\right)^q\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}\\ &\leqslant \left(\int_0^A (f(x))^p\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^A (F(x))^{q(p-1)}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}\end{aligned}$$

$\longrightarrow$ Comme p et q sont des réels conjugués, nous avons $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1 \Longleftrightarrow q=\dfrac{p}{p-1}$, nous avons :

$$\int_0^A f(x)\,(F(x))^{p-1}\,\mathrm{d}x \leqslant \left(\int_0^A (f(x))^p\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^A (F(x))^p\,\mathrm{d}x\right)^{1-\frac{1}{p}}$$

$\longrightarrow$ En reportant dans les différentes inégalités, nous obtenons :

$$\int_0^A (F(x))^p\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{p}{p-1}\int_0^A f(x)\,(F(x))^{p-1}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{p}{p-1}\times\left(\int_0^A (f(x))^p\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^A (F(x))^p\,\mathrm{d}x\right)^{1-\frac{1}{p}}$$

Et donc, par transitivité :

$$\int_0^A (F(x))^p\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{p}{p-1}\times\left(\int_0^A (f(x))^p\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^A (F(x))^p\,\mathrm{d}x\right)^{1-\frac{1}{p}}$$

En simplifiant :

$$\frac{\displaystyle\int_0^A (F(x))^p\,\mathrm{d}x}{\left(\displaystyle\int_0^A (F(x))^p\,\mathrm{d}x\right)^{1-\frac{1}{p}}} \leqslant \frac{p}{p-1}\times\left(\int_0^A (f(x))^p\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\left(\int_0^A (F(x))^p\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \frac{p}{p-1}\times\left(\int_0^A (f(x))^p\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}$$

Cette inégalité étant vraie pour tout $A>0$

$\longrightarrow$ Comme $\displaystyle\int_0^{+\infty} (f(x))^p\,\mathrm{d}x$ existe, nous avons $\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\int_0^A (F(x))^p\,\mathrm{d}x$ qui existe, et donc nous avons

$$\left(\int_0^{+\infty} (F(x))^p\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \frac{p}{p-1}\left(\int_0^{+\infty} (f(x))^p\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}$$

Ce que nous voulions

Pour aller plus loin

$\Rightarrow$ L'inégalité que nous venons de démontrer est connue sous le nom **d'inégalité de Hardy**

$\Rightarrow$ Au passage, nous venons de démontrer que si $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^+)$, alors $F \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^+)$

$\Rightarrow$ Et en réutilisant la notion de norme dans $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^+)$, nous avons $\|F\|_p \leqslant \dfrac{p}{p-1}\|f\|_p$

$\Rightarrow$ On démontre que la constante $\dfrac{p}{p-1}$ est optimale dans l'inégalité de Hardy

Chapitre 5

Intégrales dépendant d'un paramètre

> UNE INTÉGRALE DÉPENDANT D'UN PARAMÈTRE PEUT PRENDRE DES FORMES BIEN DIVERSES ET NOUS EN AVONS DÉJÀ CONNU !
> PAR EXEMPLE LES INTÉGRALES DU TYPE $\displaystyle\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t$, OÙ LE PARAMÈTRE EST L'ENTIER n ET $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ UNE SUITE DE FONCTIONS DONT LE TYPE DE CONVERGENCE CONDTIONNE L'EXISTENCE OU NON DE LA 'INTÉGRALE DE LA LIMITE.
> COMME AUTRE PARAMÈTRE, NOUS POUVONS UTILISER DES RÉELS. NOUS AVONS ALORS UNE FONCTION $f(t,\lambda)$ À 2 VARIABLES ; LA PREMIÈRE VARIABLE t PRENANT SES VALEURS DANS I ET LA SECONDE λ DANS J ; f ÉTANT À VALEURS DANS $\mathbb{C}$.
> NOUS POUVONS ALORS NOUS INTÉRESSER À LA FONCTION $F(\lambda) = \displaystyle\int_I f(t,\lambda)\,\mathrm{d}t$.
> L'OBJET DE CE CHAPITRE EST DE S'INTÉRESSER À CES INTÉGRALES ET D'EN ÉTUDIER LES PROPRIÉTÉS.

5.1 Théorème de la convergence bornée d'Arzela

Cette section doit beaucoup à l'article de Bernard Brighi paru dans la RMS 129° annee Juillet 2019 N° 4 Page 36 et suivantes

5.1.1 Premier lemme d'approximation

> Soit $\psi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction en escalier sur l'intervalle $[a,b]$, positive. Alors :
> Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^+$, continue et positive sur $[a,b]$ telle que :
> 1. Pour tout $x \in [a,b]$ nous ayions $0 \leqslant g(x) \leqslant \psi(x)$
> 2. Et $\displaystyle\int_a^b \psi(x)\,\mathrm{d}x < \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x + \varepsilon$

Démonstration

Soit donc $\varepsilon > 0$

1. Soit $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_k < a_{k+1} < \cdots < a_n = b$ une subdivision adaptée à ψ et telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}$ tels que $0 \leqslant k \leqslant n$:
   - ⊵ $\psi(a_k)$ soit fini et positif
   - ⊵ Pour tout $x \in]a_k, a_{k+1}[$, $\psi(x) = \lambda_k$ où $\lambda_k \geqslant 0$

   Nous avons, d'après le cours d'intégration vu en L_1, $\displaystyle\int_a^b \psi(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k (a_{k+1} - a_k)$
2. ⊵ Soit $M > 0$ tel que, pour tout $x \in [a,b]$ nous ayions $0 \leqslant \psi(x) \leqslant M$
   - ⊵ Nous notons $2\eta = \min(\{(a_{k+1} - a_k) \text{ où } 0 \leqslant k \leqslant n-1\})$
   - ⊵ On choisit $\alpha \in]0;\eta[$ tel que $0 < \alpha < \dfrac{\varepsilon}{2nM} \Longleftrightarrow 0 < 2nM\alpha < \varepsilon$

3. Soit $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ ainsi définie :
$\Longrightarrow$ Pour $k \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leqslant k \leqslant n$ alors $g(a_k) = 0$
$\Longrightarrow$]Pour $k \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leqslant k \leqslant n-1$, si $x \in [a_k + \alpha; a_{k+1} - \alpha]$ alors $g(x) = \psi(x) = \lambda_k$
$\Longrightarrow$ g est affine sur $[a_k; a_k + \alpha]$ et sur $[a_{k+1} - \alpha; a_{k+1}]$, c'est à dire :
   - ▷ Si $x \in [a_k; a_k + \alpha]$, alors $g(x) = \dfrac{\lambda_k}{\alpha}(x - a_k)$
   - ▷ Si $x \in [a_{k+1} - \alpha; a_{k+1}]$, alors $g(x) = \dfrac{-\lambda_k}{\alpha}(x - a_{k+1})$

   Par construction, g est continue et pour tout $x \in [a, b]$ nous avons $0 \leqslant g(x) \leqslant \psi(x)$. Voir la figure 5.1

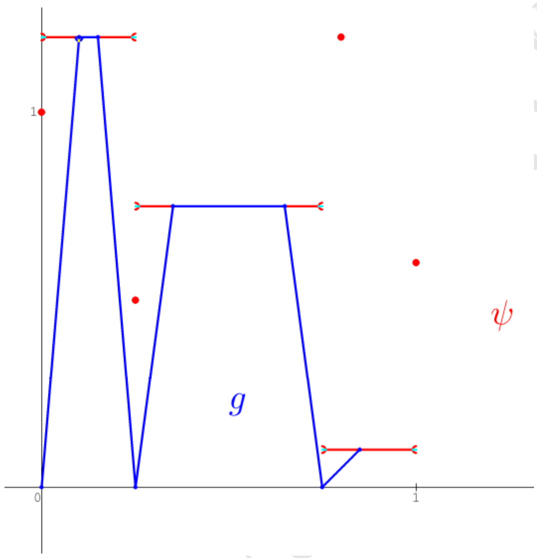

FIGURE 5.1 – Figure expliquant la construction de g (en bleu)-Le logiciel ne nous permet pas de compléter g-

4. Regardons maintenant $\displaystyle\int_a^b (\psi(x) - g(x))\,\mathrm{d}x$.

   Nous avons :

$$\begin{aligned}
\int_a^b (\psi(x) - g(x))\,\mathrm{d}x &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} (\psi(x) - g(x))\,\mathrm{d}x \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\int_{a_k}^{a_k+\alpha} (\psi(x) - g(x))\,\mathrm{d}x + \int_{a_k+\alpha}^{a_{k+1}-\alpha} (\psi(x) - g(x))\,\mathrm{d}x + \cdots \right. \\
&\qquad \left. \cdots \int_{a_{k+1}-\alpha}^{a_{k+1}} (\psi(x) - g(x))\,\mathrm{d}x \right) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\int_{a_k}^{a_k+\alpha} (\psi(x) - g(x))\,\mathrm{d}x + \int_{a_{k+1}-\alpha}^{a_{k+1}} (\psi(x) - g(x))\,\mathrm{d}x \right)
\end{aligned}$$

5. Sur l'intervalle $[a_k; a_k + \alpha]$, nous avons :

$$\psi(x) - g(x) = \lambda_k - \frac{\lambda_k}{\alpha}(x - a_k) = \lambda_k \left(1 - \frac{(x - a_k)}{\alpha}\right)$$

   Comme $x \in [a_k; a_k + \alpha]$, nous avons $0 \leqslant \dfrac{(x - a_k)}{\alpha} \leqslant 1$ et donc $0 \leqslant \left(1 - \dfrac{(x - a_k)}{\alpha}\right) \leqslant 1$, d'où

$$\psi(x) - g(x) = \lambda_k \left(1 - \frac{(x - a_k)}{\alpha}\right) \leqslant \lambda_k$$

D'où, nous obtenons $\displaystyle\int_{a_k}^{a_k+\alpha} (\psi(x) - g(x))\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{a_k}^{a_k+\alpha} \lambda_k\,\mathrm{d}x = \alpha\lambda_k$

6. De même, sur l'intervalle $[a_{k+1} - \alpha; a_{k+1}]$, nous avons :

$$\psi(x) - g(x) = \lambda_k + \frac{\lambda_k}{\alpha}(x - a_{k+1}) = \lambda_k\left(1 + \frac{(x - a_{k+1})}{\alpha}\right) = \lambda_k\left(1 - \frac{(a_{k+1} - x)}{\alpha}\right)$$

Comme tout à l'heure, puisque $x \in [a_{k+1} - \alpha; a_{k+1}]$, nous avons $0 \leqslant \left(1 - \dfrac{(a_{k+1} - x)}{\alpha}\right) \leqslant 1$ et donc

$$\psi(x) - g(x) \leqslant \lambda_k$$

D'où nous obtenons $\displaystyle\int_{a_{k+1}-\alpha}^{a_{k+1}} (\psi(x) - g(x))\,\mathrm{d}x \leqslant \alpha\lambda_k$

7. En synthèse,n ous pouvons écrire

$$\int_{a_k}^{a_k+\alpha} (\psi(x) - g(x))\,\mathrm{d}x + \int_{a_{k+1}-\alpha}^{a_{k+1}} (\psi(x) - g(x))\,\mathrm{d}x \leqslant 2\alpha\lambda_k \leqslant 2\alpha M$$

Et donc :

$$\int_a^b (\psi(x) - g(x))\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} 2\alpha M = 2n\alpha M < \varepsilon$$

De $\displaystyle\int_a^b (\psi(x) - g(x))\,\mathrm{d}x < \varepsilon$, nous déduisons $\displaystyle\int_a^b \psi(x)\,\mathrm{d}x < \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x + \varepsilon$

Ce que nous voulions

5.1.2 Second lemme d'approximation

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction bornée sur $[a;b]$ et positive sur $[a;b]$.
On appelle $\mathcal{E}_\star(f)$, l'ensemble des fonctions en escaliers sur $[a;b]$ qui minorent f. Alors :
Pour tout $\gamma > 0$, il existe une fonction $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^+$, continue, telle que :

1. Pour tout $x \in [a,b]$, $0 \leqslant g(x) \leqslant f(x)$
2. Et $\displaystyle\sup_{\psi\in\mathcal{E}_\star(f)} \int_a^b \psi(x)\,\mathrm{d}x < \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x + \gamma$

Démonstration

Soit $\gamma > 0$

Pour nous simplfier la vie, nous posons $\displaystyle I_\star(f) = \sup_{\psi\in\mathcal{E}_\star(f)} \int_a^b \psi(x)\,\mathrm{d}x$

1. Nous posons $\varepsilon = \dfrac{\gamma}{2}$
   Par définition de $I_\star(f)$, il existe $\psi_0 \in \mathcal{E}_\star(f)$, fonction en escalier, telle que :

$$I_\star(f) - \varepsilon \leqslant \int_a^b \psi_0(x)\,\mathrm{d}x \leqslant I_\star(f)$$

2. Comme $f \geqslant 0$, quitte à remplacer ψ_0 par $\max\{\psi_0, 0\}$, nous pouvons supposer $\psi_0 \geqslant 0$
3. D'après le lemme 5.1.1, il existe $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^+$, continue et positive sur $[a,b]$ telle que
   → Pour tout $x \in [a,b]$, $0 \leqslant g(x) \leqslant \psi_0(x)$
   → Et $\displaystyle\int_a^b \psi_0(x)\,\mathrm{d}x < \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x + \varepsilon$

4. Donc, dans un premier temps,

$$I_\star(f) - \varepsilon \leqslant \int_a^b \psi_0(x)\,\mathrm{d}x < \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x + \varepsilon \iff I_\star(f) < \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x + 2\varepsilon$$
$$\iff I_\star(f) < \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x + \gamma$$

C'est à dire $\sup_{\psi \in \mathcal{E}_\star(f)} \int_a^b \psi(x)\,\mathrm{d}x < \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x + \gamma$

5. Et, dans un second temps, comme $\psi_0(x) \leqslant f(x)$, de $0 \leqslant g(x) \leqslant \psi_0(x)$, nous déduisons

$$0 \leqslant g(x) \leqslant f(x)$$

Ce que nous voulions

Remarque 1 :

1. Rappelons le théorème de Dini :

   Théorème de Dini :
   Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$
   Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur $[a;b]$.
   On suppose que :
   - ▷ La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, c'est à dire que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

     $$f_n \leqslant f_{n+1} \iff (\forall x \in [a;b])\,(f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x))$$

   - ▷ La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction f, laquelle est continue sur $[a;b]$

   Alors, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f

2. Il résulte du théorème de Dini que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \iff \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$$

3. Pour obtenir cette dernière égalité, nous aimerions éviter de parler de convergence uniforme et nous affranchir du théorème de Dini

5.1.3 Lemme de convergence monotone

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite monotone de fonctions continues définies sur un intervalle $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et qui converge simplement, sur l'intervalle $[a,b]$ vers une fonction f

Alors, si f est continue, nous avons $\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

Démonstration

1. Remarques préliminaires
   (a) La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite monotone, nous allons la supposer décroissante, c'est à dire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \geqslant f_{n+1}$, autrement dit, pour tout $x \in [a,b]$, nous avons $f_n(x) \geqslant f_{n+1}(x)$
   (b) La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant simplement vers f, pour tout $x \in [a,b]$, nous avons $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$, et de la décroissance de la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$, nous avons, pour tout $x \in [a,b]$, $f_n(x) \geqslant f(x)$ et nous avons donc $f_n - f \geqslant 0$
   (c) Quitte à remplacer la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la suite $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $\psi_n = f_n - f$, nous allons supposer la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante et tendant vers 0

2. Nous supposerons donc la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante et de limite 0
3. Soit $[c,d] \subset [a,b]$ un intervalle inclus dans $[a,b]$
   (a) Nous considérons $I_n(c,d) = \displaystyle\int_c^d f_n(x)\ \mathrm{d}x$.
   De la décroissance de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, nous déduisons la décroissance de la suite $(I_n(c,d))_{n\in\mathbb{N}}$, puisque :
   $$I_{n+1}(c,d) = \int_c^d f_{n+1}(x)\ \mathrm{d}x \leqslant \int_c^d f_n(x)\ \mathrm{d}x = I_n(c,d)$$
   (b) De plus, comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \geqslant 0$, nous avons $I_n(c,d) \geqslant 0$
   (c) La suite $(I_n(c,d))_{n\in\mathbb{N}}$ étant décroissante et minorée est donc convergente.
   Soit $I(c,d) = \lim\limits_{n\to+\infty} I_n(c,d)$
4. Pour tout $\lambda \in [c,d]$, nous avons $I(c,d) = I(c,\lambda) + I(\lambda,d)$
   La démonstration n'est pas très difficile ; par la relation de Chasles, nous avons :
   $$\int_c^d f_n(x)\ \mathrm{d}x = \int_c^\lambda f_n(x)\ \mathrm{d}x + \int_\lambda^d f_n(x)\ \mathrm{d}x \Longleftrightarrow I_n(c,d) = I_n(c,\lambda) + I_n(\lambda,d)$$
   Et nous concluons par passage à la limite
5. L'identité $I(c,d) = I(c,\lambda) + I(\lambda,d)$ est aussi vraie si $\lambda = \dfrac{c+d}{2}$, c'est à dire si $\lambda = m$ est le milieu du segment $[c,d]$. Nous avons alors $I(c,d) = I(c,m) + I(m,d)$, si bien que l'un au moins des 2 nombres $I(c,m)$ ou $I(m,d)$ est supérieur à $\dfrac{1}{2}I(c,d)$
6. On construit alors 2 suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :
   (a) $a_0 = a$ et $b_0 = b$
   (b) Si $I\left(a, \dfrac{a+b}{2}\right) \geqslant \dfrac{1}{2}I(a,b)$, alors $a_1 = a$ et $b_1 = \dfrac{a+b}{2}$, sinon, $a_1 = \dfrac{a+b}{2}$ et $b_1 = b$
   (c) Nous avons alors $a_0 \leqslant a_1 \leqslant b_1 \leqslant b$ avec $b_1 - a_1 = \dfrac{1}{2}(b-a)$ et $I(a_1,b_1) \geqslant \dfrac{1}{2}I(a,b)$
   C'est une construction de suite « à la dichotomie »
   En poursuivant, nous construisons 2 suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, adjacentes, telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $b_n - a_n = \dfrac{1}{2^n}(b-a)$ et $I(a_n,b_n) \geqslant \dfrac{1}{2^n}I(a,b)$
7. Les 2 suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant adjacentes, elles admettent une limite commune $x^* \in [a;b]$, et nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x^*) = 0$
8. Soit $\varepsilon > 0$
   Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x^*) = 0$, il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $n \geqslant N_\varepsilon$ alors $|f_n(x^*)| < \varepsilon$.
   En fait, comme $f_n > 0$, nous avons, si $n \geqslant N_\varepsilon$ alors $f_n(x^*) < \varepsilon$
9. f_n étant une fonction continue sur l'intervalle $[a,b]$, l'est, en particulier en $x^* \in [a,b]$; il existe donc $\eta > 0$ tel que si $|x - x^*| < \eta$, alors $|f_n(x) - f_n(x^*)| < \varepsilon$
   Donc, pour $x \in [a,b]$ tel que $|x - x^*| < \eta$:
   $$f_n(x) = |f_n(x)| = |f_n(x) - f_n(x^*) + f_n(x^*)| \leqslant |f_n(x) - f_n(x^*)| + |f_n(x^*)| \leqslant 2\varepsilon$$
10. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = x^*$, il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que si $k \geqslant k_0$, alors :
    $$x^* - \eta \leqslant a_k \leqslant b_k \leqslant x^* + \eta$$
    Et donc :
    $$\frac{1}{2^k}I(a,b) \leqslant I(a_k,b_k) \leqslant I_n(a_k,b_k) = \int_{a_k}^{b_k} f_n(x)\ \mathrm{d}x \leqslant 2\varepsilon(b_k - a_k) = 2\varepsilon \times \frac{1}{2^k}(b-a)$$

11. En conclusion, nous avons $\frac{1}{2^k} I(a,b) \leqslant 2\varepsilon \times \frac{1}{2^k}(b-a) \Longleftrightarrow I(a,b) \leqslant 2\varepsilon (b-a)$
    Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, nous avons donc $I(a,b) = 0$
12. Nous avons donc $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n(a,b) = I(a,b) = 0$, c'est à dire $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x = 0 = \int_a^b 0\,\mathrm{d}x$.
    Ce que nous voulions.
13. Si, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite monotone décroissante de fonctions continues convergeant simplement sur l'intervalle $[a,b]$ vers une fonction f, en posant $\psi_n = f_n - f$, la suite $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de fonctions continues qui converge vers la fonction nulle.
    Donc
$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b \psi_n(x)\,\mathrm{d}x = 0$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\lim_{n\to+\infty} \left(\int_a^b f_n(x) - f(x)\,\mathrm{d}x\right) = 0$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$
14. Si, cette fois-ci, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite monotone décroissante de fonctions continues convergeant simplement sur l'intervalle $[a,b]$ vers une fonction f, en posant $\varphi_n = -f_n$, la suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de fonctions continues et nous concluons comme ci-dessus.

Remarque 2 :

Le lemme 5.1.3 est un théorème de convergence monotone, pour les fonctions continues. Un théorème de convergence monotone pour les fonctions intégrables est donné ci-après par le théorème 5.1.4

5.1.4 Théorème de convergence monotone

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite monotone de fonctions définies et intégrables sur un intervalle $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et qui converge simplement, sur l'intervalle $[a,b]$ vers une fonction f

Alors, si f est intégrable sur $[a,b]$, nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

Démonstration

Comme dans le lemme 5.1.3 précédent, nous supposons la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante et convergeant simplement vers la fonction nulle.
Ainsi, pour tout $x \in [a,b]$, nous avons $f_n(x) \geqslant f_{n+1}(x) \geqslant 0$.
On peut donc aussi supposer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.
Soit, maintenant, $\varepsilon > 0$

1. Comme dans le lemme 5.1.2, nous appelons $\mathcal{E}_\star(f_n)$, l'ensemble des fonctions en escaliers sur $[a;b]$ qui minorent f_n et $\mathcal{E}^\star(f_n)$, l'ensemble des fonctions en escaliers sur $[a;b]$ qui majorent f_n.
   Comme pour chaque $n \in \mathbb{N}$, f_n est intégrable, f_n est bornée, et nous avons :
$$\sup_{\psi\in\mathcal{E}_\star(f_n)} \int_a^b \psi(x)\,\mathrm{d}x = \inf_{\psi\in\mathcal{E}^\star(f_n)} \int_a^b \psi(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x \tag{5.1}$$
   D'après le lemme 5.1.2, pour tout $\gamma > 0$, il existe une application $g_n : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ tel que
   - ▷ $0 \leqslant g_n \leqslant f_n$
   - ▷ Et $\sup\limits_{\psi\in\mathcal{E}_\star(f_n)} \int_a^b \psi(x)\,\mathrm{d}x < \int_a^b g_n(x)\,\mathrm{d}x + \gamma$

   En utilisant 5.1 et en posant $\gamma = \frac{\varepsilon}{2^n}$, il existe donc une application $g_n : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ tel que

- ▷ $0 \leqslant g_n \leqslant f_n$
- ▷ Et $\displaystyle\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x < \int_a^b g_n(x)\,\mathrm{d}x + \frac{\varepsilon}{2^n}$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$

   Nous posons, maintenant, $h_n = \min\{g_0, g_1, \cdots, g_n\}$, ce qui veut dire que, pour tout $x \in [a;b]$ et tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leqslant k \leqslant n$, nous avons $h_n(x) \leqslant g_n(x)$
   - ▷ Par construction, h_n est continue et positive sur l'intervalle $[a;b]$
   - ▷ Tout autant par construction, la suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, puisque :

   $$h_{n+1} = \min\{g_0, g_1, \cdots, g_n, g_{n+1}\} \leqslant \min\{g_0, g_1, \cdots, g_n\} = h_n$$

   - ▷ La suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle, puisque

   $$0 \leqslant h_n(x) \leqslant g_n(x) \leqslant f_n(x)$$

   La suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de fonctions continues, convergeant simplement vers la fonction nulle, et donc, d'après le lemme 5.1.3 de convergence monotone des fonctions continues,

   $$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b h_n(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

3. Pour tout $x \in [a;b]$, il existe un entier $n_0(x)$, dépendant de x tel que $0 \leqslant n_0(x) \leqslant n$ et $h_n(x) = g_{n_0(x)}(x)$. Alors :

   $$0 \leqslant f_n(x) - h_n(x) \leqslant f_n(x) - g_{n_0(x)}(x) \leqslant f_{n_0(x)}(x) - g_{n_0(x)}(x)$$

   puisque la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant une suite décroissante, $f_{n_0(x)}(x) \geqslant f_n(x)$

   Comme nous avons $f_{n_0(x)}(x) - g_{n_0(x)}(x) \leqslant \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f_k(x) - g_k(x)$, nous avons :

   $$0 \leqslant f_n(x) - h_n(x) \leqslant \sum_{k=0}^{n} f_k(x) - g_k(x)$$

   C'est à dire qu'en termes de fonctions, $0 \leqslant f_n - h_n \leqslant \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f_k - g_k$

4. Nous avons alors, en termes d'intégrales :

   $$0 \leqslant \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b h_n(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=0}^{n} \int_a^b (f_k(x) - g_k(x))\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{\varepsilon}{2^k} < 2\varepsilon$$

   puisque $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = 2\varepsilon\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)$

5. Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_a^b h_n(x)\,\mathrm{d}x = 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N$, alors $0 \leqslant \displaystyle\int_a^b h_n(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \varepsilon$

   Ainsi, pour $n \geqslant N$:

   $$0 \leqslant \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b h_n(x)\,\mathrm{d}x + 2\varepsilon < 3\varepsilon$$

6. Nous pouvons donc conclure que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x = 0$

Ce que nous voulions

5.1.5 Lemme de Hausdorff et Luxemburg

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de fonctions bornées sur un intervalle $[a;b]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$
On appelle $\mathcal{E}_\star(f)$, l'ensemble des fonctions en escaliers sur $[a;b]$ qui minorent f.
Si, pour tout $x\in[a;b]$ nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)=0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sup\limits_{\psi\in\mathcal{E}_\star(f)}\int_a^b \psi(x)\,\mathrm{d}x\right)=0$

Démonstration

Comme dans le lemme 5.1.2, pour nous simplfier la vie, nous posons $I_\star(f_n)=\sup\limits_{\psi\in\mathcal{E}_\star(f_n)}\int_a^b\psi(x)\,\mathrm{d}x$. Il nous faudra donc démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_\star(f_n)=0$
La démonstration que nous proposons ici, est celle de Luxemburg

1. D'après le second lemme d'approximation 5.1.2, pour tout $n\in\mathbb{N}$, il existe une fonction continue $g_n:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ telle que :
   - ▷ Pour tout $x\in[a,b]$, $0\leqslant g_n(x)\leqslant f_n(x)$
   - ▷ Et $I_\star(f_n)<\displaystyle\int_a^b g_n(x)\,\mathrm{d}x+\frac{\varepsilon}{2^n}$
2. Pour $n\in\mathbb{N}$, nous posons $h_n=\min\{g_0,g_1,\cdots,g_n\}$.
   Dans le théorème de convergence monotone 5.1.4, nous avons démontré que
   $$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b h_n(x)\,\mathrm{d}x=0$$
3. Toujours pour $n\in\mathbb{N}$ et $k\in\{0,1,\ldots,n\}$, nous avons $g_n\leqslant\max\{g_k,g_{k+1},\cdots,g_n\}$ et donc
   $$g_n-g_k\leqslant\max\{g_k,g_{k+1},\cdots,g_n\}-g_k$$
   D'où :
   $$0\leqslant g_n=g_k+(g_n-g_k)\leqslant g_k+(\max\{g_k,g_{k+1},\cdots,g_n\}-g_k)$$
   Bien entendu, $(\max\{g_k,g_{k+1},\cdots,g_n\}-g_k)\leqslant\sum\limits_{k=0}^{n-1}(\max\{g_k,g_{k+1},\cdots,g_n\}-g_k)$ [1]
   Par conséquent, pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $k\in\{0,1,\ldots,n\}$:
   $$0\leqslant g_n=g_k+(g_n-g_k)\leqslant g_k+(\max\{g_k,g_{k+1},\cdots,g_n\}-g_k)\leqslant g_k+\sum_{k=0}^{n-1}(\max\{g_k,g_{k+1},\cdots,g_n\}-g_k)$$
   Et donc :
   $$0\leqslant g_n\leqslant h_n+\sum_{k=0}^{n-1}(\max\{g_k,g_{k+1},\cdots,g_n\}-g_k)$$
4. Soit $n\in\mathbb{N}$ et $k\in\{0,1,\ldots,n\}$.
   De la décroissance de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, nous avons $f_k=\max\{f_k,f_{k+1},\cdots,f_n\}$, et comme pour tout $n\in\mathbb{N}$, nous avons $f_n\geqslant g_n$, nous avons $\max\{f_k,f_{k+1},\cdots,f_n\}\geqslant\max\{g_k,g_{k+1},\cdots,g_n\}$, c'est à dire $f_k\geqslant\max\{g_k,g_{k+1},\cdots,g_n\}$
5. En écrivant $\max\{g_k,g_{k+1},\cdots,g_n\}=\max\{g_k,g_{k+1},\cdots,g_n\}-g_k+g_k$, nous avons donc
   $$\max\{g_k,g_{k+1},\cdots,g_n\}-g_k+g_k\leqslant f_k$$
   et
   $$\int_a^b(\max\{g_k(t),g_{k+1}(t),\cdots,g_n(t)\}-g_k(t))\,\mathrm{d}t+\int_a^b g_k(t)\,\mathrm{d}t\leqslant I_\star(f_k)$$

1. Nous nous arrêtons à $k=n-1$ puisque, si $k=n$, alors $\max\{g_n,g_n\}-g_n=0$; l'indice $k=n$ n'apporte donc rien

Et donc :

$$\int_a^b \left(\max\left\{g_k(t), g_{k+1}(t), \cdots, g_n(t)\right\} - g_k(t)\right) \mathrm{d}t \leqslant I_\star(f_k) - \int_a^b g_k(t)\,\mathrm{d}t < \frac{\varepsilon}{2^k}$$

C'est à dire $\displaystyle\int_a^b \left(\max\left\{g_k(t), g_{k+1}(t), \cdots, g_n(t)\right\} - g_k(t)\right) \mathrm{d}t \leqslant \frac{\varepsilon}{2^k}$

6. Il vient, finalement :

$$\begin{aligned}
0 \leqslant I_\star(f_n) < \; & \int_a^b g_n(x)\,\mathrm{d}x + \frac{\varepsilon}{2^n} \leqslant \int_a^b \left(h_n(x) + \sum_{k=0}^{n-1}\left(\max\left\{g_k(x), g_{k+1}(x), \cdots, g_n(x)\right\} - g_k(x)\right)\right) \mathrm{d}x + \frac{\varepsilon}{2^n} \\
\leqslant \; & \int_a^b h_n(x)\,\mathrm{d}x + \sum_{k=0}^{n-1}\int_a^b \left(\max\left\{g_k(x), g_{k+1}(x), \cdots, g_n(x)\right\} - g_k(x)\right) \mathrm{d}x + \frac{\varepsilon}{2^n} \\
\leqslant \; & \int_a^b h_n(x)\,\mathrm{d}x + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\varepsilon}{2^k} + \frac{\varepsilon}{2^n} = \int_a^b h_n(x)\,\mathrm{d}x + \sum_{k=0}^{n}\frac{\varepsilon}{2^k} \\
\leqslant \; & \int_a^b h_n(x)\,\mathrm{d}x + 2\varepsilon
\end{aligned}$$

Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_a^b h_n(x)\,\mathrm{d}x = 0$, il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N_0$, alors $0 \leqslant \displaystyle\int_a^b h_n(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \varepsilon$.

Ainsi, il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N_0$, alors $0 \leqslant I_\star(f_n) \leqslant 3\varepsilon$

Ce qui montre que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\sup_{\psi\in\mathcal{E}_\star(f)}\int_a^b \psi(x)\,\mathrm{d}x\right) = 0$

Ce que nous voulions

Remarque 3 :

Hausdorff utilise une autre démonstration : se référer à la RMS 129° annee Juillet 2019 N°4 Page 47 et suivantes

Exercice 1 :

1. *Soient $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ 2 fonctions bornées. Si $f \leqslant g$, alors $I_\star(f) \leqslant I_\star(g)$*

   La résolution de cette question n'est pas difficile puisque $\mathcal{E}_\star(f) \subset \mathcal{E}_\star(g)$

   En effet, si $\psi \in \mathcal{E}_\star(f)$, comme $f \leqslant g$ nous avons $\psi \leqslant f \leqslant g$ et donc $\psi \leqslant g$ et donc $\psi \in \mathcal{E}_\star(g)$

   D'où $\mathcal{E}_\star(f) \subset \mathcal{E}_\star(g)$

   Comme $\mathcal{E}_\star(f) \subset \mathcal{E}_\star(g)$, nous avons $\displaystyle\sup_{\psi\in\mathcal{E}_\star(f)}\int_a^b \psi(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \sup_{\psi\in\mathcal{E}_\star(g)}\int_a^b \psi(x)\,\mathrm{d}x$

   C'est à dire $I_\star(f) \leqslant I_\star(g)$

2. *Soient, maintenant $f_1 : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ et $f_2 : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ 2 fonctions bornées. Notons $f = \min\{f_1, f_2\}$ et $F = \max\{f_1, f_2\}$. Alors $I_\star(f) + I_\star(F) \geqslant I_\star(f_1) + I_\star(f_2)$*

   Soient $\psi_1 \in \mathcal{E}_\star(f_1)$ et $\psi_2 \in \mathcal{E}_\star(f_2)$.

   Nous appelons $\psi = \min\{\psi_1, \psi_2\}$ et $\Psi = \max\{\psi_1, \psi_2\}$

   (a) Tout d'abord, $\psi \in \mathcal{E}_\star(f)$, c'est à dire que ψ est une fonction en escalier qui minore f_1 et f_2.

   En effet, nous avons $\psi \leqslant \psi_1 \leqslant f_1$ et $\psi \leqslant \psi_2 \leqslant f_2$; en particulier, $\psi \leqslant \min\{f_1, f_2\}$ et donc $\psi \in \mathcal{E}_\star(f)$

   (b) De même $\Psi \in \mathcal{E}_\star(F)$

   En effet, nous avons $\psi_1 \leqslant f_1$ et $\psi_2 \leqslant f_2$ et donc $\psi_1 \leqslant \max\{f_1, f_2\}$, c'est à dire $\psi_1 \leqslant F$.
   De même, $\psi_2 \leqslant F$.
   Comme $\Psi = \max\{\psi_1, \psi_2\}$, nous avons $\Psi \leqslant F$ et donc $\Psi \in \mathcal{E}_\star(F)$

(c) D'autre part, $\psi + \Psi = \psi_1 + \psi_2$ d'où :

$$I_\star(f) + I_\star(F) \geqslant \int_a^b \psi(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b \Psi(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \psi_1(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b \psi_2(x)\,\mathrm{d}x$$

(d) L'inégalité $I_\star(f) + I_\star(F) \geqslant \int_a^b \psi_1(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b \psi_2(x)\,\mathrm{d}x$ étant établie pour tout $\psi_1 \in \mathcal{E}_\star(f_1)$ et tout $\psi_2 \in \mathcal{E}_\star(f_2)$, nous avons, en particulier :

$$I_\star(f) + I_\star(F) \geqslant \sup_{\psi_1 \in \mathcal{E}_\star(f_1)} \int_a^b \psi_1(x)\,\mathrm{d}x + \sup_{\psi_2 \in \mathcal{E}_\star(f_2)} \int_a^b \psi_2(x)\,\mathrm{d}x$$

C'est à dire $I_\star(f) + I_\star(F) \geqslant I_\star(f_1) + I_\star(f_2)$

Ce que nous voulions

5.1.6 Théorème d'Arzéla

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies et intégrables sur un intervalle $[a;b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que

1. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[a;b]$ vers une fonction intégrable f .
2. Il existe $M \in \mathbb{R}^{*+}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [a;b]$, $|f_n(x)| \leqslant M$

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,\mathrm{d}x = 0$; nous avons, en particulier, $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

Démonstration

1. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   Nous posons $h_n = |f_n - f|$ et $p_n = \sup(\{h_{n+k}; k \in \mathbb{N}\})$
2. f étant intégrable sur $[a;b]$, f est bornée sur $[a;b]$.
   Il existe donc $L > 0$ tel que, pour tout $t \in [a;b]$, $|f(t)| \leqslant L$.
   Nous en concluons que les fonctions $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ forment une suite bornée, puisque $h_n = |f_n - f| \leqslant |f_n| + |f| \leqslant L + M$
3. De cette remarque, nous pouvons dire que la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et bornée ; elle est, de plus, décroissante.
   En effet, $\{h_{n+1+k}; k \in \mathbb{N}\} \subset \{h_{n+k}; k \in \mathbb{N}\}$ et donc $\sup(\{h_{n+1+k}; k \in \mathbb{N}\}) \leqslant \sup(\{h_{n+k}; k \in \mathbb{N}\})$, c'est à dire $p_{n+1} \leqslant p_n$
4. Soit $x \in [a;b]$ et $\varepsilon > 0$
   La suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant simplement vers la fonction nulle, il existe $n_0(x) \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $n \geqslant n_0(x)$, alors $h_n(x) < \varepsilon$.
   Comme $p_{n_0(x)} = \sup\left(\{h_{n_0(x)+k}; k \in \mathbb{N}\}\right)$, nous avons aussi $p_{n_0(x)} < \varepsilon$, et comme la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $n \geqslant n_0(x)$, alors $p_n(x) < \varepsilon$.
   Ce qui montre que $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n(x) = 0$
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons, par construction, $0 \leqslant h_n \leqslant p_n$, et donc

$$0 \leqslant \int_a^b h_n(x)\,\mathrm{d}x \leqslant I_\star(p_n)$$

   Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n(x) = 0$, d'après le lemme 5.1.5 d'Hausdorff et Luxemburg, $\lim\limits_{n\to+\infty} I_\star(p_n) = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b h_n(x)\,\mathrm{d}x = 0$

Ce que nous voulions

Remarque 4 :

1. Lorsqu'il existe $M \in \mathbb{R}^{*+}$ tel que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur $[a;b]$, vérifie pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [a;b]$, $|f_n(x)| \leqslant M$, on dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément bornée
2. Sans plus d'effort, nous allons établir, en corollaire, une forme de théorème de convergence dominée. Attention, ce corollaire est loin d'être le théorème de Lebesgue !

5.1.7 Corollaire : un théorème de convergence dominée

Dans ce corollaire, $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle ouvert ou fermé, éventuellement non borné
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions réelles, définies sur I et localement intégrables sur I
On suppose :

1. Que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction f.
2. f est localement intégrable sur I
3. Il existe une fonction $g : I \longrightarrow \mathbb{R}^+$, localement intégrable sur I d'intégrale sur I convergente, c'est à dire $\displaystyle\int_I g(x)\,\mathrm{d}x < \infty$, et telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in I$, $|f_n(x)| \leqslant g(x)$

Alors :

1. $\displaystyle\int_I f(x)\,\mathrm{d}x$ est absolument convergente
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_I f_n(x)\,\mathrm{d}x$ est absolument convergente
3. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_I |f_n(x) - f(x)|\,\mathrm{d}x = 0$ et nous avons, en particulier, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_I f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_I f(x)\,\mathrm{d}x$

Démonstration

1. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in I$, nous avons $|f_n(x)| \leqslant g(x)$, et comme $\displaystyle\int_I g(x)\,\mathrm{d}x$ existe, d'après les théorèmes de majoration *(voir 4.2.2)*, nous en déduisons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_I f_n(x)\,\mathrm{d}x$ est absolument convergente et donc existe
2. Toujours parce que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in I$, nous avons $|f_n(x)| \leqslant g(x)$, par le passage à la limite, nous avons, pour tout $x \in I$ $|f(x)| \leqslant g(x)$.

   Et donc, toujours par les théorèmes de majoration, puisque l'intégrale $\displaystyle\int_I g(x)\,\mathrm{d}x$ existe, l'intégrale $\displaystyle\int_\alpha^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ est absolument convergente et donc existe
3. Soit $\varepsilon > 0$

   De la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_I g(x)\,\mathrm{d}x$, il existe un intervalle $[a;b] \subset I$ tel que
   $$\int_{I\setminus[a;b]} g(x)\,\mathrm{d}x < \varepsilon$$
   g étant localement intégrable sur I, l'est sur l'intervalle $[a;b]$ et est donc majorée sur l'intervalle $[a;b]$.
   Soit donc $M > 0$, le nombre $M = \displaystyle\sup_{x\in[a;b]} g(x)$.
   Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [a;b]$, nous avons $|f_n(x)| \leqslant M$, et que dit alors le thérème d'Arzéla 5.1.6 ?

   Très simplement que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,\mathrm{d}x = 0$.

   Il existe donc $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N_0$, alors $\displaystyle\int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,\mathrm{d}x < \varepsilon$.

4. Dès maintenant, nous avons, pour $n \geqslant N_0$,

$$\begin{aligned}\int_I |f_n(x) - f(x)| \, \mathrm{d}x = & \int_a^b |f_n(x) - f(x)| \, \mathrm{d}x + \int_{I \setminus [a;b]} |f_n(x) - f(x)| \, \mathrm{d}x \\ \leqslant & \int_a^b |f_n(x) - f(x)| \, \mathrm{d}x + \int_{I \setminus [a;b]} 2g(x) \, \mathrm{d}x < 3\varepsilon\end{aligned}$$

Ainsi, nous venons de démontrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_I |f_n(x) - f(x)| \, \mathrm{d}x = 0$ et que nous avons, en particulier, $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_I f_n(x) \, \mathrm{d}x = \int_I f(x) \, \mathrm{d}x$

Exercice 2 :

Démontrer que la suite de terme général $u_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \, \mathrm{d}t$ converge et donner sa limite

Exercice 3 :

Importance de l'hypothèse de domination

Définissons, sur l'intervalle $[0; 1]$, la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ où f_n est telle que $f_n(0) = 0$, $f_n\left(\dfrac{1}{n+1}\right) = n + 1$, est affine sur l'intervalle $\left[0; \dfrac{1}{n+1}\right]$ et nulle sur $\left[\dfrac{1}{n+1}; +1\right]$

1. Etudier la convergence de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$
2. Etudier la convergence de la suite $\left(\displaystyle\int_0^1 f_n(x) \, \mathrm{d}x\right)_{n \in \mathbb{N}}$

Exercice 4 :

1. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $a_n(t) = \dfrac{1}{1 + t^2 + t^n e^{-t}}$ est intégrable sur $[0; +\infty[$
2. Nous posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + t^2 + t^n e^{-t}} \, \mathrm{d}t$. Quelle est la limite de la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

Exercice 5 :

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, nous posons $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1 + t^2)^n} \, \mathrm{d}t$

1. Justifier que I_n est bien définie.
2. (a) Étudier la monotonie de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
   (b) Déterminer la limite de la suite $((I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

   La série $\sum\limits_{n \geqslant 1} (-1)^n I_n$ est-elle convergente ?

5.2 Fonctions définies par une intégrale à paramètre

Introduction

1. <u>Qu'est ce qu'une intégrale à paramètre ?</u>

   Nous avons eu, jusqu'ici, eu à étudier des intégrales du type $\displaystyle\int_a^b f_n(t) \, \mathrm{d}t$. Ici, l'entier $n \in \mathbb{N}$ est un paramètre.

   En posant $f_n(t) = f(n, t)$, nous pourrions aussi l'écrire $\displaystyle\int_a^b f(n, t) \, \mathrm{d}t$.

Par exemple, l'étude de $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^{2n} t \, dt$, où nous pouvons poser $f(n,t) = \sin^{2n} t$

En généralisant cette notion de paramètre, nous pourrions aussi l'étendre à $\mathbb{R}$, en étudiant des intégrales du type $\displaystyle\int_a^b f(x,t) \, dt$ où, cette fois-ci, $x \in \mathbb{R}$

2. Par exemple, prenons le cas où $I = J = \mathbb{R}$ telle que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \, dt$ existe et on considère alors :

$$\begin{cases} \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (t,\lambda) & \longmapsto & f(t,\lambda) = g(t)\, e^{-it\lambda} \end{cases}$$

3. Nous allons commencer par étudier les intégrales définies et nous poser le problème suivant :
$\mathbb{K}$ désignant comme toujours $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $[a;b]$ 1 intervalle compact de $\mathbb{R}$ et $I \subset \mathbb{R}$, un intervalle de $\mathbb{R}$ soit :

$$\begin{cases} f : [a;b] \times I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (t,x) & \longmapsto & f(t,x) \end{cases}$$

une application continue de $[a;b] \times I$ dans $\mathbb{K}$.

Que peut-on dire de la fonction $F : [a;b] \times I$ définie par $F(x) = \displaystyle\int_a^b f(t,x) \, dt$?

Par exemple, que pouvons nous dire de $\widehat{g}(\lambda) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\, e^{-it\lambda} \, dt$?

5.2.1 Théorème de continuité

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et a,b deux réels quelconques.
On considère une fonction de deux variables $f(t,x)$ où $t \in [a;b]$ et $x \in I$, à valeurs dans $\mathbb{K}$.
On suppose que :

1. Que f est continue par rapport à chacune des deux variables
2. Que f est bornée sur $[a;b] \times I$

Alors, la fonction F définie sur I par :

$$\begin{cases} I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & F(x) = \displaystyle\int_a^b f(t,x) \, dt \end{cases}$$

est continue, c'est à dire :

$$\lim_{x \to x_0} F(x) = F(x_0) \Longleftrightarrow \lim_{x \to x_0} \int_a^b f(t,x) \, dt = \int_a^b f(t,x_0) \, dt = \int_a^b \lim_{x \to x_0} f(t,x) \, dt$$

Démonstration

1. La fonction $\psi(t) = f(t,x)$ étant continue pour tout $t \in [a;b]$, l'intégrale

$$\int_a^b \psi(t) \, dt = \int_a^b f(t,x) \, dt$$

est bien définie

2. Soit $x_0 \in I$
Nous savons que F est continue en $x_0 \in I$ si et seulement si, pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tendant vers x_0, la suite $(F(x_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers $F(x_0)$
Soit donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite tendant vers x_0.

Nous avons donc $F(x_n) = \displaystyle\int_a^b f(t,x_n) \, dt$. Posons $\varphi_n(t) = f(t,x_n)$

$\longrightarrow$ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, du fait que, pour tout $x \in I$, la fonction $f_x(t) = f(t,x)$ est Riemann-intégrable sur $[a;b]$, φ_n est intégrable sur $[a;b]$

$\longrightarrow$ Comme f est bornée sur $[a;b] \times I$, pour tout $t \in [a;b]$, $|\varphi_n(t)| \leqslant M$

$\longrightarrow$ De la continuite de f par rapport à chacune des variables, nous avons :

$$\lim_{n\to+\infty} \varphi_n(t) = \lim_{n\to+\infty} f(t,x_n) = f(t,x_0)$$

D'après le théorème d'Arzéla 5.1.6, nous avons donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b \varphi_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} \varphi_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t,x_0)\,\mathrm{d}t \Longleftrightarrow \lim_{n\to+\infty} F(x_n) = F(x_0)$$

F est donc continue en $x_0 \in I$, et comme ceci est vrai pour tout $x_0 \in I$, F est donc continue sur I

Exemple 1 :

Prenons des exemples simples, et, éventuellement canoniques :

1. Commençons par la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f : [0;1] \times [1;2] & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (t,x) & \longmapsto & f(t,x) = \dfrac{1}{t^2+x^2} \end{cases}$$

Cette fonction est continue sur $[0;1] \times [1;2]$ et donc la fonction $F(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^2+x^2}\,\mathrm{d}t$ l'est aussi.

Un calcul simple nous donne : $F(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^2+x^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\arctan\frac{1}{x}$.

On vérifie tout de suite que cette fonction ne pose aucun problème de continuité sur l'intervalle $[1;2]$

2. Commençons par la fonction f définie sur $[0;1] \times \mathbb{R}^{*+}$ par :

$$\begin{cases} f : [0;1] \times \mathbb{R}^{*+} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (t,x) & \longmapsto & f(t,x) = \dfrac{1}{(t^2+x^2)(t^2+1)} \end{cases}$$

Nous allons démontrer que la fonction $F(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(t^2+x^2)(t^2+1)}\,\mathrm{d}t$ est continue sur $\mathbb{R}^{*+}$

- ▷ Pour que f soit définie, il faut que $(t,x) \neq (0,0)$, et sur son domaine de définition $[0;1] \times \mathbb{R}^{*+}$, la fonction f est continue par rapport à chacune des deux variables.
- ▷ Elle n'est pas bornée sur $[0;1] \times \mathbb{R}^{*+}$

  En effet, soit $t_0 \in [0;1]$ fixé.

  Pour tout $M > 0$, tous calculs faits, si $0 < x < \dfrac{1}{M(t_0^2+1)} - t_0^2$, alors $f(t_0,x) > M$

  f n'est donc pas bornée.
- ▷ Maintenant, soit $a > 0$ et considérons le domaine $[0;1] \times [a;+\infty[$

  Sur ce domaine, $\dfrac{1}{t^2+1} \leqslant 1$ et $\dfrac{1}{t^2+x^2} \leqslant \dfrac{1}{a^2}$, d'où $\dfrac{1}{(t^2+x^2)(t^2+1)} \leqslant \dfrac{1}{a^2}$
- ▷ Donc, d'après le théorème 5.2.1, la fonction F est continue sur l'intervalle $[a;+\infty[$. Comme ceci est vrai pour tout $a > 0$, on en déduit que F est continue sur $\mathbb{R}^{*+}$.
- ▷ Nous avons donc

$$F(1) = \lim_{x\to1} F(x) = \lim_{x\to1} \int_0^1 \frac{1}{(t^2+x^2)(t^2+1)}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \lim_{x\to1} \frac{1}{(t^2+x^2)(t^2+1)}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t$$

  Ces égalités nous donnent donc le moyen de calculer $F(1) = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t$.

▷ Nous allons calculer $F(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(t^2+x^2)(t^2+1)}\,\mathrm{d}t$ par des outils classiques du calcul intégral, pour $x \neq 1$.

Pour ce faire, nous allons commencer par décomposer $\dfrac{1}{(t^2+x^2)(t^2+1)}$ en éléments simples.

Le calcul ne pose que peu de difficultés. Nous trouvons tout de suite :

$$\frac{1}{(t^2+x^2)(t^2+1)} = \frac{1}{x^2-1}\left(\frac{1}{t^2+1} - \frac{1}{t^2+x^2}\right)$$

De telle sorte que $F(x) = \dfrac{1}{x^2-1}\left(\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t - \int_0^1 \frac{1}{t^2+x^2}\,\mathrm{d}t\right)$

Facilement, nous avons :

⋆ $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}$

⋆ $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^2+x^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x^2}\int_0^1 \frac{1}{\frac{t^2}{x^2}+1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x^2}\int_0^1 \frac{1}{\left(\frac{t}{x}\right)^2+1}\,\mathrm{d}t.$

En faisant le changement de variables $u = \dfrac{t}{x}$, nous obtenons $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{x} \iff \mathrm{d}t = x\,\mathrm{d}u$, d'où :

$$\int_0^1 \frac{1}{t^2+x^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x^2}\int_0^1 \frac{1}{\left(\frac{t}{x}\right)^2+1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x^2}\int_0^{\frac{1}{x}} \frac{x\,\mathrm{d}u}{u^2+1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\arctan\frac{1}{x}$$

⋆ En conclusion, $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t - \int_0^1 \frac{1}{t^2+x^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{x}\arctan\frac{1}{x}$ et donc :

$$F(x) = \frac{1}{x^2-1}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{x}\arctan\frac{1}{x}\right)$$

▷ L'objet de ce point est de calculer $\lim\limits_{x\to 1} F(x)$

⋆ Faisons un développement limité de la fonction $\left(\dfrac{\pi}{4} - X\arctan X\right)$ au voisinage de $X_0 = +1$ à l'ordre 2.

◇ Tout d'abord :

$$\arctan X = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(X-1) - \frac{1}{2}(X-1)^2 + (X-1)^2\varepsilon(X) \quad \text{où} \quad \lim_{X\to 1}\varepsilon(X) = 0$$

◇ Et donc :

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{4} - X\arctan X &= \frac{\pi}{4} - X\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(X-1) - \frac{1}{2}(X-1)^2 + (X-1)^2\varepsilon(X)\right) \\
&= (1-X)\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}X(X-1) + \frac{1}{2}X(X-1)^2 + X(X-1)^2\varepsilon(X)
\end{aligned}$$

◇ En remplaçant X par $\dfrac{1}{x}$, nous avons :

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{4} - \frac{1}{x}\arctan\frac{1}{x} &= \left(1-\frac{1}{x}\right)\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\times\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}-1\right) + \frac{1}{2}\times\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}-1\right)^2 + \frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}-1\right)^2\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right) \\
&= \frac{x-1}{x}\times\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\times\frac{x-1}{x^2} + \frac{1}{2}\times\frac{(x-1)^2}{x^3} + \frac{(x-1)^2}{x^3}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)
\end{aligned}$$

◇ De telle sorte que, au voisinage de 1,

$$\begin{aligned}
F(x) &= \frac{1}{x^2-1}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{x}\arctan\frac{1}{x}\right) \\
&= \frac{1}{x^2-1}\left(\frac{x-1}{x}\times\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\times\frac{x-1}{x^2} + \frac{1}{2}\times\frac{(x-1)^2}{x^3} + \frac{(x-1)^2}{x^3}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)\right) \\
&= \frac{1}{x(x+1)}\times\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\times\frac{1}{x^2(x+1)} + \frac{1}{2}\times\frac{x-1}{x^3(x+1)} + \frac{x-1}{x^3(x+1)}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)
\end{aligned}$$

⋆ D'où nous déduisons que $\lim\limits_{x\to 1} F(x) = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{1}{4}$.

Ainsi, $F(1) = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{1}{4}$

▷ Et donc, $F(1) = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$

Exercice 6 :

Etudier la fonction définie par $F(x) = \displaystyle\int_0^1 \left|\ln\left(t + x^2\right)\right|\,\mathrm{d}t$

5.2.2 Théorème de dérivabilité

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et a,b deux réels quelconques.
On considère une fonction de deux variables $f(t,x)$ où $t \in [a;b]$ et $x \in I$, à valeurs dans $\mathbb{K}$.
On suppose que :

1. Que f est continue par rapport à chacune des deux variables
2. f admet une dérivée partielle par rapport à x, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x)$, continue par rapport à chacune des deux variables et bornée sur $[a;b] \times I$

Alors, la fonction F définie sur I par :

$$\begin{cases} I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & F(x) = \displaystyle\int_a^b f(t,x)\,\mathrm{d}t \end{cases}$$

est dérivable sur I, et nous avons : $F'(x) = \left(\displaystyle\int_a^b f(t,x)\,\mathrm{d}t\right)' = \displaystyle\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\,\mathrm{d}t$

Démonstration

1. ▷ La fonction $\psi(t) = f(t,x)$ étant continue pour tout $t \in [a;b]$, l'intégrale

$$\int_a^b \psi(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t,x)\,\mathrm{d}t$$

est bien définie

▷ De même, la fonction $\varphi(t) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x)$ étant continue pour tout $t \in [a;b]$, l'intégrale

$$\int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\,\mathrm{d}t$$

est bien définie.

2. Soit $x_0 \in I$.
Nous allons nous intéresser à la dérivabilité de F en x_0 et, pour ce faire, nous allons nous intéresser au rapport $\dfrac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0}$

(a) Tout d'abord, $\dfrac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \displaystyle\int_a^b \frac{f(t,x) - f(t,x_0)}{x - x_0}\,\mathrm{d}t$

(b) Soit $(x_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de points de I convergeant vers x_0 et considérons les suites de fonctions $(h_n)_{n\geqslant 1}$ définies pour tout $t \in [a;b]$ par :

$$h_n(t) = \frac{f(t,x_n) - f(t,x_0)}{x - x_0}$$

La fonction f étant continuement différentiable par rapport à la variable x, nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{f(t,x_n)-f(t,x_0)}{x-x_0} = \dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x_0)$

La suite de fonctions $(h_n)_{n\geqslant 1}$ converge donc simplement vers la fonction de $t\in[a;b]$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x_0)$

(c) D'autre part, d'après le théorème des accroissements finis, il existe $\xi_n\in[x_0;x_n]$ [2] tel que :

$$\frac{f(t,x_n)-f(t,x_0)}{x-x_0} = \frac{\partial f}{\partial x}(t,\xi_n)$$

(d) La fonction $\dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x)$ est uniformélent bornée sur I, c'est à dire qu'il existe $M>0$ tel que, pour tout $x\in I$, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x)\right| \leqslant M$, nous avons alors

$$|h_n(t)| = \left|\frac{f(t,x_n)-f(t,x_0)}{x-x_0}\right| = \left|\frac{\partial f}{\partial x}(t,\xi_n)\right| \leqslant M$$

3. Nous avons :
   (a) La suite $(h_n)_{n\geqslant 1}$ convergeant simplement sur $[a;b]$ vers la fonction continue $\dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x_0)$.
   (b) Il existe $M\in\mathbb{R}^{*+}$ tel que pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $x\in[a;b]$, $|h_n(x)|\leqslant M$

   Donc, d'après le théorème 5.1.6 d'Arzéla, $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_a^b h_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \lim\limits_{n\to+\infty} h_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t,x_0)\,\mathrm{d}t$, c'est à dire :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{F(x_n)-F(x_0)}{x_n-x_0} = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t,x_0)\,\mathrm{d}t$$

   Comme ceci est valable pour toute suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ convergeant vers x_0, on en déduit que

$$\lim_{x\to x_0}\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t,x_0)\,\mathrm{d}t$$

Ce que nous voulions

Exemple 2 :

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, nous posons, pour $x\neq 0$ *(c'est à dire pour $x\in\mathbb{R}^*$)* :

$$F_n(x) = \int_0^1 \frac{1}{(t^2+x^2)^n}\,\mathrm{d}t$$

Ici, nous avons $f(t,x) = \dfrac{1}{(t^2+x^2)^n}$ où $t\in[0;1]$ et $x\in\mathbb{R}^*$

1. $\to$ f est continue sur $[0;1]\times\mathbb{R}^*$
   $\to$ $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x) = \dfrac{-2nx}{(t^2+x^2)^{n+1}}$ est aussi continue sur $[0;1]\times\mathbb{R}^*$
2. Par contre, f n'est pas bornée sur $[0;1]\times\mathbb{R}^*$.
   Il suffit pour cela de le vérifier en considérant la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $x_n=\frac{1}{n}$. Nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$ et

$$f(0,x_n) = \frac{1}{(x_n^2)^n} = \frac{1}{\left(\frac{1}{n^2}\right)^n} = n^{2n}$$

   Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{2n} = +\infty$, nous avons aussi $\lim\limits_{n\to+\infty} f(0,x_n) = +\infty$ et f est, bien entendu, non bornée.

2. Cela pourrait aussi très bien être $\xi_n\in[x_n;x_0]$

3. Soient $a > 0$ et $A > 0$ avec $0 < a < A$ et nous considérons le domaine $\mathcal{D} = [0;1] \times ([-A;-a] \cup [a;A])$. Alors, pour tout couple $(t,x) \in \mathcal{D}$, nous avons $a^2 \leqslant x^2 \leqslant A^2$, et donc :

$$a^2 \leqslant t^2 + a^2 \leqslant t^2 + x^2 \leqslant t^2 + A^2 \leqslant 1 + A^2$$

Et donc $0 \leqslant \dfrac{1}{t^2 + x^2} \leqslant \dfrac{1}{a^2}$

→ Sur le domaine $\mathcal{D}$, nous avons donc $0 \leqslant \dfrac{1}{(t^2+x^2)^n} \leqslant \dfrac{1}{a^2}$, ce qui veut dire que, d'après 5.2.1, sur ce domaine $\mathcal{D}$, la fonction $F_n(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(t^2+x^2)^n}\,\mathrm{d}t$ y est continue

→ D'autre part, toujours sue ce domaine $\mathcal{D}$, nous avons $\left|\dfrac{-2nx}{(t^2+x^2)^{n+1}}\right| \leqslant \dfrac{2nA}{(a^2)^{n+1}}$, c'est à dire $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x)\right| \leqslant \dfrac{2nA}{(a^2)^{n+1}}$.

Donc, d'après 5.2.2, F_n est dérivable sur $\mathcal{D}$ et de dérivée

$$F_n'(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(x)\,\mathrm{d}t = -2nx\int_0^1 \frac{1}{(t^2+x^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}t$$

4. Ce que nous venons de démontrer l'étant pour tout $a > 0$ et tout $A > 0$, la fonction F_n est continue et dérivable sur $[0;1] \times \mathbb{R}^*$ et de dérivée

$$F_n'(x) = -2nx\int_0^1 \frac{1}{(t^2+x^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}t = -2nxF_{n+1}(x)$$

Nous avons ainsi construit une suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de fonctions définies, pour $n \geqslant 1$, par :

$$F_{n+1}(x) = \frac{-1}{2nx}F_n'(x) \quad \text{et} \quad F_1(x) = \frac{1}{x}\arctan\frac{1}{x}$$

5.2.3 Second théorème de continuité : cas où les bornes d'intégration dépendent du paramètre

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et a,b deux réels quelconques.
On considère une fonction de deux variables $f(t,x)$ où $t \in [a;b]$ et $x \in I$, à valeurs dans $\mathbb{K}$.
On suppose que :

1. Que f est continue par rapport à chacune des deux variables
2. Que f est bornée sur l'ensemble $[a;b] \times I$, c'est à dire qu'il esxiste $M > 0$ tel que, pour tout $t \in [a;b]$ et tout $x \in I$, $|f(t,x)| \leqslant M$
3. Que $u : I \longrightarrow [a;b]$ est une fonction continue

Alors, la fonction F définie sur I par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & F(x) = \displaystyle\int_a^{u(x)} f(t,x)\,\mathrm{d}t \end{array}\right.$$

est continue sur I

Démonstration

Nous allons évaluer $F(x) - F(x_0)$.

$$\begin{aligned} F(x) - F(x_0) &= \int_a^{u(x)} f(t,x)\,\mathrm{d}t - \int_a^{u(x_0)} f(t,x_0)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_a^{u(x_0)} f(t,x)\,\mathrm{d}t + \int_{u(x_0)}^{u(x)} f(t,x)\,\mathrm{d}t - \int_a^{u(x_0)} f(t,x_0)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

D'où nous tirons :

$$|F(x) - F(x_0)| \leqslant \left| \int_{u(x_0)}^{u(x)} f(t,x)\ \mathrm{d}t \right| + \left| \int_a^{u(x_0)} f(t,x)\ \mathrm{d}t - \int_a^{u(x_0)} f(t,x_0)\ \mathrm{d}t \right|$$

$\Longrightarrow$ Commençons par étudier $\left| \displaystyle\int_{u(x_0)}^{u(x)} f(t,x)\ \mathrm{d}t \right|$.

En fait, c'est assez simple :

$$\left| \int_{u(x_0)}^{u(x)} f(t,x)\ \mathrm{d}t \right| \leqslant \int_{u(x_0)}^{u(x)} |f(t,x)|\ \mathrm{d}t$$

Comme pour tout $t \in [a;b]$ et tout $x \in I$, $|f(t,x)| \leqslant M$, nous pouvons écrire :

$$\left| \int_{u(x_0)}^{u(x)} f(t,x)\ \mathrm{d}t \right| \leqslant M\,|u(x) - u(x_0)|$$

Comme u est une fonction continue, $\lim\limits_{x \to x_0} |u(x) - u(x_0)| = 0$ et donc, par majoration,

$$\lim_{x \to x_0} \left| \int_{u(x_0)}^{u(x)} f(t,x)\ \mathrm{d}t \right| = 0$$

$\Longrightarrow$ Continuons en étudiant $\left| \displaystyle\int_a^{u(x_0)} f(t,x)\ \mathrm{d}t - \int_a^{u(x_0)} f(t,x_0)\ \mathrm{d}t \right|$

Nous sommes dans les hypothèses du théorème 5.2.1 :

- ▷ Le nombre $u(x_0)$ peut être considéré comme un nombre fixé.
- ▷ f est continue par rapport à chacune des 2 variables
- ▷ f est bornée sur l'ensemble $[a;b] \times I$

La fonction $H(x) = \displaystyle\int_a^{u(x_0)} f(t,x)\ \mathrm{d}t$ est donc continue sur I, et nous avons, en particulier $\lim\limits_{x \to x_0} H(x) = H(x_0)$, c'est à dire :

$$\lim_{x \to x_0} \int_a^{u(x_0)} f(t,x)\ \mathrm{d}t = \int_a^{u(x_0)} f(t,x_0)\ \mathrm{d}t \Longleftrightarrow \lim_{x \to x_0} \left| \int_a^{u(x_0)} f(t,x)\ \mathrm{d}t - \int_a^{u(x_0)} f(t,x_0)\ \mathrm{d}t \right| = 0$$

$\Longrightarrow$ D'où, en synthétisant, et considérant l'inégalité :

$$|F(x) - F(x_0)| \leqslant \left| \int_{u(x_0)}^{u(x)} f(t,x)\ \mathrm{d}t \right| + \left| \int_a^{u(x_0)} f(t,x)\ \mathrm{d}t - \int_a^{u(x_0)} f(t,x_0)\ \mathrm{d}t \right|$$

nous avons donc $\lim\limits_{x \to x_0} |F(x) - F(x_0)| = 0$

F est donc continue en $x_0 \in I$; en fait F est continue sur I.

Remarque 5 :

Dans les conditions du théorème 5.2.3, si $v : I \longrightarrow [a;b]$ est une seconde fonction continue, alors, la fonction F définie sur I par :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & F(x) = \displaystyle\int_{v(x)}^{u(x)} f(t,x)\ \mathrm{d}t \end{array} \right.$$

est elle aussi continue sur I.

En effet, nous avons $F(x) = \displaystyle\int_a^{u(x)} f(t,x)\ \mathrm{d}t - \int_a^{v(x)} f(t,x)\ \mathrm{d}t$ et F apparaît comme la somme de 2 fonctions continues.

5.2.4 Second théorème de dérivabilité : cas où les bornes d'intégration dépendent du paramètre

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et a,b deux réels quelconques.
On considère une fonction de deux variables $f(t,x)$ où $t \in [a;b]$ et $x \in I$, à valeurs dans $\mathbb{K}$.
On suppose que :

1. Que f est continue par rapport à chacune des deux variables
2. Que f est bornée sur l'ensemble $[a;b] \times I$, c'est à dire qu'il esxiste $M > 0$ tel que, pour tout $t \in [a;b]$ et tout $x \in I$, $|f(t,x)| \leqslant M$
3. Que f admet une dérivée partielle par rapport à x, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x)$, continue par rapport à chacune des deux variables et bornée sur $[a;b] \times I$, c'est à dire qu'il existe $M_1 > 0$ tel que pour tout $t \in [a;b]$ et tout $x \in I$, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x)\right| \leqslant M_1$
4. Que $u : I \longrightarrow [a;b]$ est une fonction dérivable sur I

Alors, la fonction F définie sur I par :

$$\begin{cases} I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & F(x) = \displaystyle\int_a^{u(x)} f(t,x)\,\mathrm{d}t \end{cases}$$

est dérivable sur I et :

$$F'(x) = \int_a^{u(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\,\mathrm{d}t + u'(x)\,f(u(x),x)$$

Démonstration

Soit $x_0 \in I$.
Nous allons étudier le rapport $\dfrac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0}$, puis $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \dfrac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0}$.
Pour commencer :

$$\begin{aligned} F(x) - F(x_0) &= \int_a^{u(x)} f(t,x)\,\mathrm{d}t - \int_a^{u(x_0)} f(t,x_0)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_a^{u(x_0)} f(t,x)\,\mathrm{d}t + \int_{u(x_0)}^{u(x)} f(t,x)\,\mathrm{d}t - \int_a^{u(x_0)} f(t,x_0)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_a^{u(x_0)} (f(t,x) - f(t,x_0))\,\mathrm{d}t + \int_{u(x_0)}^{u(x)} f(t,x)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Et donc $\dfrac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \displaystyle\int_a^{u(x_0)} \dfrac{f(t,x) - f(t,x_0)}{x - x_0}\,\mathrm{d}t + \dfrac{1}{x - x_0}\int_{u(x_0)}^{u(x)} f(t,x)\,\mathrm{d}t$

1. Appellons $I_1(x) = \displaystyle\int_a^{u(x_0)} \dfrac{f(t,x) - f(t,x_0)}{x - x_0}\,\mathrm{d}t$.

   D'après la démonstration du théorème 5.2.2, $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \int_a^{u(x_0)} \dfrac{f(t,x) - f(t,x_0)}{x - x_0}\,\mathrm{d}t = \int_a^{u(x_0)} \dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x_0)\,\mathrm{d}t$

2. Ensuite, appelons $I_2(x) = \dfrac{1}{x - x_0}\displaystyle\int_{u(x_0)}^{u(x)} f(t,x)\,\mathrm{d}t$

   Dans un premier temps, et pour simplifier, nous supposons $u(x_0) \leqslant u(x)$, ce qui, à un signe près ne modifiera pas la démonstration et le résultat.
   Pour commencer, nous avons :

$$\inf_{t \in [u(x_0);u(x)]} f(t,x) \leqslant f(t,x) \leqslant \sup_{t \in [u(x_0);u(x)]} f(t,x)$$

En passant à l'intégrale, nous avons :

$$(u(x)-u(x_0)) \inf_{t\in[u(x_0);u(x)]} f(t,x) \leqslant \int_{u(x_0)}^{u(x)} f(t,x)\,\mathrm{d}t \leqslant (u(x)-u(x_0)) \sup_{t\in[u(x_0);u(x)]} f(t,x)$$

Et, pour terminer :

$$\frac{(u(x)-u(x_0))}{x-x_0} \inf_{t\in[u(x_0);u(x)]} f(t,x) \leqslant \frac{1}{x-x_0}\int_{u(x_0)}^{u(x)} f(t,x)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{(u(x)-u(x_0))}{x-x_0} \sup_{t\in[u(x_0);u(x)]} f(t,x)$$

De la continuité de f en les 2 variables, nous avons :

$$\lim_{x\to x_0}\left(\inf_{t\in[u(x_0);u(x)]} f(t,x)\right) = \lim_{x\to x_0}\left(\sup_{t\in[u(x_0);u(x)]} f(t,x)\right) = f(u(x_0),x_0)$$

De la dérivabilité de u sur I, nous avons $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{(u(x)-u(x_0))}{x-x_0} = u'(x_0)$

Et donc :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}\left(\frac{(u(x)-u(x_0))}{x-x_0}\inf_{t\in[u(x_0);u(x)]} f(t,x)\right) &= \lim_{x\to x_0}\left(\frac{(u(x)-u(x_0))}{x-x_0}\sup_{t\in[u(x_0);u(x)]} f(t,x)\right)\\ &= u'(x_0)\,f(u(x_0),x_0)\end{aligned}$$

En conclusion, par encadrement, nous avons

$$\lim_{x\to x_0}\frac{1}{x-x_0}\int_{u(x_0)}^{u(x)} f(t,x)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to x_0} I_2(x) = u'(x_0)\,f(u(x_0),x_0)$$

3. Pour conclure, nous avons :

$$\lim_{x\to x_0}\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} I_1(x) + \lim_{x\to x_0} I_2(x) = \int_a^{u(x_0)} \frac{\partial f}{\partial x}(t,x_0)\,\mathrm{d}t + u'(x_0)\,f(u(x_0),x_0)$$

Et le théorème est démontré

Remarque 6 :

Dans les conditions du théorème 5.2.4, si $v : I \longrightarrow [a;b]$ est une seconde fonction dérivable, alors, la fonction F définie sur I par :

$$\begin{cases} I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & F(x) = \displaystyle\int_{v(x)}^{u(x)} f(t,x)\,\mathrm{d}t \end{cases}$$

est elle aussi dérivable sur I, et nous avons :

$$\begin{aligned} F'(x) &= \int_a^{u(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\,\mathrm{d}t + u'(x)\,f(u(x),x) - \int_a^{v(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\,\mathrm{d}t - v'(x)\,f(v(x),x) \\ &= \int_{v(x)}^{u(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\,\mathrm{d}t + u'(x)\,f(u(x),x) - v'(x)\,f(v(x),x) \end{aligned}$$

En effet, nous avons $F(x) = \displaystyle\int_a^{u(x)} f(t,x)\,\mathrm{d}t - \int_a^{v(x)} f(t,x)\,\mathrm{d}t$ et F apparaît comme la somme de 2 fonctions dérivables.

Exemple 3 :

1. Premier exemple trivial :

   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous considérons $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\sin ux}{1+u}\,\mathrm{d}u$. Etudions en la continuité, la dérivabilité et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

   Nous posons $\varphi(x,u) = \dfrac{\sin ux}{1+u}$

   $\longrightarrow$ Etude de la continuité

   - ⋆ Il est clair que φ est continue sur $[0;1] \times \mathbb{R}$ par rapport à chacune des variables
   - ⋆ D'autre part, comme $0 \leqslant u \leqslant 1$, nous avons $1 \leqslant u+1 \leqslant 2 \Longleftrightarrow \dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{1}{1+u} \leqslant 1$, nous avons :
   $$|\varphi(x,u)| = \left|\frac{\sin ux}{1+u}\right| \leqslant 1$$

   Ainsi, d'après le théorème 5.2.1 la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$

   $\longrightarrow$ Etude de la dérivabilité

   - ⋆ On sait déjà que φ est continue sur $[0;1] \times \mathbb{R}$ par rapport à chacune des variables
   - ⋆ De plus, $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}(x,u) = \dfrac{u \cos ux}{1+u}$ et nous avons
   $$\left|\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,u)\right| = \left|\frac{u\cos ux}{1+u}\right| \leqslant \frac{u}{1+u} \leqslant 1$$

   Donc d'après le théorème 5.2.2, f est dérivable et de dérivée
   $$f'(x) = \int_0^1 \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,u)\,\mathrm{d}u = \int_0^1 \frac{u\cos ux}{1+u}\,\mathrm{d}u$$

   $\longrightarrow$ Recherche de la limite de f en $+\infty$

   Nous intégrons f par parties :
   $$\left\{\begin{array}{ll} U' = \sin ux & U = \dfrac{-\cos ux}{x} \\ V = \dfrac{1}{1+u} & V' = \dfrac{-1}{(1+u)^2} \end{array}\right\}$$

   Et donc
   $$\begin{aligned} f(x) = \int_0^1 \frac{\sin ux}{1+u}\,\mathrm{d}u &= \left[\frac{-\cos ux}{x(1+u)}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{\cos ux}{x(1+u)^2}\,\mathrm{d}u = \frac{-\cos x}{2x} + \frac{1}{x} - \int_0^1 \frac{\cos ux}{x(1+u)^2}\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{2-\cos x}{2x} - \frac{1}{x}\int_0^1 \frac{\cos ux}{(1+u)^2}\,\mathrm{d}u \end{aligned}$$

   Maintenant :
   $$|f(x)| \leqslant \left|\frac{2-\cos x}{2x}\right| + \frac{1}{|x|}\int_0^1 \frac{1}{(1+u)^2}\,\mathrm{d}u \leqslant \frac{1}{|x|}\left(\frac{3}{2} + \int_0^1 \frac{1}{(1+u)^2}\,\mathrm{d}u\right)$$

   Comme $\lim\limits_{|x| \to +\infty} \dfrac{1}{|x|}\left(\dfrac{3}{2} + \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+u)^2}\,\mathrm{d}u\right) = 0$, et donc $\lim\limits_{|x| \to +\infty} |f(x)| = 0$

2. Second exemple simple, celui de la fonction $F_1(x) = \displaystyle\int_0^x (x-t) f(t)\,\mathrm{d}t$ où f est une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$.

   Les théorèmes précédents sont peu utiles ; en effet, en développant un peu, nous avons :
   $$F_1(x) = x\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^x t f(t)\,\mathrm{d}t$$

D'où, en dérivant, nous obtenons :

$$F_1'(x) = \int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t + xf(x) - xf(x) = \int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t$$

F_1 est donc dérivable 2 fois, puisque $F_1''(x) = f(x)$.
N'ayant pas d'hypothèses supplémentaires pour f, nous ne pouvons aller plus loin.

3. On démontre par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, si $F_n(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f(t)\ \mathrm{d}t$, alors, F_n est $n+1$ fois dérivable et $F_n^{(n+1)}(x) = f(x)$
   → On vient de montrer que c'est vrai pour $n = 1$
   → Supposons que c'est vrai à l'ordre n
   → Démontrons le à l'ordre $n+1$.
   Soit donc $F_{n+1}(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f(t)\ \mathrm{d}t$.
   Soit $b \geqslant 0$. Nous allons raisonner pour $(x,t) \in [0;b] \times [0;b]$
   ▷ Tout d'abord $g(x,t) = \dfrac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f(t)$ est bornée sur $[0;b] \times [0;b]$
   ▷ Ensuite, $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t) = \dfrac{(n+1)(x-t)^n}{(n+1)!} f(t) = \dfrac{(x-t)^n}{n!} f(t)$ est aussi bornée sur $[0;b] \times [0;b]$
   Alors $F_{n+1}(x)$ est bien dérivable sur $[0;b] \times [0;b]$ et $F_{n+1}'(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f(t)\ \mathrm{d}t + g(x,x) = F_n(x)$, et donc $F_{n+1}^{(n+2)}(x) = F_n^{(n+1)}(x) = f(x)$
   Ce résultat étant vrai pour tout $b \geqslant 0$, est donc vrai sur $\mathbb{R}^+$.
   Nous aurions le même résultat en choisissant $b \leqslant 0$ et le résultat est donc vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$
4. **Et puis, troisième exemple :**$F(x) = \displaystyle\int_a^x g(t)\, e^{i(t-x)}\ \mathrm{d}t$ où $t \in [a;b]$ et $x \in [c;d]$
   — Tout d'abord, pour tout $t \in [a;b]$ et tout $x \in [c;d]$, nous avons $\left|g(t)\, e^{i(t-x)}\right| \leqslant \sup\limits_{t \in [a;b]} |g(t)|$
   — Ensuite, $\dfrac{\partial}{\partial x} g(t)\, e^{i(t-x)} = -ixg(t)\, e^{i(t-x)}$ et donc $\left|\dfrac{\partial}{\partial x} g(t)\, e^{i(t-x)}\right| \leqslant \max(\{|c|\,;|d|\}) \sup\limits_{t \in [a;b]} |g(t)|$
   Et donc F est dérivable et de dérivée :

$$F'(x) = \int_a^x \frac{\partial}{\partial x} g(t)\, e^{i(t-x)}\ \mathrm{d}t = -ix \int_a^x g(t)\, e^{i(t-x)}\ \mathrm{d}t = -ixF(x)$$

5.2.5 Exercices

Exercice 7 :

Nous considérons les fonctions $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ définies par :

$$f(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2}\ \mathrm{d}t\right)^2 \text{ et } g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(t^2+1)}}{t^2+1}\ \mathrm{d}t$$

1. Démontrer que les fonctions f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}^+$ et en calculer les dérivées
2. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $f'(x) + g'(x) = 0$
3. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $f(x) + g(x) = \dfrac{\pi}{4}$
4. Donner $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\ \mathrm{d}t$

Exercice 8 :

Nous considérons la fonction $f : [-\pi;+\pi] \times]-1;+1[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} f : [-\pi;+\pi] \times]-1;+1[& \longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ \qquad\qquad (\theta, x) & \longmapsto \quad f(\theta,x) = \ln\left(1 - 2x\cos\theta + x^2\right) \end{cases}$$

Soit, maintenant $F(x) = \displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} \ln\left(1 - 2x\cos\theta + x^2\right) \mathrm{d}\theta$

1. Montrer que F est continue et dérivable sur l'intervalle $]-1; +1[$
2. Calculer F' sur l'intervalle $]-1; +1[$
3. En déduire F sur l'intervalle $]-1; +1[$

Exercice 9 :

Pour $x \in \mathbb{R}$, on définit la fonction $F(x) = \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{x\sin t} \,\mathrm{d}t$

1. Vérifier que F est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ et que F est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $F'(x) = -\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{x\sin t} \sin t \,\mathrm{d}t$
3. De même, montrer que F est 2 fois dérivable et qu'elle vérifie la relation :
$$xF''(x) + F'(x) - xF(x) = 0$$

5.3 Intégrale généralisée dépendant d'un paramètre

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.
On considère, ici, un intervalle semi-ouvert $[a, b[$ et une fonction de deux variables $f(t, x)$ où $t \in [a, b[$ et $x \in I$, à valeurs dans $\mathbb{K}$, $\mathbb{K}$ étant toujours mis pour $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
On suppose ou bien que $b = +\infty$ ou bien que $b < +\infty$ et que pour certains $x \in I$, la fonction $t \longmapsto f(t, x)$ n'est pas définie en b. On pourrait aussi étudier sur un intervalle $]a; b]$ où a est fini ou infini et pas toujours définie en a pour certains $x \in I$
On suppose que pour tout $x \in I$, la fonction $t \longmapsto f(t, x)$ est intégrable sur l'intervalle semi-ouvert $[a, b[$ au sens des intégrales généralisées et on s'intéresse aux propriétés de la fonction définie sur I par l'intégrale généralisée
$$F(x) = \int_a^b f(t, x)\,\mathrm{d}t$$
On étudie la continuité et la dérivabilité de F sur I.

Introduction

Considérons la fonction $H(y) = \displaystyle\int_0^{+\infty} ye^{-ty}\,\mathrm{d}t$. Nous allons montrer que cette fonction H est définie pour $y \geqslant 0$ et non continue en $y = 0$

Pour tout $A > 0$, $\displaystyle\int_0^A ye^{-ty}\,\mathrm{d}t = \left[-e^{-ty}\right]_0^A = 1 - e^{-Ay}$. Ainsi :

- ▷ Si $y > 0$, $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} e^{-Ay} = 0$, de telle sorte que $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \int_0^A ye^{-ty}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} ye^{-ty}\,\mathrm{d}t = 1$.
  Ainsi, si $y > 0$, $H(y) = 1$
- ▷ Si $y = 0$, pour tout $A > 0$, $\displaystyle\int_0^A ye^{-ty}\,\mathrm{d}t = 0$ et donc $H(y) = 0$

H est donc bien définie pour $y \geqslant 0$ et non continue en $y = 0$
Que faut-il donc pour que la fonction H soit continue ?

5.3.1 Théorème de continuité de l'intégrale généralisée

Soit $f : [a;b[\times I \longrightarrow \mathbb{K}$ définie par :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} f : [a;b[\times I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (t,x) & \longmapsto & f(t,x) \end{array} \right.$$

On suppose que :

1. Pour tout $t \in [a;b[$, la fonction $\varphi(x) = f(t,x)$ est continue sur I
2. Pour tout $x \in I$, la fonction $\psi(t) = f(t,x)$ est continue sur $[a;b[$
3. Il existe une fonction $\Phi : [a;b[\longrightarrow \mathbb{R}^+$ *(C'est à dire que Φ est à valeurs réelles positives)*, intégrable sur l'intervalle $[a;b[$ *(C'est à dire que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b \Phi(t)\,\mathrm{d}t$ existe)*, et telle que :

$$(\forall t \in [a;b[)\,(\forall x \in I)\,(|f(t,x)| \leqslant \Phi(t))$$

Alors

1. La fonction $\psi(t) = f(t,x)$ est intégrable sur l'intervalle semi ouvert $[a;b[$
2. La fonction F, définie pour $x \in I$ par $F(x) = \displaystyle\int_a^b f(t,x)\,\mathrm{d}t$ est continue sur I
3. Nous avons, en particulier, pour tout $x_0 \in I$

$$F(x_0) = \lim_{x \to x_0} F(x) \Longleftrightarrow \int_a^b f(t,x_0)\,\mathrm{d}t = \lim_{x \to x_0} \int_a^b f(t,x)\,\mathrm{d}t$$

De la continuité de $\varphi(x) = f(t,x)$ en $x_0 \in I$, nous pouvons écrire aussi :

$$F(x_0) = \int_a^b \lim_{x \to x_0} f(t,x)\,\mathrm{d}t = \lim_{x \to x_0} \int_a^b f(t,x)\,\mathrm{d}t$$

Ce qui est un cas d'inversion de la limite et du signe intégral $\displaystyle\int$

Démonstration

1. On sait donc que, pour tout $x \in I$, la fonction $\psi(t) = f(t,x)$ est continue sur $[a;b[$. La fonction ψ est donc intégrable sur tout segment $[a;T] \subset [a;b[$.
Ainsi, pour tout T tel que $a \leqslant T < b$, de la majoration vraie pour tout $x \in I$ et tout $t \in [a;b[$ $|f(t,x)| \leqslant \Phi(t)$, nous avons :

$$\int_a^T |f(t,x)|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^T \Phi(t)\,\mathrm{d}t$$

2. D'autre part, l'intégrale, éventuellement impropre, $\displaystyle\int_a^b \Phi(t)\,\mathrm{d}t$ existant, d'après les théorèmes sur l'intégration 4.2.1 et 4.2.2, l'intégrale $\displaystyle\int_a^b |f(t,x)|\,\mathrm{d}t$ existe.
Ce qui se traduit en disant que f est absolument intégrable sur l'intervalle $[a;b[$
3. Soit $x_0 \in I$.
Nous allons démontrer que F est continue en x_0.
Soit donc $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite d'éléments de I qui converge vers $x_0 \in I$.
Nous allons démontrer que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} F(x_n) = F(x_0)$
   (a) Pour ce faire, nous considérons le suite de fonctions $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par, pour $n \geqslant 1$ par $\psi_n(t) = f(t,x_n)$.

f étant continue par rapport à la variable $x \in I$, nous avons $\lim_{n \to +\infty} f(t, x_n) = f(t, x_0)$, et donc la suite de fonctions $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement vers la fonction ψ_0 définie, pour tout $t \in [a; b[$ par $\psi_0(t) = f(t, x_0)$

(b) D'après les hypothèses, nous avons $\psi_0(t) = f(t, x_0)$ localement intégrable et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in [a; b[$:

$$|\psi_n(t)| = |f(t, x_n)| \leqslant \Phi(t)$$

Laquelle fonction Φ est intégrable.

(c) Donc, d'après le théorème 5.1.7, nous avons $\lim_{n \to +\infty} \int_a^b \psi_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \psi_0(t)$, c'est à dire :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_a^b f(t, x_n)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t, x_0)\,\mathrm{d}t \Longleftrightarrow \lim_{n \to +\infty} F(x_n) = F(x_0)$$

F est donc continue en $x_0 \in I$. Ceci étant vrai pour tout $x_0 \in I$, F est donc continue sur I

Exemple 4 :

Voici un exemple simple.
Soit $f : [0; +\infty[\times [0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie par :

$$\begin{cases} f : [0; +\infty[\times [0; +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (t, x) & \longmapsto & f(t, x) = \dfrac{e^{-xt}}{1+t^2} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Clairement, f est continue sur le domaine $[0; +\infty[\times [0; +\infty[$

$\Rightarrow$ D'autre part, pour tout $x \geqslant 0$ et tout $t \geqslant 0$, $e^{-xt} \leqslant 1$ et donc $0 \leqslant f(t, x) \leqslant \dfrac{1}{1+t^2}$

$\Rightarrow$ Comme l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ existe, la fonction $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ est continue

Exercice 10 :

En considérant $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$, démontrer que $\lim_{n \to +\infty} F(x) = 0$

5.3.2 Théorème de dérivabilité de l'intégrale généralisée

Soit $f : [a; b[\times I \longrightarrow \mathbb{K}$ définie par :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} f : [a; b[\times I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (t, x) & \longmapsto & f(t, x) \end{array} \right.$$

On suppose que :

1. f est continue par rapport à chacune de ses variables
2. f admet une dérivée partielle par rapport à x $\dfrac{\partial f}{\partial x}(t, x)$ continue par rapport à chacune des 2 variables
3. Il existe 2 fonctions $\Phi : [a; b[\longrightarrow \mathbb{R}^+$ et $\Psi : [a; b[\longrightarrow \mathbb{R}^+$ *(C'est à dire que Φ et Ψ sont à valeurs réelles positives)*, intégrables sur l'intervalle $[a; b[$ *(C'est à dire que les intégrales $\displaystyle\int_a^b \Phi(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b \Psi(t)\,\mathrm{d}t$ existent)*, et telle que :
$$(\forall t \in [a; b[) (\forall x \in I) (|f(t, x)| \leqslant \Phi(t))$$
Et
$$(\forall t \in [a; b[) (\forall x \in I) \left(\left| \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) \right| \leqslant \Psi(t) \right)$$

Alors

1. Pour tout $x \in I$, les fonctions $f(t, x)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(t, x)$ sont intégrables sur l'intervalle semi ouvert $[a; b[$
2. La fonction F, définie pour $x \in I$ par $F(x) = \displaystyle\int_a^b f(t, x)\,\mathrm{d}t$ est continue sur I et dérivable sur I et de dérivée
$$F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t, x)\,\mathrm{d}t$$

Démonstration

1. → Par hypothèse, pour tout $x \in I$, la fonction $\psi(t) = f(t, x)$ est continue sur $[a; b[$. La fonction ψ est donc intégrable sur tout segment $[a; T] \subset [a; b[$.
Ainsi, pour tout T tel que $a \leqslant T < b$, de la majoration vraie pour tout $x \in I$ et tout $t \in [a; b[$ $|f(t, x)| \leqslant \Phi(t)$, nous avons :
$$\int_a^T |f(t, x)|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^T \Phi(t)\,\mathrm{d}t$$
→ De la même manière, pour tout $x \in I$, la fonction $\delta(t) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(t, x)$ est continue sur $[a; b[$. La fonction δ est donc intégrable sur tout segment $[a; T] \subset [a; b[$.
Ainsi, pour tout T tel que $a \leqslant T < b$, de la majoration vraie pour tout $x \in I$ et tout $t \in [a; b[$ $\left| \dfrac{\partial f}{\partial x}(t, x) \right| \leqslant \Psi(t)$, nous avons :
$$\int_a^T |f(t, x)|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^T \Phi(t)\,\mathrm{d}t$$
→ D'autre part, l'intégrale, éventuellement impropre, $\displaystyle\int_a^b \Phi(t)\,\mathrm{d}t$ existant, d'après les théorèmes sur l'intégration 4.2.1 et 4.2.2, l'intégrale $\displaystyle\int_a^b |f(t, x)|\,\mathrm{d}t$ existe.
Ce qui se traduit en disant que f est absolument intégrable sur l'intervalle $[a; b[$

→ De même, l'intégrale, éventuellement impropre, $\int_a^b \Psi(t)\ \mathrm{d}t$ existant, d'après les théorèmes sur l'intégration 4.2.1 et 4.2.2, l'intégrale $\int_a^b \left|\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\right| \mathrm{d}t$ existe.

Ce qui se traduit en disant que $\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)$ est absolument intégrable sur l'intervalle $[a;b[$

2. Montrons, maintenant que F est dérivable sur I

   (a) Soit $x_0 \in I$.
   Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'éléments de I qui converge vers $x_0 \in I$.
   Regardons le quotient $\frac{F(x_n)-F(x_0)}{x_n - x_0}$.

$$\frac{F(x_n)-F(x_0)}{x_n - x_0} = \int_a^b \frac{f(t,x_n)-f(t,x_0)}{x_n - x_0}\,\mathrm{d}t$$

   A partir de là, construisons la suite de fonctions $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $h_n(t) = \frac{f(t,x_n)-f(t,x_0)}{x_n - x_0}$

   (b) f étant dérivable par rapport à x, nous avons :

$$\lim_{n\to+\infty} h_n(t) = \lim_{n\to+\infty} \frac{f(t,x_n)-f(t,x_0)}{x_n - x_0} = \frac{\partial f}{\partial x}(t,x_0)$$

   Donc la suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers la fonction $H(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t,x_0)$

   (c) D'après le théorème des accroissements finis, il existe $\xi_n \in [x_n;x_0]$ tel que

$$\frac{f(t,x_n)-f(t,x_0)}{x_n - x_0} = \frac{\partial f}{\partial x}(t,\xi_n)$$

   (d) De l'inégalité $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\right| \leqslant \Psi(t)$, nous avons

$$\left|\frac{f(t,x_n)-f(t,x_0)}{x_n - x_0}\right| = \left|\frac{\partial f}{\partial x}(t,\xi_n)\right| \leqslant \Psi(t)$$

   C'est à dire, pour tout $t \in [a;b[$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|h_n(t)| \leqslant \Psi(t)$

   (e) En utilisant le théorème de la convergence dominée 5.1.7, nous avons :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b h_n(t)\ \mathrm{d}t = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} h_n(t)\ \mathrm{d}t$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{F(x_n)-F(x_0)}{x_n - x_0} = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t,x_0)\ \mathrm{d}t$$

   Ce qui veut dire que pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tendant vers x_0, l'expression $\left(\frac{F(x_n)-F(x_0)}{x_n - x_0}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ admet une limite, laquelle est $\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t,x_0)\ \mathrm{d}t$.
   Ceci étant vrai pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tendant vers x_0, nous en déduisons que F est dérivable en x_0 et de dérivée $F'(x_0) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t,x_0)\ \mathrm{d}t$

Ce que nous voulions

Exemple 5 :

Reprenons l'exemple $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$

⇒ Nous avons déjà démontré que F était continue sur $\mathbb{R}^+$

⇒ Maintenant, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x) = \dfrac{-te^{-xt}}{1+t^2}$. Comme, pour tout $x \geqslant 0$, $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} te^{-xt} = 0$, il existe $M > 0$ tel que, pour tout $t \geqslant 0$, $0 \leqslant te^{-xt} \leqslant M$

Et donc $\left|\dfrac{-te^{-xt}}{1+t^2}\right| \leqslant \dfrac{M}{1+t^2}$.

- ⋆ La fonction $\dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x) = \dfrac{-te^{-xt}}{1+t^2}$ est continue par rapport à chacune des 2 variables.
- ⋆ La fonction $\dfrac{M}{1+t^2}$ est intégrable sur $[0;+\infty[$

F est donc dérivable et de dérivée $F'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{-te^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$

5.4 La fonction Gamma

5.4.1 La définition de la fonction Γ

1. On définit, pour $x > 0$, la fonction Gamma (Γ) par :
$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$$
2. La fonction Γ, vérifie pour tout $x > 0$ l'équation fonctionnelle $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$
3. Nous avons, en particulier, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(n+1) = n!$
4. Et nous avons aussi, $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

<u>Démonstration</u>

Nous allons démontrer les points 2, 3 et 4

1. **Démontrons l'existence de** $\Gamma(x)$

   Soit $x > 0$

   L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt$ risque de poser des problèmes en 0 si $x - 1 < 0$; nous allons donc supposer deux cas :

   $\Longrightarrow x \in \,]0,\ 1[$ $\qquad\qquad$ $\Longrightarrow x \geqslant 1$

   (a) <u>Commençons par le cas le plus facile : $x \geqslant 1$</u>

   Il n'y a alors pas de problèmes en 0 ; il faut donc regarder en $+\infty$

   Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, nous savons que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^{\alpha}e^{-t} = 0$, en particulier $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^{x+1}e^{-t} = 0$.

   Il existe donc $A > 0$, tel que si $x > A$, alors $t^{x+1}e^{-t} < 1$, c'est à dire tel que si $x > A$, alors $t^{x-1}e^{-t} < \dfrac{1}{t^2}$.

   Comme l'intégrale $\displaystyle\int_A^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$ converge, il en est de même de l'intégrale $\displaystyle\int_A^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt$.

   Comme l'intégrale $\displaystyle\int_0^{A} t^{x-1}e^{-t}\,dt$ est l'intégrale d'une fonction continue sur le compact $[0;A]$, elle est donc convergente.

   Nous établissons ainsi, pour $x \geqslant 1$, la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt$

(b) Supposons $x \in]0,\ 1[$

L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\ dt$ n'existe que si, pour tout $X > 0$, $\displaystyle\int_0^{X} t^{x-1}e^{-t}\ dt$ et $\displaystyle\int_X^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\ dt$ convergent.

Soit donc $X > 0$

i. Regardons au voisinage de 0, c'est à dire que nous allons étudier $\displaystyle\int_0^{X} t^{x-1}e^{-t}\ dt$

Au voisinage de 0, $t^{x-1}e^{-t} \simeq t^{x-1}$, et $\displaystyle\int_0^{X} t^{x-1}\ dt$ ne converge que si et seulement si $1 - x < 1$, c'est à dire si $x > 0$; nous venons donc de montrer que $\displaystyle\int_0^{X} t^{x-1}e^{-t}\ dt$ converge

ii. Regardons la convergence de $\displaystyle\int_X^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\ dt$; il suffit de reprendre la démonstration précédente ;

Comme, $\displaystyle\int_0^{X} t^{x-1}e^{-t}\ dt$ et $\displaystyle\int_X^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\ dt$ convergent, alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\ dt$ converge.

Nous concluons donc à l'existence, pour $x > 0$ de $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\ dt$

2. **Démontrons que** $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^{x}e^{-t}\ dt$$

En faisant une intégration par parties, nous obtenons le résultat.
Il suffit de poser :

$$\left\{ \begin{array}{ll} u = t^x & u' = xt^{x-1} \\ v' = e^{-t} & v = -e^{-t} \end{array} \right\}$$

Et nous obtenons :

$$\Gamma(x+1) = \left[-e^{-t}t^x\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} xt^{x-1}\left(-e^{-t}\right)\ \mathrm{d}t = x\Gamma(x)$$

3. **Démontrons que, pour** $n \in \mathbb{N}^*$**,** $\Gamma(n+1) = n\,!$

▷ Vérifions, pour $n = 1$ que $\Gamma(1+1) = \Gamma(2) = 1$

Nous calculons $\Gamma(2) = \displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-t}\ dt$ en faisant une intégration par parties classique :

$$\left\{ \begin{array}{ll} u = t & u' = 1 \\ v' = e^{-t} & v = -e^{-t} \end{array} \right\}$$

D'où

$$\Gamma(2) = \left[-e^{-t}t\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -e^{-t}\ dt = \left[-e^{-t}\right]_0^{+\infty} = 1$$

▷ Supposons $\Gamma(n+1) = n\,!$

▷ De l'identité $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, nous tirons

$$\Gamma(n+2) = (n+1)\,\Gamma(n+1) = (n+1)\,n\,! = (n+1)\,!$$

4. **Démontrons que** $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

▷ Premièrement, nous allons utiliser l'égalité $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\ dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

▷ Ensuite, nous écrivons $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t}\, dt$

Puis nous faisons le changement de variables $u = \sqrt{t}$, d'où $\frac{du}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{t}}$, ce qui est équivalent à $dt = 2u\, du$ d'où,

$$\int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t}\, dt = \int_0^{+\infty} 2e^{-u^2}\, du = \sqrt{\pi}$$

Exercice 11 :

Démontrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2k)!}{k! \times 2^{2k}} \sqrt{\pi}$

5.4.2 Théorème

La fonction Γ est continue sur $\mathbb{R}^{*+}$

Démonstration

1. Considérons $f(x,t) = t^{x-1} e^{-t} = e^{(x-1)\ln t - t}$. f est clairement continue sur $]0;+\infty[\times]0;+\infty[$
2. Soit $\alpha > 0$ et $\beta > \alpha$. Nous allons montrer que f satisfait à l'hypothèse de domination pour $x \in [\alpha;\beta]$ intervalle compact quelconque inclus dans $\mathbb{R}^{*+}$
   (a) Pour $t \in]0;1]$, la fonction $\psi_1(x) = t^{x-1}$ est une fonction exponentielle de base $t \in]0;1]$ qui est donc décroissante [3]
   Donc, pour tout $t \in]0;1]$ et tout $x \in [\alpha;\beta]$, nous avons $t^{x-1} \leqslant t^{\alpha-1}$, de telle sorte que, pour tout $x \in [\alpha;\beta]$ et tout $t \in]0;1]$, $0 \leqslant f(x,t) \leqslant t^{\alpha-1} e^{-t}$
   La fonction $\varphi_1(t) = t^{\alpha-1} e^{-t}$ est intégrable sur $]0;1]$ [4]
   (b) Pour $t \in [1;+\infty[$, la fonction $\psi_2(x) = t^{x-1}$ est une fonction exponentielle de base $t \in [1;+\infty[$ qui est cette fois-ci croissante.
   Donc, pour tout $t \in [1;+\infty[$ et tout $x \in [\alpha;\beta]$, nous avons $t^{x-1} \leqslant t^{\beta-1}$, de telle sorte que, pour tout $x \in [\alpha;\beta]$ et tout $t \in [1;+\infty[$, nous avons $0 \leqslant f(x,t) \leqslant t^{\beta-1} e^{-t}$
   La fonction $\varphi_2(t) = t^{\beta-1} e^{-t}$ est intégrable sur $[1;+\infty[$
3. En synthèse, soit $\Phi :]0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \Phi :]0;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \Phi(t) = \left\{\begin{array}{l} t^{\alpha-1}e^{-t} \text{ si } t \in]0;1] \\ t^{\beta-1}e^{-t} \text{ si } t \in [1;+\infty[\end{array}\right. \end{array}\right.$$

   Φ est positive, continue par morceaux et, d'après l'étude précédente intégrable sur $]0;+\infty[$ et, pour tout $x \in [\alpha;\beta]$ et tout $t \in]0;+\infty[$, nous avons $0 \leqslant f(x,t) \leqslant \Phi(t)$
4. Ainsi, d'après le théorème de continuité 5.3.1, Γ est continue sur $]0;+\infty[$

Exercice 12 :

Démontrer qu'au voisinage de 0, $\Gamma(x) \underset{x \to 0}{\approx} \frac{1}{x}$

5.4.3 Théorème

La fonction Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0;+\infty[$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x \in]0;+\infty[$, nous avons $\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^k\, t^{x-1} e^{-t}\, \mathrm{d}t$

3. La dérivée de $\psi_1(x) = t^{x-1}$ est $\psi_1'(x) = t^{x-1}(\ln t)$, laquelle est négative puisque $t \in]0;1]$
4. En fait, $\varphi_1(t) = t^{\alpha-1}e^{-t}$ est intégrable sur tout intervalle $[\varepsilon;1]$ où $\varepsilon > 0$, donc sur $]0;1]$

Démonstration

1. Montrons que Γ est dérivable sur $]0;+\infty[$ et que $\Gamma'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} (\ln t)\, t^{x-1} e^{-t}\, \mathrm{d}t$

   Considérons toujours $f(x,t) = t^{x-1}e^{-t}$; alors, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = (\ln t)\, t^{x-1}e^{-t} = \ln t f(x,t)$

   Nous avons $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ continue sur $]0;+\infty[\times]0;+\infty[$, et d'après l'étude 5.4.2, nous avons, pour tout $t \in]0;+\infty[$,
   $$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant |\ln t|\, \Phi(t)$$

   ▷ Donc, si $t \in]0;1]$
   Remarquons que $t^{1-\frac{\alpha}{2}} |\ln t|\, \Phi(t) = t^{\frac{\alpha}{2}} |\ln t|\, e^{-t}$
   Comme $\lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t>0}} t^{\frac{\alpha}{2}} |\ln t|\, e^{-t} = 0$, nous avons aussi $\lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t>0}} t^{1-\frac{\alpha}{2}} |\ln t|\, \Phi(t) = 0$ et donc
   $$\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \frac{|\ln t|\, \Phi(t)}{\frac{1}{t^{1-\frac{\alpha}{2}}}} = 0$$
   Au voisinage de 0, la fonction $|\ln t|\, \Phi(t)$ est donc négligeable devant la fonction $\dfrac{1}{t^{1-\frac{\alpha}{2}}}$, c'est à dire $|\ln t|\, \Phi(t) \in o\left(\dfrac{1}{t^{1-\frac{\alpha}{2}}}\right)$.
   Comme l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^{1-\frac{\alpha}{2}}}$ existe, il en est de même de $\displaystyle\int_0^1 |\ln t|\, \Phi(t)\, \mathrm{d}t$

   ▷ Et maintenant, si $t \in [1;+\infty[$
   Regardons que $t^2 |\ln t|\, \Phi(t) = t^{\beta+1} |\ln t|\, e^{-t} = \left(\dfrac{|\ln t|}{t}\right)\left(t^{\beta} e^{-t}\right)$
   Comme $\lim\limits_{t\to+\infty} \left(\dfrac{|\ln t|}{t}\right)\left(t^{\beta}e^{-t}\right) = 0$, nous avons aussi $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2 |\ln t|\, \Phi(t) = 0$
   Comme tout à l'heure, nous pouvons conclure qu'au voisinage de $+\infty$, la fonction $|\ln t|\, \Phi(t)$ est négligeable devant la fonction $\dfrac{1}{t^2}$, c'est à dire $|\ln t|\, \Phi(t) \in o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.
   Comme l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ existe, il en est de même de $\displaystyle\int_1^{+\infty} |\ln t|\, \Phi(t)\, \mathrm{d}t$

   Ainsi, d'après le théorème 5.3.2, la fonction Γ est dérivable sur $]0;+\infty[$ et de dérivée
   $$\Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)\, t^{x-1} e^{-t}\, \mathrm{d}t$$
   D'autre part, nous sommes aussi dans les conditions du théorème 5.3.1, nous pouvons donc conclure que Γ' est continue et que Γ est donc de classe $\mathcal{C}^1$

2. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
   ▷ La fonction $f(x,t) = t^{x-1}e^{-t}$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$, et nous démontrons facilement que
   $$\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t) = (\ln t)^k\, t^{x-1} e^{-t} = (\ln t)^k f(x,t)$$
   Nous avons $\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ continue sur $]0;+\infty[\times]0;+\infty[$ et nous avons toujours
   $$\left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| \leqslant |\ln t|^k\, \Phi(t)$$
   ▷ Avec les mêmes démonstrations que tout à l'heure, nous démontrons que :
   $\longrightarrow$ Si $t \in]0;1]$, alors $|\ln t|^k\, \Phi(t) \in o\left(\dfrac{1}{t^{1-\frac{\alpha}{2}}}\right)$

$\longrightarrow$ Si $t \in [1; +\infty[$, alors $|\ln t|^k \Phi(t) \in o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$

Et donc que la fonction $|\ln t|^k \Phi(t)$ est intégrable sur $]0; +\infty[$

3. Nous allons démontrer, par une récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$ que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, Γ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $]0; +\infty[$.
Soit donc $P(k)$ la propriété dépendante de $k \in \mathbb{N}^*$ définie par :

$$\begin{aligned} &P(k) : \text{ Pour tout } k \in \mathbb{N}^* \text{ la fonction } \Gamma \text{ est de classe } \mathcal{C}^k \\ &\text{et, pour tout } x > 0 \quad \Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^k t^{x-1} e^{-t} \, \mathrm{d}t \end{aligned}$$

▶ $P(1)$ est vraie puisque nous avons démontré que Γ était de classe $\mathcal{C}^1$ et que

$$\Gamma^{(1)}(x) = \Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t) t^{x-1} e^{-t} \, \mathrm{d}t$$

▶ Supposons maintenant que $P(k)$ soit vraie

▶ Démontrons maintenant $P(k+1)$
Nous allons démontrer que $\Gamma^{(k+1)}$ est de classe $\mathcal{C}^1$, c'est à dire que $\Gamma^{(k+1)}$ est dérivable et de dérivée continue et donc que Γ est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$.
Remarquons aussi que $\Gamma^{(k+1)} = \left(\Gamma^{(k)}\right)'$.
Nous pouvons toujours écrire $\Gamma^{(k+1)}(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} (\ln t)^{k+1} f(x,t) \, \mathrm{d}t$ et posons, pour simplifier, $\psi_{k+1}(t) = (\ln t)^{k+1} f(x,t)$

⋆ Nous avons :

$$\frac{\partial \psi_{k+1}}{\partial x}(x,t) = (\ln t)^{k+1} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = (\ln t)^{k+2} f(x,t) = \frac{\partial^{k+2} f}{\partial x^{k+2}}(x,t) = \psi_{k+2}(t)$$

⋆ Nous avons démontré que $\left|\dfrac{\partial^{k+2} f}{\partial x^{k+2}}(x,t)\right| \leqslant |\ln t|^{k+2} \Phi(t)$ et que la fonction $|\ln t|^{k+2} \Phi(t)$ était intégrable sur $\mathbb{R}^{*+}$

⋆ Comme les hypothèses des théorèmes 5.3.1 et 5.3.2 sont vérifiées, nous pouvons donc affirmer que $\Gamma^{(k+1)}$ est dérivable et de dérivée continue et donc que $\Gamma^{(k+1)}$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

⋆ $P(k+1)$ est donc vérifiée

En conclusion, nous venons d'établir que Γ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}^{*+}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, donc que Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{*+}$

En remarquant que $\Gamma^{(0)} = \Gamma$, nous pouvons écrire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma^{(k)}(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} (\ln t)^k t^{x-1} e^{-t} \, \mathrm{d}t$

Exercice 13 :

1. Montrer que Γ, est convexe et étudier les variations de Γ
2. En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} \Gamma(x)$

5.4.4 Proposition

Nous avons $\Gamma(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} \displaystyle\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} \, \mathrm{d}t$

Démonstration

Nous allons considérer la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définies par $f_n(t) = \left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n t^{x-1} 1_{[0;n]}(t)$ où $1_{[0;n]}$ est la fonction indicatrice de l'intervalle $[0; n]$

1. **Résultats préliminaires simples**
   - ▷ Première chose, c'est que pour $0 \leqslant x \leqslant 1$ nous avons $\ln(1-x) \leqslant -x$, et donc, pour $t \in [0;n]$, puisque $0 \leqslant \dfrac{t}{n} \leqslant 1$, nous avons $\ln\left(1-\dfrac{t}{n}\right) \leqslant -\dfrac{t}{n}$
   - ▷ Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons
   $$0 \leqslant \left(1-\frac{t}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1-\frac{t}{n}\right)} \leqslant e^{n\times\left(-\frac{t}{n}\right)} = e^{-t}$$
   Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant \left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n \leqslant e^{-t}$
   - ▷ Ensuite, il est bien connu que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n = e^{-t}$
2. La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers $g(t) = t^{x-1}e^{-t}$. g est localement intégrable sur $\mathbb{R}^{*+}$, et, de plus $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$ existe.
3. D'autre part, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons $0 \leqslant f_n(t) \leqslant t^{x-1}e^{-t}$

Donc, d'après le corollaire du théorème d'Arzéla 5.1.7, nous avons $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$, c'est à dire

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t \Longleftrightarrow \lim_{n\to+\infty}\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,\mathrm{d}t = \Gamma(x)$$

Ce que nous voulions

5.4.5 Corollaire

Nous avons, pour $x > 0$, $\displaystyle\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty}\frac{n^x \times n!}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^x\times n!}{\prod_{k=0}^{n}(x+k)}\right)$

Démonstration

Reconsidérons la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par $f_n(t) = \left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\mathbb{1}_{[0;n]}(t)$.
Nous avons démontré que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,\mathrm{d}t = \Gamma(x)$$

Nous allons donc étudier *(voire la calculer)* l'intégrale $\displaystyle\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,\mathrm{d}t$

1. **Nous allons commencer par faire un changement de variable**
   Nous posons donc $u = \dfrac{t}{n} \Longleftrightarrow t = un$ et donc $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{n} \Longleftrightarrow \mathrm{d}t = n\,\mathrm{d}u$. D'où :
   $$\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 (1-u)^n (nu)^{x-1}\,n\,\mathrm{d}u = n^x\int_0^1 (1-u)^n u^{x-1}\,\mathrm{d}u$$
2. **Nous allons, plusieurs fois, intégrer par parties l'intégrale** $\displaystyle\int_0^1 (1-u)^n u^{x-1}\,\mathrm{d}u$
   ⇒ Une première intégration par parties :
   $$\begin{bmatrix} u = (1-u)^n & u' = -n(1-u)^{n-1} \\ v' = u^{x-1} & v = \dfrac{u^x}{x}\end{bmatrix}$$

Et donc :

$$\begin{aligned}\int_0^1 (1-u)^n u^{x-1}\,\mathrm{d}u &= \left[\frac{u^x}{x}\times(1-u)^n\right]_0^1 - \int_0^1 -n(1-u)^{n-1}\frac{u^x}{x}\,\mathrm{d}u\\ &= \frac{n}{x}\int_0^1 (1-u)^{n-1}u^x\,\mathrm{d}u\end{aligned}$$

D'où, nous obtenons $\displaystyle\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,\mathrm{d}t = n^x\int_0^1 (1-u)^n u^{x-1}\,\mathrm{d}u = n^x\times\frac{n}{x}\int_0^1 (1-u)^{n-1}u^x\,\mathrm{d}u$

$\Rightarrow$ Pour fixer les esprits, faisons une seconde intégration par parties ; intégrons donc par parties $\displaystyle\int_0^1 (1-u)^{n-1}u^x\,\mathrm{d}u$:

$$\left[\begin{array}{ll} u=(1-u)^{n-1} & u'=-(n-1)(1-u)^{n-2}\\ v'=u^x & v=\dfrac{u^{x+1}}{x+1}\end{array}\right]$$

Et donc :

$$\begin{aligned}\int_0^1 (1-u)^{n-1}u^x\,\mathrm{d}u &= \left[\frac{u^{x+1}}{x+1}\times(1-u)^{n-1}\right]_0^1 - \int_0^1 -(n-1)(1-u)^{n-2}\frac{u^{x+1}}{x+1}\,\mathrm{d}u\\ &= \frac{n-1}{x+1}\int_0^1 (1-u)^{n-2}u^{x+1}\,\mathrm{d}u\end{aligned}$$

D'où $\displaystyle\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,\mathrm{d}t = n^x\int_0^1 (1-u)^n u^{x-1}\,\mathrm{d}u = n^x\times\frac{n}{x}\times\frac{n-1}{x+1}\int_0^1 (1-u)^{n-2}u^{x+1}\,\mathrm{d}u$

$\Rightarrow$ A la p-ième intégration par parties, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,\mathrm{d}t &= n^x\int_0^1 (1-u)^n u^{x-1}\,\mathrm{d}u\\ &= n^x\times\frac{n(n-1)\cdots(n-(p-1))}{x(x+1)\cdots(x+(p-1))}\int_0^1 (1-u)^{n-p}u^{x+(p-1)}\,\mathrm{d}u\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ A la n-ième et dernière intégration par parties, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,\mathrm{d}t &= n^x\int_0^1 (1-u)^n u^{x-1}\,\mathrm{d}u\\ &= n^x\times\frac{n(n-1)\cdots(n-(n-2))(n-(n-1))}{x(x+1)\cdots(x+(n-1))}\int_0^1 u^{x+(n-1)}\,\mathrm{d}u\\ &= \frac{n^x\times n!}{x(x+1)\cdots(x+(n-1))}\left[\frac{u^{x+n}}{x+n}\right]_0^1\\ &= \frac{n^x\times n!}{x(x+1)\cdots(x+(n-1))(x+n)}\end{aligned}$$

En conclusion $\displaystyle\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,\mathrm{d}t = \frac{n^x\times n!}{x(x+1)\cdots(x+(n-1))(x+n)}$

3. Comme $\displaystyle\Gamma(x)=\lim_{n\to+\infty}\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,\mathrm{d}t$, nous avons bien $\displaystyle\Gamma(x)=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^x\times n!}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}$

Exercice 14 :

Démontrer la formule de Weierstrass :

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = xe^{\gamma x}\prod_{k=1}^{+\infty} e^{-\frac{x}{k}}\left(1+\frac{x}{k}\right)$$

où $x>0$ et γ la constante d'Euler (i.e. $\displaystyle\gamma=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n$)

5.4.6 Proposition

La fonction $\ln(\Gamma)$ est convexe sur $]0;+\infty[$

Démonstration

La démonstration utilise l'inégalité de Jordan-Hölder

Rappel de l'inégalité de Jordan-Hölder

Soient $p>0$ et $q>0$ 2 réels conjugués, c'est à dire tels que $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$. Soient aussi 2 fonctions f et g 2 fonctions numériques d'une variable réelle telles que $\displaystyle\int_0^{+\infty}(f(t))^p\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty}(g(t))^q\,\mathrm{d}t$ existent. Alors :

$\displaystyle\int_0^{+\infty}f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t$ existe et nous avons l'inégalité, dite inégalité de Jordan-Hölder :

$$\int_0^{+\infty}f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t\leqslant\left(\int_0^{+\infty}(f(t))^p\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}\times\left(\int_0^{+\infty}(g(t))^q\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{q}}$$

Soient donc $p>0$ et $q>0$ 2 réels conjugués, tels que $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$.
Montrer que $\ln(\Gamma)$ est convexe est montrer que, pour tout $x>0$ et tout $y>0$,

$$\ln\left(\Gamma\left(\frac{x}{p}+\frac{y}{q}\right)\right)\leqslant\frac{1}{p}\ln(\Gamma(x))+\frac{1}{q}\ln(\Gamma(x))$$

Faisons maintenant le calcul de $\Gamma\left(\dfrac{x}{p}+\dfrac{y}{q}\right)$:

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{x}{p}+\frac{y}{q}\right)&=\int_0^{+\infty}t^{\left(\frac{x}{p}+\frac{y}{q}\right)-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}t^{\left(\frac{x}{p}+\frac{y}{q}\right)-\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)}e^{-t\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)}\,\mathrm{d}t\\&=\int_0^{+\infty}\left(t^{\frac{x-1}{p}}e^{-\frac{t}{p}}\right)\left(t^{\frac{y-1}{q}}e^{-\frac{t}{q}}\right)\mathrm{d}t\\&=\int_0^{+\infty}(f(x,t))^{\frac{1}{p}}(f(y,t))^{\frac{1}{q}}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Jordan-Hölder, nous avons :

$$\int_0^{+\infty}(f(x,t))^{\frac{1}{p}}(f(y,t))^{\frac{1}{q}}\,\mathrm{d}t\leqslant\left(\int_0^{+\infty}\left((f(x,t))^{\frac{1}{p}}\right)^p\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^{+\infty}\left((f(y,t))^{\frac{1}{q}}\right)^q\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\int_0^{+\infty}(f(x,t))^{\frac{1}{p}}(f(y,t))^{\frac{1}{q}}\,\mathrm{d}t\leqslant\left(\int_0^{+\infty}f(x,t)\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^{+\infty}f(y,t)\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\Gamma\left(\frac{x}{p}+\frac{y}{q}\right)\leqslant(\Gamma(x))^{\frac{1}{p}}(\Gamma(y))^{\frac{1}{q}}$$

En passant au logarithme, nous avons $\ln\left(\Gamma\left(\dfrac{x}{p}+\dfrac{y}{q}\right)\right)\leqslant\dfrac{1}{p}\ln(\Gamma(x))+\dfrac{1}{q}\ln(\Gamma(y))$
Ce que nous voulions

Remarque 7 :

2 remarques très élémentaires :

1. En passant, nous avons démontré que, pour tout $\lambda > 0$ et tout $\mu > 0$ tels que $\lambda + \mu = 1$, et tout $x > 0$ et tout $y > 0$ nous avons :
$$\Gamma\left(\lambda x + \mu y\right) = \int_0^{+\infty} \left(f\left(x,t\right)\right)^{\lambda} \left(f\left(y,t\right)\right)^{\mu} \, \mathrm{d}t$$
2. De l'identité $\Gamma\left(x+1\right) = x\Gamma\left(x\right)$, nous tirons $\ln\left(\Gamma\left(x+1\right)\right) = \ln\left(\Gamma\left(x\right)\right) + \ln x$

5.4.7 Proposition

1. Pour $x > 0$ et $y > 0$, nous appelons **fonction béta d'Euler** l'expression :
$$B\left(x,y\right) = \int_0^1 t^{x-1}\left(1-t\right)^{y-1} \, \mathrm{d}t$$
2. Nous avons $B\left(x,y\right) = \displaystyle\int_0^1 t^{x-1}\left(1-t\right)^{y-1} \, \mathrm{d}t = \frac{\Gamma\left(x\right)\Gamma\left(y\right)}{\Gamma\left(x+y\right)}$

Démonstration

Tout d'abord, pour $x > 0$ et $y > 0$, nous avons :

$$\begin{aligned}\Gamma\left(x\right)\Gamma\left(y\right) &= \left(\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t} \, \mathrm{d}t\right)\left(\int_0^{+\infty} u^{y-1}e^{-u} \, \mathrm{d}u\right) \\ &= \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-(t+u)}t^{x-1}u^{y-1} \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}u\end{aligned}$$

Nous faisons les changements de variables :

$$\left\{\begin{array}{l} t+u = r \\ t = rw \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} u = r\left(1-w\right) \\ t = rw \end{array}\right.$$

D'où nous obtenons le déterminant jacobien :

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial r} & \dfrac{\partial u}{\partial w} \\ \dfrac{\partial t}{\partial r} & \dfrac{\partial t}{\partial w} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-w & -r \\ w & r \end{vmatrix} = r$$

Donc, $\mathrm{d}t \, \mathrm{d}u = r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}w$. Ainsi :

$$\begin{aligned}\Gamma\left(x\right)\Gamma\left(y\right) &= \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-(t+u)}t^{x-1}u^{y-1} \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}u \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^{+\infty} e^{-r}\left(rw\right)^{x-1}\left(r\left(1-w\right)\right)^{y-1} r \, \mathrm{d}r\right) \mathrm{d}w \\ &= \left(\int_0^1 w^{x-1}\left(1-w\right)^{y-1} \, \mathrm{d}w\right)\left(\int_0^{+\infty} r^{x+y}e^{-r} \, \mathrm{d}r\right) \\ &= B\left(x,y\right)\Gamma\left(x+y\right)\end{aligned}$$

Nous avons donc : $B\left(x,y\right) = \dfrac{\Gamma\left(x\right)\Gamma\left(y\right)}{\Gamma\left(x+y\right)}$

Remarque 8 :

1. Faisons, dans l'intégrale $\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t$, le changement de variable $t=\sin^2\theta$.

   Alors, $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\theta}=2\sin\theta\cos\theta \iff \mathrm{d}t=2\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$ de telle sorte que :

   $$B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\theta)^{2x-2}(\cos\theta)^{2y-2}\,2\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$$

   Et nous avons donc, aussi, $B(x,y)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\theta)^{2x-1}(\cos\theta)^{2y-1}\,\mathrm{d}\theta$.

   En particulier, $2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\theta)^{2x-1}(\cos\theta)^{2y-1}\,\mathrm{d}\theta=\dfrac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$

   En particulier, pour $x=y=\dfrac{1}{2}$, nous avons :

   $$\frac{\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2}{\Gamma(1)}=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta=\pi$$

   Comme $\Gamma(1)=1$, nous avons $\left(\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)\right)^2=\pi\iff\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$

2. Faisons, maintenant, dans l'intégrale $\Gamma(x)=\int_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$, le changement de variable $t=s^2$.

   Alors $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}=2s\iff\mathrm{d}t=2s\,\mathrm{d}s$
   Et donc :

   $$\Gamma(x)=\int_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}s^{2x-2}e^{-s^2}2s\,\mathrm{d}s=2\int_0^{+\infty}s^{2x-1}e^{-s^2}\,\mathrm{d}s$$

   En particulier, pour $x=\dfrac{1}{2}$, nous avons $\sqrt{\pi}=\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)=2\int_0^{+\infty}e^{-s^2}\,\mathrm{d}s\iff\int_0^{+\infty}e^{-s^2}\,\mathrm{d}s=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$

   De la parité de la fonction e^{-s^2}, nous pouvons aussi écrire que

   $$2\int_0^{+\infty}e^{-s^2}\,\mathrm{d}s=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-s^2}\,\mathrm{d}s=\sqrt{\pi}$$

Exercice 15 :

1. Montrer que, pour tout $x>0$ et tout $y>0$, nous avons $B(x,y)=B(y,x)$
2. Montrer que, pour $y>0$, $B(1,y)=\dfrac{1}{y}$
3. Montrer que, pour tout $x>0$ et tout $y>0$, nous avons $B(x+1,y)=\dfrac{x}{y}B(x,y+1)$
4. Montrer que, pour tout $x>0$ et tout $y>0$, nous avons $B(x,y)=B(x,y+1)+B(x+1,y)$
5. Montrer que, pour tout $x>0$ et tout $y>0$, nous avons $B(x+1,y)=\dfrac{x}{x+y}B(x,y)$
6. Montrer que, pour tout $x>0$, nous avons $B(x,x)=2^{1-2x}B\left(x,\dfrac{1}{2}\right)$
7. Montrer que, pour tout $x>0$, nous avons $\Gamma(2x)=\dfrac{2^{2x-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(x)\Gamma\left(x+\dfrac{1}{2}\right)$

5.4.8 Formule de Stirling

Nous avons $\Gamma(x+1) \underset{+\infty}{\approxeq} \left(\frac{x}{e}\right)^x \sqrt{2\pi x}$, c'est à dire $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\Gamma(x+1)}{\left(\frac{x}{e}\right)^x \sqrt{2\pi x}} = 1$

Démonstration

Nous avons $\Gamma(x+1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^x e^{-t}\,\mathrm{d}t$

Nous allons démontrer ce théorème en 2 temps :

- $\rightarrow$ Nous allons tout d'abord montrer l'équivalence, en $+\infty$ $\Gamma(x+1) \underset{+\infty}{\approxeq} \displaystyle\int_0^{2x} t^x e^{-t}\,\mathrm{d}t$
- $\rightarrow$ Puis, nous allons étudier $\lim\limits_{x\to+\infty} \displaystyle\int_0^{2x} t^x e^{-t}\,\mathrm{d}t$

1. **Montrons que nous avons, en $+\infty$, $\Gamma(x+1) \underset{+\infty}{\approxeq} \displaystyle\int_0^{2x} t^x e^{-t}\,\mathrm{d}t$**

   Soit $x > 0$.

   Tout d'abord, nous avons $\Gamma(x+1) = \displaystyle\int_0^{2x} t^x e^{-t}\,\mathrm{d}t + \int_{2x}^{+\infty} t^x e^{-t}\,\mathrm{d}t$

   $\Longrightarrow$ Faisons, dans l'intégrale $\displaystyle\int_{2x}^{+\infty} t^x e^{-t}\,\mathrm{d}t$ le changement de variables $t = u + x \Longleftrightarrow u = t - x$; alors, $\mathrm{d}t = \mathrm{d}u$ et nous avons :

$$\int_{2x}^{+\infty} t^x e^{-t}\,\mathrm{d}t = \int_x^{+\infty} (u+x)^x e^{-(u+x)}\,\mathrm{d}u = e^{-x} \int_x^{+\infty} (u+x)^x e^{-u}\,\mathrm{d}u$$

   Comme $u \geqslant x$, nous avons $u + x \leqslant 2u$ et donc :

$$\int_{2x}^{+\infty} t^x e^{-t}\,\mathrm{d}t = e^{-x} \int_x^{+\infty} (u+x)^x e^{-u}\,\mathrm{d}u \leqslant e^{-x} \int_x^{+\infty} (2u)^x e^{-u}\,\mathrm{d}u = 2^x e^{-x} \int_x^{+\infty} u^x e^{-u}\,\mathrm{d}u$$

   Et nous avons donc l'encadrement :

$$\int_{2x}^{+\infty} t^x e^{-t}\,\mathrm{d}t \leqslant \left(\frac{2}{e}\right)^x \int_x^{+\infty} u^x e^{-u}\,\mathrm{d}u \leqslant \left(\frac{2}{e}\right)^x \int_0^{+\infty} u^x e^{-u}\,\mathrm{d}u = \left(\frac{2}{e}\right)^x \Gamma(x+1)$$

   $\Longrightarrow$ Ainsi, nous avons :

$$0 \leqslant \Gamma(x+1) \leqslant \int_0^{2x} t^x e^{-t}\,\mathrm{d}t + \left(\frac{2}{e}\right)^x \Gamma(x+1)$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$0 \leqslant \Gamma(x+1) - \int_0^{2x} t^x e^{-t}\,\mathrm{d}t \leqslant \left(\frac{2}{e}\right)^x \Gamma(x+1)$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$0 \leqslant 1 - \frac{\displaystyle\int_0^{2x} t^x e^{-t}\,\mathrm{d}t}{\Gamma(x+1)} \leqslant \left(\frac{2}{e}\right)^x$$

   Comme $\dfrac{2}{e} < 1$, nous avons $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{2}{e}\right)^x = 0$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\displaystyle\int_0^{2x} t^x e^{-t}\,\mathrm{d}t}{\Gamma(x+1)} = 1$.

   D'où $\Gamma(x+1) \underset{+\infty}{\approxeq} \displaystyle\int_0^{2x} t^x e^{-t}\,\mathrm{d}t$

2. **Etude de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{2x} t^x e^{-t}\,\mathrm{d}t$**

$\Longrightarrow$ Soit $x > 0$ fixé.

Faisons le changement de variable habituel $t = u + x \Longleftrightarrow u = t - x$ avec $\mathrm{d}t = \mathrm{d}u$. Alors :

$$\begin{aligned}\int_0^{2x} t^x e^{-t}\,\mathrm{d}t &= \int_{-x}^{x} (u+x)^x e^{-(u+x)}\,\mathrm{d}u \\ &= e^{-x}\int_{-x}^{x}(u+x)^x e^{-u}\,\mathrm{d}u \\ &= e^{-x}x^x\int_{-x}^{x}\left(1+\frac{u}{x}\right)^x e^{-u}\,\mathrm{d}u = \left(\frac{x}{e}\right)^x I(x)\end{aligned}$$

Où nous avons posé $I(x) = \displaystyle\int_{-x}^{x}\left(1+\frac{u}{x}\right)^x e^{-u}\,\mathrm{d}u$

$\Longrightarrow$ Posons $\psi(u,x) = \left(1+\dfrac{u}{x}\right)^x e^{-u}1_{]-x;x[}(u)$. Nous avons bien, alors $I(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(u,x)\,\mathrm{d}u$

$\Longrightarrow$ Nous allons démontrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{I(x)}{\sqrt{x}} = \sqrt{2\pi}$

Pour ce faire, nous allons utiliser le théorème de convergence dominée 5.1.7 en y allant à petits pas.

- $\star$ Pour $u \in]-x;x[$, nous avons $\left|\dfrac{u}{x}\right| < 1$, et, de plus :

$$\left(1+\frac{u}{x}\right)^x e^{-u} = e^{x\ln\left(1+\frac{u}{x}\right)}\times e^{-u} = e^{x\ln\left(1+\frac{u}{x}\right)-u} = e^{x\left(\ln\left(1+\frac{u}{x}\right)-\frac{u}{x}\right)}$$

- $\star$ Si $|v| < 1$, c'est à dire $v \in]-1;+1[$, nous avons $\ln(1+v) - v \leqslant \dfrac{-v^2}{6}$ [5]
- $\star$ Comme $\left|\dfrac{u}{x}\right| < 1$, nous avons

$$\ln\left(1+\frac{u}{x}\right) - \frac{u}{x} \leqslant \frac{-u^2}{6x^2} \text{ puis } x\left(\ln\left(1+\frac{u}{x}\right)-\frac{u}{x}\right) \leqslant \frac{-u^2}{6x}$$

Ainsi, pour tout $u \in \mathbb{R}$, nous avons $|\psi(u,x)| \leqslant e^{\frac{-u^2}{6x}}$

- $\star$ Nous avons $I(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(u,x)\,\mathrm{d}u = \int_{-x}^{x}\left(1+\frac{u}{x}\right)^x e^{-u}\,\mathrm{d}u.$

Faisons le changement de variables $u = y\sqrt{x} \Longleftrightarrow y = \dfrac{u}{\sqrt{x}}$ avec $\mathrm{d}u = \sqrt{x}\,\mathrm{d}y$ et nous avons alors :

$$\int_{-x}^{x}\left(1+\frac{u}{x}\right)^x e^{-u}\,\mathrm{d}u = \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}}\left(1+\frac{y}{\sqrt{x}}\right)^x e^{-y\sqrt{x}}\sqrt{x}\,\mathrm{d}y$$

En posant $\nu(y,x) = \left(1+\dfrac{y}{\sqrt{x}}\right)^x e^{-y\sqrt{x}}1_{]-\sqrt{x};\sqrt{x}[}(y) = e^{x\left(\ln\left(1+\frac{y}{\sqrt{x}}\right)-\frac{y}{\sqrt{x}}\right)}1_{]-\sqrt{x};\sqrt{x}[}(y)$, nous avons :

$$I(x) = \int_{-\infty}^{+\infty}\nu(y,x)\sqrt{x}\,\mathrm{d}y \Longleftrightarrow \frac{I(x)}{\sqrt{x}} = \int_{-\infty}^{+\infty}\nu(y,x)\,\mathrm{d}y$$

Nous avons $|\nu(y,x)| = |\psi(y\sqrt{x},x)| \leqslant e^{\frac{-y^2}{6}}$.

La fonction $e^{\frac{-y^2}{6}}$ est localement intégrable et positive sur $\mathbb{R}$ et la fonction ν est majorée indépendamment de x

- $\star$ Nous avons, lorsque x est voisin de $+\infty$:

$$\ln\left(1+\frac{y}{\sqrt{x}}\right) = \left(\frac{y}{\sqrt{x}}\right) - \frac{1}{2}\times\left(\frac{y}{\sqrt{x}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{x}}\right)^2\varepsilon\left(\frac{y}{\sqrt{x}}\right) = \frac{y}{\sqrt{x}} + \frac{y^2}{2x} + \frac{y^2}{x}\varepsilon\left(\frac{y}{\sqrt{x}}\right)$$

5. Pour le démontrer, il suffit d'étudier la fonction auxiliaire $\varphi(v) = \ln(1+v) - v + \dfrac{v^2}{6}$; l'expression $\dfrac{v^2}{6}$ vient du développement de $\ln(1+v) - v$ en série entière

Et donc
$$\ln\left(1+\frac{y}{\sqrt{x}}\right)-\frac{y}{\sqrt{x}}=-\frac{y^2}{2x}+\frac{y^2}{x}\varepsilon\left(\frac{y}{\sqrt{x}}\right)$$
Et, pour finir,
$$x\left(\ln\left(1+\frac{y}{\sqrt{x}}\right)-\frac{y}{\sqrt{x}}\right)=-\frac{y^2}{2}+y^2\varepsilon\left(\frac{y}{\sqrt{x}}\right)$$
De telle sorte que $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\ln\left(1+\frac{y}{\sqrt{x}}\right)-\frac{y}{\sqrt{x}}\right)=-\frac{y^2}{2}$,

et, par continuité, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x\left(\ln\left(1+\frac{y}{\sqrt{x}}\right)-\frac{y}{\sqrt{x}}\right)}=e^{-\frac{y^2}{2}}$, c'est à dire que
$$\lim_{x\to+\infty}\nu(y,x)=e^{-\frac{y^2}{2}}$$

⋆ Nous sommes donc dans les hypothèses du théorème 5.1.7 :
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\nu(y,x)=e^{-\frac{y^2}{2}}$
- La fonction $e^{-\frac{y^2}{2}}$ est localement intégrable sur $\mathbb{R}$
- Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $|\nu(y,x)|\leqslant e^{-\frac{y^2}{6}}$

Alors, $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\nu(y,x)\,\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{y^2}{2}}\,\mathrm{d}y$.

Par le changement de variable facile $u=\frac{y}{\sqrt{2}}$, nous démontrons que $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{y^2}{2}}\,\mathrm{d}y=\sqrt{2\pi}$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{I(x)}{\sqrt{x}}=\sqrt{2\pi}$, c'est à dire que $I(x)\underset{+\infty}{\approxeq}\sqrt{2\pi x}$

Comme $\Gamma(x+1)=\left(\frac{x}{e}\right)^x I(x)$, par transitivité de l'équivalence, nous avons $\Gamma(x+1)\underset{+\infty}{\approxeq}\left(\frac{x}{e}\right)^x\sqrt{2\pi x}$,

c'est à dire, de manière équivalente $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\Gamma(x+1)}{\left(\frac{x}{e}\right)^x\sqrt{2\pi x}}=1$

Remarque 9 :

En particulier si $x\in\mathbb{N}^*$, $\Gamma(n+1)\underset{+\infty}{\approxeq}\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}$, c'est à dire $n!\underset{+\infty}{\approxeq}\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$, laquelle est connue sous le nom de **Formule de Stirling**

5.5 Produit de convolution de 2 fonctions

5.5.1 Définition de $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$

On appelle $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$, continues par morceaux telles que $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|\,\mathrm{d}t$ existe

Remarque 10 :

1. Si ces fonctions sont continues par morceaux, elles sont donc localement intégrables
2. Ce n'est pas la définition classique ; celle qui est donnée ici entre dans le cadre de l'intégrale de Riemann

5.5.2 Définition formelle de la convolution de 2 fonctions

On appelle produit de convolution de deux fonctions $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ et $g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ la fonction $f \star g$ définie par :

$$(f \star g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-u)\, g(u)\, du$$

Remarque 11 :

Il s'agit pour l'instant plus d'une déclaration d'intention que d'une définition puisque la définition de l'intégrale peut poser problème.

Exemple 6 :

1. On considère la fonction indicatrice de l'intervalle $[0;1]$ appelée $1_{[0;1]}$ et définie par :

$$1_{[0;1]}(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in [0;1] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Posons $f = 1_{[0;1]}$; c'est bien une fonction continue par morceaux *(les points de discontinuité étant* 0 *et* 1*)*.
Calculons le produit de convolution $f \star f$
Pour commencer

$$(f \star f)(x) = \int_{\mathbb{R}} 1_{[0;1]}(x-t)\, 1_{[0;1]}(t)\, dt = \int_0^1 1_{[0;1]}(x-t)\, dt$$

En faisant le changement de variable $u = x - t$, nous avons $du = -dt$, et donc

$$\int_0^1 1_{[0;1]}(x-t)\, dt = \int_{x-1}^{x} 1_{[0;1]}(u)\, du$$

On peut, ici, faire remarquer que si $x-1 \leqslant u \leqslant x$, alors $0 \leqslant x-u \leqslant 1$
— Ainsi, si $x \geqslant 2$, alors $x-1 \geqslant 1$ et $(f \star f)(x) = 0$
— Ainsi, si $x \leqslant 0$, alors $(f \star f)(x) = 0$
— Si $0 \leqslant x \leqslant 1$, alors $x-1 \leqslant 0$ et $(f \star f)(x) = \displaystyle\int_0^x du = x$
— Si $1 \leqslant x \leqslant 2$, alors $0 \leqslant x-1 \leqslant 1$ et $(f \star f)(x) = \displaystyle\int_{x-1}^{1} du = 2-x$

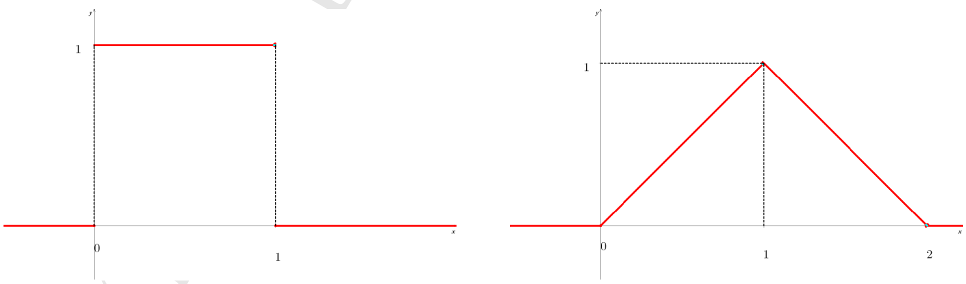

FIGURE 5.2 – Graphe de la fonction indicatrice $1_{[0;1]}$ et de la convolée avec elle-même

On voit ici, que la convolée de deux fonctions discontinues est continue. Mais, est-ce le cas général ?

2. Pour prolonger le point précédent, intéressons nous aux fonctions portes $P_{a,b}$ avec $a < b$
On définit ainsi une fonction $P_{a,b}$ avec $a < b$ par :

$$\begin{cases} P_{a,b} : \mathbb{R} & \longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ \qquad\quad x & \longmapsto \quad P_{a,b}(x) = \dfrac{1}{b-a} \times 1_{[a;b]}(x) \end{cases}$$

C'est à dire $P_{a,b}(x) = \dfrac{1}{b-a}$ si $a \leqslant x \leqslant b$ et $P_{a,b}(x) = 0$ sinon

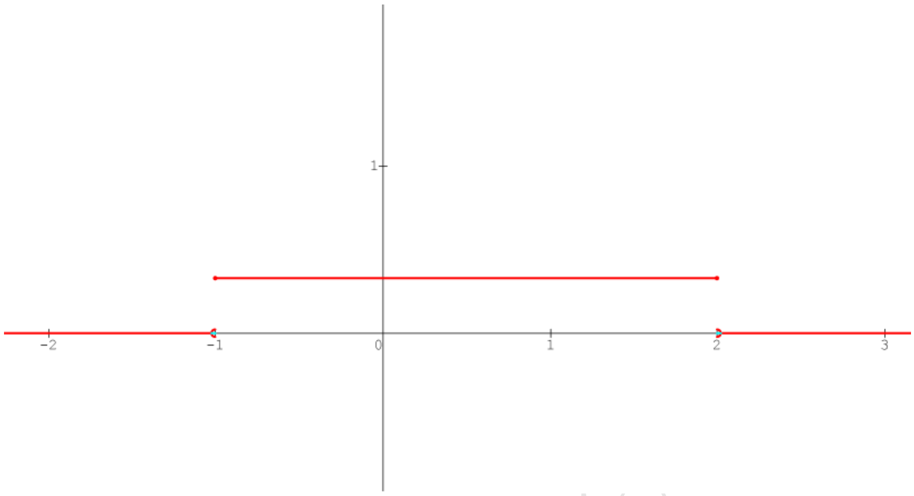

FIGURE 5.3 – Graphe de la fonction porte $P_{-1;2}$

Notons, tout de suite, que la fonction indicatrice de l'intervalle $[0;1]$ appelée $1_{[0;1]}$ est une fonction porte particulière : $1_{[0;1]} = P_{0,1}$

Remarquons aussi que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P_{a,b}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{b-a}\int_{-\infty}^{+\infty} 1_{[a;b]}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{b-a}\int_a^b \mathrm{d}x = 1$

■ → Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction numérique d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, continue par morceaux sur tout segment $[a;b] \subset \mathbb{R}$.
Le produit de convolution $f \star P_{a,b}(x)$ est bien défini, et nous avons :

$$f \star P_{a,b}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-u)\,P_{a,b}(u)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x-u)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{b-a}\int_{x-b}^{x-a} f(v)\,\mathrm{d}v$$

La convolution $f \star P_{a,b}(x)$ associe à toute valeur $x \in \mathbb{R}$, la valeur moyenne de f, $\displaystyle\frac{1}{b-a}\int_{x-b}^{x-a} f(v)\,\mathrm{d}v$ sur l'intervalle $[x-b;x-a]$.
Notons tout de suite que :

- ▷ $f \star P_{a,b}$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$
- ▷ Si la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, $f \star P_{a,b}$ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et de dérivée

$$(f \star P_{a,b})'(x) = \frac{1}{b-a}\left(f(x-a) - f(x-b)\right)$$

Par cette définition, on voit que la fonction $(f \star P_{a,b})'$ est continue et que $f \star P_{a,b}$ est de classe $\mathcal{C}^1$

■ → Soit $h > 0$: alors, pour $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ fonction numérique d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, continue par morceaux :

- ▷ $f \star P_{0,h}(x) = \dfrac{1}{h}\displaystyle\int_{x-h}^{x} f(v)\,\mathrm{d}v$
- ▷ $f \star P_{-h,h}(x) = \dfrac{1}{2h}\displaystyle\int_{x-h}^{x+h} f(v)\,\mathrm{d}v$
- ▷ $f \star P_{-h,0}(x) = \dfrac{1}{h}\displaystyle\int_{x}^{x+h} f(v)\,\mathrm{d}v$

■ → Calculons la convolée $P_{a,b} \star P_{c,d}$ de 2 fonctions portes $P_{a,b}$ et $P_{c,d}$.
Des calculs précédents, nous avons :

$$P_{c,d} \star P_{a,b}(x) = \frac{1}{d-c}\int_{x-d}^{x-c} P_{a,b}(v)\,\mathrm{d}v = \frac{1}{(d-c)(b-a)}\int_{x-d}^{x-c} 1_{[a;b]}(v)\,\mathrm{d}v$$

Et donc :

- ▷ Si $x - c \leqslant a \Longleftrightarrow x \leqslant a + c$, alors $P_{c,d} \star P_{a,b}(x) = 0$
- ▷ Si $x - d \leqslant a \leqslant x - c \Longleftrightarrow a + c \leqslant x \leqslant a + d$, alors

$$P_{c,d} \star P_{a,b}(x) = \frac{1}{(d-c)(b-a)} \int_a^{x-c} 1_{[a;b]}(v)\, \mathrm{d}v = \frac{x-a-c}{(d-c)(b-a)}$$

- ▷ Si, maintenant, $a \leqslant x - d \leqslant x - c \leqslant b \Longleftrightarrow a + d \leqslant x \leqslant b + c$, alors

$$P_{c,d} \star P_{a,b}(x) = \frac{1}{(d-c)(b-a)} \int_{x-d}^{x-c} 1_{[a;b]}(v)\, \mathrm{d}v = \frac{d-c}{(d-c)(b-a)} = \frac{1}{b-a}$$

- ▷ Si $a \leqslant x - d \leqslant b \leqslant x - c \Longleftrightarrow b + c \leqslant x \leqslant b + d$, alors

$$P_{c,d} \star P_{a,b}(x) = \frac{1}{(d-c)(b-a)} \int_{x-d}^{b} 1_{[a;b]}(v)\, \mathrm{d}v = \frac{b+d-x}{(d-c)(b-a)}$$

- ▷ Pour terminer, si $x - c \geqslant b \Longleftrightarrow x \geqslant b + c$, alors $P_{c,d} \star P_{a,b}(x) = 0$

$P_{c,d} \star P_{a,b}$ est donc une application affine par morceaux, continue.

■ → Nous allons nous intéresser à un cas particulier.

Soit $a > 0$ et intéressons nous à la convolée $P_{-a;a} \star P_{-a,a}$

Des calculs précédents, nous avons :

$$P_{-a;a} \star P_{-a,a}(x) = \frac{1}{4a^2} \int_{x-a}^{x+a} 1_{[-a;a]}(v)\, \mathrm{d}v$$

Et donc :

- ▷ Si $x \leqslant -2a$, alors $P_{-a;a} \star P_{-a,a}(x) = 0$
- ▷ Si $-2a \leqslant x \leqslant 0$, alors

$$P_{-a;a} \star P_{-a,a}(x) = \frac{1}{4a^2}(2a + x)$$

- ▷ Si, maintenant, $0 \leqslant x \leqslant 2a$, alors

$$P_{-a;a} \star P_{-a,a}(x) = \frac{1}{4a^2}(2a - x)$$

- ▷ Pour terminer, si $x \geqslant 2a$, alors $P_{-a;a} \star P_{-a,a}(x) = 0$

$P_{-a;a} \star P_{-a,a}$ est une fonction chapeau. Nous allons le visualiser avec la fonction Porte $P_{-1;1}$

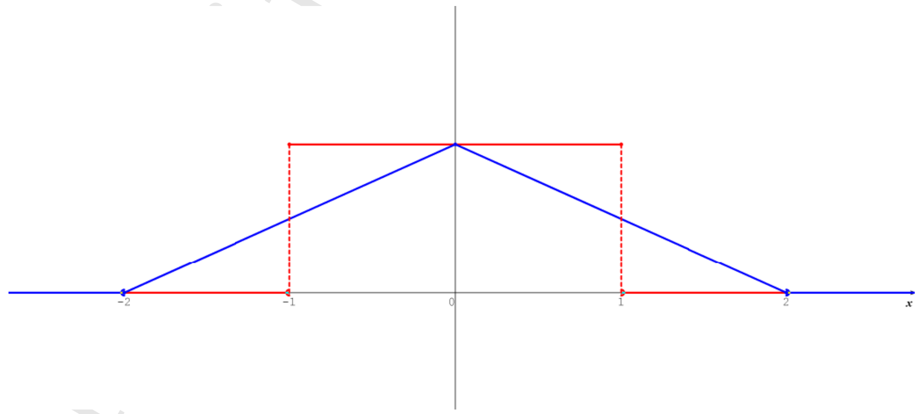

FIGURE 5.4 – Graphe de la fonction porte $P_{-1,1}$ en rouge et de $P_{-1,1} \star P_{-1,1}$ en bleu

Exercice 16 :

Soient $f = 1_{[-1,1]}$ et $g = 1_{[-a,a]}$, avec $a \geqslant 1$ deux fonctions indicatrices d'intervalle. Calculer $f \star g$ après en avoir justifié l'existence.

Exercice 17 :

Soit $a > 0$. $P_{-a,a}(x)$ est toujours la fonction porte que nous pouvons ainsi rédéfinir :

$$P_{-a,a}(x) = \begin{cases} \dfrac{+1}{2a} & \text{si } |x| < a \\ 0 & \text{Sinon} \end{cases}$$

1. Donner $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P_{-a,a}(t)\,\mathrm{d}t$
2. Calculer $P_{-a,a} \star f$ dans le cas où $f(x) = x$
3. Même question, calculer $P_{-a,a} \star f$ dans le cas où $f(x) = x^2$
4. On construit maintenant, la suite de fonctions $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in \mathbb{R}$ par $\varphi_n(t) = nP_{-a,a}(nt)$
   (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n(t)\,\mathrm{d}t = 1$
   (b) Soit $\delta > 0$.
   Démontrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_{|t|>\delta} \varphi_n(t)\,\mathrm{d}t = 0$; et en déduire alors que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_{|t|\leqslant\delta} \varphi_n(t)\,\mathrm{d}t = 1$
   (c) Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et bornée sur $\mathbb{R}$
      i. Montrer que $f(x) - f \star \varphi_n(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (f(x) - f(x-u))\,\varphi_n(u)\,\mathrm{d}u$
      ii. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f \star \varphi_n(x) = f(x)$, c'est à dire que la suite de fonctions $(f \star \varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f

Exemple 7 :

Les gaussiennes

On appelle fonction gaussienne, une fonction du type :

$$\begin{cases} f_\alpha : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{*+} \\ \quad x & \longmapsto & f_\alpha(x) = e^{-\alpha x^2} \end{cases}$$

Où $\alpha > 0$

1. Le graphe d'une gaussienne est bien connu ; voir la figure 5.5

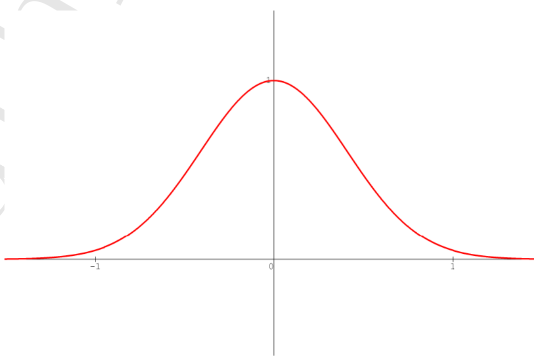

FIGURE 5.5 – Le graphe d'un gaussienne ; ici, c'est $f_3(x) = e^{-3x^2}$

2. Nous allons maintenant étudier $f_\alpha \star f_\beta(x)$ où $\alpha > 0$ et $\beta > 0$
   Par définition, $f_\alpha \star f_\beta(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_\alpha(x-u)\,f_\beta(u)\,\mathrm{d}u$.

Or,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f_\alpha(x-u)\, f_\beta(u)\,\mathrm{d}u &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha(x-u)^2} e^{-\beta u^2}\,\mathrm{d}u\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha(x-u)^2-\beta u^2}\,\mathrm{d}u\end{aligned}$$

Il faut, maintenant, regarder de près l'expression $-\alpha(x-u)^2-\beta u^2$.
Pour commencer, $-\alpha(x-u)^2-\beta u^2 = -\left(\alpha(x-u)^2+\beta u^2\right)$ et donc :

$$\begin{aligned}\alpha(x-u)^2+\beta u^2 &= \alpha x^2+\alpha u^2-2\alpha xu+\beta u^2 = (\alpha+\beta)u^2-2\alpha xu+\alpha x^2\\ &= (\alpha+\beta)\left[u^2-\frac{2\alpha}{\alpha+\beta}xu\right]+\alpha x^2\\ &= (\alpha+\beta)\left[\left(u-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}x\right)^2-\frac{\alpha^2}{(\alpha+\beta)^2}x^2\right]+\alpha x^2\\ &= (\alpha+\beta)\left(u-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}x\right)^2-\frac{\alpha^2}{\alpha+\beta}x^2+\alpha x^2\\ &= (\alpha+\beta)\left(u-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}x\right)^2+\frac{\alpha(\alpha+\beta)-\alpha^2}{\alpha+\beta}x^2\\ &= (\alpha+\beta)\left(u-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}x\right)^2+\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}x^2\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}f_\alpha\star f_\beta(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha(x-u)^2-\beta u^2}\,\mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\alpha+\beta)\left(u-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}x\right)^2-\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}x^2}\,\mathrm{d}u\\ &= e^{-\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}x^2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\alpha+\beta)\left(u-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}x\right)^2}\,\mathrm{d}u\end{aligned}$$

Faisons, maintenant, le changement de variables $v=\sqrt{\alpha+\beta}\left(u-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}x\right)$.
Alors, $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}=\sqrt{\alpha+\beta}\iff \mathrm{d}u=\dfrac{\mathrm{d}v}{\sqrt{\alpha+\beta}}$.
D'où nous obtenons :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\alpha+\beta)\left(u-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}x\right)^2}\,\mathrm{d}u=\frac{1}{\sqrt{\alpha+\beta}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-v^2}\,\mathrm{d}v=\frac{1}{\sqrt{\alpha+\beta}}\times\sqrt{\pi}=\sqrt{\frac{\pi}{\alpha+\beta}}$$

D'où, nous obtenons, finalement :

$$f_\alpha\star f_\beta(x)=e^{-\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}x^2}\times\sqrt{\frac{\pi}{\alpha+\beta}}=\sqrt{\frac{\pi}{\alpha+\beta}}f_{\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}}(x)$$

Que nous pouvons écrire $f_\alpha\star f_\beta=\sqrt{\dfrac{\pi}{\alpha+\beta}}f_{\left(\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}\right)}$
En raison de la symétrie, on peut remarquer que $f_\alpha\star f_\beta=f_\beta\star f_\alpha$

3. Considérons, maintenant, les densités de probabilité $g_{m,\sigma}=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$ des lois de Gauss $\mathcal{N}(m,\sigma)$
$\Longrightarrow$ On démontre, facilement, et nous le verrons en probabilité, que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x g_{m,\sigma}(x)\,\mathrm{d}x=m \text{ et } \int_{-\infty}^{+\infty}(x-m)^2 g_{m,\sigma}(x)\,\mathrm{d}x=\sigma^2$$

$\Longrightarrow$ En posant $\lambda=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ et $\alpha=\dfrac{1}{2\sigma^2}$, nous pouvons écrire :

$$g_{m,\sigma}(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}=\lambda e^{-\alpha(x-m)^2}=\lambda f_\alpha(x-m)$$

$\Longrightarrow$ Soient g_{m_1,σ_1} et g_{m_2,σ_2} 2 densités gaussiennes. Nous posons, comme ci-dessus, $\lambda_1 = \dfrac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}$, $\lambda_2 = \dfrac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}}$, $\alpha_1 = \dfrac{1}{2\sigma_1^2}$ et $\alpha_2 = \dfrac{1}{2\sigma_2^2}$, nous avons alors :

$$g_{m_1,\sigma_1}(x) = \lambda_1 f_{\alpha_1}(x - m_1) \text{ et } g_{m_2,\sigma_2}(x) = \lambda_2 f_{\alpha_2}(x - m_2)$$

$\Longrightarrow$ Etudions, maintenant, la convolution $g_{m_1,\sigma_1} \star g_{m_2,\sigma_2}(x)$.

$$\begin{aligned} g_{m_1,\sigma_1} \star g_{m_2,\sigma_2}(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} g_{m_1,\sigma_1}(x-u)\, g_{m_2,\sigma_2}(u)\, \mathrm{d}u \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda_1 f_{\alpha_1}(x-u-m_1)\, \lambda_2 f_{\alpha_2}(u-m_2)\, \mathrm{d}u = \lambda_1\lambda_2 \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\alpha_1}(x-u-m_1)\, f_{\alpha_2}(u-m \end{aligned}$$

On fait le changement de variables $v = u - m_2 \Longleftrightarrow u = v + m_2$ et donc $\mathrm{d}v = \mathrm{d}u$. Alors :

$$\lambda_1\lambda_2 \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\alpha_1}(x-u-m_1)\, f_{\alpha_2}(u-m_2)\, \mathrm{d}u = \lambda_1\lambda_2 \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\alpha_1}(x-m_2-m_1-v)\, f_{\alpha_2}(v)\, \mathrm{d}v$$

Ainsi, $g_{m_1,\sigma_1} \star g_{m_2,\sigma_2}(x) = \lambda_1\lambda_2 f_{\alpha_1} \star f_{\alpha_2}(x - m_2 - m_1)$

$\Longrightarrow$ De l'étude précédente, nous avons $f_{\alpha_1} \star f_{\alpha_2} = \sqrt{\dfrac{\pi}{\alpha_1+\alpha_2}} f_{\left(\frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}\right)}$

C'est à dire $g_{m_1,\sigma_1} \star g_{m_2,\sigma_2}(x) = \lambda_1\lambda_2 \sqrt{\dfrac{\pi}{\alpha_1+\alpha_2}} f_{\left(\frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}\right)}(x - m_2 - m_1)$

$\triangleright$ Tout d'abord :

$$\begin{aligned} \lambda_1\lambda_2\sqrt{\frac{\pi}{\alpha_1+\alpha_2}} &= \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} \times \frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}} \times \sqrt{\frac{\pi}{\frac{1}{2\sigma_1^2}+\frac{1}{2\sigma_2^2}}} \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \times \sqrt{\frac{\pi}{\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}}} = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \times \sqrt{\frac{2\pi\sigma_1^2\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}} \end{aligned}$$

$\triangleright$ Et maintenant :

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2} &= \frac{\frac{1}{2\sigma_1^2}\times\frac{1}{2\sigma_2^2}}{\frac{1}{2\sigma_1^2}+\frac{1}{2\sigma_2^2}} = \frac{\frac{1}{4\sigma_1^2\sigma_2^2}}{\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}} \\ &= \frac{1}{4\sigma_1^2\sigma_2^2\left(\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}\right)} = \frac{1}{2\left(\sigma_1^2+\sigma_2^2\right)} \end{aligned}$$

$\triangleright$ De telle sorte que :

$$g_{m_1,\sigma_1} \star g_{m_2,\sigma_2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}} e^{-\frac{1}{2\left(\sigma_1^2+\sigma_2^2\right)}(x-m_2-m_1)^2}$$

$\Longrightarrow$ Nous avons donc démontré que $g_{m_1,\sigma_1} \star g_{m_2,\sigma_2}(x) = g_{m_1+m_2,\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}(x)$
La convolée de 2 densités de Gauss est donc une densité de Gauss

Exemple 8 :

On considère f et g, 2 fonctions continues par morceaux sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{C}$ et nulles sur $]-\infty; 0[$

1. Regardons maintenant ce que devient le produite $\psi(x,t) = f(x-t)\, g(t)$
   $\rightarrow$ Si $t < 0$, alors $\psi(x,t) = 0$
   $\rightarrow$ Si $x - t < 0 \Longleftrightarrow t > x$, alors $f(x-t) = 0$ et donc $\psi(x,t) = 0$
   Ainsi, si $t < 0$ et $t > x$ alors $\psi(x,t) = 0$ et si $t \in [0; x]$ alors $\psi(x,t) = f(x-t)\, g(t)$.
2. Donc, $f \star g(x) = \displaystyle\int_0^x f(x-t)\, g(t)\, \mathrm{d}t$ pour tout $x \geqslant 0$ et $f \star g(x) = 0$ pour tout $x < 0$. On peut donc aussi écrire que $f \star g$ est nulle sur $]-\infty; 0[$

3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on note $f_{n,\lambda}(x) = \dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!} e^{\lambda x} 1_{[0+\infty[}(x)$. $f_{n,\lambda}$ est une fonction continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ nulles sur $]-\infty; 0[$.
   Nous allons étudier $f_{n,\lambda} \star f_{m,\lambda}(x)$.

$$\begin{aligned} f_{n,\lambda} \star f_{m,\lambda}(x) &= \int_0^x f_{n,\lambda}(x-t) f_{m,\lambda}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} e^{\lambda(x-t)} \times \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} e^{\lambda t}\,\mathrm{d}t \\ &= e^{\lambda x} \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} \times \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

   Appelons $A_n = \dfrac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}$ et $B_m = \dfrac{t^{m-1}}{(m-1)!}$ et nous allons étudier $\displaystyle\int_0^x A_n B_m\,\mathrm{d}t$

   ▷ Commençons par une première intégration par parties :

$$\left\{ \begin{array}{ll} u = \dfrac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} & u' = -\dfrac{(x-t)^{n-2}}{(n-2)!} \\ v' = \dfrac{t^{m-1}}{(m-1)!} & v = \dfrac{t^m}{m!} \end{array} \right\}$$

   Et donc :

$$\begin{aligned} \int_0^x A_n B_m\,\mathrm{d}t = & \left[\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} \times \frac{t^m}{m!}\right]_0^x + \int_0^x \frac{(x-t)^{n-2}}{(n-2)!} \times \frac{t^m}{m!}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{(x-t)^{n-2}}{(n-2)!} \times \frac{t^m}{m!}\,\mathrm{d}t \\ = & \int_0^x A_{n-1} B_{m+1}\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

   ▷ Et, maintenant, en itérant le même type d'intégration par parties, nous avons

$$\int_0^x A_n B_m\,\mathrm{d}t = \int_0^x A_{n-k} B_{m+k}\,\mathrm{d}t$$

   ▷ Et donc, pour $k = n-1$, nous obtenons

$$\int_0^x A_n B_m\,\mathrm{d}t = \int_0^x A_{n-(n-1)} B_{m+(n-1)}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{t^{m+n-2}}{(m+n-2)!}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{m+n-1}}{(m+n-1)!}\right]_0^x = \frac{x^{m+n-1}}{(m+n-1)!}$$

   Ainsi, nous obtenons $f_{n,\lambda} \star f_{m,\lambda}(x) = e^{\lambda x} \dfrac{x^{m+n-1}}{(m+n-1)!} = f_{m+n,\lambda}(x)$

Exercice 18 :

H est la fonction de Heaviside définie par :

$$H(x) = \left\{ \begin{array}{ll} +1 & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{Sinon} \end{array} \right.$$

En fait, la fonction de Heaviside est la fonction indicatrice de $[0; +\infty[$, c'est à dire $H = 1_{[0;+\infty[}$

1. On appelle $f_1 = H \star H$. Démontrez que $f_1(x) = xH(x)$
2. Calculez $f_2 = H \star f_1$
3. <u>Généralisation :</u> Trouvez l'expression de $f_n = H \star f_{n-1}$; on aura posé $f_0 = H$
4. Calculez $\exp \star H$ et $(H \times \exp) \star H$ *(Ici, la fonction* $\exp(x) = e^x$*)*

5.5.3 Premières propriétés de la convolution

Pour $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ et $g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, en supposant que tous les produits de convolution sont définis, nous avons :

1. Commutativité : $f \star g = g \star f$
2. Distributivité : Si les produits de convolutions $f_1 \star g$ et $f_2 \star g$ existent, alors $(f_1 + f_2) \star g$ existe et
$$(f_1 + f_2) \star g = f_1 \star g + f_2 \star g$$
3. Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, nous avons $(\lambda f) \star g = \lambda (f \star g)$

Démonstration

1. **On montre** $f \star g = g \star f$
Nous avons $(f \star g)(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-u)\, g(u)\, du$. En faisant le changement de variables $v = x - u$, nous avons :
$$(f \star g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-u)\, g(u)\, du = \int_{-\infty}^{+\infty} f(v)\, g(x-v)\, dv = (g \star f)(x)$$
2. **Montrons que** $(f_1 + f_2) \star g = f_1 \star g + f_2 \star g$
Nous avons :
$$\begin{aligned} ((f_1 + f_2) \star g)(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (f_1 + f_2)(x-u)\, g(u)\, du \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x-u)\, g(u)\, du + \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(x-u)\, g(u)\, du \\ &= (f_1 \star g)(x) + (f_2 \star g)(x) \end{aligned}$$
Ce que nous voulions.
3. **Montrons que** $(\lambda f) \star g = \lambda (f \star g)$
C'est très simple :
$$\begin{aligned} ((\lambda f) \star g)(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (\lambda f)(x-u)\, g(u)\, du \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda f(x-u)\, g(u)\, du \\ &= \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-u)\, g(u)\, du \\ &= \lambda (f \star g)(x) \end{aligned}$$

Remarque 12 :

1. Nous appelons $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$
2. Ainsi $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ telles que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\, \mathrm{d}t < +\infty$

5.5.4 Théorème

Soient $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ et $g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$

Alors $f \star g(x)$ existe, est continue et nous avons $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |f \star g(x)|\, \mathrm{d}x < +\infty$

Démonstration

Nous appelons $\psi(u,x) = f(x-u)\,g(u)$

1. f et g étant continues sur $\mathbb{R}$, la fonction ψ est continue par rapport à chacune des variables.
2. D'autre part, f étant continue et dans $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, il existe $M > 0$ tel que, pour tout tout $x \in \mathbb{R}$, nous ayions $|f(x)| \leqslant M$ et donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $u \in \mathbb{R}$:
$$|f(x-u)\,g(u)| \leqslant M\,|g(x)|$$
Et nous savons que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|\,\mathrm{d}t$ existe

Ainsi, d'après 5.3.1

1. $\psi(u,x) = f(x-u)\,g(u)$ est intégrable et donc $f \star g(x)$ existe, est continue
2. D'après la majoration $|f(x-u)\,g(u)| \leqslant M\,|g(u)|$ et comme l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|\,\mathrm{d}t$ existe, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |f \star g(x)|\,\mathrm{d}x$ existe aussi.

5.5.5 Théorème

Soient $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ continuement différentiable, telle que la dérivée f' soit bornée sur $\mathbb{R}$ et $g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$
Alors $f \star g(x)$ est aussi continuement différentiable et nous avons $(f \star g)'(x) = f' \star g(x)$

Démonstration

Il suffit d'appliquer le théorème 5.3.2 à $f(x-u)\,g(u)$. Nous appellerons toujours $\psi(u,x) = f(x-u)\,g(u)$

1. Comme tout à l'heure, f et g étant continues sur $\mathbb{R}$, la fonction ψ est continue par rapport à chacune des variables.
2. ψ admet une dérivée partielle par rapport à x continue par rapport à chacune des variables. En effet :
$$\frac{\partial \psi}{\partial x}(u,x) = f'(x-u)\,g(u)$$
Par hypothèses, $\dfrac{\partial \psi}{\partial x}(u,x)$ est continue par rapport aux 2 variables
3. D'autre part comme $\left|\dfrac{\partial \psi}{\partial x}(u,x)\right| \leqslant M_1\,|g(u)|$ puisque f' est bornée sur $\mathbb{R}$

Nous pouvons donc conclure que $f \star g(x)$ est aussi continuement différentiable et que, d'après 5.3.2
$$(f \star g)'(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \psi}{\partial x}(u,x)\,\mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x-u)\,g(u)\,\mathrm{d}u = f' \star g(x)$$

Remarque 13 :

Nous démontrerions de même que si $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ de classe $\mathcal{C}^n$, telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leqslant k \leqslant n$, la dérivée k-ième $f^{(k)}$ soit bornée sur $\mathbb{R}$ et $g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ que $f \star g$ serait aussi de classe $\mathcal{C}^n$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leqslant k \leqslant n$
$$(f \star g)^{(k)}(x) = f^{(k)} \star g(x)$$

Exemple 9 :

1. *Soient $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ et $g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$. Démontrer que : $f \star g(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{x}{2}+t\right) g\left(\frac{x}{2}-t\right) dt$*

   Par définition de la convolution, nous avons $f \star g(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-u)\, g(u)\, du$

   En faisant le changement de variable $u = \dfrac{x}{2} - t$, nous avons $\dfrac{du}{dt} = -1$ et $x - u = x - \left(\dfrac{x}{2} - t\right) = \dfrac{x}{2} + t$. D'où, en remplaçant dans l'intégrale, nous obtenons :

$$\begin{aligned} f \star g(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-u)\, g(u)\, du \\ &= \int_{+\infty}^{-\infty} f\left(\frac{x}{2}+t\right) g\left(\frac{x}{2}-t\right)(-dt) \\ &= -\int_{+\infty}^{-\infty} f\left(\frac{x}{2}+t\right) g\left(\frac{x}{2}-t\right) dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{x}{2}+t\right) g\left(\frac{x}{2}-t\right) dt \end{aligned}$$

   Ce que nous voulions

2. *On suppose f et g à support compact, c'est à dire qu'il existe $T > 0$ tel que si $|t| > T$, alors $f(t) = 0$ et $g(t) = 0$. Montrer qu'alors : $f \star g(x) = \displaystyle\int_{-T+\frac{|x|}{2}}^{T-\frac{|x|}{2}} f\left(\frac{x}{2}+t\right) g\left(\frac{x}{2}-t\right) dt$*

   Nous avons $f \star g(x)$, à priori non nulle si :

$$\left[\begin{array}{rcl} -T \leqslant & \dfrac{x}{2}+t & \leqslant T \\ & \Longleftrightarrow & \\ -T - \dfrac{x}{2} \leqslant & t & \leqslant T - \dfrac{x}{2} \end{array}\right]$$

   Et

$$\left[\begin{array}{rcl} -T \leqslant & \dfrac{x}{2}-t & \leqslant T \\ & \Longleftrightarrow & \\ -T - \dfrac{x}{2} \leqslant & -t & \leqslant T - \dfrac{x}{2} \\ & \Longleftrightarrow & \\ -T + \dfrac{x}{2} \leqslant & t & \leqslant T + \dfrac{x}{2} \end{array}\right]$$

   — Si $x \geqslant 0$, alors $-T - \dfrac{x}{2} \leqslant -T + \dfrac{x}{2}$ et $T - \dfrac{x}{2} \leqslant T + \dfrac{x}{2}$ et

$$f \star g(x) = \int_{-T+\frac{x}{2}}^{T-\frac{x}{2}} f\left(\frac{x}{2}+t\right) g\left(\frac{x}{2}-t\right) dt$$

   — Si $x \leqslant 0$, alors $-T + \dfrac{x}{2} \leqslant -T - \dfrac{x}{2}$ et $T + \dfrac{x}{2} \leqslant T - \dfrac{x}{2}$ et

$$f \star g(x) = \int_{-T-\frac{x}{2}}^{T+\frac{x}{2}} f\left(\frac{x}{2}+t\right) g\left(\frac{x}{2}-t\right) dt$$

   Dans les deux cas, nous avons bien :

$$f \star g(x) = \int_{-T+\frac{|x|}{2}}^{T-\frac{|x|}{2}} f\left(\frac{x}{2}+t\right) g\left(\frac{x}{2}-t\right) dt$$

5.5.6 Exercices à travailler

Exercice 19 :

On considère 2 fonctions f et g défines par :

$$\left\{\begin{array}{lll} f:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x)=\left\{\begin{array}{l} 1 \text{ si } -1\leqslant x\leqslant 3 \\ 0 \text{ sinon}\end{array}\right.\end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{lll} g:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & g(x)=\left\{\begin{array}{l} \dfrac{x}{2} \text{ si } 0\leqslant x\leqslant 2 \\ 0 \text{ sinon}\end{array}\right.\end{array}\right.$$

Calculer $f\star g$

Exercice 20 :

Soient α et β deux nombres réels.
Montrer l'existence et calculer le produit de convolution $\left(e^{\alpha x}\times 1_{[0,+\infty[}(x)\right)\star\left(e^{\beta x}\times 1_{[0,+\infty[}(x)\right)$

5.6 La Transformée de FOURIER dans $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$

5.6.1 Introduction

Heuristiquement, on définit la transformée de FOURIER d'une fonction f par

$$\widehat{f}(x)=\int_{\mathbb{R}} f(t)\,e^{-itx}\,\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,e^{-itx}\,\mathrm{d}t$$

C'est une correspondance entre 2 fonctions, c'est à dire qu'à une fonction f, on en fait correspondre une autre, notée $\widehat{f}$. Il nous est donc possible de considérer un opérateur $\mathcal{F}$ tel que $\mathcal{F}(f)=\widehat{f}$.
Cette définition est informelle. Des hypothèses supplémentaires sont nécesaires pour assurer la convergence, pour tout $x\in\mathbb{R}$, de l'intégrale à paramètres ci-dessus. L'ensemble des fonctions pour lequel on est sûr de l'existence d'une transformée de FOURIER est $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$

Remarque 14 :

Notation :
Lorsque $f\in\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, nous adopterons la notation suivante : $\|f\|_1=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|\,dt$

5.6.2 Définition

Pour $f\in\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, on définit la transformée de FOURIER de f par : $\mathcal{F}(f)(x)=\widehat{f}(x)=\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(t)\,e^{-itx}dt$

Remarque 15 :

Pour des problèmes de normalisation, les physiciens utilisent, souvent, cette définition :

$$\mathcal{F}(f)(x)=\widehat{f}(x)=\int_{\mathbb{R}} f(t)\,e^{-2i\pi tx}\,\mathrm{d}t$$

Nous en resterons à la définition de 5.6.2

5.6.3 Premières propriétés

1. $\widehat{f}(x)$ existe pour tout $x \in \mathbb{R}$
2. $\widehat{f}(x)$ est une fonction uniformément continue, donc continue, sur $\mathbb{R}$
3. $\widehat{f}(x)$ est une fonction bornée sur $\mathbb{R}$; nous avons, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\left|\widehat{f}(x)\right| \leqslant \|f\|_1$
4. $\mathcal{F}(f) = \widehat{f}$ est une application linéaire, c'est à dire :
$$\mathcal{F}(af + bg) = a\mathcal{F}(f) + b\mathcal{F}(g)$$
Ou encore :
$$\widehat{(af + bg)}(x) = a\widehat{f}(x) + b\widehat{g}(x)$$

Démonstration

1. **$\widehat{f}(x)$ existe pour tout $x \in \mathbb{R}$**
Soit $x \in \mathbb{R}$
Appelons $\varphi_x(t) = f(t)\, e^{-2i\pi tx}$.
Alors, $|\varphi_x(t)| = |f(t)|$. Comme $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\, \mathrm{d}t$ existe, il en est de même de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi_x(t)|\, \mathrm{d}t$ et donc $\widehat{f}(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(t)\, e^{-2i\pi tx}\, \mathrm{d}t$ existe bien
2. **$\widehat{f}(x)$ est une fonction uniformément continue sur $\mathbb{R}$**
Nous avons, pour la démonstration, besoin de ce **lemme**
Pour tout tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y \in \mathbb{R}$, nous avons : $\left|e^{-ix} - e^{-iy}\right| \leqslant |x - y|$

Démonstration

Supposons $x \leqslant y$; la démonstration serait identique si $y \leqslant x$.
Nous avons $\displaystyle\int_x^y e^{-iu}\, \mathrm{d}u = \left[ie^{-iu}\right]_x^y = i\left(e^{-iy} - e^{-ix}\right)$.
Donc :
$$\left|e^{-ix} - e^{-iy}\right| = \left|i\left(e^{-iy} - e^{-ix}\right)\right| = \left|\int_x^y e^{-iu}\, \mathrm{d}u\right| \leqslant \int_x^y \left|e^{-iu}\right|\, \mathrm{d}u = \int_x^y \mathrm{d}u = y - x$$
Nous avons donc $\left|e^{-iy} - e^{-ix}\right| \leqslant |y - x|$

Démontrons, maintenant, l'uniforme continuité de $\widehat{f}$
Soient x et y 2 réels.
On tente d'évaluer $\left|\widehat{f}(x) - \widehat{f}(y)\right|$
Soit $\varepsilon > 0$
De la convergence de $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f(t)|\, dt$, on tire qu'il existe $R > 0$ tel que
$$\int_{-\infty}^{-R} |f(t)|\, \mathrm{d}t + \int_R^{+\infty} |f(t)|\, \mathrm{d}t < \frac{\varepsilon}{2} \Longleftrightarrow \int_{|t| \geqslant R} |f(t)|\, \mathrm{d}t < \frac{\varepsilon}{2}$$
D'où, en ne changeant en fait rien aux intégrales :
$$\begin{aligned}\left|\widehat{f}(x) - \widehat{f}(y)\right| &\leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| \left|e^{-itx} - e^{-ity}\right| dt \\ &\leqslant \int_{-\infty}^{-R} |f(t)| \left|e^{-itx} - e^{-ity}\right| dt + \int_{-R}^{+R} |f(t)| \left|e^{-itx} - e^{-ity}\right| dt + \int_{+R}^{+\infty} |f(t)| \left|e^{-itx} - e^{-ity}\right| dt\end{aligned}$$

Or,

$$\int_{-\infty}^{-R} |f(t)| \left|e^{-itx} - e^{-ity}\right| dt + \int_{+R}^{+\infty} |f(t)| \left|e^{-itx} - e^{-ity}\right| dt \leqslant 2\left\{\int_{-\infty}^{-R} |f(t)| dt + \int_{+R}^{+\infty} |f(t)| dt\right\} \leqslant 2\frac{\varepsilon}{2}$$

et, en utilisant le lemme ci-dessus,

$$\int_{-R}^{+R} |f(t)| \left|e^{-itx} - e^{-ity}\right| dt \leqslant \int_{-R}^{+R} |f(t)| |tx - ty| dt = |x-y| \int_{-R}^{+R} |f(t)| |t| dt \leqslant |x-y| \times R \times \|f\|_1$$

Il existe donc $\eta > 0$ *(on peut choisir* $\eta = \dfrac{\varepsilon}{R\|f\|_1}$) tel que si $|x-y| \leqslant \eta$ alors, $\left|\widehat{f}(x) - \widehat{f}(y)\right| \leqslant \varepsilon$

Ce qui montre que $\widehat{f}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ et donc continue sur $\mathbb{R}$

3. **Nous montrons que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\widehat{f}(x)$ est bornée.**
   Nous avons :
   $$\left|\widehat{f}(x)\right| \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} \left|f(t)\, e^{-ixt}\right| \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\, \mathrm{d}t = \|f\|_1$$
   Et comme $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, nous avons $\|f\|_1 < +\infty$.
   Donc, $\mathcal{F}(f)(x) = \widehat{f}(x)$ est bornée sur $\mathbb{R}$
4. **Le fait que $\mathcal{F}$ soit linéaire** résulte de la linéarité simple de l'intégrale.

Remarque 16 :

1. Revenons sur le lemme démontrant que, pour tout tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y \in \mathbb{R}$, nous avons : $\left|e^{-ix} - e^{-iy}\right| \leqslant |x-y|$.
   En faisant $y = 0$ dans ce lemme, nous avons $\left|e^{-ix} - 1\right| \leqslant |x|$
2. En complément de l'inégalité $|\mathcal{F}(f)(x)| = \left|\widehat{f}(x)\right| \leqslant \|f\|_1$, vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons, en particulier,
   $$\sup_{x\in\mathbb{R}} |\mathcal{F}(f)(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\widehat{f}(x)\right| \leqslant \|f\|_1$$
   C'est à dire que $\|\mathcal{F}(f)\|_\infty \leqslant \|f\|_1$.

Exemple 10 :

Exemples de calculs

1. **Les fonctions caractéristiques d'intervalle** ou fonction porte
   Pour $f = 1_{[a,b]}$, fonction caractéristique de l'intervalle $[a,b]$, on a $\widehat{f}(x) = \displaystyle\int_a^b e^{-itx} dt$,
   d'où
   $$\widehat{f}(x) = \left[\frac{e^{-itx}}{-ix}\right]_a^b = \frac{e^{-iax} - e^{-ibx}}{ix}$$
   On peut montrer qu'il n'y a pas de problème avec la proposition ci-dessus car,
   $$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-iax} - e^{-ibx}}{ix} = b - a = \widehat{f}(0)$$
   de plus, comme $\left|\dfrac{e^{-iax} - e^{-ibx}}{ix}\right| \leqslant \dfrac{2}{|x|}$, on a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \widehat{f}(x) = 0$
   $\Longrightarrow$ **Il existe des fonctions caractéristiques particulières**
   Pour $f = 1_{[-a,+a]}$, fonction caractéristique de l'intervalle $[-a;:+a]$, on a
   $$\widehat{f}(x) = \frac{e^{iax} - e^{-iax}}{ix} = \frac{2i\sin ax}{ix} = 2\frac{\sin ax}{x}$$

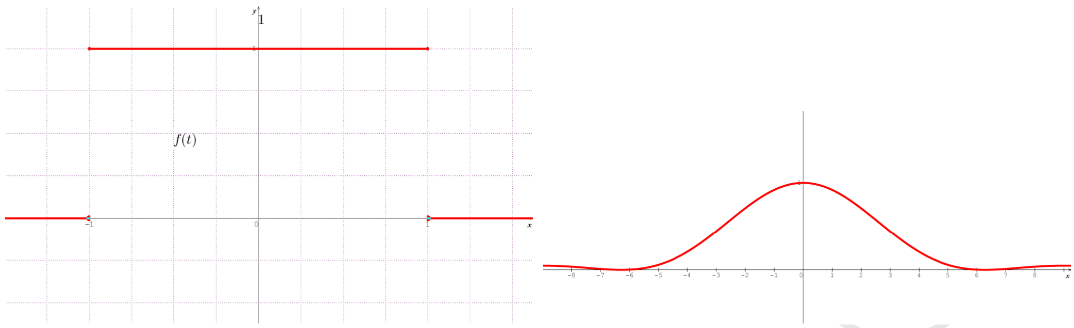

FIGURE 5.6 – Le signal porte et sa transformée de Fourier

2. **Les fonctions « chapeau »**
   On appelle fonction chapeau ou **signal triangulaire** , une fonction de la forme :

$$C(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{si } |x| \leqslant 1 \\ 0 & \text{si } |x| > 1 \end{cases}$$

   Calculons-en sa transformée de Fourier :

$$\mathcal{F}(C)(\omega) = \widehat{C}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} C(t)\, e^{-i\omega t}\, d\, t$$

   Ici, nous avons :

$$\begin{aligned} \widehat{C}(\omega) &= \int_{-1}^{+1} (1 - |t|)\, e^{-i\omega t}\, d\, t \\ &= \int_{-1}^{0} (1 + t)\, e^{-i\omega t}\, d\, t + \int_{0}^{+1} (1 - t)\, e^{-i\omega t}\, d\, t \end{aligned}$$

   Ce qui donne, en utilisant le changements de variables $u = -t$ dans l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{0} (1 + t)\, e^{-i\omega t}\, d\, t$

$$\begin{aligned} \widehat{C}(\omega) &= \int_{0}^{1} (1 - t)\, e^{i\omega t}\, \mathrm{d}t + \int_{0}^{+1} (1 - t)\, e^{-i\omega t}\, \mathrm{d}t \\ &= \int_{0}^{+1} (1 - t)\left(e^{-i\omega t} + e^{i\omega t}\right) \mathrm{d}t \\ &= 2\int_{0}^{+1} (1 - t) \cos\omega t\, \mathrm{d}t \end{aligned}$$

   Nous intégrons $\displaystyle\int_{0}^{+1} (1 - t) \cos\omega t\, d\, t$ par parties, et nous posons : $\left\{ \begin{array}{ll} u = 1 - t & u' = -1 \\ v' = \cos\omega t & v = \dfrac{1}{\omega} \sin\omega t \end{array} \right.$

   Nous avons alors :

$$\begin{aligned} \int_{0}^{+1} (1 - t) \cos\omega t\, d\, t &= \left[\frac{(1 - t)\sin\omega t}{\omega}\right]_0^1 + \frac{1}{\omega}\int_0^1 \sin\omega t\, d\, t \\ &= \frac{1}{\omega}\int_0^1 \sin\omega t\, d\, t \\ &= \frac{1}{\omega}\left[\frac{-\cos\omega t}{\omega}\right]_0^1 \\ &= \frac{1 - \cos\omega}{\omega^2} \end{aligned}$$

   Ainsi, $\widehat{C}(\omega) = 2\dfrac{1 - \cos\omega}{\omega^2}$

La trigonométrie nous assure que $1-\cos\omega = 2\sin^2\dfrac{\omega}{2}$, nous en déduisons que $\widehat{C}(\omega) = \left(\dfrac{\sin\frac{\omega}{2}}{\frac{\omega}{2}}\right)^2$

Une nouvelle fois, il n'y a pas de problème de continuité en 0. Nous avons $\lim\limits_{\omega\to 0}\widehat{C}(\omega) = 1 = \widehat{C}(0)$ et $\lim\limits_{w\to\infty}\widehat{C}(\omega) = 0$

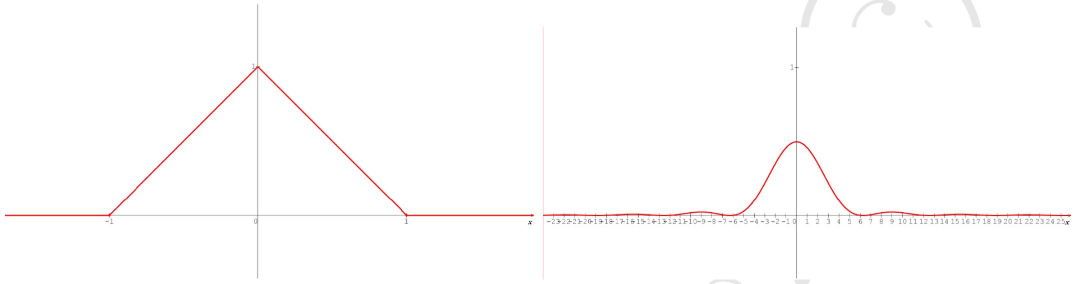

FIGURE 5.7 – Le signal triangle et sa transformée de Fourier

3. On n'a pas e^{-t} ou e^{t} dans $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, par contre, $f(t) = e^{-|t|}$ y est, et on peut alors, calculer sa transformée de FOURIER.

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(x) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-|t|-itx}dt = \int_0^{+\infty} e^{-t-itx}dt + \int_{-\infty}^{0} e^{t-itx}dt \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-(1+ix)t}\,\mathrm{d}t + \int_{-\infty}^{0} e^{(1-ix)t}\,\mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{e^{-t-itx}}{-(1+ix)}\right]_0^{+\infty} + \left[\frac{e^{t-itx}}{(1-ix)}\right]_{-\infty}^{0} \\
&= \frac{1}{1+ix} + \frac{1}{1-ix} \\
&= \frac{2}{1+x^2}
\end{aligned}$$

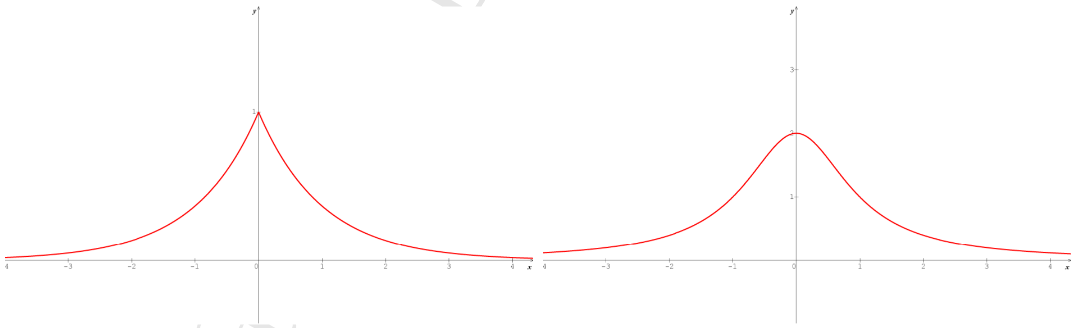

FIGURE 5.8 – Le signal exponentiel symétrique et sa transformée de Fourier

Remarque 17 :

1. Il est intéressant de noter qu'on n'a pas, à chaque fois, $\widehat{f}\in\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, mais, par contre, on a toujours $\widehat{f}\in\mathbf{L}^\infty(\mathbb{R})$ puisque $\widehat{f}$ est bornée et continue sur $\mathbb{R}$. On dit que l'opérateur $\mathcal{F}$ est un opérateur linéaire continu de $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ dans $\mathbf{L}^\infty(\mathbb{R})$
2. On peut aussi remarquer que $\widehat{f}(0) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(t)\,dt$

Exercice 21 :

Pour $a \geqslant 0$, rechercher la transformée de FOURIER de $f(x) = e^{-x}1_{[a,+\infty[}$ *(On l'appelle le signal « Décharge exponentielle »)*

5.6.4 Proposition

Soit $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$

1. Si $g(x) = e^{i\alpha x} f(x)$ alors $\widehat{g}(x) = \widehat{f}(x-\alpha)$
2. Si $g(x) = f(x-\alpha)$ alors, $\widehat{g}(x) = e^{-i\alpha x}\widehat{f}(x)$
3. Si $g(x) = \overline{f(-x)}$ alors, $\widehat{g}(x) = \overline{\widehat{f}(x)}$
4. Si $g(x) = f\left(\dfrac{x}{\lambda}\right)$ avec $\lambda > 0$ alors $\widehat{g}(x) = \lambda\widehat{f}(\lambda x)$
5. Parité
   (a) Si f est paire , alors $\widehat{f}$ est aussi paire et $\widehat{f}(x) = 2\displaystyle\int_0^{+\infty} f(u)\cos xu\, du$
   (b) Si f est impaire , alors $\widehat{f}$ est aussi impaire et $\widehat{f}(x) = -2i\displaystyle\int_0^{+\infty} f(u)\sin xu\, du$

Démonstration

1. On suppose $g(x) = e^{i\alpha x} f(x)$,
   alors,
$$\widehat{g}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha t} f(t)\, e^{-itx} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(x-\alpha)t} f(t)\, dt = \widehat{f}(x-\alpha)$$
2. On suppose $g(x) = f(x-\alpha)$
   Alors,
$$\widehat{g}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-\alpha)\, e^{-itx} dt;$$
   En faisant le changement de variables $u = t - \alpha$, on a $\widehat{g}(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\, e^{-i(u+\alpha)x} du = e^{-i\alpha x}\widehat{f}(x)$
3. On suppose $g(x) = \overline{f(-x)}$ alors,
$$\widehat{g}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(-t)} e^{-itx} dt = \overline{\int_{-\infty}^{+\infty} f(-t)\, e^{itx} dt}$$
   On fait le changement de variables $u = -t$, et on obtient,
$$\widehat{g}(x) = \overline{\int_{-\infty}^{+\infty} f(-t)\, e^{itx} dt} = \overline{\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\, e^{i(-u)x} du} = \overline{\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\, e^{-iux} du} = \overline{\widehat{f}(x)}$$
4. On suppose $g(x) = f\left(\dfrac{x}{\lambda}\right)$ avec $\lambda > 0$,
   alors
$$\widehat{g}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{t}{\lambda}\right) e^{-itx} dt$$
   en faisant le changement de variables $u = \dfrac{t}{\lambda}$, on obtient, $\dfrac{du}{dt} = \dfrac{1}{\lambda}$ et, donc,
$$\widehat{g}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{t}{\lambda}\right) e^{-itx} dt = \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-i(\lambda u)x} du = \lambda \hat{f}(\lambda x)$$

5. **Etude de la parité**

La démonstration se base sur $\widehat{f}(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\, e^{-ixu}\, \mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{0} f(u)\, e^{-ixu}\, \mathrm{d}u + \int_{0}^{+\infty} f(u)\, e^{-ixu}\, \mathrm{d}u$

(a) Supposons f paire

Faisons, dans l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(u)\, e^{-ixu}\, \mathrm{d}u$, le changement de variables $u = -v$. Alors :

$$\int_{-\infty}^{0} f(u)\, e^{-ixu}\, \mathrm{d}u = -\int_{+\infty}^{0} f(-v)\, e^{ixv}\, \mathrm{d}v = \int_{0}^{+\infty} f(-v)\, e^{ixu}\, \mathrm{d}v$$

De la parité de f, c'est à dire que pour tout $v \in \mathbb{R}$, nous avons $f(-v) = f(v)$, nous déduisons $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} f(-v)\, e^{ixv}\, \mathrm{d}v = \int_{0}^{+\infty} f(v)\, e^{ixv}\, \mathrm{d}v$

De telle sorte que :

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(x) = & \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\, e^{-ixu}\, \mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{0} f(u)\, e^{-ixu}\, \mathrm{d}u + \int_{0}^{+\infty} f(u)\, e^{-ixu}\, \mathrm{d}u \\
= & \int_{0}^{+\infty} f(v)\, e^{ixv}\, \mathrm{d}v + \int_{0}^{+\infty} f(u)\, e^{-ixu}\, \mathrm{d}u \\
= & \int_{0}^{+\infty} f(u) \left(e^{-ixu} + e^{ixu}\right) \mathrm{d}u \\
= & \int_{0}^{+\infty} f(u) \times 2\cos xu\, \mathrm{d}u \\
= & \; 2\int_{0}^{+\infty} f(u) \cos xu\, \mathrm{d}u
\end{aligned}$$

Et nous avons $\widehat{f}(-x) = 2\displaystyle\int_{0}^{+\infty} f(u) \cos(-xu)\, \mathrm{d}u = 2\int_{0}^{+\infty} f(u) \cos xu\, \mathrm{d}u = \widehat{f}(x)$

Ce qui montre aussi la parité de $\widehat{f}$

(b) Supposons f impaire

Faisons, à nouveau, dans l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(u)\, e^{-ixu}\, \mathrm{d}u$, le changement de variables $u = -v$. Alors :

$$\int_{-\infty}^{0} f(u)\, e^{-ixu}\, \mathrm{d}u = -\int_{+\infty}^{0} f(-v)\, e^{ixv}\, \mathrm{d}v = \int_{0}^{+\infty} f(-v)\, e^{ixu}\, \mathrm{d}v$$

De l'imparité de f, c'est à dire que pour tout $v \in \mathbb{R}$, nous avons $f(-v) = -f(v)$, nous déduisons $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} f(-v)\, e^{ixv}\, \mathrm{d}v = -\int_{0}^{+\infty} f(v)\, e^{ixv}\, \mathrm{d}v$

De telle sorte que :

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(x) = & \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\, e^{-ixu}\, \mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{0} f(u)\, e^{-ixu}\, \mathrm{d}u + \int_{0}^{+\infty} f(u)\, e^{-ixu}\, \mathrm{d}u \\
= & -\int_{0}^{+\infty} f(v)\, e^{ixv}\, \mathrm{d}v + \int_{0}^{+\infty} f(u)\, e^{-ixu}\, \mathrm{d}u \\
= & \int_{0}^{+\infty} f(u) \left(e^{-ixu} - e^{ixu}\right) \mathrm{d}u \\
= & \int_{0}^{+\infty} f(u) \times -2i\sin xu\, \mathrm{d}u \\
= & -2i\int_{0}^{+\infty} f(u) \sin xu\, \mathrm{d}u
\end{aligned}$$

Et nous avons $\widehat{f}(-x) = -2i\displaystyle\int_{0}^{+\infty} f(u) \sin(-xu)\, \mathrm{d}u = 2i\int_{0}^{+\infty} f(u) \sin xu\, \mathrm{d}u = -\widehat{f}(x)$

Ce qui montre aussi l'imparité de $\widehat{f}$

Exercice 22 :

Toute fonction $f(x)$ peut être décomposée, de manière unique, en une somme d'une fonction paire $p(x)$ et d'une fonction impaire $q(x)$. Plus précisément, nous avons : $f(x) = p(x) + q(x)$ où :

$$p(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)] \text{ et } q(x) = \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)]$$

Démontrer que $\widehat{f}(x) = 2\int_0^{+\infty} p(t)\cos tx \, \mathrm{d}x - 2i\int_0^{+\infty} q(t)\sin tx \, \mathrm{d}x$

Exercice 23 :

1. On considère la fonction porte suivante représentée par la figure 5.9 : $\mathrm{P}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } |x| \leqslant +1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

   Calculez $\widehat{\mathrm{P}}$

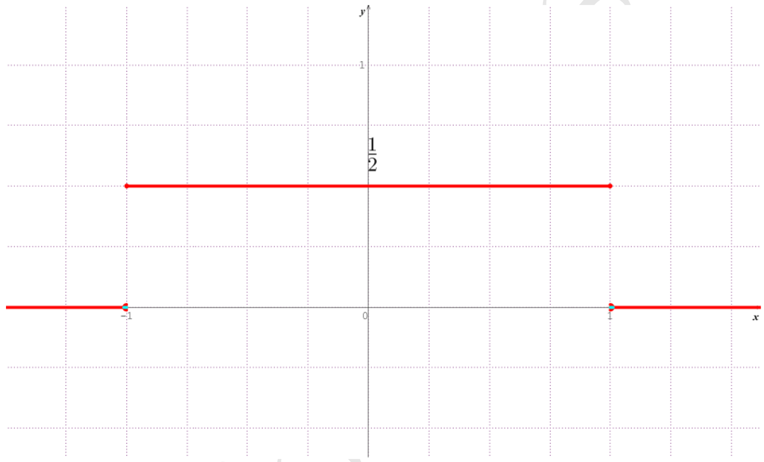

FIGURE 5.9 – Le graphe de P

2. Exprimer les fonctions f et g en fonction de la fonction porte P, puis calculez les transformées de Fourier $\widehat{f}$ et $\widehat{g}$

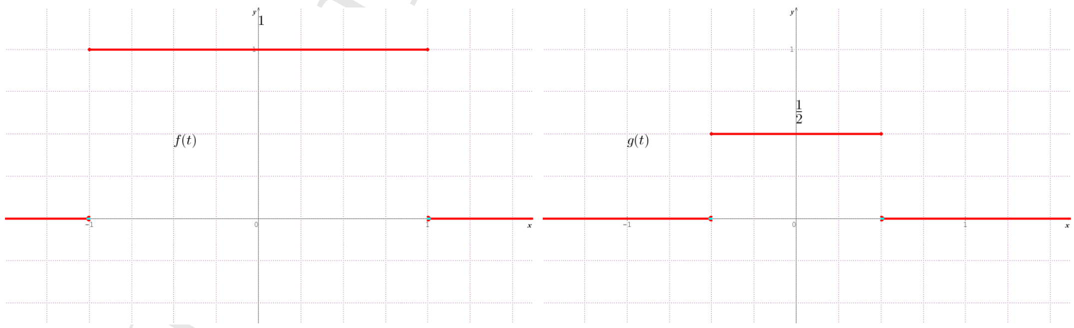

FIGURE 5.10 – Les graphes de f et g

3. De la même manière, exprimer les fonctions h_1 et h_2 en fonction de la fonction porte P, puis calculer les transformée de Fourier $\widehat{h_1}$ et $\widehat{h_2}$; voir figure 5.11

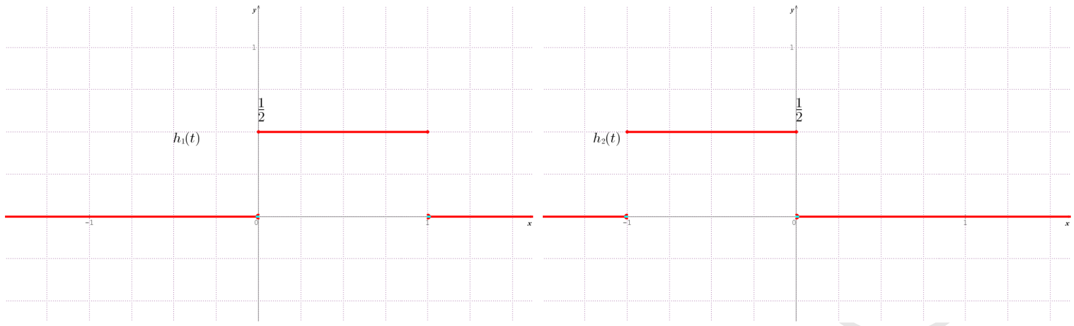

FIGURE 5.11 – Les graphes de h_1 et h_2

Exercice 24 :

Soit $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$.
Calculer, en fonction de $\widehat{f}$ les transformées de Fourier des fonctions suivantes :

1. $g_1(t) = \overline{f(t)}$
2. $g_2(t) = f(-t)$
3. $g_3(t) = f(t-a)$
4. $g_4(t) = f(at)$ avec $a > 0$
5. $g_5(t) = e^{iat} f(t)$

Exercice 25 :

Soit $\lambda > 0$, et on appelle $h_\lambda(t) = e^{-\lambda|t|}$; calculer $\widehat{h_\lambda}$

5.6.5 Propriétés

Soit $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ et $g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, alors, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(y)\, g(y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, \widehat{g}(y) dy$

Démonstration

La démonstration utilise le théorème de Fubini.

Rappel : Théorème de FUBINI

Soit $f(x,y) \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^2)$

alors, $\displaystyle\varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\, \mathrm{d}y$ et $\displaystyle\psi(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\, \mathrm{d}x$ sont des fonctions de $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$

De plus,

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(y)\, \mathrm{d}y$$

Démonstration du théorème

Nous avons, en utilisant le théorème de FUBINI,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(y)\, g(y)\, \mathrm{d}y &= \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} f(t)\, e^{-ity}\, \mathrm{d}t\right] g(y)\, \mathrm{d}y = \iint_{\mathbb{R}^2} f(t)\, e^{-ity} g(y)\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}t \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} g(y)\, e^{-ity}\, \mathrm{d}y\right] f(t)\, \mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} f(y)\, \widehat{g}(y)\, \mathrm{d}y\end{aligned}$$

C'est à dire $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(y)\, g(y)\, \mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} f(y)\, \widehat{g}(y)\, \mathrm{d}y$

Ce que nous voulions

5.6.6 Le lemme de Riemann-Lebesgue

Si $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, alors, $\lim\limits_{|x|\to+\infty} \widehat{f}(x) = 0$, c'est à dire $\lim\limits_{x\to+\infty} \widehat{f}(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \widehat{f}(x) = 0$

Démonstration

1. **Première remarque**
   Nous avons démontré, dans le cours de L_1, que si f était une fonction continue par morceaux sur un intervalle $[a,b]$, alors :
   $$\lim_{|x|\to+\infty} \int_a^b f(t)\sin xt\,\mathrm{d}t = 0 \text{ et } \lim_{|x|\to+\infty} \int_a^b f(t)\cos xt\,\mathrm{d}t = 0$$
   De cette remarque, nous déduisons aisément que, si f était une fonction continue par morceaux sur un intervalle $[a,b]$, alors :
   $$\lim_{|x|\to+\infty} \int_a^b f(t)\,e^{-ixt}\,\mathrm{d}t = 0$$
2. Soit $\varepsilon > 0$
   Comme $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t$ est convergente et il existe $A > 0$ tel que
   $$\int_{-\infty}^{-A} |f(t)|\,\mathrm{d}t + \int_A^{+\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t < \varepsilon \Longleftrightarrow \int_{|t|\geqslant A} |f(t)|\,\mathrm{d}t < \varepsilon$$
3. Nous allons, maintenant, découper l'intégrale :
   $$\widehat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,e^{-ixt}\,\mathrm{d}t = \int_{|t|\geqslant A} f(t)\,e^{-ixt}\,\mathrm{d}t + \int_{-A}^{+A} f(t)\,e^{-ixt}\,\mathrm{d}t$$
   Et nous avons alors :
   $$\left|\widehat{f}(x)\right| \leqslant \int_{|t|\geqslant A} |f(t)|\,\mathrm{d}t + \left|\int_{-A}^{+A} f(t)\,e^{-ixt}\,\mathrm{d}t\right|$$
   Comme $\displaystyle\lim_{|x|\to+\infty} \int_a^b f(t)\,e^{-ixt}\,\mathrm{d}t = 0$, il existe $\eta > 0$ tel que, si $|x| \geqslant \eta$, alors
   $$\left|\int_{-A}^{+A} f(t)\,e^{-ixt}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \varepsilon$$
4. Et nous avons alors, si $|x| \geqslant \eta$
   $$\left|\widehat{f}(x)\right| \leqslant \int_{|t|\geqslant A} |f(t)|\,\mathrm{d}t + \left|\int_{-A}^{+A} f(t)\,e^{-ixt}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant 2\varepsilon$$

Donc $\lim\limits_{|x|\to+\infty} \widehat{f}(x) = 0$

Remarque 18 :

1. On appelle $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ qui tendent vers zéro à l'infini
2. Comment définir rigoureusement $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$?
   En fait, $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ est l'ensemble des fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ telles que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact $K(f,\varepsilon)$, dépendant de f et de ε, tel que, si $x \notin K(f,\varepsilon)$, alors $|f(x)| < \varepsilon$
3. Le lemme de Riemann-Lebesgue montre que l'image, par la transformée de Fourier des fonctions de $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ est dans $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$, c'est à dire que $\mathcal{F}\left(\mathrm{L}^1(\mathbb{R})\right) \subset \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$

5.6.7 Convolution et transformée de Fourier

Pour $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ et $g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, nous avons : $\mathcal{F}(f \star g) = \mathcal{F}(f) \times \mathcal{F}(g) \Longleftrightarrow \widehat{f \star g} = \widehat{f} \times \widehat{g}$

Démonstration

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f \star g)(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (f \star g)(t)\, e^{-itx}\, \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\, g(t-u)\, \mathrm{d}u \right) e^{-itx}\, \mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} f(u)\, g(t-u)\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(t-u)\, e^{-itx}\, \mathrm{d}t \right) \mathrm{d}u
\end{aligned}$$

Or, d'après les propriétés élémentaires de la transformée de Fourier, vues en 5.6.4

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} g(t-u)\, \mathrm{d}t = e^{-iux} \widehat{g}(x)$$

d'où

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f \star g)(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(t-u)\, e^{-itx}\, \mathrm{d}t \right) \mathrm{d}u \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \left(e^{-iux} \widehat{g}(x) \right) \mathrm{d}u \\
&= \widehat{g}(x) \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\, e^{-iux}\, \mathrm{d}u \\
&= \widehat{g}(x) \times \widehat{f}(x)
\end{aligned}$$

Ce que nous voulions

5.6.8 Lemme

Soient $h \in \mathbb{R}^*$ et $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$

1. Nous appelons $f_h^1(x) = f(x) \left(\dfrac{e^{-ixh} - 1}{h} \right)$. Alors : $\mathcal{F}\left(f_h^1\right)(x) = \widehat{f_h^1}(x) = \dfrac{\widehat{f}(x+h) - \widehat{f}(x)}{h}$
2. Nous appelons $f_h^2(x) = \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$. Alors : $\mathcal{F}\left(f_h^2\right)(x) = \widehat{f_h^2}(x) = \dfrac{\widehat{f}(x)\left(e^{ixh} - 1\right)}{h}$

Démonstration

Nous ré-utilisons les propriétés de linéarité de $\mathcal{F}$ vues en 5.6.4

1. Par définition de la transformée de Fourier, nous avons $\widehat{f_h^1}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_h^1(t)\, e^{-ixt}\, \mathrm{d}t$.

   Calculons donc explicitement cette expression

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} f_h^1(t)\, e^{-ixt}\, \mathrm{d}t &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \left(\frac{e^{-ith} - 1}{h} \right) e^{-ixt}\, \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{h} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-ith} \times e^{-ixt}\, \mathrm{d}t - \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-ixt}\, \mathrm{d}t \right) \\
&= \frac{1}{h} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-it(x+h)}\, \mathrm{d}t - \widehat{f}(x) \right) \\
&= \frac{1}{h} \left(\widehat{f}(x+h) - \widehat{f}(x) \right) = \frac{\widehat{f}(x+h) - \widehat{f}(x)}{h}
\end{aligned}$$

2. Comme tout à l'heure, la transformée de Fourier de f_h^2 est donnée par $\widehat{f_h^2}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_h^2(t)\, e^{-ixt}\,\mathrm{d}t$

   Alors :

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f_h^2(t)\, e^{-ixt}\,\mathrm{d}t &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{f(t+h)-f(t)}{h}\right) e^{-ixt}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{h}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t+h)\, e^{-ixt}\,\mathrm{d}t - \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-ixt}\,\mathrm{d}t\right) \\ &= \frac{1}{h}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t+h)\, e^{-ixt}\,\mathrm{d}t - \widehat{f}(x)\right)\end{aligned}$$

   D'après 5.6.4, nous avons $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t+h)\, e^{-ixt}\,\mathrm{d}t = e^{ihx}\widehat{f}(x)$ et donc :

$$\begin{aligned}\widehat{f_h^2}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_h^2(t)\, e^{-ixt}\,\mathrm{d}t = &\ \frac{1}{h}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t+h)\, e^{-ixt}\,\mathrm{d}t - \widehat{f}(x)\right) \\ = &\ \frac{1}{h}\left(e^{ihx}\widehat{f}(x) - \widehat{f}(x)\right) = \frac{\widehat{f}(x)\left(e^{ixh}-1\right)}{h}\end{aligned}$$

   Ce que nous voulions

Remarque 19 :

Nous trouvons, dans la littérature, d'autres écritures que je trouve moins rigoureuses ; nous essaierons de les éviter

1. Première propriété : $\mathcal{F}\left[f(x)\left(\dfrac{e^{-ixh}-1}{h}\right)\right](t) = \dfrac{\widehat{f}(t+h)-\widehat{f}(t)}{h}$
2. Seconde propriété : $\mathcal{F}\left[\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}\right](t) = \dfrac{\widehat{f}(t)\left(e^{ith}-1\right)}{h}$

5.6.9 Transformée de Fourier et dérivation

Soit $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$

1. On appelle $\tau(x) = -ixf(x)$ et on suppose que $\tau \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, alors, la dérivée de $\widehat{f}$ existe, et nous avons : $\widehat{f}'(x) = \mathcal{F}(\tau)(x)$, c'est à dire :

$$\widehat{f}'(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tau(t)\, e^{-ixt}\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} -itf(t)\, e^{-ixt}\,\mathrm{d}t = -i\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\, e^{-ixt}\,\mathrm{d}t$$

2. On suppose que f est dérivable, et que $f' \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, alors, $\mathcal{F}(f')(x) = ix\widehat{f}(x)$
3. Si $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^n(\mathbb{R})$ et si, pour tout $k = 0, \cdots, n$ la fonction $f^{(k)} \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, alors pour $k = 0, \cdots, n$:

$$\widehat{f^{(k)}}(t) = (it)^k\,\widehat{f}(t)$$

4. Si, pour tout $k = 0, \cdots, n$ la fonction $x^k f(x) \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, alors $\widehat{f}$ est n fois dérivable, et nous avons, pour $k = 0, \cdots, n$, en posant $\tau_k(x) = (-ix)^k f(x)$:

$$\widehat{f}^{(k)}(t) = \mathcal{F}(\tau_k)(t) = \widehat{\tau_k}(t) \Longleftrightarrow \widehat{f}^{(k)}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} (-iu)^k f(u)\, e^{-iut}\,\mathrm{d}u$$

5. Si $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ et si, $\mathrm{supp}(f) \subset [a\ b]$ alors $\widehat{f} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$

Démonstration

1. **Premier point**

   (a) Que $\tau \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ signifie que $\int_{-\infty}^{+\infty} |\tau(t)|\,\mathrm{d}t$ existe, c'est à dire que $\int_{-\infty}^{+\infty} |-itf(t)|\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} |tf(t)|\,\mathrm{d}t$ existe

   (b) Posons toujours $f_h^1(x) = f(x)\left(\dfrac{e^{-ixh}-1}{h}\right)$.

   D'après le premier point du lemme 5.6.8 précédent, nous avons :

$$\mathcal{F}\left[f_h^1\right](t) = \widehat{f_h^1}(t) = \frac{\widehat{f}(t+h)-\widehat{f}(t)}{h}$$

   Il faut donc montrer que $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\widehat{f}(t+h)-\widehat{f}(t)}{h}$ existe, ou encore que $\lim\limits_{t\to 0} \widehat{f_h^1}(t)$ existe

   $\Longrightarrow$ Nous avons, en utilisant le rapport de dérivation $\left(\dfrac{e^{-ixh}-1}{h}\right)$

$$\lim_{h\to 0} f_h^1(x) = \lim_{h\to 0} f(x)\left(\frac{e^{-ixh}-1}{h}\right) = f(x)\lim_{h\to 0}\left(\frac{e^{-ixh}-1}{h}\right) = f(x)(-ix)$$

   Donc $\lim\limits_{h\to 0} f_h^1(x) = -ixf(x)$, et en particulier $\lim\limits_{h\to 0} f_h^1(x)\,e^{-ixt} = -e^{-ixt}ixf(x)$

   $\Longrightarrow$ Par hypothèses, si $\tau(x) = -ixf(x)$, $\tau \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, et de plus, comme $\left|e^{iu}-1\right| \leqslant |u|$, nous avons :

$$\left|f_h^1(x)\right| = \left|f(x)\left(\frac{e^{-ixh}-1}{h}\right)\right| \leqslant |f(x)|\left|\frac{-ixh}{h}\right| = |xf(x)|$$

   Donc, $(\forall h>0)\left(f_h^1 \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})\right)$.

   $\Longrightarrow$ Nous avons :

   - Pour tout $h>0$, $f_h^1(x)\,e^{-ixt}$ intégrable sur $\mathbb{R}$ puisque

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left|f_h^1(x)\,e^{-ixt}\right|\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \left|f_h^1(x)\right|\,\mathrm{d}x$$

     et que $\int_{-\infty}^{+\infty} \left|f_h^1(x)\right|\,\mathrm{d}x$ existe.
   - $\lim\limits_{h\to 0} f_h^1(x)\,e^{-ixt} = -e^{-ixt}ixf(x)$
   - Pour tout $h>0$, nous avons $\left|-e^{-ixt}ixf(x)\right| \leqslant |ixf(x)|$ avec la fonction $ixf(x)$ intégrable.

   D'après le théorème de convergence dominée, 5.1.7

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\widehat{f_h^1}(x) &= \lim_{h\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty} f_h^1(t)\,e^{-ixt}\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{h\to 0} f_h^1(t)\,e^{-ixt}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} -itf(t)\,e^{-ixt}\,\mathrm{d}t = \mathcal{F}(\tau)(x)\end{aligned}$$

   C'est à dire $\widehat{f}'(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} -itf(t)\,e^{-ixt}\,\mathrm{d}t$

   D'où le premier point.

2. **Second point**

   Nous avons $\mathcal{F}(f')(x) = \widehat{f'}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)\,e^{-itx}\,\mathrm{d}t$.

   Comme $f' \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, $\widehat{f'}(x)$ existe.

(a) Soient $A \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $A < B$

Regardons l'expression $\displaystyle\int_A^B f'(t)\, e^{-itx}\, \mathrm{d}t$

En faisant une intégration par parties où nous posons :

$$\left[\begin{array}{ll} u' = f' & u = f \\ v = e^{-itx} & v' = -ixe^{-itx} \end{array}\right]$$

Nous avons alors :

$$\int_A^B f'(t)\, e^{-itx}\, \mathrm{d}t = \left[f(t)\, e^{-itx}\right]_A^B + ix \int_A^B f(t)\, e^{-itx}\, \mathrm{d}t$$
$$\iff$$
$$\int_A^B f'(t)\, e^{-itx}\, \mathrm{d}t = f(B)\, e^{-iBx} - f(A)\, e^{-iAx} + ix \int_A^B f(t)\, e^{-itx}\, \mathrm{d}t$$

- Comme $f' \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, $\displaystyle\lim_{A \to -\infty} \int_A^B f'(t)\, e^{-itx}\, \mathrm{d}t$ existe et nous avons

$$\lim_{A \to -\infty} \int_A^B f'(t)\, e^{-itx}\, \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^B f'(t)\, e^{-itx}\, \mathrm{d}t$$

- De même, comme $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, $\displaystyle\lim_{A \to -\infty} \int_A^B f(t)\, e^{-itx}\, \mathrm{d}t$ existe et nous avons

$$\lim_{A \to -\infty} \int_A^B f(t)\, e^{-itx}\, \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^B f(t)\, e^{-itx}\, \mathrm{d}t$$

- Donc $\displaystyle\lim_{A \to -\infty} f(A)\, e^{-iAx}$ existe, et cette limite est :

$$\lim_{A \to -\infty} f(A)\, e^{-iAx} = f(B)\, e^{-iBx} + ix \int_{-\infty}^B f(t)\, e^{-itx}\, \mathrm{d}t - \int_{-\infty}^B f'(t)\, e^{-itx}\, \mathrm{d}t$$

- Comme $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ la limite $\displaystyle\lim_{A \to -\infty} f(A)\, e^{-iAx}$ ne peut être que nulle. Nous avons donc $\displaystyle\lim_{A \to -\infty} f(A) = 0$
- Nous démontrerions de la même manière que $\displaystyle\lim_{B \to +\infty} f(B) = 0$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\widehat{f'}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)\, e^{-itx}\, \mathrm{d}t = & \lim_{\substack{A \longrightarrow -\infty \\ B \longrightarrow +\infty}} \int_A^B f'(t)\, e^{-itx}\, \mathrm{d}t \\
= & \lim_{\substack{A \longrightarrow -\infty \\ B \longrightarrow +\infty}} \left(f(B)\, e^{-iBx} - f(A)\, e^{-iAx} + ix \int_A^B f(t)\, e^{-itx}\, \mathrm{d}t \right) \\
= & \lim_{\substack{A \longrightarrow -\infty \\ B \longrightarrow +\infty}} ix \int_A^B f(t)\, e^{-itx}\, \mathrm{d}t = ix \lim_{\substack{A \longrightarrow -\infty \\ B \longrightarrow +\infty}} \int_A^B f(t)\, e^{-itx}\, \mathrm{d}t \\
= & \; ix \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-itx}\, \mathrm{d}t = ix \widehat{f}(x)
\end{aligned}$$

3. Dans le point précédent, nous avons montré la formule pour $k = 1$; la formule, pour $k \geqslant 2$ s'obtient en faisant des intégrations par parties successives et en itérant la démonstration
4. **Quatrième point**

   Pour nous simplifier la vie, nous posons $h(x, t) = e^{-ixt} f(x)$, ce qui veut dire que

$$\widehat{f}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x, t)\, \mathrm{d}x$$

Pour tout $k = 0, \cdots, n$, la dérivée partielle $\dfrac{\partial^k h}{\partial t^k}(x,t)$ existe et nous avons

$$\frac{\partial^k h}{\partial t^k}(x,t) = (-ix)^k e^{-ixt} f(x) = (-ix)^k h(x,t)$$

Comme $\left|\dfrac{\partial^k h}{\partial t^k}(x,t)\right| = \left|x^k f(x)\right|$, et que, pour $k = 0 \cdots, n$, $x^k f(x) \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, on peut alors appliquer le théorème de dérivation 5.3.2 sous le signe somme :

$$\begin{aligned} \widehat{f}^{(k)}(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^k h}{\partial t^k}(x,t)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^k}{\partial t^k}\left(e^{-ixt} f(x)\right)\mathrm{d}x \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (-ix)^k e^{-ixt} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} (-ix)^k f(x)\, e^{-ixt}\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

5. **Cinquième point**
   Si $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ est à support borné, alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $x^k f(x) \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, et donc $\widehat{f} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$

Remarque 20 :

Il faut, bien entendu, remarquer que les 3 derniers points de la proposition précédente ne sont que des généralisations des deux premières. Les démonstrations sont tout aussi intéressantes puisque nous les avons voulues différentes.

Exercice 26 :

1. Calculez la transformée de Fourier de la fonction Φ définie par :

$$\Phi(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [-1; 0[\\ -1 & \text{si } t \in [0; +1[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   Le graphe est donné par 5.12 :

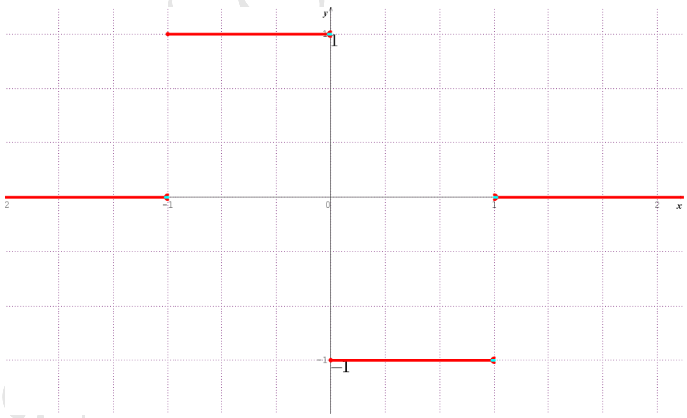

FIGURE 5.12 – Le graphe de la fonction Φ

2. Soit f la fonction définie par :

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{si } t \in [-1; 0[\\ -t & \text{si } t \in [0; +1[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   (a) Faire le graphe de f
   (b) Calculer la dérivée de f
   (c) En déduire $\widehat{f}$

5.6.10 Corollaire

Si $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^n(\mathbb{R})$ et si, pour tout $k = 0, \cdots, n$ la fonction $f^{(k)} \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, alors pour $k = 0, \cdots, n$ $\lim\limits_{|x| \to \infty} |x|^k \widehat{f}(x) = 0$, ce qui veut dire qu'au voisinage de l'infini, $\widehat{f}(x)$ est négligeable devant $\dfrac{1}{|x|^k}$

Démonstration

D'après 5.6.9 pour tout $k = 0, \cdots, n$, nous avons $\widehat{f^{(k)}}(x) = (ix)^k \widehat{f}(x)$.
D'après le lemme de Riemann-Lebesgue 5.6.6 $\lim\limits_{|x| \to \infty} \widehat{f^{(k)}}(x) = 0$, c'est à dire $\lim\limits_{|x| \to \infty} (ix)^k \widehat{f}(x) = 0$
Ce que nous voulions

Remarque 21 :

$\widehat{f}(x)$ est négligeable devant $\dfrac{1}{|x|^k}$ s'écrit aussi $\widehat{f}(x) \in o\left(\dfrac{1}{|x|^k}\right)$

5.6.11 Application

Une application de cette section est le calcul de la transformée de Fourier d'une fonction de Gauss du type $f(x) = e^{-ax^2}$ avec $a > 0$

1. Tout d'abord, nous n'avons aucun problème concernant l'appartenance des dérivées successives dans $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$; on peut donc affirmer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^{(k)} \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$
2. Nous avons $f'(x) = -2axe^{-ax^2} = -2axf(x)$, et donc $\widehat{f'}(t) = -2a\mathcal{F}(xf(x))(t)$
3. D'après 5.6.9, $\widehat{f'}(t) = it\widehat{f}(t)$, et $\left(\widehat{f}\right)'(t) = \mathcal{F}(-ixf)(t)$, ce qui se traduit ici par :
$$\mathcal{F}(xf(x))(t) = \frac{-1}{i}\mathcal{F}(-ixf(x))(t) = i\left(\widehat{f}\right)'(t)$$
4. Ce qui nous amène à une équation différentielle :
$$it\widehat{f}(t) = -2ai\widehat{f}'(t) \Longleftrightarrow t\widehat{f}(t) = -2a\widehat{f}'(t)$$
$\widehat{f}$ est donc solution de l'équation différentielle $ty = -2ay' \Leftrightarrow 2ay' + ty = 0$ qui se résout très simplement et pour laquelle nous trouvons $y(t) = Ce^{-\frac{1}{4a}t^2}$, avec C qui dépend des conditions initiales : $C = y(0)$
5. Nous avons donc $\widehat{f}(t) = \widehat{f}(0)e^{-\frac{1}{4a}t^2}$
6. Or, $\widehat{f}(0) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}\,\mathrm{d}x$.
En utilisant le résultat $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$, nous obtenons
$$\widehat{f}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$
7. Ainsi, $\widehat{f}(t) = \sqrt{\dfrac{\pi}{a}}e^{-\frac{1}{4a}t^2}$
8. Si nous nous intéressons à une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0,1)$, c'est à dire la variable aléatoire réelle de densité $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$, sa transformée de Fourier est donnée par $\widehat{g}(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$; c'est, en quelque sorte, un vecteur propre de la transformée de Fourier.

5.6.12 Quelques exercices

Exercice 27 :

La fonction de Heaviside est la fonction H définie par :

$$H(x) = 1 \text{ si } x \geqslant 0 \qquad\qquad H(x) = 0 \text{ sinon}$$

Le graphe est donné par la figure 5.13 :

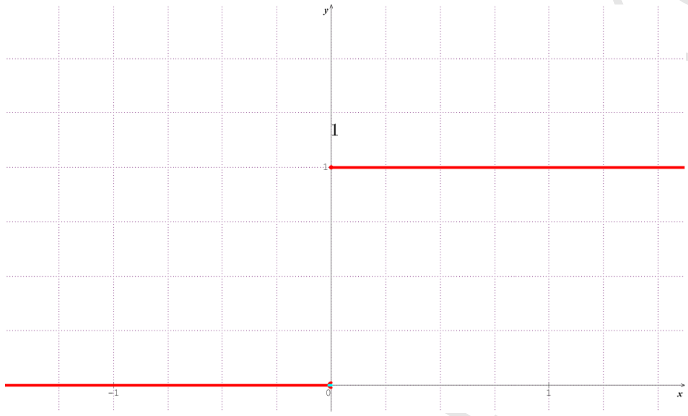

FIGURE 5.13 – Le graphe de la fonction de Heaviside H

Calculer les transformées de Fourier des fonctions suivantes :

1. $H(2-|x|)$
2. $H(x)\, e^{-\frac{x}{2}}$
3. $H(x-3)\, e^{-3x}\cos x$
4. $H(1-|x|)(1-2|x|)$
5. $H(x+1)\, e^{-x}$

Exercice 28 :

L'ondelette de Haar est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \left[0; \dfrac{1}{2}\right] \\ -1 & \text{si } x \in \left[\dfrac{1}{2}; +1\right] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Calculer $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} H(x)\, dx$, puis $\widehat{H}(x)$, la transformée de Fourier de H
2. On considère les fonctions $(H_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ définies par : $H_k(x) = H(x-k)$
   (a) Faire le graphe de H_1 et de H_{-1}
   (b) Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, calculer $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} H_k(x)\, dx$
   (c) Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, calculer $\widehat{H_k}(x)$, la transformée de Fourier de H_k
3. On considère la fonction $H_{1,1}$ définie par : $H_{1,1}(x) = \sqrt{2}H(2x-1)$
   (a) Faire le graphe de $H_{1,1}$
   (b) Calculer $\widehat{H_{1,1}}(x)$, la transformée de Fourier de $H_{1,1}$

5.7 La Transformée de Laplace

5.7.1 Définition

Soit f une fonction localement intégrable sur $\mathbb{R}^+$, c'est à dire intégrable sur tout compact $[a;b] \subset \mathbb{R}^+$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$
On appelle transformée de Laplace de f, la fonction $\mathcal{L}(f)$ définie sur une partie $\Omega \subset \mathbb{C}$, à valeurs dans $\mathbb{C}$ par la formule :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \mathcal{L}(f)(z) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-zt}\, \mathrm{d}t \quad \text{où } z = x + i\omega \end{array} \right.$$

Remarque 22 :

1. Cette définition est, une nouvelle fois, une déclaration d'intention. Rien ne nous dit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-zt}\, \mathrm{d}t$ soit définie, convergente etc....
2. L'intégrabilité de $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-zt}\, \mathrm{d}t$ ne dépend que du module de $f(t)\, e^{-zt}$, c'est à dire de
$$\left|f(t)\, e^{-zt}\right| = |f(t)|\, e^{-xt} = |f(t)|\, e^{-\operatorname{Re}(z)t}$$
La transformée de Laplace $\mathcal{L}(f)$ ne sera donc pas forcément définie.

Exemple 11 :

1. Si nous nous intéressons à la fonction H de Heaviside qui est, en fait, la fonction indicatrice sur $\mathbb{R}^+$, quelle est sa transformée de Laplace ? Nous avons :
$$\mathcal{L}(H)(z) = \int_0^{+\infty} e^{-zt}\, \mathrm{d}t$$
Cette intégrale ne converge que si $|e^{-zt}| = e^{-\operatorname{Re}(z)t}$ est tel que $\operatorname{Re}(z) \in [a; +\infty[$ avec $a > 0$
Et nous avons : $\mathcal{L}(H)(z) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-zt}\, \mathrm{d}t = \left[-\frac{e^{-zt}}{z}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{z}$ pour $\operatorname{Re}(z) \in [a; +\infty[$ avec $a > 0$
Remarquons aussi que la fonction de Heaviside n'est pas intégrable sur $[0; +\infty[$
2. Considérons maintenant $F(x) = H(x-\lambda)$ où $\lambda > 0$ et H est la fonction de Heaviside.
Nous avons $F(x) = 0$ si $x - \lambda < 0$ et $F(x) = 1$ si $x - \lambda \geqslant 0$ et donc
$$\mathcal{L}(F)(z) = \int_0^{+\infty} F(t)\, e^{-zt}\, \mathrm{d}t = \int_\lambda^{+\infty} e^{-zt}\, \mathrm{d}t = \left[\frac{e^{-zt}}{-z}\right]_\lambda^{+\infty} = \frac{e^{-\lambda z}}{\lambda}$$

5.7.2 Lemme

Soit f une fonction intégrable sur tout compact $[a;b] \subset \mathbb{R}^+$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$
Si, pour $x_0 \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left|f(t)\, e^{-x_0 t}\right| \mathrm{d}t$ existe, alors l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-zt}\, \mathrm{d}t$ existe pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re}(z) \geqslant x_0$

Démonstration

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re}(z) \geqslant x_0$.
Alors, pour $t \geqslant 0$, $t \operatorname{Re}(z) \geqslant t x_0 \iff -t \operatorname{Re}(z) \leqslant -t x_0$ et donc
$$\left|f(t)\, e^{-zt}\right| = |f(t)|\, e^{-t\operatorname{Re}(z)} \leqslant |f(t)|\, e^{-t x_0}$$

Comme $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left|f(t)\,e^{-x_0 t}\right| \mathrm{d}t$ existe par hypothèse, il en est de même de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left|f(t)\,e^{-zt}\right| \mathrm{d}t$ et donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,e^{-zt}\,\mathrm{d}t$ existe dès que $\mathrm{Re}(z) \geqslant x_0$

5.7.3 Théorème

Soit f une fonction intégrable sur tout compact $[a;b] \subset \mathbb{R}^+$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$
Alors il existe un nombre réel $s \in \mathbb{R}$, avec éventuellement $s = +\infty$ ou $s = -\infty$, tel que, pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$\longrightarrow$ Si $\mathrm{Re}(z) > s$ alors $\mathcal{L}(f)(z) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,e^{-zt}\,\mathrm{d}t$ existe

$\longrightarrow$ Si $\mathrm{Re}(z) < s$ alors $\mathcal{L}(f)(z) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,e^{-zt}\,\mathrm{d}t$ n'existe pas

$\longrightarrow$ Pour $\mathrm{Re}(z) = s$, nous ne pouvons conclure dans le cas général

Démonstration

On appelle $\mathcal{S}_f = \left\{ x \in \mathbb{R} \text{ tels que } \displaystyle\int_0^{+\infty} |f(t)|\,e^{-xt}\,\mathrm{d}t \text{ existe} \right\}$.

Soit $s = \inf \mathcal{S}_f$

1. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $x = Re(z)$ soit tel que $x > s$.
   Alors, des propriétés de la borne inférieure, nous pouvons écrire qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $s < x_0 < x$ et donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f(t)|\,e^{-x_0 t}\,\mathrm{d}t$ existe.

   Donc, d'après le lemme 5.7.2, $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f(t)|\,e^{-xt}\,\mathrm{d}t$ existe puisque $x > x_0$

   Et donc $\mathcal{L}(f)(z) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,e^{-zt}\,\mathrm{d}t$ existe
2. Soit, maintenant, $z \in \mathbb{C}$ tel que $x = Re(z)$ soit tel que $x < s$.
   Comme tout à l'heure, il existe $x_1 \in \mathbb{R}$ tel que $x < x_1 < s$.
   Alors, $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f(t)|\,e^{-xt}\,\mathrm{d}t$ n'existe pas, sinon $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f(t)|\,e^{-x_1 t}\,\mathrm{d}t$ existerait aussi d'après le lemme 5.7.2 et ce serait contradictoire avec le fait que $s = \inf \mathcal{S}_f$.

   Donc $\mathcal{L}(f)(z) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,e^{-zt}\,\mathrm{d}t$ n'existe pas

Le théorème est donc démontré

5.7.4 Définition

Le nombre réel $s \in [-\infty; +\infty]$ défini dans le théorème 5.7.3 est appelé abscisse de convergence ou abscisse d'intégrabilité de la transformée de Laplace $\mathcal{L}(f)(z) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,e^{-zt}\,\mathrm{d}t$.
Le domaine du plan complexe $\mathcal{D}_s = \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } Re(z) > s\}$ est appelé le domaine d'existence de la transformée de Laplace $\mathcal{L}(f)(z)$

Remarque 23 :

1. Notons que l'abscisse de convergence s est défini par la coupure entre les $x \in \mathbb{R}$ pour lesquels l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f(t)|\,e^{-xt}\,\mathrm{d}t$ existe et les $x \in \mathbb{R}$ pour lesquels l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f(t)|\,e^{-xt}\,\mathrm{d}t$ n'existe pas
2. Le théorème 5.7.3 ne donne aucune information sur ce qui se passe en $Re(z) = s$
3. (a) Si $s = -\infty$, alors le domaine d'existence est $\mathbb{C}$ en entier

(b) Par contre, si $s = +\infty$, alors le domaine d'existence est vide et la transformée de Laplace $\mathcal{L}(f)(z)$ n'est pas définie

(c) Si s est fini, alors le domaine d'existence est un demi-plan droit du plan complexe.

Exemple 12 :

1. Soit $f(t) = e^{-t^2}$.
   Alors $|f(t)|\, e^{-xt} = e^{-t^2-xt}$ est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}^+$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et donc l'abscisse de convergence est $s = -\infty$, ce qui veut dire que la transformée de Laplace
   $$\mathcal{L}(f)(z) = \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-zt}\, \mathrm{d}t = \mathcal{L}(f)(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2-zt}\, \mathrm{d}t$$
   est définie pour tout $z \in \mathbb{C}$
2. Soit, cette fois-ci $f(t) = e^{t^2}$.
   Alors $|f(t)|\, e^{-xt} = e^{t^2-xt}$ est une fonction qui n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}^+$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et donc l'abscisse de convergence est $s = +\infty$, ce qui veut dire que la transformée de Laplace de f, $\mathcal{L}(f)(z)$ n'existe pas
3. Considérons maintenant $f(t) = t^n e^{tz_0}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $z_0 \in \mathbb{C}$ où $z_0 = x_0 + iy_0$.
   Alors $|f(t)|\, e^{-xt} = t^n e^{(x_0-x)t}$ et cette fonction est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ si $x_0 - x < 0 \Longleftrightarrow x > x_0$; donc $s = x_0$ et on voit que le demi-plan complexe dans lequel la transformée de Laplace est définie est $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } Re(z) > x_0\}$.
   Ainsi $\mathcal{L}(f)(z) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{tz_0} e^{-zt}\, \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} t^n e^{t(z_0-z)}\, \mathrm{d}t$ est définie si $Re(z) > Re(z_0)$

5.7.5 Théorème

Soit f une fonction intégrable sur tout compact $[a;b] \subset \mathbb{R}^+$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$
On suppose qu'il existe $t_0 \geqslant 0$ tel que si $t \in \mathbb{R}$ et si $t \geqslant t_0$, alors nous avons : $|f(t)| \leqslant Ae^{at}$, avec $A > 0$ et $a \in \mathbb{R}$
Alors, l'abscisse de convergence s de $\mathcal{L}(f)(z)$ est tel que $s \leqslant a$

Démonstration

Il s'agit de montrer que la fonction $|f(t)|\, e^{-xt}$ est intégrable pour tout $x > a$

1. Pour tout $t \geqslant t_0$, nous avons $|f(t)|\, e^{-xt} \leqslant Ae^{at} \times e^{-xt} = Ae^{(a-x)t}$
   La fonction $g(t) = Ae^{(a-x)t}$ est intégrable sur $[t_0; +\infty[$ si $a - x < 0 \Longleftrightarrow x > a$
   Nous en concluons que si $Re(z) > a$, alors $\displaystyle\int_{t_0}^{+\infty} f(t)\, e^{-zt}\, \mathrm{d}t$ existe
2. Comme f est une fonction intégrable sur tout compact, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{t_0} f(t)\, e^{-zt}\, \mathrm{d}t$ existe

Donc, $\mathcal{L}(f)(z) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-zt}\, \mathrm{d}t$ existe si $Re(z) > a$.
Ainsi, d'après la définition de s *(cf 5.7.4)*, nous avons $s \leqslant a$

5.7.6 Linéarité de la transformée de Laplace

Soient f et g 2 fonctions intégrables sur tout compact $[a;b] \subset \mathbb{R}^+$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$
On suppose que les transformées de Laplace $\mathcal{L}(f)$ et $\mathcal{L}(g)$ ont, respectivement, pour abscisse de convergence s_f et s_g. Alors,

1. Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ et tout $\mu \in \mathbb{C}$, $\mathcal{L}(\lambda f + \mu g) = \lambda \mathcal{L}(f) + \mu \mathcal{L}(g)$, ce qui veut dire que la transformation de Laplace $\mathcal{L}$ est linéaire
2. Si s est l'abscisse de convergence de $\mathcal{L}(\lambda f + \mu g)$, alors :
   (a) $s = \sup(s_f, s_g)$ si $s_f \neq s_g$
   (b) Si $s_f = s_g$, alors $s \leqslant s_f$

Démonstration

1. La linéarité de $\mathcal{L}$ est totalement liée à la linéarité de l'intégrale
2. Pour que l'égalité $\mathcal{L}(\lambda f + \mu g)(z) = \lambda \mathcal{L}(f)(z) + \mu \mathcal{L}(g)(z)$ soit valide, il faut que toutes les grandeurs existent, c'est à dire $Re(z) > s_f$ et $Re(z) > s_g$. Donc :
   ▷ Si $s_f \neq s_g$ alors nous devons avoir $Re(z) > \sup(s_f, s_g)$, c'est à dire $s > \sup(s_f, s_g)$
   ▷ Et si $s_f = s_g$ alors $s \leqslant s_f$

Exemple 13 :

Considérons $F(x) = H(x-\lambda)$ et $G(x) = H(x-\mu)$ où $0 < \lambda < \mu$ et H est la fonction de Heaviside.

⟶ Nous connaissons déjà $\mathcal{L}(F)(z) = \dfrac{e^{-\lambda z}}{z}$ et donc, de la même manière, $\mathcal{L}(G)(z) = \dfrac{e^{-\mu z}}{z}$.
Donc, d'après la linéarité de $\mathcal{L}$:

$$\mathcal{L}(F-G)(z) = \mathcal{L}(F)(z) - \mathcal{L}(G)(z) = \frac{e^{-\lambda z} - e^{-\mu z}}{z}$$

⟶ Allons plus loin :
▷ Si $x < \lambda < \mu$, alors $F(x) = G(x) = 0$ et donc $F(x) - G(x) = 0$
▷ Si $\lambda \leqslant x \leqslant \mu$, alors $F(x) = 1$ et $G(x) = 0$ et donc $F(x) - G(x) = 1$
▷ Si $x > \mu$ alors $F(x) = G(x) = 1$ et donc $F(x) - G(x) = 0$
De telle sorte que $F(x) - G(x)$ est la fonction indicatrice de l'intervalle $[\lambda;\mu]$.
De manière générale, donc, si $0 < \lambda < \mu$ alors $H(x-\lambda) - H(x-\mu) = 1_{[\lambda;\mu]}$.
Ainsi, si $0 < \lambda < \mu$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left(1_{[\lambda;\mu]}\right)(z) = \mathcal{L}(F-G)(z) &= \frac{e^{-\lambda z} - e^{-\mu z}}{z} \\
&= \int_0^{+\infty} 1_{[\lambda;\mu]}(t)\, e^{-zt}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_\lambda^\mu e^{-zt}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{e^{-zt}}{-z}\right]_\lambda^\mu = \frac{e^{-\lambda z} - e^{-\mu z}}{z}
\end{aligned}$$

5.7.7 Translation

Soit f une fonction intégrable sur tout compact $[a;b] \subset \mathbb{R}^+$, à valeurs dans $\mathbb{C}$ et nulle sur $\mathbb{R}^-$
Soit $t_0 \geqslant 0$ et $g(t) = f(t-t_0)$. Alors :

1. Si s_f est l'abscisse de convergence de $\mathcal{L}(f)$ et s_g celui de $\mathcal{L}(g)$, alors $s_f = s_g$
2. De plus, $\mathcal{L}(g)(z) = e^{-zt_0}\mathcal{L}(f)(z)$

Démonstration

▷ De la manière dont est définie g, on peut aussi dire que g une fonction intégrable sur tout compact $[a;b] \subset \mathbb{R}^+$ et donc :

$$\mathcal{L}(g)(z) = \int_0^{+\infty} g(t)\, e^{-zt}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} f(t-t_0)\, e^{-zt}\,\mathrm{d}t$$

En faisant le changement de variable $u = t - t_0 \Longleftrightarrow t = u + t_0$ et $\mathrm{d}t = \mathrm{d}u$, nous avons :

$$\mathcal{L}(g)(z) = \int_0^{+\infty} f(t - t_0) e^{-zt} \,\mathrm{d}t = \int_{-t_0}^{+\infty} f(u) e^{-z(t_0+u)} \,\mathrm{d}u = e^{-zt_0} \int_{-t_0}^{+\infty} f(u) e^{-zu} \,\mathrm{d}u$$

Comme f est nulle sur $\mathbb{R}^-$, nous avons :

$$\mathcal{L}(g)(z) = e^{-zt_0} \int_{-t_0}^{+\infty} f(u) e^{-zu} \,\mathrm{d}u = e^{-zt_0} \int_0^{+\infty} f(u) e^{-zu} \,\mathrm{d}u = e^{-zt_0} \mathcal{L}(f)(z)$$

▷ Evidemment, nous avons $s_g = s_f$

Exemple 14 :

Voici un exemple simple. Reprenons $F(x) = H(x - \lambda)$ où $0 < \lambda$ et H est la fonction de Heaviside. Alors :

$$\mathcal{L}(F)(z) = e^{-z\lambda} \mathcal{L}(H)(z) = e^{-z\lambda} \times \frac{1}{z} = \frac{e^{-z\lambda}}{z}$$

5.7.8 Multiplication par une exponentielle

Soit f une fonction intégrable sur tout compact $[a; b] \subset \mathbb{R}^+$, à valeurs dans $\mathbb{C}$
Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ et $g(t) = f(t) e^{z_0 t}$. Alors :

1. Si s_f est l'abscisse de convergence de $\mathcal{L}(f)$ et s_g celui de $\mathcal{L}(g)$, alors $s_g = s_f + \mathrm{Re}(z_0)$
2. De plus, $\mathcal{L}(g)(z) = \mathcal{L}(f)(z - z_0)$

Démonstration

▷ De la manière dont est définie g, on peut aussi dire que g une fonction intégrable sur tout compact $[a; b] \subset \mathbb{R}^+$ et donc :

$$\mathcal{L}(g)(z) = \int_0^{+\infty} g(t) e^{-zt} \,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} f(t) e^{z_0 t} e^{-zt} \,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-t(z-z_0)} \,\mathrm{d}t = \mathcal{L}(f)(z - z_0)$$

Donc, nous avons bien $\mathcal{L}(g)(z) = \mathcal{L}(f)(z - z_0)$

▷ Ensuite, $\left|f(t) e^{-t(z-z_0)}\right| = |f(t)| e^{-t\,\mathrm{Re}(z-z_0)}$ est intégrable si et seulement si $\mathrm{Re}(z - z_0) > s_f \Longleftrightarrow \mathrm{Re}(z) > \mathrm{Re}(z_0) + s_f$.
Et donc $s_g = s_f + \mathrm{Re}(z_0)$

5.7.9 Changement d'échelle

Soit f une fonction intégrable sur tout compact $[a; b] \subset \mathbb{R}^+$, à valeurs dans $\mathbb{C}$
Soit $b \geqslant 0$ et $g(t) = f(bt)$. Alors :

1. Si s_f est l'abscisse de convergence de $\mathcal{L}(f)$ et s_g celui de $\mathcal{L}(g)$, alors $s_g = bs_f$
2. De plus, $\mathcal{L}(g)(z) = \frac{1}{b} \mathcal{L}(f)\left(\frac{z}{b}\right)$

Démonstration

▷ De la manière dont est définie g, on peut aussi dire que g une fonction intégrable sur tout compact $[a; b] \subset \mathbb{R}^+$ et donc :

$$\mathcal{L}(g)(z) = \int_0^{+\infty} g(t) e^{-zt} \,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} f(bt) e^{-zt} \,\mathrm{d}t$$

Faisons le changement de variable $u = bt \iff t = \dfrac{u}{b}$ et $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = b \iff \mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{d}u}{b}$. Alors :

$$\mathcal{L}(g)(z) = \int_0^{+\infty} f(bt)\, e^{-zt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{b}\int_0^{+\infty} f(u)\, e^{-\frac{z}{b}u}\,\mathrm{d}u$$

Donc, nous avons bien $\mathcal{L}(g)(z) = \dfrac{1}{b}\mathcal{L}(f)\left(\dfrac{z}{b}\right)$

▷ Ensuite, $\left|f(u)\, e^{-\frac{z}{b}u}\right| = |f(u)|\, e^{-u\frac{\mathrm{Re}(z)}{b}}$ est intégrable si et seulement si $\dfrac{\mathrm{Re}(z)}{b} > s_f \iff \mathrm{Re}(z) > bs_f$.
Et donc $s_g = bs_f$

5.7.10 Théorème

1. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$, à valeurs dans $\mathbb{C}$.
   On appelle $s_{f'}$ l'abscisse de convergence de $\mathcal{L}(f')$ et s_f l'abscisse de convergence de $\mathcal{L}(f)$.
   Alors, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(z) > s_f$ et $\mathrm{Re}(z) > s_{f'}$, $\mathcal{L}(f')(z) = z\mathcal{L}(f)(z) - f(0)$
2. Supposons, maintenant, que f soit une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}^+$, à valeurs dans $\mathbb{C}$
   Pour $k = 1, \dots, n$, on note $f^{(k)}$ la dérivée k-ième de f
   On appelle $s_{f^{(k)}}$ l'abscisse de convergence de $\mathcal{L}\left(f^{(k)}\right)$.
   Alors, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(z) > \max\left\{s_{f^{(k)}} \text{ où } k = 1, \dots, n\right\}$, nous avons :

$$\mathcal{L}\left(f^{(n)}\right)(z) = z^n\mathcal{L}(f)(z) - z^{n-1}f(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0) = z^n\mathcal{L}(f)(z) - \sum_{k=0}^{n-1} z^{n-1-k} f^{(k)}(0)$$

Démonstration

1. Sans trop de difficultés, nous écrivons, pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(z) > \max\{s_f; s_{f'}\}$:

$$\mathcal{L}(f')(z) = \int_0^{+\infty} f'(z)\, e^{-zt}\,\mathrm{d}t$$

   En faisant une intégration par parties :

$$\begin{bmatrix} u' = f' & u = f \\ v = e^{-zt} & v' = -ze^{-zt} \end{bmatrix}$$

   Alors :

$$\mathcal{L}(f')(z) = \int_0^{+\infty} f'(t)\, e^{-zt}\,\mathrm{d}t = \left[f(t)\, e^{-zt}\right]_0^{+\infty} + z\int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-zt}\,\mathrm{d}t$$

   Comme $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)\, e^{-zt} = 0$, nous avons $\left[f(t)\, e^{-zt}\right]_0^{+\infty} = -f(0)$. D'où :

$$\mathcal{L}(f')(z) = z\mathcal{L}(f)(z) - f(0)$$

2. Nous faisons, pour résoudre cette question, une récurrence sur n
   $\Longrightarrow$ C'est vrai lorsque f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$
   $\Longrightarrow$ Supposons que si f est de classe $\mathcal{C}^n$, alors, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(z) > \max\left\{s_{f^{(k)}} \text{ où } k = 1, \dots, n\right\}$, nous avons : $\mathcal{L}\left(f^{(n)}\right)(z) = z^n\mathcal{L}(f)(z) - \sum\limits_{k=0}^{n-1} z^{n-1-k} f^{(k)}(0)$
   $\Longrightarrow$ Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$
   Alors, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(z) > \max\left\{s_{f^{(k)}} \text{ où } k = 1, \dots, n+1\right\}$, nous avons :

$$\mathcal{L}\left(f^{(n+1)}\right)(z) = \int_0^{+\infty} f^{(n+1)}(t)\, e^{-zt}\,\mathrm{d}t$$

En faisant une intégration par parties :

$$\begin{bmatrix} u' = f^{(n+1)}(t) & u = f^{(n)}(t) \\ v = e^{-zt} & v' = -ze^{-zt} \end{bmatrix}$$

Alors :

$$\mathcal{L}\left(f^{(n+1)}\right)(z) = \int_0^{+\infty} f^{(n+1)}(t)\, e^{-zt}\,\mathrm{d}t = \left[f^{(n)}(t)\, e^{-zt}\right]_0^{+\infty} + z\int_0^{+\infty} f^{(n)}(t)\, e^{-zt}\,\mathrm{d}t$$

Comme $\lim\limits_{t\to+\infty} f^{(n)}(t)\, e^{-zt} = 0$, nous avons $\left[f^{(n)}(t)\, e^{-zt}\right]_0^{+\infty} = -f^{(n)}(0)$.
D'où :

$$\mathcal{L}\left(f^{(n+1)}\right)(z) = -f^{(n)}(0) + z\mathcal{L}\left(f^{(n)}\right)(z)$$

De l'hypothèse de récurrence, nous tirons :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left(f^{(n+1)}\right)(z) &= -f^{(n)}(0) + z\mathcal{L}\left(f^{(n)}\right)(z) \\
&= -f^{(n)}(0) + z\left(z^n\mathcal{L}(f)(z) - \sum_{k=0}^{n-1} z^{n-1-k} f^{(k)}(0)\right) \\
&= z^{n+1}\mathcal{L}(f)(z) - \sum_{k=0}^{n-1} z^{n-k} f^{(k)}(0) - f^{(n)}(0) \\
&= z^{n+1}\mathcal{L}(f)(z) - \sum_{k=0}^{n} z^{n-k} f^{(k)}(0)
\end{aligned}$$

Ce que nous voulions

5.7.11 Proposition

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et $g_{n,\lambda}(t) = t^n e^{\lambda t}$

Alors, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tels que $\mathrm{Re}(z) > \mathrm{Re}(\lambda)$, nous avons : $\mathcal{L}(g_{n,\lambda})(z) = \dfrac{n!}{(z-\lambda)^{n+1}}$

Démonstration

1. Pour commencer, intéressons nous à l'intégrabilité sur $\mathbb{R}^+$ de $g_{n,\lambda}(t)\, e^{-zt} = t^n e^{(\lambda-z)t}$ pour $z \in \mathbb{C}$. Nous avons :

$$\left|t^n e^{(\lambda-z)t}\right| = t^n e^{\mathrm{Re}(\lambda-z)t}$$

L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{\mathrm{Re}(\lambda-z)t}\,\mathrm{d}t$ n'existe que si $\mathrm{Re}(\lambda-z) < 0 \Longleftrightarrow \mathrm{Re}(\lambda) < \mathrm{Re}(z)$

2. Soit donc $z \in \mathbb{C}$ tels que $\mathrm{Re}(z) > \mathrm{Re}(\lambda)$ et faisons le calcul de $\mathcal{L}(g_{n,\lambda})(z) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{(\lambda-z)t}\,\mathrm{d}t$

En faisant une intégration par parties en posant :

$$\begin{matrix} u = t^n & u' = nt^{n-1} \\ v' = e^{(\lambda-z)t} & v = \dfrac{e^{(\lambda-z)t}}{(\lambda-z)} \end{matrix}$$

D'où :

$$\int_0^{+\infty} t^n e^{(\lambda-z)t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^n e^{(\lambda-z)t}}{(\lambda-z)}\right]_0^{+\infty} - \frac{n}{(\lambda-z)}\int_0^{+\infty} t^{n-1} e^{(\lambda-z)t}\,\mathrm{d}t$$

Comme $\left|\dfrac{t^n e^{(\lambda-z)t}}{(\lambda-z)}\right| = \dfrac{t^n e^{\mathrm{Re}(\lambda-z)t}}{|\lambda-z|}$ et que $\lim\limits_{t\to+\infty} t^n e^{\mathrm{Re}(\lambda-z)t} = 0$, nous avons

$$\int_0^{+\infty} t^n e^{(\lambda-z)t}\,\mathrm{d}t = -\frac{n}{(\lambda-z)}\int_0^{+\infty} t^{n-1} e^{(\lambda-z)t}\,\mathrm{d}t = \frac{n}{(z-\lambda)}\int_0^{+\infty} t^{n-1} e^{(\lambda-z)t}\,\mathrm{d}t$$

En posant $A_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{(\lambda - z)t}\,\mathrm{d}t$, nous avons $A_n = \dfrac{n}{(z-\lambda)} A_{n-1}$ et donc :

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{n}{(z-\lambda)} A_{n-1} \\ A_{n-1} &= \frac{n-1}{(z-\lambda)} A_{n-2} \\ A_{n-2} &= \frac{n-2}{(z-\lambda)} A_{n-3} \\ &\vdots \\ A_1 &= \frac{1}{(z-\lambda)} A_0 \end{aligned}$$

En multipliant termes à termes et en simplifiant, nous obtenons $A_n = \dfrac{n!}{(z-\lambda)^n} A_0$ avec

$$A_0 = \int_0^{+\infty} e^{(\lambda - z)t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{(\lambda - z)} \left[e^{(\lambda - z)t} \right]_0^{+\infty} = \frac{-1}{(\lambda - z)} = \frac{1}{(z-\lambda)}$$

D'où nous avons $A_n = \dfrac{n!}{(z-\lambda)^{n+1}}$, c'est à dire $\mathcal{L}\left(g_{n,\lambda}\right)(z) = \dfrac{n!}{(z-\lambda)^{n+1}}$

Remarque 24 :

Les physiciens écrivent souvent $\mathcal{L}\left(t^n e^{\lambda t}\right)(z) = \dfrac{n!}{(z-\lambda)^{n+1}}$, ce qui est peut-être plus simple et facile à retenir, mais rigoureusement faux !!!

5.7.12 Proposition

Soit f une fonction localement intégrable sur $\mathbb{R}^+$, c'est à dire intégrable sur tout compact $[a;b] \subset \mathbb{R}^+$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$
Soit s_f l'abscisse d'intégrabilité de f et considérons la transformée de Laplace de f, $\mathcal{L}(f)$, considérée comme une fonction numérique d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{C}$, c'est à dire :

$$\begin{cases} \mathcal{L}(f) : \mathbb{R} & \longrightarrow \quad \mathbb{C} \\ \qquad\quad x & \longmapsto \quad \mathcal{L}(f)(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-xt}\,\mathrm{d}t \end{cases}$$

Alors :

1. Pour tout $x > s_f$, $\mathcal{L}(f)$ est dérivable et $(\mathcal{L}(f))'(x) = -\displaystyle\int_0^{+\infty} t f(t)\, e^{-xt}\,\mathrm{d}t$
2. Plus généralement, $\mathcal{L}(f)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et nous avons, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$(\mathcal{L}(f))^{(n)}(x) = (-1)^n \int_0^{+\infty} t^n f(t)\, e^{-xt}\,\mathrm{d}t$$

Démonstration

Soit donc $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction localement intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

1. Soit $t_0 \geqslant 1$; alors, pour tout $t \geqslant t_0$, nous avons $t^n \geqslant t_0^n \geqslant 1$ et, pour tout $x > s_f$

$$\left| f(t)\, e^{-xt} \right| \leqslant t^n \left| f(t) \right| e^{-xt}$$

Ainsi, si $(-t)^n f(t)\, e^{-xt}$ est intégrable sur l'intervalle $[t_0; +\infty[$, alors $f(t)\, e^{-xt}$ l'est aussi sur $[t_0; +\infty[$

Comme f est localement intégrable sur $\mathbb{R}^+$, les 2 fonctions $(-t)^n f(t) e^{-xt}$ et $f(t) e^{-xt}$ sont intégrables sur l'intervalle $[0; t_0]$
En conclusion, les 2 fonctions $(-t)^n f(t) e^{-xt}$ et $f(t) e^{-xt}$ seront intégrables sur $\mathbb{R}^+$.
Il faut donc démontrer l'intégrabilité de $(-t)^n f(t) e^{-xt}$ sur l'intervalle $[t_0; +\infty[$

2. Soit $\varepsilon > 0$
   - ▷ Nous savons que $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{\ln t}{t} = 0$.

     Il existe donc $t_0 > 1$ tel que si $t \geqslant t_0$, alors $0 \leqslant \dfrac{\ln t}{t} \leqslant \dfrac{\varepsilon}{n}$, et alors, si $t \geqslant t_0$:
     $$\frac{\ln t}{t} \leqslant \frac{\varepsilon}{n} \iff n \ln t \leqslant t\varepsilon \iff e^{n \ln t} \leqslant e^{t\varepsilon} \iff t^n \leqslant e^{t\varepsilon}$$
   - ▷ Par conséquent, si $t \geqslant t_0$, nous avons
     $$\left|(-t)^n f(t) e^{-xt}\right| = t^n |f(t)| e^{-xt} \leqslant |f(t)| e^{-(x-\varepsilon)t}$$
   - ▷ Ainsi, si $x - \varepsilon > s_f \iff x > s_f + \varepsilon$, alors, par définition, $|f(t)| e^{-(x-\varepsilon)t}$ est intégrable, et ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, l'abscisse de convergence (ou d'intégrabilité) de la fonction $(-t)^n f(t) e^{-xt}$ est aussi s_f et donc la fonction $(-t)^n f(t) e^{-xt}$ est intégrable sur l'intervalle $[t_0; +\infty[$
   - ▷ Des remarques données ci-dessus, nous concluons que les fonctions $f(t) e^{-xt}$ et $(-t)^n f(t) e^{-xt}$ sont intégrables suir $\mathbb{R}^+$
3. Appelons maintenant $\psi(t, x) = f(t) e^{-xt}$
   - ▷ La fonction ψ est continue par rapport à chacune des variables
   - ▷ La fonction ψ admet une dérivée partielle par rapport à x : $\dfrac{\partial \psi}{\partial x}(t, x) = -tf(t) e^{-xt}$
   - ▷ Les 2 fonctions ψ et $\dfrac{\partial \psi}{\partial x}$ sont intégrables sur $\mathbb{R}^+$

   Donc, la fonction $\mathcal{L}(f)(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \psi(t, x)\, \mathrm{d}t$ est donc dérivable par rapport à x et de dérivée :
   $$(\mathcal{L}(f))'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial \psi}{\partial x}(t, x)\, \mathrm{d}t = -\int_0^{+\infty} tf(t) e^{-xt}\, \mathrm{d}t$$
4. Il est possible d'itérer ler aisonnement à la fonction $\psi_1(t, x) = -tf(t) e^{-xt}$ et nous pourrions conclure que la fonction $(\mathcal{L}(f))'(x)$ est dérivable par rapport à x et de dérivée :
   $$(\mathcal{L}(f))''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial \psi_1}{\partial x}(t, x)\, \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} t^2 f(t) e^{-xt}\, \mathrm{d}t$$
5. Le résultat à l'ordre n est immédiat, et nous avons, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$(\mathcal{L}(f))^{(n)}(x) = (-1)^n \int_0^{+\infty} t^n f(t) e^{-xt}\, \mathrm{d}t$$

   Ainsi, $\mathcal{L}(f)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

5.7.13 Théorème

Soit f une fonction localement intégrable sur $\mathbb{R}^+$, c'est à dire intégrable sur tout compact $[a; b] \subset \mathbb{R}^+$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$
On suppose que :

1. f est continue à droite de 0
2. Il existe $t_0 \geqslant 0$ tel que si $t \in \mathbb{R}$ et si $t \geqslant t_0$, alors nous avons : $|f(t)| \leqslant Ae^{at}$, avec $A > 0$ et $a \in \mathbb{R}$ *(théorème5.7.5)*

Alors :

1. L'abscisse de convergence s_f de $\mathcal{L}(f)$ est tel que $s_f \leqslant a$
2. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(z) \geqslant s_f$ et $\arg(z) \in \left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right[$, nous avons $\lim\limits_{|z| \to +\infty} z\mathcal{L}(f)(z) = f(0)$

Démonstration

1. Que l'abscisse de convergence s_f de $\mathcal{L}(f)$ soit $s_f \leqslant a$ est un résultat du théorème 5.7.5
2. Soit $z = x + iy$ avec $\mathrm{Re}(z) \geqslant s_f$ et $\theta_0 = \arg(z) \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, c'est à dire que l'argument de z est fixé.
   (a) Alors, de manière très classique,
$$z = |z|\left(\frac{x}{|z|} + i\frac{y}{|z|}\right) = |z|\left(\frac{\mathrm{Re}(z)}{|z|} + i\frac{y}{|z|}\right) = |z|\left(\cos(\arg(z)) + i\sin(\arg(z))\right)$$
   Ainsi $\dfrac{x}{|z|} = \dfrac{\mathrm{Re}(z)}{|z|} = \cos(\arg(z))$ et $\dfrac{y}{|z|} = \sin(\arg(z))$
   (b) Soit $\varepsilon > 0$
   - f est continue à droite de 0.
     Il existe donc $\eta > 0$ tel que si $t \in \mathbb{R}^+$ est tel que $0 \leqslant t \leqslant \eta$, alors $|f(t) - f(0)| \leqslant \varepsilon$
   - Choisissons $\eta > 0$ tel que $0 < \eta \leqslant t_0$. Alors :
$$\begin{aligned} z\mathcal{L}(f)(z) &= z\int_0^{+\infty} f(t)\,e^{-zt}\,\mathrm{d}t \\ &= z\left(f(0)\int_0^{\eta} e^{-zt}\,\mathrm{d}t - f(0)\int_0^{\eta} e^{-zt}\,\mathrm{d}t + \cdots\right. \\ &\qquad \left.\cdots\int_0^{\eta} f(t)\,e^{-zt}\,\mathrm{d}t + \int_{\eta}^{t_0} f(t)\,e^{-zt}\,\mathrm{d}t + \int_{t_0}^{+\infty} f(t)\,e^{-zt}\,\mathrm{d}t\right) \\ &= z\left(f(0)\int_0^{\eta} e^{-zt}\,\mathrm{d}t + \int_0^{\eta}(f(t) - f(0))\,e^{-zt}\,\mathrm{d}t + \cdots\right. \\ &\qquad \left.\cdots\int_{\eta}^{t_0} f(t)\,e^{-zt}\,\mathrm{d}t + \int_{t_0}^{+\infty} f(t)\,e^{-zt}\,\mathrm{d}t\right) \end{aligned}$$
     Et :
$$z\mathcal{L}(f)(z) - zf(0)\int_0^{\eta} e^{-zt}\,\mathrm{d}t = z\int_0^{\eta}(f(t) - f(0))\,e^{-zt}\,\mathrm{d}t + z\int_{\eta}^{t_0} f(t)\,e^{-zt}\,\mathrm{d}t + z\int_{t_0}^{+\infty} f(t)\,e^{-zt}\,\mathrm{d}t$$
   - Nous avons $\displaystyle\int_0^{\eta} e^{-zt}\,\mathrm{d}t = \frac{-1}{z}\left[e^{-zt}\right]_0^{\eta} = \frac{1 - e^{-z\eta}}{z}$ de telle sorte que
$$z\mathcal{L}(f)(z) - zf(0)\int_0^{\eta} e^{-zt}\,\mathrm{d}t = z\mathcal{L}(f)(z) - f(0)\left(1 - e^{-z\eta}\right)$$
     Et nous avons donc :
$$z\mathcal{L}(f)(z) - f(0)\left(1 - e^{-z\eta}\right) = z\int_0^{\eta}(f(t) - f(0))\,e^{-zt}\,\mathrm{d}t + z\int_{\eta}^{t_0} f(t)\,e^{-zt}\,\mathrm{d}t + z\int_{t_0}^{+\infty} f(t)\,e^{-zt}\,\mathrm{d}t$$
   - Regardons de plus près le second membre de l'égalité
     ⋆ Tout d'abord :
$$\left|z\int_0^{\eta}(f(t) - f(0))\,e^{-zt}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant |z|\int_0^{\eta}|f(t) - f(0)|\,e^{-\mathrm{Re}(z)t}\,\mathrm{d}t \leqslant |z| \times \varepsilon \times \int_0^{\eta} e^{-\mathrm{Re}(z)t}\,\mathrm{d}t$$
     Et comme $\displaystyle\int_0^{\eta} e^{-\mathrm{Re}(z)t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{e^{-\mathrm{Re}(z)t}}{-\mathrm{Re}(z)}\right]_0^{\eta} = \frac{1 - e^{-\mathrm{Re}(z)\eta}}{\mathrm{Re}(z)}$, nous avons :
$$\left|z\int_0^{\eta}(f(t) - f(0))\,e^{-zt}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \varepsilon \times \frac{|z|}{\mathrm{Re}(z)}\left(1 - e^{-\mathrm{Re}(z)\eta}\right)$$
     Comme nous cherchons la limite lorsque $|z|$ tend vers $+\infty$, on peut supposer que pour l'argument θ_0 fixé, il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $\arg(z_0) = \theta_0$ et tel que $\mathrm{Re}(z) > \mathrm{Re}(z_0) > 0$. Nous avons alors $1 - e^{-\mathrm{Re}(z)\eta} \leqslant 1$ et :
$$\left|z\int_0^{\eta}(f(t) - f(0))\,e^{-zt}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{\cos\theta_0}$$

⋆ Ensuite :

$$\left|z\int_{\eta}^{t_0} f(t)\,e^{-zt}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant |z| \int_{\eta}^{t_0} |f(t)|\,e^{-\operatorname{Re}(z)t}\,\mathrm{d}t$$

Pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re}(z) > \operatorname{Re}(z_0) > 0$, nous avons $e^{-\operatorname{Re}(z)t} \leqslant e^{-\operatorname{Re}(z)\eta}$, et donc nous avons :

$$\left|z\int_{\eta}^{t_0} f(t)\,e^{-zt}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant |z|\,e^{-\operatorname{Re}(z)\eta} \int_{\eta}^{t_0} |f(t)|\,\mathrm{d}t$$

f étant localement intégrable, $\displaystyle\int_{\eta}^{t_0} |f(t)|\,\mathrm{d}t$ est nombre fixe.

Pour fixer les idées, appelons $\Lambda = \displaystyle\int_{\eta}^{t_0} |f(t)|\,\mathrm{d}t$

D'autre part, comme $\displaystyle\lim_{|z|\to+\infty} |z|\,e^{-\operatorname{Re}(z)\eta} = 0$, il existe $z_1 \in \mathbb{C}$, d'argument θ_0 tel que si $\operatorname{Re}(z) > \operatorname{Re}(z_1) > 0$, alors $0 \leqslant |z|\,e^{-\operatorname{Re}(z)\eta} \leqslant \varepsilon$

Ainsi, pour $z \in \mathbb{C}$, tel que $\operatorname{Re}(z) > \operatorname{Re}(z_1) > 0$, alors $\left|z\displaystyle\int_{\eta}^{t_0} f(t)\,e^{-zt}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \Lambda\varepsilon$

⋆ Et, pour terminer,

$$\left|z\int_{t_0}^{+\infty} f(t)\,e^{-zt}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant |z| \int_{t_0}^{+\infty} |f(t)|\,e^{-\operatorname{Re}(z)t}\,\mathrm{d}t$$

De l'hypothèse $|f(t)| \leqslant Ae^{at}$ vraie pour tout $t \geqslant t_0$, nous tirons :

$$|z| \int_{t_0}^{+\infty} |f(t)|\,e^{-\operatorname{Re}(z)t}\,\mathrm{d}t \leqslant |z|\,A \int_{t_0}^{+\infty} e^{at}e^{-\operatorname{Re}(z)t}\,\mathrm{d}t = A\,|z| \int_{t_0}^{+\infty} e^{-(\operatorname{Re}(z)-a)t}\,\mathrm{d}t$$

Par un calcul classique, nous avons $\displaystyle\int_{t_0}^{+\infty} e^{-(\operatorname{Re}(z)-a)t}\,\mathrm{d}t = \frac{e^{-(\operatorname{Re}(z)-a)t_0}}{\operatorname{Re}(z)-a}$ de telle sorte que :

$$\left|z\int_{t_0}^{+\infty} f(t)\,e^{-zt}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant A\,|z|\,\frac{e^{-(\operatorname{Re}(z)-a)t_0}}{\operatorname{Re}(z)-a} = \left(\frac{A\,|z|}{\operatorname{Re}(z)-a}\right)e^{-(\operatorname{Re}(z)-a)t_0}$$

→ Etudions $\displaystyle\lim_{|z|\to+\infty} \frac{|z|}{\operatorname{Re}(z)-a}$.

Nous avons : $\displaystyle\frac{|z|}{\operatorname{Re}(z)-a} = \frac{\frac{|z|}{\operatorname{Re}(z)}}{1-\frac{a}{\operatorname{Re}(z)}} = \frac{\frac{1}{\cos\theta_0}}{1-\frac{a}{\operatorname{Re}(z)}}$

Or, $\displaystyle\lim_{|z|\to+\infty} \frac{a}{\operatorname{Re}(z)} = 0$ et donc $\displaystyle\lim_{|z|\to+\infty} \frac{\frac{1}{\cos\theta_0}}{1-\frac{a}{\operatorname{Re}(z)}} = \frac{1}{\cos\theta_0}$.

Et donc l'expression $\displaystyle\frac{A\,|z|}{\operatorname{Re}(z)-a}$ est bornée.

Soit $M > 0$ tel que $\displaystyle\frac{A\,|z|}{\operatorname{Re}(z)-a} \leqslant M$

→ Maintenant, $\displaystyle\lim_{|z|\to+\infty} e^{-(\operatorname{Re}(z)-a)t_0} = 0$.

Il existe donc $z_2 \in \mathbb{C}$ avec $\arg(z_2) = \theta_0$ tel que, si $|z| \geqslant |z_2|$ alors

$$0 \leqslant e^{-(\operatorname{Re}(z)-a)t_0} \leqslant \varepsilon$$

- Ainsi, pour $z \in \mathbb{C}$ avec $\arg(z) = \theta_0$ tel que, si $|z| \geqslant \max\{|z_0|, |z_1|, |z_2|\}$, alors

$$\left|z\mathcal{L}(f)(z) - f(0)\left(1-e^{-z\eta}\right)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{\cos\theta_0} + \Lambda\varepsilon + M\varepsilon = \varepsilon\left(\frac{1}{\cos\theta_0} + \Lambda + M\right) = M_1\varepsilon$$

- Maintenant :

$$\begin{aligned} |z\mathcal{L}(f)(z) - f(0)| = & \ |z\mathcal{L}(f)(z) - f(0)(1-e^{-z\eta}) + f(0)(1-e^{-z\eta}) - f(0)| \\ \leqslant & \ |z\mathcal{L}(f)(z) - f(0)(1-e^{-z\eta})| + |f(0)(1-e^{-z\eta}) - f(0)| \\ \leqslant & \ |z\mathcal{L}(f)(z) - f(0)(1-e^{-z\eta})| + |-f(0)e^{-z\eta}| \\ \leqslant & \ |z\mathcal{L}(f)(z) - f(0)(1-e^{-z\eta})| + |f(0)|e^{-\operatorname{Re}(z)\eta} \end{aligned}$$

  Nous avons déjà vu que $\lim\limits_{|z|\to+\infty} e^{-\operatorname{Re}(z)\eta} = 0$ et il existe donc $z_3 \in \mathbb{C}$ avec $\arg(z_3) = \theta_0$ tel que, si $|z| \geqslant |z_3|$ alors $0 \leqslant e^{-\operatorname{Re}(z)\eta} \leqslant \varepsilon$
- En conclusion, pour $z \in \mathbb{C}$ avec $\arg(z) = \theta_0$ tel que, si $|z| \geqslant \max\{|z_0|, |z_1|, |z_2|, |z_3|\}$, alors

$$|z\mathcal{L}(f)(z) - f(0)| \leqslant \varepsilon(|f(0)| + M_1)$$

Ce qui montre que $\lim\limits_{|z|\to+\infty} z\mathcal{L}(f)(z) = f(0)$

Remarque 25 :

Du résultat $\lim\limits_{|z|\to+\infty} z\mathcal{L}(f)(z) = f(0)$, nous déduisons facilement que $\lim\limits_{|z|\to+\infty} \mathcal{L}(f)(z) = 0$

5.7.14 Corollaire

Soit f une fonction localement intégrable sur $\mathbb{R}^+$, c'est à dire intégrable sur tout compact $[a;b] \subset \mathbb{R}^+$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$

Soit s_f l'abscisse d'intégrabilité de f et considérons la transformée de Laplace de f, $\mathcal{L}(f)$, considérée comme une fonction numérique d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{C}$, c'est à dire :

$$\begin{cases} \mathcal{L}(f) : \mathbb{R} & \longrightarrow \quad \mathbb{C} \\ \qquad x & \longmapsto \quad \mathcal{L}(f)(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-xt}\, \mathrm{d}t \end{cases}$$

Alors, si $n \geqslant 1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x(\mathcal{L}(f))^{(n)}(x) = 0$

Démonstration

1. Nous avons démontré en 5.7.12 que $(\mathcal{L}(f))^{(n)}(x) = (-1)^n \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n f(t)\, e^{-xt}\, \mathrm{d}t$.

   Si nous posons $g_n(t) = (-1)^n t^n f(t)$, nous avons $(\mathcal{L}(f))^{(n)}(x) = \mathcal{L}(g_n)(x)$
2. D'après 5.7.12 nous avons $\lim\limits_{x\to+\infty} x\mathcal{L}(g_n)(x) = g_n(0)$
3. Nous pouvons remarquer que si $n = 0$, alors $g_0(0) = f(0)$ et que si $n \geqslant 1$, alors $g_n(0) = 0$
4. Ainsi :
   - Si $n = 0$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} x\mathcal{L}(f)(x) = f(0)$ et nous retrouvons le théorème 5.7.12
   - Si $n \geqslant 1$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \lim\limits_{x\to+\infty} x(\mathcal{L}(f))^{(n)}(x) = 0$

Remarque 26 :

De corollaire, nous pouvons aussi conclure que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\lim\limits_{x\to+\infty} (\mathcal{L}(f))^{(n)}(x) = 0$

5.8 Exercices complémentaires

Exercice 29 :

1. Soit $F(x) = \displaystyle\int_0^1 \cos(x - \pi t)\, \mathrm{d}t$ définie pour $x \in \mathbb{R}$. F est-elle continue ? Dérivable ? Si oui, que vaut sa dérivée ? Calculer F explicitement.

2. Soit $F(x) = \int_0^1 e^{t\sin x}\,\mathrm{d}t$ définie pour $x \in \mathbb{R}$. F est-elle continue ? Dérivable ? Si oui, que vaut sa dérivée ? Calculer F explicitiment

Exercice 30 :

Nous avons montré que la fonction $\dfrac{\sin x}{x}$ *n'appartient pas à* $\mathbf{L}^1(\mathbb{R})$, *c'est à dire que l'intégrale* $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx$ *n'existe pas. Dans cet exemple, nous montrons, par contre, que l'intégrale* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ *existe.*

Nous retrouvons, là, que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ *est convergente, sans être absolument convergente.*

Soit $A > 0$ et

$$\begin{array}{rcl} f : [0;+\infty[\times [A;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (t,y) & \longmapsto & f(t,y) = e^{-ty}\dfrac{\sin t}{t} \end{array}$$

1. Montrer que pour tout $y \in [A;+\infty[$, $f_y : [0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $f_y(t) = e^{-ty}\dfrac{\sin t}{t}$ est continue
2. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t,y)\,dt$ existe et que $F(y) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t,y)\,dt$ est continue
3. Calculer $F'(y)$
4. En déduire que $F(y) = K - \arctan y$; déterminer K
5. En déduire $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$

Exercice 31 :

En formant une équation différentielle vérifiée par f, calculer la valeur de

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} e^{itx}\,\mathrm{d}t$$

On rappelle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 32 :

On étudie ici l'intégrale généralisée dépendant d'un paramètre $x \in \mathbb{R}$

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos tx}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

1. (a) Montrer que cette intégrale existe pour tout $x \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire que F est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.
   (b) Montrer que F est continue et bornée sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que F est paire et calculer $F(0)$.
3. Montrer que pour $x > 0$, nous avons $F(x) = xG(x)$ où $G(x)$ est donnée par $G(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos u}{u^2+x^2}\,\mathrm{d}u$
4. Montrer que $G(x)$ est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$ et exprimer $G'(x)$ et $G''(x)$ sous la forme d'intégrales généralisées dépendant du paramètre $x \in]0;+\infty[$
5. En déduire que F est deux fois dérivable sur $]0;+\infty[$ et que sa dérivée seconde est donnée par

$$F''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{2x^2 - 6u^2}{\left(u^2+x^2\right)^3} \cos u\,\mathrm{d}u$$

6. (a) Montrer que pour $(u,x) \neq (0,0)$, les fonctions $h(u,x) = \dfrac{2x^2 - 6u^2}{(u^2 + x^1)^3}$ et $k(u,x) = \dfrac{-1}{u^2 + x^2}$ vérifient $h(u,x) = \dfrac{\partial^2 k}{\partial x^2}(u,x)$
   (b) En déduire que F vérifie sur $]0;+\infty[$ l'équation différentielle $F" = F$.
   (c) En déduire que, sur $]0;+\infty[$, F est de la forme $F(x) = ae^x + be^{-x}$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$
   (d) Calculer les valeurs de a et b

Exercice 33 :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x > 0$, on pose $h_n(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t^2 + x^4)^n}$

1. Montrer que h_n, est bien définie sur $\mathbb{R}^{*+}$.
2. Montrer que h_n est continue sur $\mathbb{R}^{*+}$.
3. Montrer que h_n est dérivable sur $\mathbb{R}^{*+}$ et que sa dérivée vérifie $h_n'(x) = -4nx^3 h_{n+1}(x)$
4. (a) Calculer $h_1(x)$.
   (b) Montrer par récurrence que h_n est de la forme $h_n(x) = a_n x^{2-4n}$ où $a_n \in \mathbb{R}$ vérifie une relation de récurrence que l'on précisera.
   (c) En déduire $h_n(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

Exercice 34 :

Résoudre dans $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ l'équation de convolution $f \star e^{-2|x|} = e^{-3|x|}$.
On rappelle que, pour $\alpha > 0$, si $f_\alpha(x) = e^{-\alpha|x|}$, alors $\widehat{f_\alpha}(x) = \dfrac{2\alpha}{\alpha^2 + x^2}$

Exercice 35 :

Le but de cet exercice est de rechercher des fonctions u intégrables telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$u(x) = e^{-|x|} + \beta \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x-s|} u(s)\, \mathrm{d}s$$

où $\beta \in \mathbb{R}$.
On rappelle que pour $\alpha > 0$, la transformée de Fourier de la fonction ψ où $\psi(x) = e^{-\alpha|x|}$ est la fonction $\widehat{\psi}(x) = \dfrac{2\alpha}{\alpha^2 + x^2}$.
On pose $f(x) = e^{-|x|}$.

1. Ecrire cette équation sous forme d'une équation faisant intervenir un produit de convolution.
2. On suppose que l'équation admet une solution. Déterminer $\widehat{u}$. En déduire que $\beta < \dfrac{1}{2}$.

5.9 Correction de quelques exercices

Exercice 2 :

Démontrer que la suite de terme général $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \, \mathrm{d}t$ converge et donner sa limite

Nous construisons la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} f_n : \left]0; \dfrac{\pi}{2}\right[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \qquad\quad t & \longmapsto & f_n(t) = \sin^n t \end{cases}$$

- ▷ La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle
- ▷ D'autre part, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \leqslant 1$

Donc, d'après le théorème d'Arzéla 5.1.6, $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \, \mathrm{d}t = 0$

Exercice 3 :

Définissons, sur l'intervalle $[0;1]$, la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où f_n est telle que $f_n(0) = 0$, $f_n\left(\dfrac{1}{n+1}\right) = n+1$, est affine sur l'intervalle $\left[0; \dfrac{1}{n+1}\right]$ et nulle sur $\left[\dfrac{1}{n+1}; +1\right]$

1. *Etudier la convergence de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$*
2. *Etudier la convergence de la suite $\left(\int_0^1 f_n(x) \, \mathrm{d}x\right)_{n\in\mathbb{N}}$*

Nous allons commencer par visualiser les fonctions de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Il faut tout d'abord remarquer :

$$\begin{aligned} f_n(x) = &\ (n+1)^2 x \text{ si } x \in \left[0; \frac{1}{n+1}\right] \\ f_n(x) = &\ 0 \text{ si } x \in \left[\frac{1}{n+1}; +1\right] \end{aligned}$$

D'où le graphe sur la figure 5.14

1. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle $\mathcal{O}$

   En effet, soit $x \in [0;1]$. Il existe $N_x \in \mathbb{N}$ tel que $x > \dfrac{1}{N+1}$; dès lors, pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant N_x$, alors $f_n(x) = 0$, ce qui montre que $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$

2. Calculons $\int_0^1 f_n(x) \, \mathrm{d}x$

   Il n'y a pas grande difficulté :

$$\int_0^1 f_n(x) \, \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{n+1}} (n+1)^2 x \, \mathrm{d}x = (n+1)^2 \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{1}{n+1}} = (n+1)^2 \times \frac{1}{2(n+1)^2} = \frac{1}{2}$$

3. Nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x) \, \mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}$ et cette limite est bien différente de $\int_0^1 \mathcal{O}(x) \, \mathrm{d}x = 0$.

   La clef de cette inégalité tient dans le fait que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas uniformément bornée.

   En effet, pour tout $M > 0$, il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ tel si $n \geqslant N$, alors $f_n\left(\dfrac{1}{n+1}\right) = n+1 > M$.

Il est donc impossible d'appliquer le théorème d'Arzela 5.1.6

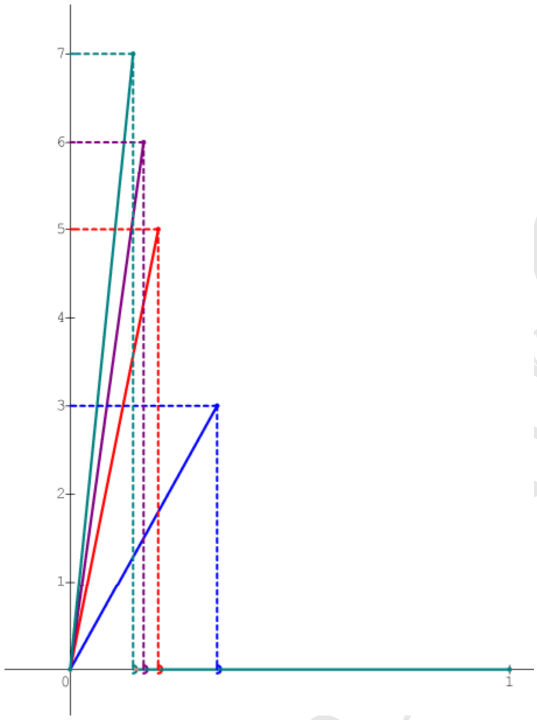

FIGURE 5.14 – Le graphe de f_n pour $n = 2, 4, 5, 6$

Exercice 4 :

1. *Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $a_n(t) = \dfrac{1}{1+t^2+t^n e^{-t}}$ est intégrable sur $[0; +\infty[$*

   Pas très difficile, puisque $|a_n(t)| = \dfrac{1}{1+t^2+t^n e^{-t}} \leqslant \dfrac{1}{1+t^2}$. La fonction $\dfrac{1}{1+t^2}$ étant intégrable sur l'intervalle $[0; +\infty[$, il en est de même de la fonction $|a_n(t)|$. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} a_n(t)\, \mathrm{d}t$ est donc absolument convergente, donc convergente.

2. *Nous posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2+t^n e^{-t}}\, \mathrm{d}t$. Quelle est la limite de la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$?*

   La suite de fonctions $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement, sur l'intervalle $[0; +\infty[$, vers la fonction α ainsi définie :

$$\left\{\begin{array}{rl} \alpha(t) = & \dfrac{1}{1+t^2} \text{ si } 0 \leqslant t < 1 \\ = & \dfrac{1}{2+e^{-1}}\, \mathrm{d}t \text{ si } t = 1 \\ = & 0 \text{ si } t > 1 \end{array}\right.$$

   ▷ Pour tout $n \in \mathbb{N}$ les fonctions a_n sont intégrables sur $[0; +\infty[$ et toutes majorées par la fonction $\dfrac{1}{1+t^2}$, intégrable

   ▷ La fonction α est continue par morceaux, donc intégrable

   D'après le corollaire 5.1.7, nous avons :

$$\lim_{n\to+\infty} A_n = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} a_n(t)\, \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \alpha(t)\, \mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\, \mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}$$

Exercice 5 :

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, nous posons $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}\, \mathrm{d}t$

1. *Justifier que I_n est bien définie.*

   Pour out $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \geqslant 0$, nous avons $1 \leqslant \left(1+t^2\right)^n \leqslant \left(1+t^2\right)^{n+1}$, et donc

   $$0 \leqslant \frac{1}{\left(1+t^2\right)^{n+1}} \leqslant \frac{1}{\left(1+t^2\right)^{n}} \leqslant \frac{1}{\left(1+t^2\right)} \leqslant 1$$

   Comme l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ est convergente, il en est de même de l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\left(1+t^2\right)^n}\,\mathrm{d}t$

2. *Étudier la monotonie de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.*

   La décroissance de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. découle directement de l'inégalité

   $$0 \leqslant \frac{1}{\left(1+t^2\right)^{n+1}} \leqslant \frac{1}{\left(1+t^2\right)^{n}}$$

3. *Déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$*
   - ▷ La suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et minorée par 0 ; elle est donc convergente
   - ▷ La suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ converge simplement vers la fonction f, continue par morceaux, telle que :

   $$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(x) = 0 \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

   - ▷ pour tout $n \geqslant 1$, f_n est continue et $|f_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{1+x^2}$

   Alors, d'après le corollaire 5.1.7 de convergence dominée, nous avons :

   $$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\left(1+t^2\right)^n}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \Longleftrightarrow \lim_{n\to+\infty} I_n = 0$$

4. *La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} (-1)^n I_n$ est-elle convergente ?*

   La suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante et de limite nulle. La série alternée $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} (-1)^n I_n$ est donc convergente

Exercice 6 :

Etudier la fonction définie par $F(x) = \displaystyle\int_0^1 \left|\ln\left(t+x^2\right)\right|\,\mathrm{d}t$

Ce n'est pas, à proprement parler, un exercice de L_2. L'étude que nous allons en faire, modulo le paramètre, tient plutôt du cours de L_1. Mais, allons y quand même !!

→ Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}$ en entier, et nous avons même

$$F(0) = \int_0^1 |\ln t|\,\mathrm{d}t = -\int_0^1 \ln t\,\mathrm{d}t = [t - t\ln t]_0^1 = 1$$

→ Faisons le changement de variables $u = t + x^2$ alors, $\mathrm{d}u = \mathrm{d}t$ et nos avons :

$$\int_0^1 \left|\ln\left(t+x^2\right)\right|\,\mathrm{d}t = \int_{x^2}^{1+x^2} |\ln u|\,\mathrm{d}u$$

→ Ainsi, si $|x| < 1$, alors $x^2 < 1$ et :

$$\begin{aligned} F(x) &= -\int_{x^2}^1 \ln u\,\mathrm{d}u + \int_1^{1+x^2} \ln u\,\mathrm{d}u \\ &= [u - u\ln u]_{x^2}^1 + [u\ln u - u]_1^{1+x^2} \\ &= 1 - x^2 + x^2\ln x^2 + \left(1+x^2\right)\ln\left(1+x^2\right) - \left(1+x^2\right) + 1 \\ &= 2 - x^2 + x^2\ln x^2 + \left(1+x^2\right)\left(\ln\left(1+x^2\right) - 1\right) \end{aligned}$$

→ Maintenant, si $|x| \geqslant 1$, alors :

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{x^2}^{1+x^2} \ln u \, \mathrm{d}u \\ &= [u \ln u - u]_{x^2}^{1+x^2} \\ &= \left(1+x^2\right)\left(\ln\left(1+x^2\right)-1\right) - x^2\left(\ln x^2 - 1\right) \end{aligned}$$

Exercice 7 :

Nous considérons les fonctions $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ définies par :

$$f(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2} \, \mathrm{d}t\right)^2 \text{ et } g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2\left(t^2+1\right)}}{t^2+1} \, \mathrm{d}t$$

1. *Démontrer que les fonctions f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}^+$ et en calculer les dérivées*

$\longrightarrow$ f est dérivable

En effet, si nous posons $\varphi(x) = I_0^x e^{-t^2} \, \mathrm{d}t$, la fonction e^{-t^2} étant continue sur $\mathbb{R}^+$ la fonction $\varphi(x) = I_0^x e^{-t^2} \, \mathrm{d}t$ est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et de dérivée $\varphi'(x) = e^{-x^2}$.
Ainsi, comme $f(x) = (\varphi(x))^2$, nous avons :

$$f'(x) = 2\varphi'(x) \times \varphi(x) = 2e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2} \, \mathrm{d}t$$

$\longrightarrow$ Etude de g

Posons $\psi(x,t) = \dfrac{e^{-x^2\left(1+t^2\right)}}{1+t^2}$ avec $x \in [0;+\infty[$ et $t \in [0;+1]$

▷ Alors, pour tout $t \in [0;+1]$, $1 \leqslant 1+t^2 \leqslant 2$ et donc $\dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{1}{1+t^2} \leqslant 1$ et donc $-2x^2 \leqslant -x^2\left(1+t^2\right) \leqslant -x^2 \leqslant 0$.
D'où $0 \leqslant \dfrac{e^{-x^2\left(1+t^2\right)}}{1+t^2} \leqslant 1 \Longleftrightarrow 0 \leqslant \psi(x,t) \leqslant 1$

▷ Ensuite, $\dfrac{\partial \psi}{\partial x}(x,t) = -2xe^{-x^2\left(1+t^2\right)}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.
Soit $b > 0$. Alors, pour tout $x \in [0;b]$, nous avons $\left|\dfrac{\partial \psi}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant 2b$
Et donc, pour tout $b > 0$ et tout $x \in [0;b]$

$$g'(x) = -2xe^{-x^2} \int_0^1 e^{-x^2t^2} \, \mathrm{d}t$$

Ceci étant vrai pour tout $b > 0$, donc, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, nous avons

$$g'(x) = -2xe^{-x^2} \int_0^1 e^{-x^2t^2} \, \mathrm{d}t$$

2. *Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $f'(x) + g'(x) = 0$*

D'après les calculs que nous venons de voir, nous avons :

$$f'(x) + g'(x) = 2e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2} \, \mathrm{d}t - 2xe^{-x^2} \int_0^1 e^{-x^2t^2} \, \mathrm{d}t$$

$\longrightarrow$ Nous allons nous intéresser à $g'(x) = -2xe^{-x^2} \displaystyle\int_0^1 e^{-x^2t^2} \, \mathrm{d}t$, et c'est la fonction définie par $\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2t^2} \, \mathrm{d}t$ que nous allons transformer.

Nous allons la transformer par le changement de variables $u = xt$; alors nous avons

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = x \Longleftrightarrow \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}u}{x}$$

De telle sorte que : $\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^x e^{-u^2}\frac{\mathrm{d}u}{x}$

Et donc, $g'(x) = -2xe^{-x^2}\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2t^2}\,\mathrm{d}t = -2xe^{-x^2}\int_0^x e^{-u^2}\frac{\mathrm{d}u}{x} = -2e^{-x^2}\int_0^x e^{-u^2}\,\mathrm{d}u$

$\longrightarrow$ En synthèse, nous obtenons donc :

$$\begin{aligned} f'(x) + g'(x) = &\ 2e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t - 2xe^{-x^2}\int_0^1 e^{-x^2t^2}\,\mathrm{d}t \\ = &\ 2e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t - 2e^{-x^2}\int_0^x e^{-u^2}\,\mathrm{d}u = 0 \end{aligned}$$

Ce que nous voulions

3. *En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $f(x) + g(x) = \dfrac{\pi}{4}$*

   Posons $\Phi(x) = f(x) + g(x)$.
   Alors, Φ est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et de dérivée nulle sur $\mathbb{R}^+$, donc constante sur $\mathbb{R}^+$.
   Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $\Phi(x) = \Phi(0)$. Or :

   $$\Phi(0) = f(0) + g(0) = \left(\int_0^0 e^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2 + \int_0^1 \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = [\arctan t]_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

   Ce que nous voulions, à nouveau

4. *Donner $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$*

   $\longrightarrow$ Dans un premier temps, nous allons re-démontrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ existe

   Pour $t \geqslant 1$, nous avons $-t^2 \leqslant -t$ et donc $e^{-t^2} \leqslant e^{-t}$.
   Comme l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge, il en est de même de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.
   De plus, comme $\displaystyle\int_0^1 e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ existe puisque la fonction e^{-t^2} est continue sur l'intervalle $[0;1]$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ existe bien.

   $\longrightarrow$ Nous appelons $L = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$

   Alors

   $$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty}(f(x) + g(x)) = \frac{\pi}{4} \Longleftrightarrow &\quad L^2 + \lim_{x\to+\infty} g(x) = \frac{\pi}{4} \\ \Longleftrightarrow &\quad L^2 + \lim_{x\to+\infty}\int_0^1 \frac{e^{-x^2(t^2+1)}}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

   $\longrightarrow$ Il faut donc donner $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^1 \frac{e^{-x^2(t^2+1)}}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$

   Nous avons déjà établi que, pour tout $t \in [0;+1]$, $1 \leqslant 1 + t^2 \leqslant 2$ et donc

   $$-2x^2 \leqslant -x^2\left(1 + t^2\right) \leqslant -x^2$$

   D'où $0 \leqslant e^{-x^2\left(1+t^2\right)} \leqslant e^{-x^2}$

   De $1 \leqslant 1 + t^2 \leqslant 2$, nous tirons $0 \leqslant \dfrac{e^{-x^2\left(t^2+1\right)}}{t^2+1} \leqslant e^{-x^2}$.

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, nous avons :

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{e^{-x^2(t^2+1)}}{t^2+1}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 e^{-x^2}\,\mathrm{d}t = e^{-x^2}$$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x^2} = 0$, nous avons $\lim\limits_{x\to+\infty} \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x^2(t^2+1)}}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = 0$

$\longrightarrow$ De là, nous concluons que $L^2 = \dfrac{\pi}{4}$ et que donc $L = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$

En conclusion $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

Exercice 8 :

Nous considérons la fonction $f : [-\pi;+\pi] \times]-1;+1[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} f : [-\pi;+\pi] \times]-1;+1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (\theta, x) & \longmapsto & f(\theta, x) = \ln\left(1 - 2x\cos\theta + x^2\right) \end{cases}$$

Avant de commencer à résoudre les questions posées, considérons le polynôme

$$P(x) = x^2 - 2x\cos\theta + 1$$

Comme le discriminant réduit de P est $\delta = \cos^2\theta - 1 = -\sin^2\theta$, si $\theta \neq k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$, alors $\delta < 0$ et P est toujours positif.
Si $\theta = k\pi$, alors $\delta = 0$, et de $\cos k\pi = (-1)^k$, nous déduisons que $P(x) = (x \pm 1)^2$
Ainsi, étudier la fonction f sur le domaine $[-\pi;+\pi] \times]-1;+1[$ ne devrait donc pas poser de problèmes

Soit, maintenant $F(x) = \displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} \ln\left(1 - 2x\cos\theta + x^2\right)\mathrm{d}\theta$

1. *Montrer que F est continue et dérivable sur l'intervalle $]-1;+1[$*

   $\rightarrow$ Continuité de F
   De l'étude que nous venons de faire, f est continue par rapport de chacune des variables sur $[-\pi;+\pi] \times]-1;+1[$; ainsi, d'après 5.2.1, la fonction F est continue sur l'intervalle $]-1;+1[$

   $\rightarrow$ Dérivabilité de F
   Par calcul, nous avons $\dfrac{\partial f}{\partial x}(\theta, x) = \dfrac{2x - 2\cos\theta}{1 - 2x\cos\theta + x^2}$.
   De même, la dérivée $\dfrac{\partial f}{\partial x}(\theta, x)$ est continue sur $[-\pi;+\pi] \times]-1;+1[$ et donc, d'après 5.2.2, F est dérivable et de dérivée

$$F'(x) = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\partial f}{\partial x}(\theta, x)\,\mathrm{d}\theta = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{2x - 2\cos\theta}{1 - 2x\cos\theta + x^2}\,\mathrm{d}\theta$$

2. *Calculer F' sur l'intervalle $]-1;+1[$*

   C'est une longue marche que de calculer cette intégrale !!

   (a) Pour commencer, nous allons faire le changement de variables $t = \tan\dfrac{\theta}{2}$
   Comme il y a une fonction cos dans notre expression, il faut tâcher d'y arriver !!.
   Or, pour tout $u \in \mathbb{R}$:

$$\tan^2 u + 1 = \frac{1}{\cos^2 u} \Longleftrightarrow \cos^2 u = \frac{1}{1 + \tan^2 u}$$

   D'autre part :

$$\cos 2u = 2\cos^2 u - 1 = \frac{2}{1 + \tan^2 u} - 1 = \frac{2 - \left(1 + \tan^2 u\right)}{1 + \tan^2 u} = \frac{1 - \tan^2 u}{1 + \tan^2 u}$$

Donc, si $u = \dfrac{\theta}{2}$, nous avons $\cos\theta = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$

(b) Le changement de variables $t = \tan\dfrac{\theta}{2}$ nous donne $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\theta} = \dfrac{1}{2}\left(1+\tan^2\dfrac{\theta}{2}\right) = \dfrac{1+t^2}{2}$ et donc $\mathrm{d}\theta = \dfrac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}$

(c) L'intégrale $\displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{2x-2\cos\theta}{1-2x\cos\theta+x^2}\,\mathrm{d}\theta$ devient alors :

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{2\,(x-\cos\theta)}{1-2x\cos\theta+x^2}\,\mathrm{d}\theta = &\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\left(x-\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}{1-2x\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)+x^2} \times \frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}\\ = &\ 4\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left(1+t^2\right)x-\left(1-t^2\right)}{\left(1+t^2\right)\left(1+x^2\right)-2x\left(1-t^2\right)} \times \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}\end{aligned}$$

(d) Quelques remarques calculatoires obtenues en réorganisant

i. Pour le numérateur :

$$\left(1+t^2\right)x-\left(1-t^2\right) = x+xt^2-1+t^2 = t^2\,(x+1)+(x-1)$$

ii. Pour le dénominateur

$$\begin{aligned}\left(1+t^2\right)\left(1+x^2\right)-2x\left(1-t^2\right) = &\ \left(1+x^2\right)+t^2\left(1+x^2\right)-2x+2xt^2\\ = &\ t^2\left(x^2+2x+1\right)+x^2-2x+1 = t^2\,(1+x)^2+(x-1)^2\end{aligned}$$

iii. Ainsi, $F'(x) = 4\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2\,(x+1)+(x-1)}{t^2\,(1+x)^2+(x-1)^2} \times \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$

iv. On démontre, par calcul, que :

$$4\frac{t^2\,(x+1)+(x-1)}{t^2\,(1+x)^2+(x-1)^2} \times \frac{1}{1+t^2} = \frac{\frac{2\left(x^2-1\right)}{x}}{t^2\,(1+x)^2+(x-1)^2} + \frac{\frac{2}{x}}{t^2+1}$$

De telle sorte que

$$F'(x) = \frac{2\left(x^2-1\right)}{x}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2\,(1+x)^2+(x-1)^2} + \frac{2}{x}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1}$$

(e) Maintenant, calculons F'

i. Clairement, $\dfrac{2}{x}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = \frac{2\pi}{x}$

ii. Ensuite, calculons $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2\,(1+x)^2+(x-1)^2}$

Tout d'abord,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2\,(1+x)^2+(x-1)^2} = \frac{1}{(x-1)^2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2\left(\frac{(1+x)^2}{(x-1)^2}\right)+1} = \frac{1}{(x-1)^2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\left(\frac{t(1+x)}{(x-1)}\right)^2+1}$$

Faisons le changement de variables $u = \dfrac{t\,(1+x)}{(x-1)}$ et alors $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \dfrac{(1+x)}{(x-1)} \Longleftrightarrow \mathrm{d}t = \dfrac{x-1}{x+1}\,\mathrm{d}u$

Et donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2\,(1+x)^2+(x-1)^2} = \frac{1}{(x-1)^2} \times \frac{x-1}{x+1}\int_{+\infty}^{-\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u^2+1} = \frac{-\pi}{x^2-1}$$

iii. Pour conclure, $\dfrac{2\left(x^2-1\right)}{x}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^2\left(1+x\right)^2+\left(x-1\right)^2}=\frac{2\left(x^2-1\right)}{x}\times\frac{-\pi}{x^2-1}=\frac{-2\pi}{x}$

iv. Conclusion définitive $F'(x)=0$ sur l'intervalle $]-1;+1[$

3. *En déduire F sur l'intervalle $]-1;+1[$*

La dérivée étant nulle sur $]-1;+1[$ est donc constante sur $]-1;+1[$; elle est, en particulier égale à $F(0)$. Or :

$$F(0)=\int_{-\pi}^{+\pi}\ln 1\,\mathrm{d}\theta=0$$

F est donc nulle sur $]-1;+1[$

Exercice 9 :

Pour $x\in\mathbb{R}$, on définit la fonction $F(x)=\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}e^{x\sin t}\,\mathrm{d}t$

1. *Vérifier que F est bien définie pour tout $x\in\mathbb{R}$ et que F est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.*
   - Si nous appelons pour tout $t\in\left[-\dfrac{\pi}{2};+\dfrac{\pi}{2}\right]$, la fonction $\varphi(x)=e^{x\sin t}$, φ est continue sur $\mathbb{R}$
   - Si, maintenant, nous appelons, pour tout $x\in\mathbb{R}$, la fonction $\psi(t)=e^{x\sin t}$, ψ est continue sur $\left[-\dfrac{\pi}{2};+\dfrac{\pi}{2}\right]$ et donc intégrable sur $\left[-\dfrac{\pi}{2};+\dfrac{\pi}{2}\right]$

   La fonction $F(x)=\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}e^{x\sin t}\,\mathrm{d}t$ est donc définie et continue sur $\mathbb{R}$

2. *Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $F'(x)=-\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}e^{x\sin t}\sin t\,\mathrm{d}t$*

   Appelons $\Phi(t,x)=e^{x\sin t}$

   Nous avons $\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}(t,x)=\sin te^{x\sin t}$.

   Cette fonction est continue sur $\left[-\dfrac{\pi}{2};+\dfrac{\pi}{2}\right]\times\mathbb{R}$ et donc, F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et de dérivée $F'(x)=\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin te^{x\sin t}\,\mathrm{d}t$

3. *De même, montrer que F est 2 fois dérivable et qu'elle vérifie la relation :*

$$xF''(x)+F'(x)-xF(x)=0$$

   - En poursuivant, nous avons $\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}(t,x)=\sin^2 te^{x\sin t}$ et donc, avec les mêmes arguments, $\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}(t,x)=\sin^2 te^{x\sin t}$ étant continue sur $\left[-\dfrac{\pi}{2};+\dfrac{\pi}{2}\right]\times\mathbb{R}$, F est 2 fois dérivable et de dérivée seconde $F''(x)=\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 te^{x\sin t}\,\mathrm{d}t$
   - Calculons $F'(x)=\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin te^{x\sin t}\,\mathrm{d}t$ en faisant une intégration par parties :

$$\left\{\begin{array}{ll} u=e^{x\sin t} & u'=x\cos te^{x\sin t}\\ v'=\sin t & v=-\cos t\end{array}\right\}$$

D'où

$$\begin{aligned}F'(x) = &\ \left[-\cos t e^{x\sin t}\right] I_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\cos^2 t e^{x\sin t} e^{x\sin t}\,\mathrm{d}t \\ = &\ x\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t e^{x\sin t} e^{x\sin t}\,\mathrm{d}t = x\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1-\sin^2 t\right) e^{x\sin t} e^{x\sin t}\,\mathrm{d}t \\ = &\ x\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{x\sin t}\,\mathrm{d}t - x\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t e^{x\sin t}\,\mathrm{d}t \\ = &\ xF(x) - xF''(x)\end{aligned}$$

C'est à dire $xF''(x) + F'(x) - xF(x) = 0$

Ce que nous voulions

Exercice 10 :

En considérant $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$, *démontrer que* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} F(x) = 0$

Faisons le changement de variables $u = xt$; alors $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = x \Longleftrightarrow \mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{d}u}{x}$, de telle sorte que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{1+\frac{u^2}{x^2}}\frac{\mathrm{d}u}{x} = x\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{x^2+u^2}\,\mathrm{d}u$$

Remarquons, maintenant, que pour tout $x \geqslant 0$, nous avons $x^2+u^2 \geqslant x^2$, c'est à dire $\dfrac{1}{u^2+x^2} \leqslant \dfrac{1}{x^2}$, et donc :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{x^2+u^2}\,\mathrm{d}u \leqslant \frac{1}{x^2}\int_0^{+\infty} e^{-u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{x^2}$$

Ainsi, nous avons :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = x\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{x^2+u^2}\,\mathrm{d}u \leqslant x \times \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x}$$

Et donc, des inégalités $0 \leqslant F(x) \leqslant \dfrac{1}{x}$, nous concluons que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} F(x) = 0$

Exercice 11 :

Démontrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\Gamma\left(k+\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{(2k)!}{k! \times 2^{2k}}\sqrt{\pi}$

Nous utilisons l'identité, vraie pour $x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$

Soit donc $k \in \mathbb{N}$. Alors :

$$\begin{array}{rcl} p=0 & : & \Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right) = \left(k-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(k-\frac{1}{2}\right) \\ p=1 & : & \Gamma\left(k-\frac{1}{2}\right) = \left(k-\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(k-\frac{3}{2}\right) \\ p=2 & : & \Gamma\left(k-\frac{3}{2}\right) = \left(k-\frac{5}{2}\right)\Gamma\left(k-\frac{5}{2}\right) \\ \vdots & \vdots & \\ & & \Gamma\left(k-\frac{2p-1}{2}\right) = \left(k-\frac{2p+1}{2}\right)\Gamma\left(k-\frac{2p+1}{2}\right) \\ \vdots & \vdots & \\ p=k-1 & : & \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \end{array}$$

En faisant une multiplication termes à termes, nous obtenons :

$$\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right) = \prod_{p=0}^{k-1}\left(k-\frac{2p+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \prod_{p=0}^{k-1}\left(\frac{2(k-p)-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \prod_{p=1}^{k}\left(\frac{2p-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

$\longrightarrow$ Nous avons $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

$\longrightarrow$ Nous avons aussi :

$$\begin{aligned}
\prod_{p=1}^{k}\left(\frac{2p-1}{2}\right) = \frac{1}{2^k} \times \prod_{p=1}^{k}(2p-1) & \\
&= \frac{1}{2^k} \times (1 \times 3 \times 5 \times 7 \times \cdots \times (2k-1)) \\
&= \frac{1}{2^k} \times \frac{(1 \times 3 \times 5 \times 7 \times \cdots \times (2k-1)) \times (2 \times 4 \times 6 \times 8 \times \cdots \times 2k)}{(2 \times 4 \times 6 \times 8 \times \cdots \times 2k)} \\
&= \frac{1}{2^k} \times \frac{(2k)!}{2^k (1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times k)} \\
&= \frac{1}{2^{2k}} \times \frac{(2k)!}{k!} \\
&= \frac{(2k)!}{2^{2k} k!}
\end{aligned}$$

En synthèse, nous avons donc $\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2k)!}{k! \times 2^{2k}}\sqrt{\pi}$

Exercice 12 :

Démontrer qu'au voisinage de 0, $\Gamma(x) \underset{x\to 0}{\approx} \frac{1}{x}$

De la continuité de Γ, nous pouvons écrire $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \Gamma(x+1) = \Gamma(1) = 1$.

De l'égalité $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, nous déduisons que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\Gamma(x) = 1$ et donc :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\Gamma(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\Gamma(x)}{\frac{1}{x}} = 1$$

Ce qui montre que $\Gamma(x) \underset{x\to 0}{\approx} \frac{1}{x}$

Nous pouvons aussi écrire que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \Gamma(x) = +\infty$

Exercice 13 :

1. *Montrer que* Γ, *est convexe et étudier les variations de* Γ

   (a) **Montrons que Γ est convexe**

   Tout d'abord, remarquons que $\Gamma''(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^2 t^{x-1} e^{-t}\, dt$. Comme $(\ln t)^2 t^{x-1} e^{-t} \geqslant 0$, nous avons $\Gamma''(x) \geqslant 0$.

   Donc, en utilisant les résultats sur les fonctions convexes, nous pouvons dire que Γ est une fonction convexe.

   (b) **Etude des variations de Γ**

   $\rightarrow$ Comme, pour tout $x > 0$, $\Gamma''(x) \geqslant 0$, on peut dire que la fonction Γ' est croissante.

   $\rightarrow$ La fonction Γ' étant continue et croissante est bijective, elle ne s'annule donc qu'une seule fois

   $\rightarrow$ Nous avons $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$. Γ étant continue sur $[0;1]$, dérivable sur $]0;1[$ et telle que $\Gamma(1) = \Gamma(2)$, il existe, d'après le théorème de Rolle, $\alpha \in]0;1[$ tel que $\Gamma'(\alpha) = 0$

   Donc, Γ est décroissante sur $]0;\alpha]$ et croissante sur $[\alpha;+\infty[$

2. *En déduire* $\lim\limits_{x\to+\infty} \Gamma(x)$

   Nous proposons 2 démonstrations distinctes de ce résultat

   ▷ <u>Première démonstration</u>

   Cette première démonstration utilise la croissance de la fonction Γ

   Comme nous recherchons une limite à l'infini, nous pouvons supposer $x \geqslant 2$ [6]

6. Ou encore $x \geqslant 100$!!

Nous venons de montrer que sur $[2;+\infty[$, la fonction Γ était croissante.
En notant $\mathrm{E}(x)$ la partie entière de x, nous avons $\mathrm{E}(x) \leqslant x < \mathrm{E}(x)+1$, et en utilisant la croissance de Γ, nous avons :

$$\Gamma(\mathrm{E}(x)) \leqslant \Gamma(x) \leqslant \Gamma(\mathrm{E}(x)) + 1$$

C'est à dire $(\mathrm{E}(x)-1)! \leqslant \Gamma(x)$
Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} (\mathrm{E}(x)-1)! = +\infty$, nous avons $\lim\limits_{x\to+\infty} \Gamma(x) = +\infty$

▷ Seconde démonstration
Cette seconde démonstration utilise une méthode de minoration de l'intégrale.
Comme la fonction $g(t) = t^{x-1}e^{-t}$ est positive sur $\mathbb{R}^{*+}$, nous pouvons écire :

$$\int_0^2 t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

Pour $0 \leqslant t \leqslant 2$, nous avons $e^{-2} \leqslant e^{-t} \leqslant 1$, et nous avons donc :

$$\int_0^2 t^{x-1}e^{-2}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^2 t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

Or, $\displaystyle\int_0^2 t^{x-1}e^{-2}\,\mathrm{d}t = e^{-2}\int_0^2 t^{x-1}\,\mathrm{d}t = e^{-2}\left[\frac{t^x}{x}\right]_0^2 = e^{-2}\frac{2^x}{x}$. Nous avons donc :

$$e^{-2}\frac{2^x}{x} \leqslant \Gamma(x)$$

L'exponentielle l'emportant sur la puissance, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-2}\dfrac{2^x}{x} = +\infty$, nous pouvons déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} \Gamma(x) = +\infty$

Exercice 14 :

Démontrer la formule de Weierstrass : $\dfrac{1}{\Gamma(x)} = xe^{\gamma x}\displaystyle\prod_{k=1}^{+\infty} e^{-\frac{x}{k}}\left(1+\frac{x}{k}\right)$ *où* $x > 0$

Nous allons travailler l'expression $\dfrac{n^x \times n!}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}$.

$$\begin{aligned}
\frac{n^x \times n!}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)} &= \frac{n^x \times n!}{\prod\limits_{k=0}^{n}(x+k)} \\
&= \frac{n^x \times n!}{\prod\limits_{k=0}^{n} k\left(1+\frac{x}{k}\right)} = \frac{n^x \times n!}{\prod\limits_{k=0}^{n} k \prod\limits_{k=0}^{n}\left(1+\frac{x}{k}\right)} \\
&= \frac{n^x \times n!}{n!\prod\limits_{k=0}^{n}\left(1+\frac{x}{k}\right)} \\
&= \frac{n^x}{\prod\limits_{k=0}^{n}\left(1+\frac{x}{k}\right)} \\
&= \frac{e^{x\ln n}}{x\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\frac{x}{k}\right)}
\end{aligned}$$

En multipliant le numérateur et le dénominateur par $e^{-x\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)}$, nous avons :

$$\frac{n^x \times n!}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)} = \frac{e^{x\ln n} \times e^{-x\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)}}{\left(x\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\frac{x}{k}\right)\right)e^{-x\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)}} = \frac{e^{x\left(\ln n - \left(\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)\right)}}{\left(x\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\frac{x}{k}\right)\right)e^{-x\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)}}$$

D'autre part, nous avons :

$$e^{-x\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)} = e^{-x\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)} = \prod_{k=1}^{n} e^{-\frac{x}{k}}$$

Et donc :

$$\frac{n^x \times n!}{x\,(x+1)\,(x+2)\cdots(x+n)} = \frac{e^{x\left(\ln n-\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)\right)}}{x\prod_{k=1}^{n} e^{-\frac{x}{k}}\left(1+\frac{x}{k}\right)}$$

De $\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^x \times n!}{x\,(x+1)\,(x+2)\cdots(x+n)}$, nous déduisons :

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{e^{x\left(\ln n-\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)\right)}}{x\prod_{k=1}^{n} e^{-\frac{x}{k}}\left(1+\frac{x}{k}\right)} = \frac{e^{x\lim_{n\to+\infty}\left(\ln n-\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)\right)}}{x\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^{n} e^{-\frac{x}{k}}\left(1+\frac{x}{k}\right)} = \frac{e^{-\gamma x}}{x\prod_{k=1}^{+\infty} e^{-\frac{x}{k}}\left(1+\frac{x}{k}\right)}$$

Ce qui peut aussi être aussi écrit : $\frac{1}{\Gamma(x)} = xe^{\gamma x}\prod_{k=1}^{+\infty} e^{-\frac{x}{k}}\left(1+\frac{x}{k}\right)$

Exercice 15 :

1. *Montrer que, pour tout $x > 0$ et tout $y > 0$, nous avons $B(x+1,y) = \frac{x}{y}B(x,y+1)$*

   C'est juste calculatoire ; il suffit d'intégrer $B(x+1,y) = \int_0^1 t^x (1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t$ par parties :

$$\begin{bmatrix} u = t^x & u' = xt^{x-1} \\ v' = (1-t)^{y-1} & v = -\dfrac{(1-t)^y}{y} \end{bmatrix}$$

   D'où,

$$\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{t^x(1-t)^y}{y}\right]_0^1 + \frac{x}{y}\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^y\,\mathrm{d}t = \frac{x}{y}B(x,y+1)$$

2. *Montrer que, pour tout $x > 0$ et tout $y > 0$, nous avons $B(x,y) = B(x,y+1) + B(x+1,y)$*

   C'est une question qui pose peu de difficultés :

$$\begin{aligned} B(x,y+1) &= \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^y\,\mathrm{d}t = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}(1-t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t - \int_0^1 t^x(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t \\ &= B(x,y) - B(x+1,y) \end{aligned}$$

   Nous avons donc :

$$B(x,y+1) = B(x,y) - B(x+1,y) \iff B(x,y) = B(x,y+1) + B(x+1,y)$$

3. *Montrer que, pour tout $x > 0$ et tout $y > 0$, nous avons $B(x+1,y) = \frac{x}{x+y}B(x,y)$*

Nous avons $B(x+1,y) = \frac{x}{y} B(x,y+1)$ et $B(x,y) = B(x,y+1) + B(x+1,y)$. Donc,

$$\begin{gathered}
B(x+1,y) = \frac{x}{y}\left(B(x,y) - B(x+1,y)\right) \\
\Longleftrightarrow \\
\left(1+\frac{x}{y}\right) B(x+1,y) = \frac{x}{y} B(x,y) \\
\Longleftrightarrow \\
\left(\frac{x+y}{y} \times \frac{y}{x}\right) B(x+1,y) = B(x,y) \\
\Longleftrightarrow \\
\left(\frac{x+y}{x}\right) B(x+1,y) = B(x,y) \\
\Longleftrightarrow \\
B(x+1,y) = \frac{x}{x+y} B(x,y)
\end{gathered}$$

Pour aller plus loin :
Donner une expression de $B(n,p)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}^*$

4. *Montrer que, pour tout $x > 0$, nous avons $B(x,x) = 2^{1-2x} B\left(x, \frac{1}{2}\right)$*

■ ⇒ **Etude de $B(x,x)$**

▷ Nous avons $B(x,x) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{x-1}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 (t(1-t))^{x-1}\,\mathrm{d}t$

▷ Nous faisons le changement de variables $t = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sin u$. Alors :

$$\begin{aligned}
t(1-t) = t - t^2 &= \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sin u\right) - \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sin u\right)^2 \\
&= \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sin u - \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\sin^2 u + \frac{1}{2}\sin u\right) \\
&= \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sin u - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\sin^2 u - \frac{1}{2}\sin u \\
&= \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\sin^2 u = \frac{1-\sin^2 u}{4} = \frac{\cos^2 u}{4}
\end{aligned}$$

▷ Maintenant, nous avons $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u} = \frac{1}{2}\cos u \Longleftrightarrow \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\cos u\,\mathrm{d}u$

▷ Ainsi :

$$B(x,x) = \int_0^1 (t(1-t))^{x-1}\,\mathrm{d}t = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos^2 u}{4}\right)^{x-1} \times \frac{1}{2}\cos u\,\mathrm{d}u = 2^{1-2x}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos u)^{2x-1}\,\mathrm{d}u$$

■ ⇒ **Etude de $B\left(x, \frac{1}{2}\right)$**

▷ Nous avons $B\left(x,\frac{1}{2}\right) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t$

▷ Faisons le changement de variables $t = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos u$. Alors :

⋆ $(1-t)^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos u\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{1-\cos u}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{2^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{1-\cos u}}$

On utilise les formules d'arcs doubles $\cos u = 1 - 2\sin^2 u \Longleftrightarrow 1 - \cos u = 2\sin^2 \frac{u}{2}$ et donc :

$$(1-t)^{-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-\cos u}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2\sin^2 \frac{u}{2}}} = \frac{1}{\left|\sin \frac{u}{2}\right|}$$

⋆ Et maintenant, $t^{x-1}=\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cos u\right)^{x-1}=2^{1-x}\left(1+\cos u\right)^{x-1}$

En utilisant les formules d'arcs doubles $\cos u=2\cos^2\frac{u}{2}-1\iff 1+\cos u=2\cos^2\frac{u}{2}$, nous avons :

$$2^{1-x}\left(1+\cos u\right)^{x-1}=2^{1-x}\left(2\cos^2\tfrac{u}{2}\right)^{x-1}=\left(\cos^2\tfrac{u}{2}\right)^{x-1}=\cos^{2x-2}\tfrac{u}{2}$$

⋆ D'autre part, nous avons $\mathrm{d}t=-\dfrac{1}{2}\sin u\,\mathrm{d}u$; donc :

$$\begin{aligned}B\left(x,\frac{1}{2}\right) &= \int_0^1 t^{x-1}\left(1-t\right)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t\\ &= \int_\pi^0 \cos^{2x-2}\tfrac{u}{2}\times\frac{1}{\left|\sin\frac{u}{2}\right|}\times-\frac{1}{2}\sin u\,\mathrm{d}u\\ &= \int_0^\pi \cos^{2x-2}\frac{u}{2}\times\frac{1}{\sin\frac{u}{2}}\times\sin\frac{u}{2}\cos\frac{u}{2}\,\mathrm{d}u\\ &= \int_0^\pi \cos^{2x-1}\frac{u}{2}\,\mathrm{d}u\end{aligned}$$

■ ⇒ **Lien entre $B\left(x,\frac{1}{2}\right)$ et $B\left(x,x\right)$**

▷ En faisant le changement de variable $v=\dfrac{u}{2}\iff \mathrm{d}u=2\,\mathrm{d}v$, nous obtenons :

$$B\left(x,\frac{1}{2}\right)=\int_0^\pi \cos^{2x-1}\frac{u}{2}\,\mathrm{d}u=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2x-1}v\,\mathrm{d}v$$

▷ En remanquant que $\cos u$ est une fonction paire, nous avons :

$$B\left(x,x\right)=2^{1-2x}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos u\right)^{2x-1}\,\mathrm{d}u=2^{1-2x}\times 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos u\right)^{2x-1}\,\mathrm{d}u$$

▷ Nous avons donc $B\left(x,x\right)=2^{1-2x}B\left(x,\dfrac{1}{2}\right)$

Ce que nous voulions

5. *Montrer que, pour tout $x>0$, nous avons* $\Gamma\left(2x\right)=\dfrac{2^{2x-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(x\right)\Gamma\left(x+\dfrac{1}{2}\right)$

D'après 5.4.7, nous avons $B\left(x,y\right)=\dfrac{\Gamma\left(x\right)\Gamma\left(y\right)}{\Gamma\left(x+y\right)}$, c'est à dire, si nous faisons $x=y$:

$$\Gamma\left(2x\right)B\left(x,x\right)=\left(\Gamma\left(x\right)\right)^2\iff\left(\Gamma\left(x\right)\right)^2=\Gamma\left(2x\right)2^{1-2x}B\left(x,\frac{1}{2}\right)$$

Toujours par 5.4.7, nous avons $B\left(x,\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\Gamma\left(x\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)}$, et donc :

$$\begin{aligned}\left(\Gamma\left(x\right)\right)^2 &= \Gamma\left(2x\right)2^{1-2x}B\left(x,\frac{1}{2}\right)=\Gamma\left(2x\right)2^{1-2x}\frac{\Gamma\left(x\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)}\\ &= \Gamma\left(2x\right)2^{1-2x}\frac{\Gamma\left(x\right)\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)}\end{aligned}$$

C'est à dire $\Gamma\left(x\right)=2^{1-2x}\sqrt{\pi}\dfrac{\Gamma\left(2x\right)}{\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)}\iff\Gamma\left(2x\right)=\dfrac{2^{2x-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(x\right)\Gamma\left(x+\dfrac{1}{2}\right)$

Exercice 17 :

Soit $a > 0$. $P_{-a,a}(x)$ est toujours la fonction porte que nous pouvons ainsi rédéfinir :

$$P_{-a,a}(x) = \begin{cases} \dfrac{+1}{2a} & \text{si } |x| < a \\ 0 & \text{Sinon} \end{cases}$$

1. *Donner* $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P_{-a,a}(t)\,\mathrm{d}t$

   Pas difficile ! ! Il suffit d'appliquer le cours.

   $$\int_{-\infty}^{+\infty} P_{-a,a}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{+1}{2a}\int_{-a}^{+a} \mathrm{d}t = 1$$

2. *Calculer $P_{-a,a} \star f$ dans le cas où $f(x) = x$*

   Dans le cours, nous avons $f \star P_{-a,a}(x) = \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x-a}^{x+a} f(v)\,\mathrm{d}v = \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x-a}^{x+a} v\,\mathrm{d}v$.

   Donc :
   $$f \star P_{-a,a}(x) = \frac{1}{2a}\int_{x-a}^{x+a} v\,\mathrm{d}v = \frac{1}{2a}\left[\frac{v^2}{2}\right]_{x-a}^{x+a} v = \frac{(x+a)^2 - (x-a)^2}{4a} = x$$

3. *Même question, calculer $P_{-a,a} \star f$ dans le cas où $f(x) = x^2$*

   Il n'y a pas plus de difficultés :

   Nous avons toujours $f \star P_{-a,a}(x) = \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x-a}^{x+a} f(v)\,\mathrm{d}v = \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x-a}^{x+a} v^2\,\mathrm{d}v$. Et donc :

   $$f \star P_{-a,a}(x) = \frac{1}{2a}\int_{x-a}^{x+a} v^2\,\mathrm{d}v = \frac{1}{2a}\left[\frac{v^3}{3}\right]_{x-a}^{x+a} = \frac{(x+a)^3 - (x-a)^3}{6a} = x^2 + \frac{a^2}{3}$$

   Ainsi $f \star P_{-a,a}(x) = x^2 + \dfrac{a^2}{3}$

4. *On construit maintenant, la suite de fonctions $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in \mathbb{R}$ par $\varphi_n(t) = nP_{-a,a}(nt)$*

   (a) *Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n(t)\,\mathrm{d}t = 1$*

   Nous avons $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n(t)\,\mathrm{d}t = n\int_{-\infty}^{+\infty} P_{-a,a}(nt)\,\mathrm{d}t$.

   Effectuons le changement de variables $u = nt$ avec $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = n \Longleftrightarrow \mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{d}u}{n}$ et donc :

   $$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n(t)\,\mathrm{d}t = n\int_{-\infty}^{+\infty} P_{-a,a}(nt)\,\mathrm{d}t = n\int_{-\infty}^{+\infty} P_{-a,a}(u)\,\frac{\mathrm{d}u}{n} = \int_{-\infty}^{+\infty} P_{-a,a}(u)\,\mathrm{d}u = 1$$

   (b) *Soit $\delta > 0$.*

   Démontrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_{|t|>\delta} \varphi_n(t)\,\mathrm{d}t = 0$ *; et en déduire alors que* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_{|t|\leqslant\delta} \varphi_n(t)\,\mathrm{d}t = 1$

   ▷ Nous avons $\displaystyle\int_{|t|>\delta} \varphi_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{-\delta} \varphi_n(t)\,\mathrm{d}t + \int_{\delta}^{+\infty} \varphi_n(t)\,\mathrm{d}t$
   Tout d'abord, par le changement de variable habituel $u = nt$ nous avons

   $$\int_{-\infty}^{-\delta} \varphi_n(t)\,\mathrm{d}t = n\int_{-\infty}^{-\delta} P_{-a,a}(nt)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{-n\delta} P_{-a,a}(u)\,\mathrm{d}u$$

Et

$$\int_{\delta}^{+\infty} \varphi_n(t)\ \mathrm{d}t = n\int_{\delta}^{+\infty} P_{-a,a}(nt)\ \mathrm{d}t = \int_{n\delta}^{+\infty} P_{-a,a}(u)\ \mathrm{d}u$$

Comme $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n(t)\ \mathrm{d}t = 1$, nous avons

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{-n\delta} P_{-a,a}(u)\ \mathrm{d}u = \lim_{n\to+\infty}\int_{n\delta}^{+\infty} P_{-a,a}(u)\ \mathrm{d}u = 0$$

Et donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_{|t|>\delta} \varphi_n(t)\ \mathrm{d}t = 0$

Un autre moyen de démontrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_{|t|>\delta} \varphi_n(t)\ \mathrm{d}t = 0$

Nous avons démontré que :
$\displaystyle\int_{\delta}^{+\infty} \varphi_n(t)\ \mathrm{d}t = \int_{n\delta}^{+\infty} P_{-a,a}(u)\ \mathrm{d}u$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{-\delta} \varphi_n(t)\ \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{-n\delta} P_{-a,a}(u)\ \mathrm{d}u$.
Comme $\delta > 0$,il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N$, $n\delta > a \iff -n\delta < -a$.
Ainsi, si $n \geqslant N$, alors $\displaystyle\int_{n\delta}^{+\infty} P_{-a,a}(u)\ \mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{-n\delta} P_{-a,a}(u)\ \mathrm{d}u = 0$, c'est à dire que si $n \geqslant N$ $\displaystyle\int_{|t|>\delta} \varphi_n(t)\ \mathrm{d}t = 0$

Nous avons donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_{|t|>\delta} \varphi_n(t)\ \mathrm{d}t = 0$

▷ Comme $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n(t)\ \mathrm{d}t = \int_{|t|>\delta} \varphi_n(t)\ \mathrm{d}t + \int_{|t|\leqslant\delta} \varphi_n(t)\ \mathrm{d}t = 1$, alors

$$\int_{|t|\leqslant\delta} \varphi_n(t)\ \mathrm{d}t = 1 - \int_{|t|>\delta} \varphi_n(t)\ \mathrm{d}t$$

De $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_{|t|>\delta} \varphi_n(t)\ \mathrm{d}t = 0$, nous en déduisons que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_{|t|\leqslant\delta} \varphi_n(t)\ \mathrm{d}t = 1$

(c) *Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et bornée sur $\mathbb{R}$*

i. *Montrer que $\displaystyle f(x) - f\star\varphi_n(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (f(x) - f(x-u))\,\varphi_n(u)\ \mathrm{d}u$*

L'idée de base pour résoudre la question est qu'on peut écrire :

$$f(x) = f(x)\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n(t)\ \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\varphi_n(t)\ \mathrm{d}t$$

pour faire ensuite apparaître la différence $f(x) - f\star\varphi_n(x)$ comme une intégrale :

$$\begin{aligned} f(x) - f\star\varphi_n(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\varphi_n(t)\ \mathrm{d}t - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)\,\varphi_n(t)\ \mathrm{d}t \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (f(x) - f(x-t))\,\varphi_n(t)\ \mathrm{d}t \end{aligned}$$

ii. *Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f\star\varphi_n(x) = f(x)$, c'est à dire que la suite de fonctions $(f\star\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f*

Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$

Nous avons $\displaystyle|f(x_0) - f\star\varphi_n(x_0)| \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x_0) - f(x_0-u)|\,\varphi_n(u)\ \mathrm{d}u$

$\longrightarrow$ f est continue en x_0.
Il existe donc $\delta > 0$ tel que si $|(x_0 - u) - x_0| < \delta \Longleftrightarrow |u| < \delta$ alors

$$|f(x_0) - f(x_0 - u)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$$

$\longrightarrow$ Ensuite, nous avons

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x_0) - f(x_0 - u)| \varphi_n(u)\,\mathrm{d}u = \int_{|u|<\delta} |f(x_0) - f(x_0 - u)| \varphi_n(u)\,\mathrm{d}u + \int_{|u|\geqslant\delta} |f(x_0) - f(x_0 - u)| \varphi_n(u)\,\mathrm{d}u$$

$\longrightarrow$ Clairement :

$$\int_{|u|<\delta} |f(x_0) - f(x_0 - u)| \varphi_n(u)\,\mathrm{d}u \leqslant \frac{\varepsilon}{3} \int_{|u|<\delta} \varphi_n(u)\,\mathrm{d}u$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_{|u|<\delta} \varphi_n(u)\,\mathrm{d}u = 1$, il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N_0$, alors :

$$\left| \int_{|u|<\delta} \varphi_n(u)\,\mathrm{d}u - 1 \right| \leqslant \frac{1}{2} \Longleftrightarrow \frac{1}{2} \leqslant \int_{|u|<\delta} \varphi_n(u)\,\mathrm{d}u \leqslant \frac{3}{2}$$

Ainsi, si $n \geqslant N_0$, alors $\displaystyle\int_{|u|<\delta} |f(x_0) - f(x_0 - u)| \varphi_n(u)\,\mathrm{d}u \leqslant \frac{\varepsilon}{3} \times \frac{3}{2} = \frac{\varepsilon}{2}$

$\longrightarrow$ Maintenant, f étant bornée, soit $M > 0$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leqslant M$.
Alors :

$$\int_{|u|\geqslant\delta} |f(x_0) - f(x_0 - u)| \varphi_n(u)\,\mathrm{d}u \leqslant 2M \int_{|u|\geqslant\delta} \varphi_n(u)\,\mathrm{d}u$$

$\longrightarrow$ Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_{|u|\geqslant\delta} \varphi_n(u)\,\mathrm{d}u = 0$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N_1$, alors

$$\int_{|u|\geqslant\delta} \varphi_n(u)\,\mathrm{d}u \leqslant \frac{\varepsilon}{4}$$

Et donc, si $n \geqslant N_1$, alors $\displaystyle\int_{|u|\geqslant\delta} |f(x_0) - f(x_0 - u)| \varphi_n(u)\,\mathrm{d}u \leqslant \frac{M\varepsilon}{2}$

$\longrightarrow$ Ainsi, si $N = \max\{N_0; N_1\}$ alors, si $n \geqslant N$, nous avons à la fois :

- $\star$ $\displaystyle\int_{|u|<\delta} |f(x_0) - f(x_0 - u)| \varphi_n(u)\,\mathrm{d}u \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$
- $\star$ $\displaystyle\int_{|u|\geqslant\delta} |f(x_0) - f(x_0 - u)| \varphi_n(u)\,\mathrm{d}u \leqslant \frac{M\varepsilon}{2}$

Et donc si $n \geqslant N$, nous avons :

$$|f(x_0) - f \star \varphi_n(x_0)| \leqslant (1 + M) \frac{\varepsilon}{2}$$

Nous venons donc de montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} f \star \varphi_n(x_0) = f(x_0)$, c'est à dire que la suite de fonctions $(f \star \varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f

Exercice 18 :

Très calculatoire, cet exercice ne pose aucune réelle difficulté
H est la fonction de Heaviside définie par :

$$H(x) = \begin{cases} +1 & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{Sinon} \end{cases}$$

1. *On appelle $f_1 = H \star H$. Démontrez que $f_1(x) = xH(x)$*

   Nous allons réutiliser l'exemple et donc, pour $x \geqslant 0$:

$$f_1(x) = H \star H(x) = \int_0^x H(x-t)\, H(t)\, \mathrm{d}t = \int_0^x \mathrm{d}t = x$$

   Donc :
   $\to$ Si $x \geqslant 0$, alors $f_1(x) = H \star H(x) = x$
   $\to$ Si $x < 0$, alors $f_1(x) = H \star H(x) = 0$
   Donc, $f_1(x) = x \times 1_{[0;+\infty[}(x) = xH(x)$

2. *Calculez $f_2 = H \star f_1$*

   De même, si $x \geqslant 0$

$$f_2(x) = f_1 \star H(x) = \int_0^x f_1(x-t)\, H(t)\, \mathrm{d}t = \int_0^x (x-t)\, \mathrm{d}t = \left[-\frac{(x-t)^2}{2}\right]_0^x = \frac{x^2}{2}$$

   Et si $x < 0$, alors $f_2(x) = f_1 \star H(x) = 0$

   Et donc $f_2(x) = \dfrac{x^2}{2} \times 1_{[0;+\infty[}(x) = \dfrac{x^2}{2} \times H(x)$

3. *Généralisation : Trouvez l'expression de $f_n = H \star f_{n-1}$; on aura posé $f_0 = H$*

   Nous sommes très tentés de poser $f_n = \dfrac{x^n}{n!} \times 1_{[0;+\infty[}(x) = \dfrac{x^n}{n!} H(x)$
   - ▷ C'est notoirement vrai pour $n = 0$

     Nous avons posé $f_0 = H$ et donc $f_0 = \dfrac{x^0}{0!} H(x) = H(x)$
   - ▷ Supposons maintenant qu'au rang n, $f_n = \dfrac{x^n}{n!} \times 1_{[0;+\infty[}(x) = \dfrac{x^n}{n!} H(x)$
   - ▷ Au rang $n+1$, alors :

$$f_{n+1}(x) = H \star f_n(x) = \int_0^x f_n(x-t)\, H(t)\, \mathrm{d}t = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\, \mathrm{d}t = \left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\right]_0^x = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

     Donc, $f_{n+1}(x) = \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!} \times 1_{[0;+\infty[}(x) = \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!} H(x)$

   Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n = \dfrac{x^n}{n!} \times 1_{[0;+\infty[}(x) = \dfrac{x^n}{n!} H(x)$

4. *Calculez $\exp \star H$ et $(H \times \exp) \star H$*

   (a) **Calcul de** $\exp \star H(x)$
   En fait, rien de bien particulier ! !

$$\exp \star H(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(x-t)\, H(t)\, \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{(x-t)}\, \mathrm{d}t = e^x \int_0^{+\infty} e^{-t}\, \mathrm{d}t = e^x \left[-e^{-t}\right]_0^{+\infty} = e^x$$

   Ainsi, nous avons $\exp \star H = \exp$

   (b) **Calcul de** $(H \times \exp) \star H$
   Commençons par remarquer que $f(x) = H \times \exp(x) = \exp \times 1_{[0;+\infty[}(x)$ est une fonction nulle sur $]-\infty; 0[$
   Donc :

$$\begin{aligned}(H \times \exp) \star H(x) &= \int_0^x \exp(x-t)\, \mathrm{d}t = \int_0^x e^{x-t}\, \mathrm{d}t = e^x \int_0^x e^{-t}\, \mathrm{d}t \\ &= e^x \left[-e^{-t}\right]_0^x = e^x \left(-e^{-x} + 1\right) = e^x - 1\end{aligned}$$

   Ainsi, $(H \times \exp) \star H(x) = (e^x - 1) \times 1_{[0;+\infty[}(x)$

Exercice 21 :

Pour $a \geqslant 0$, rechercher la transformée de FOURIER de $f(x) = e^{-x} 1_{[a,+\infty[}(x)$

Nous reprenons la définition :

$$\begin{aligned}\widehat{f}(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t} 1_{[a,+\infty[}(t)\, e^{-ixt}\, \mathrm{d}t = \int_a^{+\infty} e^{-t-ixt}\, \mathrm{d}t \\ &= \int_a^{+\infty} e^{-t(1+ix)}\, \mathrm{d}t = \left[-\frac{e^{-t(1+ix)}}{(1+ix)}\right]_a^{+\infty} \\ &= \frac{e^{-a(1+ix)}}{(1+ix)}\end{aligned}$$

Exercice 22 :

Toute fonction $f(x)$ peut être décomposée, de manière unique, en une somme d'une fonction paire $p(x)$ et d'une fonction impaire $q(x)$. Plus précisément, nous avons : $f(x) = p(x) + q(x)$ où :

$$p(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)] \text{ et } q(x) = \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)]$$

Démontrer que $\widehat{f}(x) = 2\int_0^{+\infty} p(t) \cos tx\, \mathrm{d}x - 2i\int_0^{+\infty} q(t) \sin tx\, \mathrm{d}x$

Ce n'est pas très difficile.
Remarquons que $f(x) = p(x) + q(x)$ et donc $\widehat{f}(x) = \widehat{p}(x) + \widehat{q}(x)$.
p étant une fonction paire, d'après 5.6.4, $\widehat{p}(x) = 2\int_0^{+\infty} p(t) \cos tx\, \mathrm{d}x$ et $\widehat{q}(x) = -2i\int_0^{+\infty} q(t) \sin tx\, \mathrm{d}x$.
D'où le résultat

Exercice 23 :

1. *On considère la fonction porte suivante (voir la figure 5.9) :* $\mathrm{P}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \textit{si } |x| \leqslant +1 \\ 0 & \textit{sinon} \end{cases}$. *Calculez* $\widehat{\mathrm{P}}$

   Question qui ne pose pas de difficultés.

   $$\widehat{\mathrm{P}}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{P}(u)\, e^{-iux}\, \mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} e^{-iux}\, \mathrm{d}u = \frac{1}{2}\left[-\frac{e^{-iux}}{ix}\right]_{-1}^{+1} = -\frac{e^{-ix} - e^{ix}}{2ix} = \frac{\sin x}{x}$$

2. *En étudiant la figure 5.10, exprimer les fonctions f et g en fonction de la fonction porte P, puis calculez les transformées de Fourier $\widehat{f}$ et $\widehat{g}$*

   - Nous avons $f(x) = 2\mathrm{P}(x)$ et donc $\widehat{f}(x) = 2\widehat{\mathrm{P}}(x) = \dfrac{2\sin x}{x}$
   - Cette fois-ci, nous avons $g(x) = \mathrm{P}(2x) = \mathrm{P}\left(\dfrac{x}{\frac{1}{2}}\right)$; donc, $\widehat{g}(x) = \dfrac{1}{2}\widehat{\mathrm{P}}\left(\dfrac{1}{2} \times x\right) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = \dfrac{\sin \frac{x}{2}}{x}$

3. *De la même manière, en regardant la figure 5.11, exprimer les fonctions h_1 et h_2 en fonction de la fonction porte P, puis calculer les transformée de Fourier $\widehat{h_1}$ et $\widehat{h_2}$*

   - Nous avons $h_1(x) = \mathrm{P}(x-1)$ et donc $\widehat{h_1}(x) = e^{-ix}\widehat{\mathrm{P}}(x) = \dfrac{e^{-ix}\sin x}{x}$
   - Cette fois-ci, nous avons $h_2(x) = \mathrm{P}(x+1)$; donc, $\widehat{h_2}(x) = e^{ix}\widehat{\mathrm{P}}(x) = \dfrac{e^{ix}\sin x}{x}$

Exercice 25 :

Soit $\lambda > 0$, et on appelle $h_\lambda(t) = e^{-\lambda|t|}$; calculer $\widehat{h_\lambda}$

Soit $f(t) = e^{-|t|}$; alors, $h_\lambda(t) = f(\lambda t) = f\left(\dfrac{t}{\lambda^{-1}}\right)$.

D'après la proposition 5.6.4, nous avons $\widehat{h_\lambda}(x) = \lambda^{-1}\widehat{f}(\lambda^{-1}x)$.

Or, nous avons montré que $\widehat{f}(x) = \dfrac{2}{1+x^2}$; donc $\widehat{f}(\lambda^{-1}x) = \dfrac{2}{1+(\lambda^{-1}x)^2} = \dfrac{2\lambda^2}{\lambda^2+x^2}$.

Ainsi, $\widehat{h_\lambda}(x) = \dfrac{2\lambda}{\lambda^2+x^2}$.

Exercice 26 :

1. *Calculez la transformée de Fourier de la fonction Φ définie par : $\Phi(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [-1;0[\\ -1 & \text{si } t \in [0;+1[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ dont le graphe est donné par 5.12*

   Ne pose pas de difficulté
   - ▷ Première méthode, en reprenant les définitions :
   $$\widehat{\Phi}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(t)\, e^{-ixt}\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{0} e^{-ixt}\,\mathrm{d}t - \int_{0}^{+1} e^{-ixt}\,\mathrm{d}t$$
   Faisant le changement de variable $v = -t$ dans l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{0} e^{-ixt}\,\mathrm{d}t$, nous obtenons
   $$\int_{-1}^{0} e^{-ixt}\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{1} e^{ixv}\,\mathrm{d}v$$
   et donc
   $$\widehat{\Phi}(x) = \int_{0}^{1} e^{ixv}\,\mathrm{d}v - \int_{0}^{+1} e^{-ixt}\,\mathrm{d}t = 2i\int_{0}^{+1} \sin xt\,\mathrm{d}t = -2i\left[\frac{\cos xt}{x}\right]_0^{+1} = \frac{2i(1-\cos x)}{x}$$
   - ▷ Seconde et meilleure méthode en remarquant que Φ est une fonction impaire et que donc :
   $$\widehat{\Phi}(x) = -2i\int_{0}^{+\infty} \Phi(v)\sin xv\,\mathrm{d}v = 2i\int_{0}^{1} \sin xv\,\mathrm{d}v$$
   Et nous terminons comme le point ci-dessus

2. *Soit f la fonction définie par : $f(t) = \begin{cases} t & \text{si } t \in [-1;0[\\ -t & \text{si } t \in [0;+1[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$*

   Calculer la dérivée de f et en déduire $\widehat{f}$

   Clairement, $f' = \Phi$ et donc, d'après 5.6.9, nous avons :
   $$\widehat{f'}(x) = ix\widehat{f}(x) \iff \widehat{\Phi}(x) = ix\widehat{f}(x) \iff \widehat{f}(x) = \frac{\widehat{\Phi}(x)}{ix}$$
   Et donc $\widehat{f}(x) = \dfrac{2i(1-\cos x)}{x} \times \dfrac{1}{ix} = \dfrac{2(1-\cos x)}{x^2}$

Exercice 28 :

L'ondelette de Haar est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \left[0;\frac{1}{2}\right] \\ -1 & \text{si } x \in \left[\frac{1}{2};+1\right] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. *Calculer* $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} H(x)\,\mathrm{d}x$*, puis* $\widehat{H}(x)$*, la transformée de Fourier de* H

   Question facile

   ▷ **Calcul de** $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} H(x)\,\mathrm{d}x$

$$\int_{\mathbb{R}} H(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2}} H(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}}^1 H(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}x - \int_{\frac{1}{2}}^1 \mathrm{d}x = \frac{1}{2} - \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 0$$

   ▷ **Calcul de** $\widehat{H}(x)$

$$\begin{aligned}
\widehat{H}(x) = & \int_{-\infty}^{+\infty} H(u)\,e^{-ixu}\,\mathrm{d}u = \int_0^{\frac{1}{2}} H(u)\,e^{-ixu}\,\mathrm{d}u + \int_{\frac{1}{2}}^1 H(u)\,e^{-ixu}\,\mathrm{d}u \\
= & \int_0^{\frac{1}{2}} e^{-ixu}\,\mathrm{d}u - \int_{\frac{1}{2}}^1 e^{-ixu}\,\mathrm{d}u = \left[-\frac{e^{-ixu}}{ix}\right]_0^{\frac{1}{2}} - \left[-\frac{e^{-ixu}}{ix}\right]_{\frac{1}{2}}^1 \\
= & -\left(\frac{e^{\frac{-ix}{2}} - 1}{ix}\right) + \left(\frac{e^{-ix} - e^{\frac{-ix}{2}}}{ix}\right) = \frac{1 - e^{\frac{-ix}{2}} + e^{-ix} - e^{\frac{-ix}{2}}}{ix} \\
= & \frac{1 - 2e^{\frac{-ix}{2}} + e^{-ix}}{ix} = \frac{\left(1 - e^{\frac{-ix}{2}}\right)^2}{ix}
\end{aligned}$$

   Donc, $\widehat{H}(x) = \dfrac{\left(1 - e^{\frac{-ix}{2}}\right)^2}{ix}$

2. *On considère les fonctions* $(H_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ *définies par :* $H_k(x) = H(x-k)$

   (a) *Faire le graphe de* H_1 *et de* H_{-1}

   De manière générale, nous avons :

$$H_k(x) = H(x-k) = \begin{cases} 1 \text{ si } x-k \in \left[0; \frac{1}{2}\right] \Longleftrightarrow 0 \leqslant x-k \leqslant \frac{1}{2} \Longleftrightarrow k \leqslant x \leqslant k+\frac{1}{2} \\ -1 \text{ si } x-k \in \left[\frac{1}{2}; +1\right] \Longleftrightarrow \frac{1}{2} \leqslant x-k \leqslant 1 \Longleftrightarrow k+\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant k+1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

   Donc :

   ▷ $H_1(x) = H(x-1) = \begin{cases} 1 \text{ si } 1 \leqslant x \leqslant \frac{3}{2} \\ -1 \text{ si } \frac{3}{2} \leqslant x \leqslant 2 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

   ▷ $H_{-1}(x) = H(x+1) = \begin{cases} 1 \text{ si } -1 \leqslant x \leqslant -\frac{1}{2} \\ -1 \text{ si } -\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

   Le graphe est aux soins du lecteur

   (b) *Pour tout* $k \in \mathbb{Z}$*, calculer* $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} H_k(x)\,\mathrm{d}x$

   Assez facile ; non, très facile !!

$$\int_{\mathbb{R}} H_k(x)\,\mathrm{d}x = \int_k^{k+\frac{1}{2}} \mathrm{d}x - \int_{k+\frac{1}{2}}^{k+1} \mathrm{d}x = 0$$

(c) *Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, calculer $\widehat{H_k}(x)$, la transformée de Fourier de H_k*

D'après 5.6.4, comme $H_k(x) = H(x-k)$, nous avons :

$$\widehat{H_k}(x) = e^{-ikx}\widehat{H}(x) = \frac{e^{-ikx}\left(1-e^{\frac{-ix}{2}}\right)^2}{ix}$$

3. *On considère la fonction $H_{1,1}$ définie par : $H_{1,1}(x) = \sqrt{2}H(2x-1)$*
Faire le graphe de $H_{1,1}$ et calculer $\widehat{H_{1,1}}(x)$, la transformée de Fourier de $H_{1,1}$

▷ Graphe de $H_{1,1}$
Nous avons :

$$\begin{cases} H(2x-1) = 1 \iff & 0 \leqslant 2x-1 \leqslant \frac{1}{2} \\ \iff & 2 \leqslant 2x \leqslant \frac{3}{2} \iff 1 \leqslant x \leqslant \frac{3}{4} \end{cases}$$

Et

$$\begin{cases} H(2x-1) = -1 \iff & \frac{1}{2} \leqslant 2x-1 \leqslant 1 \\ \iff & \frac{3}{2} \leqslant 2x \leqslant 2 \iff \frac{3}{4} \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

Le graphe est aux soins du lecteur

▷ Calcul de $\widehat{H_{1,1}}(x)$

Nous avons : $\widehat{H_{1,1}}(x) = \sqrt{2}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} H(2u-1)\,e^{-ixu}\,\mathrm{d}u$

En faisant le changement de variables $v = 2u-1 \iff u = \dfrac{v+1}{2}$ et $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = 2 \iff \mathrm{d}u = \dfrac{\mathrm{d}v}{2}$, nous avons :

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} H(2u-1)\,e^{-ixu}\,\mathrm{d}u &= \int_{-\infty}^{+\infty} H(v)\,e^{-ix\times\frac{v+1}{2}}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} H(v)\,e^{-i\frac{x}{2}v}e^{\frac{-ix}{2}}\,\mathrm{d}v \\ &= \frac{e^{\frac{-ix}{2}}}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} H(v)\,e^{-i\frac{x}{2}v}\,\mathrm{d}v = \frac{e^{\frac{-ix}{2}}}{2}\widehat{H}(x)\end{aligned}$$

Et donc $\widehat{H_{1,1}}(x) = \dfrac{\sqrt{2}e^{\frac{-ix}{2}}}{2}\widehat{H}(x)$

Exercice 29 :

1. *Soit $F(x) = \displaystyle\int_0^1 \cos(x-\pi t)\,\mathrm{d}t$ définie pour $x \in \mathbb{R}$. F est-elle continue ? Dérivable ? Si oui, que vaut sa dérivée ? Calculer F explicitement*

⟶ F est clairement continue
Puisque la fonction $f(x,t) = \cos(x-\pi t)$ est continue par rapport à chacune des 2 variables sur le domaine $[0;1]\times\mathbb{R}$ et bornée sur ce domaine

⟶ F est dérivable
Comme nous venons de le voir, la fonction $f(x,t) = \cos(x-\pi t)$ est continue par rapport à chacune des 2 variables sur le domaine $[0;1]\times\mathbb{R}$.
De plus, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -\pi\sin(x-\pi t)$ laquelle est bornée et continue sur $[0;1]\times\mathbb{R}$

F est donc dérivable sur $[0;1]\times\mathbb{R}$ de dérivée $F'(x) = -\pi\displaystyle\int_0^1 \sin(x-\pi t)\,\mathrm{d}t$

⟶ Nous allons calculer $F(x)$.

Faisons le changement de variables $u = x - \pi t$ et donc $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -\pi \iff \mathrm{d}t = \frac{-\mathrm{d}u}{\pi}$ et donc :

$$\begin{aligned} F(x) = \int_0^1 \cos(x - \pi t)\, \mathrm{d}t = & \frac{-1}{\pi}\int_x^{x-\pi} \cos u \,\mathrm{d}u \\ = & \frac{-1}{\pi}[\sin u]_x^{x-\pi} \\ = & \frac{-1}{\pi}(\sin(x-\pi) - \sin x) = \frac{2\sin x}{\pi} \end{aligned}$$

Et donc $F(x) = \frac{2\sin x}{\pi}$

2. *Soit $F(x) = \int_0^1 e^{t\sin x}\,\mathrm{d}t$ définie pour $x \in \mathbb{R}$. F est-elle continue ? Dérivable ? Si oui, que vaut sa dérivée ? Calculer F explicitement*

$\longrightarrow$ F est clairement continue
Puisque la fonction $f(x,t) = e^{t\sin x}$ est continue par rapport à chacune des 2 variables sur le domaine $[0;1] \times \mathbb{R}$ et bornée sur ce domaine

$\longrightarrow$ F est dérivable
Comme nous venons de le voir, la fonction $f(x,t) = e^{t\sin x}$ est continue par rapport à chacune des 2 variables sur le domaine $[0;1] \times \mathbb{R}$.
De plus, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = t\cos x e^{t\sin x}$ laquelle est bornée et continue sur $[0;1] \times \mathbb{R}$

F est donc dérivable sur $[0;1] \times \mathbb{R}$ de dérivée $F'(x) = \cos x \int_0^1 te^{t\sin x}\,\mathrm{d}t$

$\longrightarrow$ Calcul explicite de $F(x)$.

Nous allons faire le changement de variable $u = t\sin x$ et donc $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \sin x \iff \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}u}{\sin x}$, d'où :

$$\begin{aligned} F(x) = \int_0^1 e^{t\sin x}\,\mathrm{d}t = & \int_0^{\sin x} e^u \frac{\mathrm{d}u}{\sin x} \\ = & \frac{1}{\sin x}\int_0^{\sin x} e^u\,\mathrm{d}u = \frac{1}{\sin x}[e^u]_0^{\sin x} \\ = & \frac{e^{\sin x} - 1}{\sin x} \end{aligned}$$

Et donc $F(x) = \frac{e^{\sin x} - 1}{\sin x}$.
On voit très facilement que $\lim\limits_{x\to 0} F(x) = 1$

Exercice 30 :

Soit $A > 0$ et

$$\begin{aligned} f : [0;+\infty[\times [A;+\infty[& \longrightarrow \mathbb{R} \\ (t,y) & \longmapsto f(t,y) = e^{-ty}\frac{\sin t}{t} \end{aligned}$$

1. *Montrer que pour tout $y \in [A;+\infty[$, $f_y : [0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $f_y(t) = e^{-ty}\frac{\sin t}{t}$ est continue*

Il n'y a pas de gros problèmes.
En effet, le seul problème pourrait être en 0.
Or, $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = 1$, et donc $\lim\limits_{t\to 0} e^{-ty}\frac{\sin t}{t} = 1$
En posant $f_y(0) = 1$, nous avons donc une fonction f_y continue.

2. *Montrer que $\int_0^{+\infty} f(t,y)\,dt$ existe et que $F(y) = \int_0^{+\infty} f(t,y)\,dt$ est continue*

En effet,

— On vient de montrer que pour tout $y \in [A; +\infty[$, la fonction $f_y(t) = f(t,y) = e^{-ty}\dfrac{\sin t}{t}$ est continue

— D'autre part, pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons l'inégalité $|\sin x| \leqslant |x|$, et de cette inégalité, nous avons :

$$\left|e^{-ty}\frac{\sin t}{t}\right| \leqslant e^{-ty}$$

Comme $y \geqslant A$, nous avons, pour $t \in [0; +\infty[$, $ty \geqslant tA$ et donc $e^{-ty} \leqslant e^{-tA}$. Ainsi, pour tout $y \in [A; +\infty[$,

$$\left|e^{-ty}\frac{\sin t}{t}\right| \leqslant e^{-tA}$$

Comme $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-tA}dt$ existe, il en est de même de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-ty}\frac{\sin t}{t}dt$

Ainsi, d'après le théorème 5.3.1, la fonction $F(y) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t,y)\,dt$ est continue

3. *Calculer $F'(y)$*

(a) La dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial y}(t,y)$ existe et est donnée par :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(t,y) = -te^{-ty}\frac{\sin t}{t} = -e^{-ty}\sin t$$

D'une part, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(t,y)$ est continue

D'autre part, pour tout $(t,y) \in [0; +\infty[\times [A; +\infty[$, nous avons :

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(t,y)\right| \leqslant e^{-ty} \leqslant e^{-tA}$$

Ainsi, d'après le théorème 5.3.2, pour tout $y \in [A; +\infty[$ $F'(y)$ existe et

$$F'(y) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial y}(t,y)\,dt = \int_0^{+\infty} -e^{-ty}\sin t dt$$

(b) **Nous avons** $F'(y) = \dfrac{-1}{1+y^2}$

Pour faire ce calcul, nous allons faire comme souvent en utilisant le fait que

$$\int_0^{+\infty} -e^{-ty}\sin t dt = \lim_{T\to+\infty}\int_0^T -e^{-ty}\sin t dt$$

Pour faire ce calcul, il est possible d'utiliser 2 intégrations par parties successives. Nous faisons un autre choix en remarquant que $\sin t = \dfrac{e^{it}-e^{-it}}{2i}$. Donc :

$$\begin{aligned}\int_0^T e^{-ty}\sin t dt &= \int_0^T e^{-ty}\left(\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\right)dt \\ &= \frac{1}{2i}\int_0^T e^{t(i-y)} - e^{-t(i+y)}dt\end{aligned}$$

Calculons les différents termes de cette intégrale :

▷ $\displaystyle\int_0^T e^{t(i-y)}dt = \left[\frac{1}{i-y}e^{t(i-y)}\right]_0^T = \frac{1}{i-y}\left(e^{T(i-y)}-1\right)$

▷ $\displaystyle\int_0^T e^{-t(i+y)}dt = \left[\frac{-1}{i+y}e^{-t(i+y)}\right]_0^T = \frac{-1}{i+y}\left(e^{-T(i+y)}-1\right)$

D'où $\displaystyle\int_0^T e^{t(i-y)} - e^{-t(i+y)}dt = \left(\frac{e^{T(i-y)}}{i-y} + \frac{e^{-T(i+y)}}{i+y}\right) - \left(\frac{1}{i-y} + \frac{1}{i+y}\right)$

Tout calculs faits, nous obtenons : $\displaystyle\int_0^T e^{t(i-y)} - e^{-t(i+y)}dt = e^{-Ty}\left(\frac{e^{iT}}{i-y} + \frac{e^{-iT}}{i+y}\right) + \frac{2i}{1+y^2}$

Donc, $\displaystyle\int_0^T -e^{-ty}\sin t dt = \frac{-1}{1+y^2} - \frac{e^{-Ty}}{2i}\left(\frac{e^{iT}}{i-y} + \frac{e^{-iT}}{i+y}\right)$

Or, $\displaystyle\left|\frac{e^{-Ty}}{2i}\left(\frac{e^{iT}}{i-y} + \frac{e^{-iT}}{i+y}\right)\right| = e^{-Ty}\left|\frac{e^{iT}}{i-y} + \frac{e^{-iT}}{i+y}\right| \leqslant e^{-Ty}\left(\frac{1}{|i-y|} + \frac{1}{|i+y|}\right) = e^{-Ty} \times M$

Comme $\displaystyle\lim_{T\to+\infty} e^{-Ty} = 0$, nous avons $\displaystyle\lim_{T\to+\infty} \frac{e^{-Ty}}{2i}\left(\frac{e^{iT}}{i-y} + \frac{e^{-iT}}{i+y}\right) = 0$, ce qui veut dire que $\displaystyle\lim_{T\to+\infty}\int_0^T -e^{-ty}\sin t dt = \frac{-1}{1+y^2}$

Nous avons bien : $\displaystyle F'(y) = \frac{-1}{1+y^2}$

4. *En déduire que $F(y) = K - \arctan y$; déterminer K*

 ▷ De $\displaystyle F'(y) = \frac{-1}{1+y^2}$, nous déduisons que $F(y) = K - \arctan y$

 ▷ Nous avons $\displaystyle\lim_{y\to+\infty} F(y) = \lim_{y\to+\infty}(K - \arctan y) = K - \frac{\pi}{2}$.

 Nous allons trouver $\displaystyle\lim_{y\to+\infty} F(y)$ par un autre moyen

 ◇ Tout d'abord,

$$|F(y)| = \left|\int_0^{+\infty} e^{-ty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^{+\infty}\left|e^{-ty}\frac{\sin t}{t}\right|\,\mathrm{d}t$$

 ◇ Ensuite $\displaystyle\left|e^{-ty}\frac{\sin t}{t}\right| = e^{-ty}\left|\frac{\sin t}{t}\right|$ et comme, pour tout $t\in\mathbb{R}^+$, $\displaystyle 0 \leqslant \left|\frac{\sin t}{t}\right| \leqslant 1$, nous avons :

$$\left|e^{-ty}\frac{\sin t}{t}\right| \leqslant e^{-ty}$$

 C'est à dire $\displaystyle|F(y)| \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-ty}\,\mathrm{d}t$

 ◇ Par un calcul élémentaire, nous avons $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-ty}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{y}$ et donc $\displaystyle|F(y)| \leqslant \frac{1}{y}$. Comme $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{y} = 0$, nous avons $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} F(y) = 0$

 D'où $\displaystyle K = \frac{\pi}{2}$ et donc $\displaystyle F(y) = \frac{\pi}{2} - \arctan y$

5. *En déduire $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$*

 Il suffit de voir que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = F(0) = \frac{\pi}{2}$ Et donc $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$

Exercice 31 :

En formant une équation différentielle vérifiée par f, calculer la valeur de $\displaystyle f(x) = \int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}e^{itx}\,\mathrm{d}t$

$\Longrightarrow$ **On remarque d'abord que f est bien définie pour tout $x\in\mathbb{R}$.**

En effet, nous avons $\displaystyle\left|\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}e^{itx}\right| = \left|\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\right|$ et nous avons $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ qui existe.

 ⋆ En effet, en 0, la fonction $\dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t}}$ est équivalente à $\dfrac{1}{\sqrt{t}}$ et, pour tout $c\geqslant 0$, $\displaystyle\int_0^c\frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ existe

 ⋆ D'autre part, pour tout $c\geqslant 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_c^{+\infty}\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ est elle aussi convergente.

Donc, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} e^{itx}\, \mathrm{d}t$ existe pour tout $x \in \mathbb{R}$, c'est à dire que f est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$

$\Longrightarrow$ **Démontrons que f est de classe $\mathcal{C}^1$.**

Soit $g(x,t) = \dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t}} e^{itx}$

- $\star$ Tout d'abord, g est continue par rapport à chacune de ses variables
- $\star$ D'autre part, $\dfrac{\partial g}{\partial x} = \dfrac{ite^{-t}}{\sqrt{t}} e^{itx} = i\sqrt{t}e^{-t}e^{itx}$ est continue par rapport à chacune de ses variables et ensuite, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $x \geqslant 0$:

$$\left|\frac{\partial g}{\partial x}\right| = \left|i\sqrt{t}e^{-t}e^{itx}\right| = \sqrt{t}e^{-t}$$

Et nous avons l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sqrt{t}e^{-t}\, \mathrm{d}t$ qui existe.

On en déduit par le théorème de dérivation des intégrales à paramètres 5.3.2 que f est dérivable, avec

$$f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial g}{\partial x}(t,x)\, \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} i\sqrt{t}e^{-t}e^{itx}\, \mathrm{d}t$$

$\Longrightarrow$ Nous exprimons $\displaystyle\int_0^{+\infty} i\sqrt{t}e^{-t}e^{itx}\, \mathrm{d}t$ en fonction de f grâce à une intégration par parties, en posant :

$$\begin{bmatrix} u = i\sqrt{t} & u' = \dfrac{i}{2\sqrt{t}} \\ v' = e^{-t}e^{itx} = e^{t(ix-1)} & v = \dfrac{e^{t(ix-1)}}{ix-1} \end{bmatrix}$$

D'où :

$$f'(x) = \left[i\sqrt{t}\frac{e^{t(ix-1)}}{ix-1}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{ie^{t(ix-1)}}{2\sqrt{t}\,(ix-1)}\, \mathrm{d}t = \left[i\sqrt{t}e^{-t}\frac{e^{ixt}}{ix-1}\right]_0^{+\infty} - \frac{i}{2(ix-1)} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} e^{itx}\, \mathrm{d}t$$

Comme $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \sqrt{t}e^{-t} = 0$, nous obtenons

$$f'(x) = -\frac{i}{2(ix-1)} f(x) \Longleftrightarrow f'(x) = \frac{-x+i}{2(1+x^2)} f(x)$$

f vérifie donc l'équation différentielle $y' = \dfrac{-x+i}{2(1+x^2)} y$

$\Longrightarrow$ Résolvons, maintenant, l'équation différentielle $y' = \dfrac{-x+i}{2(1+x^2)} y$.

Nous avons, en supposant $y \neq \mathcal{O}$:

$$\begin{aligned} y' = \frac{-x+i}{2(1+x^2)} y \Longleftrightarrow & \quad \frac{y'}{y} = \frac{-x+i}{2(1+x^2)} = \frac{-x}{2(1+x^2)} + \frac{i}{2(1+x^2)} = \frac{-2x}{4(1+x^2)} + \frac{i}{2(1+x^2)} \\ \Longleftrightarrow & \quad \ln|y| = \frac{-1}{4} \ln\left(1+x^2\right) + \frac{i}{2} \arctan x + K \text{ avec } K \in \mathbb{C} \\ \Longleftrightarrow & \quad y = C\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{4}} \times e^{i\frac{\arctan x}{2}} \end{aligned}$$

Donc $f(x) = C\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{4}} \times e^{i\frac{\arctan x}{2}}$

$\Longrightarrow$ Pour trouver C, nous calculons $f(0)$

- $\star$ D'une part, $f(0) = C\left(1+0^2\right)^{-\frac{1}{4}} \times e^{i\frac{\arctan 0}{2}} = C$
- $\star$ D'autre part, $f(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\, \mathrm{d}t$.

Pour calculer cette intégrale, nous faisons le changement de variable $u = \sqrt{t}$ avec $\dfrac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = 2\,\mathrm{d}u$ et donc :

$$f(0) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \sqrt{\pi}$$

D'où, $f(x) = \sqrt{\pi}\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{4}} \times e^{i\frac{\arctan x}{2}}$

Exercice 32 :

On étudie ici l'intégrale généralisée dépendant d'un paramètre $x \in \mathbb{R}$ $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos tx}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$

1. (a) *Montrer que cette intégrale existe pour tout $x \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire que F est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.*

   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons $\left|\dfrac{\cos tx}{1+t^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{1+t^2}$.

   Comme $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ existe, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos tx}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ existe pour tout $x \in \mathbb{R}$ et donc, F est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.

   (b) *Montrer que F est continue et bornée sur $\mathbb{R}$.*

   ▷ Puisque $f(t,x) = \dfrac{\cos tx}{1+t^2}$ est continue par rapport à chacune de ses variables, et uniformément dominée par la fonction $h(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$, on peut appliquer le théorème de continuité des intégrales généralisées dépendant d'un paramètre 5.3.1.
   Donc F est continue

   ▷ D'autre part, nous avons :

   $$|F(x)| = \left|\int_0^{+\infty} \frac{\cos tx}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^{+\infty} \left|\frac{\cos tx}{1+t^2}\right|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$$

   La fonction F est donc bien bornée sur $\mathbb{R}$

2. *Montrer que F est paire et calculer $F(0)$.*

   ▷ F est paire
   Soit $x \in \mathbb{R}$; en utilisant la parité de la fonction cosinus

   $$F(-x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos t(-x)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(-tx)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\cos tx}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = F(x)$$

   F est donc paire

   ▷ Il est facile de voir que $F(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$

3. *Montrer que pour $x > 0$, nous avons $F(x) = xG(x)$ où $G(x)$ est donnée par $G(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos u}{u^2+x^2}\,\mathrm{d}u$*

   ▷ Soit $x > 0$
   Nous faisons le changement de variable $u = xt$ dans l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos tx}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

   Alors $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = x \Longleftrightarrow \dfrac{\mathrm{d}u}{x} = \mathrm{d}t$ et alors :

   $$\int_0^{+\infty} \frac{\cos tx}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\cos u}{1+\left(\frac{u}{x}\right)^2} \times \frac{\mathrm{d}u}{x} = \int_0^{+\infty} \frac{x^2\cos u}{x^2+u^2} \times \frac{\mathrm{d}u}{x} = x\int_0^{+\infty} \frac{\cos u}{x^2+u^2}\,\mathrm{d}u$$

   Et donc, $F(x) = xG(x)$ où $G(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos u}{u^2+x^2}\,\mathrm{d}u$

▷ Par un calcul identique, nous trouvons que, si $x < 0$, alors $F(x) = -xG(x)$
En synthèse, nous avons, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $F(x) = |x| G(x)$

4. *Montrer que $G(x)$ est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$ et exprimer $G'(x)$ et $G''(x)$ sous la forme d'intégrales généralisées dépendant du paramètre $x \in]0; +\infty[$*

Appelons $\gamma(x, u) = \dfrac{\cos u}{u^2 + x^2}$

(a) Calculons $\dfrac{\partial \gamma}{\partial x}(x, u)$.

Nous avons $\dfrac{\partial \gamma}{\partial x}(x, u) = \dfrac{-2x \cos u}{(u^2 + x^2)^2}$

▷ $\dfrac{\partial \gamma}{\partial x}(x, u)$ est une fonction continue par rapport à chacune de ses variables sur $]0; +\infty[\times]0; +\infty[$

▷ Soit $a > 0$; alors, pour $x \geqslant a$, nous avons $\left|\dfrac{\partial \gamma}{\partial x}(x, u)\right| \leqslant \dfrac{2x}{(u^2 + x^2)^2}$ Comme $x^2 \leqslant x^2 + u^2$, nous avons $(u^2 + x^2)^2 = (u^2 + x^2)(u^2 + x^2) \geqslant x^2 (u^2 + x^2)$ et donc :

$$\left|\frac{\partial \gamma}{\partial x}(x, u)\right| \leqslant \frac{2x}{x^2 (u^2 + x^2)} = \frac{2}{x (u^2 + x^2)}$$

D'autre part, comme $x \geqslant a$, $u^2 + x^2 \geqslant u^2 + a^2$ et donc $x(u^2 + x^2) \geqslant a(u^2 + a^2)$ d'où $\dfrac{2}{x(u^2 + x^2)} \leqslant \dfrac{2}{a(u^2 + a^2)}$

Ainsi, pour tout $x \geqslant a$, $\left|\dfrac{\partial \gamma}{\partial x}(x, u)\right| \leqslant \dfrac{2}{a(u^2 + a^2)}$

▷ L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{2}{a(u^2 + a^2)}\, du$ étant convergente, on peut appliquer le théorème de dérivation 5.3.2 et donc

$$G'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial \gamma}{\partial x}(x, u)\, du = \int_0^{+\infty} \frac{-2x \cos u}{(u^2 + x^2)^2}\, du$$

(b) Calculons $\dfrac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2}(x, u)$

Tous calculs faits, nous avons $\dfrac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2}(x, u) = \dfrac{(6x^2 - 2u^2) \cos u}{(u^2 + x^2)^3}$

▷ $\dfrac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2}(x, u)$ est une fonction continue par rapport à chacune de ses variables sur $]0; +\infty[\times]0; +\infty[$

▷ Soit $a > 0$; alors, pour $x \geqslant a$, nous avons $\left|\dfrac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2}(x, u)\right| \leqslant \dfrac{|6x^2 - 2u^2|}{(u^2 + x^2)^3}$
En utilisant l'inégalité triangulaire, nous avons

$$\left|\frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2}(x, u)\right| \leqslant \frac{6x^2 + 2u^2}{(u^2 + x^2)^3} \leqslant \frac{6x^2 + 6u^2}{(u^2 + x^2)^3} = \frac{6}{(u^2 + x^2)^2}$$

Comme $x^2 \geqslant a^2$, nous avons $u^2 + x^2 \geqslant u^2 + a^2$ et donc $\dfrac{6}{(u^2 + x^2)^2} \leqslant \dfrac{6}{(u^2 + a^2)^2}$

▷ L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{6}{(u^2 + a^2)^2}\, du$ étant convergente, on peut appliquer le théorème de dérivation 5.3.2 et donc

$$G''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2}(x, u)\, du = \int_0^{+\infty} \frac{(6x^2 - 2u^2) \cos u}{(u^2 + x^2)^3}\, du$$

G est donc de classe $\mathcal{C}^2$

5. *En déduire que F est deux fois dérivable sur $]0;+\infty[$ et que sa dérivée seconde est donnée par*

$$F''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{2x^2 - 6u^2}{(u^2+x^2)^3} \cos u \, \mathrm{d}u$$

Nous avons démontré que, sur $]0;+\infty[$, nous avons $F(x) = xG(x)$, et comme G est 2 fois continuement dérivable sur $]0;+\infty[$, il en est de même de F.
$\rightarrow$ Calcul de la dérivée première :

$$F'(x) = G(x) + xG'(x)$$

$\rightarrow$ Calcul de la dérivée seconde :

$$F''(x) = 2G'(x) + xG''(x)$$

D'où, en remplaçant, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
F''(x) = &\ 2G'(x) + xG''(x) = 2\int_0^{+\infty} \frac{-2x\cos u}{(u^2+x^2)^2} \mathrm{d}u + x\int_0^{+\infty} \frac{(6x^2-2u^2)\cos u}{(u^2+x^2)^3} \mathrm{d}u \\
= &\ \int_0^{+\infty} \frac{-4x(x^2+u^2)\cos u + 2x(3x^2-u^2)\cos u}{(u^2+x^2)^3} \mathrm{d}u \\
= &\ 2x\int_0^{+\infty} \frac{\cos u\,(x^2-3u^2)}{(u^2+x^2)^3} \mathrm{d}u
\end{aligned}$$

6. (a) *Montrer que pour $(u,x) \neq (0,0)$, les fonctions $h(u,x) = \dfrac{2x^2-6u^2}{(u^2+x^1)^3}$ et $k(u,x) = \dfrac{-1}{u^2+x^2}$ vérifient $h(u,x) = \dfrac{\partial^2 k}{\partial x^2}(u,x)$*

Il suffit de faire le calcul....
$\rightarrow$ $\dfrac{\partial k}{\partial x}(u,x) = \dfrac{2u}{(u^2+x^2)^2}$
$\rightarrow$ Et donc $\dfrac{\partial^2 k}{\partial x^2}(u,x) = \dfrac{2x^2-6u^2}{(u^2+x^1)^3}$
Et nous avons donc $F''(x) = x\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos u \frac{\partial^2 k}{\partial x^2}(u,x)\,\mathrm{d}u = x\int_0^{+\infty} \cos u\, h(u,x)\,\mathrm{d}u$

(b) *En déduire que F vérifie sur $]0;+\infty[$ l'équation différentielle $F" = F$.*

Nous allons nous intéresser à l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos u \frac{\partial^2 k}{\partial x^2}(u,x)\,\mathrm{d}u$ et utiliser 2 intégrations par parties successives ;
$\Longrightarrow$ Première intégration par parties :

$$\begin{array}{ll}
A = \cos u & A' = -\sin u \\
B' = \dfrac{\partial^2 k}{\partial x^2}(u,x) & B = \dfrac{\partial k}{\partial x}(u,x) = \dfrac{2u}{(u^2+x^2)^2}
\end{array}$$

Alors :

$$\int_0^{+\infty} \cos u \frac{\partial^2 k}{\partial x^2}(u,x)\,\mathrm{d}u = \left[\frac{2u\cos u}{(u^2+x^2)^2}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \sin u \frac{\partial k}{\partial x}(u,x)\,\mathrm{d}u$$

Nous avons $\displaystyle\lim_{u\to+\infty} \frac{2u\cos u}{(u^2+x^2)^2} = 0$, et donc

$$\int_0^{+\infty} \cos u \frac{\partial^2 k}{\partial x^2}(u,x)\,\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} \sin u \frac{\partial k}{\partial x}(u,x)\,\mathrm{d}u$$

$\Longrightarrow$ Seconde intégration par parties

$$A = \sin u \qquad A' = \cos u$$
$$B' = \frac{\partial k}{\partial x}(u,x) \qquad B = k(u,x)$$

Alors :
$$\int_0^{+\infty} \sin u \frac{\partial k}{\partial x}(u,x)\, \mathrm{d}u = [\sin uk(u,x)]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \cos uk(u,x)\, \mathrm{d}u$$

Comme tout à l'heure $\lim\limits_{u\to+\infty} \sin uk(u,x) = \lim\limits_{u\to+\infty} \dfrac{-\sin u}{u^2+x^2} = 0$, et donc
$$\int_0^{+\infty} \sin u \frac{\partial k}{\partial x}(u,x)\, \mathrm{d}u = -\int_0^{+\infty} \cos uk(u,x)\, \mathrm{d}u$$

De là, nous tirons que
$$F''(x) = -x\int_0^{+\infty} \cos uk(u,x)\, \mathrm{d}u = x\int_0^{+\infty} \frac{\cos u}{u^2+x^2}\mathrm{d}u = xG(x) = F(x)$$

F vérifie donc l'équation différentielle $F'' = F$

(c) *En déduire que, sur $]0;+\infty[$, F est de la forme $F(x) = ae^x + be^{-x}$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$*

L'équation différentielle $F'' = F$ est une équation différentielle du second ordre à coefficients constants dont les solutions sont du type $F(x) = ae^x + be^{-x}$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$

(d) *Calculer les valeurs de a et b*

Nous avons démontré que la fonction F était bornée sur $\mathbb{R}^+$, comme $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, nous avons $a = 0$.
Ensuite $F(0) = \dfrac{\pi}{2}$ et donc $b = \dfrac{\pi}{2}$. Ainsi, sur $\mathbb{R}^+$, $F(x) = \dfrac{\pi}{2}e^{-x}$
De la parité, nous tirons que, sur $\mathbb{R}$, $F(x) = \dfrac{\pi}{2}e^{-|x|}$

Exercice 33 :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x > 0$, on pose $h_n(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+x^4)^n}$

1. *Montrer que h_n, est bien définie sur $\mathbb{R}^{*+}$.*

   Soit $x > 0$
   La fonction positive $\dfrac{1}{(t^2+x^4)^n}$ est définie et continue sur $[0;+\infty[\times\mathbb{R}^{*+}$ et donc, pour tout $A > 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^A \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+x^4)^n}$ existe.
   Lorsque t tend vers $+\infty$, nous avons $\dfrac{1}{(t^2+x^4)^n} \underset{t\to+\infty}{\approx} \dfrac{1}{t^{2n}}$.
   Comme pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_A^{+\infty} \frac{1}{t^{2n}}\mathrm{d}t$ existe, on en déduit que la fonction $\dfrac{1}{(t^2+x^4)^n}$ est intégrable sur $[0;+\infty[$ et que donc $h_n(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+x^4)^n}$ existe pour tout $x \in \mathbb{R}^*$

2. *Montrer que h_n est continue sur $\mathbb{R}^{*+}$.*

   ▷ Pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, la fonction $\psi_n(x) = \dfrac{1}{(t^2+x^4)^n}$ est continue sur $\mathbb{R}^{*+}$

   ▷ Pour tout $x > 0$, la fonction $\varphi_n(t) = \dfrac{1}{(t^2+x^4)^n}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$

   ▷ D'autre part, soit $a > 0$ et $x \geqslant a$.
   Alors : $\dfrac{1}{(t^2+x^4)^n} \leqslant \dfrac{1}{(t^2+a^4)^n}$ et la fonction $\Phi(t) = \dfrac{1}{(t^2+a^4)^n}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$

D'après le théorème 5.3.1, h_n est continue sur $[a;+\infty[$ et comme ceci est vrai pour tout $x>0$, h_n est continue sur $\mathbb{R}^{*+}$

3. *Montrer que h_n est dérivable sur $\mathbb{R}^{*+}$ et que sa dérivée vérifie $h'_n(x)=-4nx^3h_{n+1}(x)$*

   Nous allons appliquer le théorème 5.3.2

   ▷ La fonction $f(t,x)=\dfrac{1}{(t^2+x^4)^n}$ est continue par rapport à chacune de ses variables

   ▷ La dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)=\dfrac{-2nx^3}{(t^2+x^4)^{n+1}}$ est continue par rapport à chacune des 2 variables.

   ▷ Soient $a>0$ et $A>0$ $a\leqslant x\leqslant A$. Alors :
$$\left|\frac{-2nx^3}{(t^2+x^4)^{n+1}}\right|\leqslant\frac{2nA^3}{(t^2+a^4)^{n+1}}$$
   Et la fonction $\dfrac{2nA^3}{(t^2+a^4)^{n+1}}$ est bien intégrable sur $\mathbb{R}^+$, c'est à dire que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{2nA^3}{(t^2+a^4)^{n+1}}\,\mathrm{d}t$ existe.

   D'après 5.3.2, h_n est dérivable et comme ceci est vérifié pour tout $0<a<A$, nous en déduisons que h_n est dérivable sur $\mathbb{R}^{*+}$ et :
$$h'_n(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t=-2nx^3\int_0^{+\infty}\frac{1}{(t^2+x^4)^{n+1}}\,\mathrm{d}t$$
   Comme $h_n(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(t^2+x^4)^n}$, nous avons $h'_n(x)=-4nx^3h_{n+1}(x)$

4. (a) *Calculer $h_1(x)$.*

   Nous avons $h_1(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(t^2+x^4)}$. Pour la calculer, nous faisons les calculs suivants :
$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(t^2+x^4)}=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{x^4\left(\left(\frac{t}{x^2}\right)^2+1\right)}=\frac{1}{x^4}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{\left(\left(\frac{t}{x^2}\right)^2+1\right)}=\frac{\pi}{2x^2}$$
   Et donc $h_1(x)=\dfrac{\pi}{2x^2}$

   (b) *Montrer par récurrence que h_n est de la forme $h_n(x)=a_nx^{2-4n}$ où $a_n\in\mathbb{R}$ vérifie une relation de récurrence que l'on précisera.*

   → Pour $n=1$, $h_1(x)=\dfrac{\pi}{2x^2}=\dfrac{\pi}{2}x^{-2}$; c'est donc vrai pour $n=1$ et nous avons $a_1=\dfrac{\pi}{2}$

   → Supposons qu'au rang n, nous avons $h_n(x)=a_nx^{2-4n}$

   → Démontrons le au rang $n+1$

   De la relation $h'_n(x)=-4nx^3h_{n+1}(x)$, nous déduisons que $h_{n+1}(x)=\dfrac{h'_n(x)}{-4nx^3}$; donc :
$$h_{n+1}(x)=\frac{h'_n(x)}{-4nx^3}=\frac{(2-4n)\,a_nx^{2-4n-1}}{-4nx^3}=\frac{(2n-1)\,a_n}{2n}x^{2-4n-1-3}=a_n\frac{2n-1}{2n}x^{2-4(n+1)}$$
   Et nous avons $a_{n+1}=a_n\dfrac{2n-1}{2n}$

   (c) *En déduire $h_n(x)$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$*

   Nous allons utiliser la formule de récurrence $h_n(x)=a_nx^{2-4n}$
$$h_n(x)=a_nx^{2-4n}=a_{n-1}\frac{2n-3}{2n-2}x^{2-4n}=a_{n-2}\frac{2n-3}{2n-2}\times\frac{2n-5}{2n-4}x^{2-4n}=a_1\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{2n-(2k+1)}{2n-2k}\right)x^{2-4n}$$
   Et pour terminer
$$h_n(x)=\frac{2n-3}{2n-2}\times\frac{2n-5}{2n-4}\times\cdots\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}x^{2-4n}$$

Exercice 34 :

Résoudre dans $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ l'équation de convolution $f \star e^{-2|x|} = e^{-3|x|}$

Soit $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ une solution de l'équation $f \star e^{-2|x|} = e^{-3|x|}$.
Alors, en passant à la transformée de Fourier, nous obtenons, en utilisant 5.6.7 :

$$\widehat{f \star e^{-2|x|}} = \widehat{e^{-3|x|}} \Longleftrightarrow \widehat{f} \times \widehat{e^{-2|x|}} = \widehat{e^{-3|x|}} \Longleftrightarrow \widehat{f}(x) = \frac{6}{9+x^2} \times \frac{4+x^2}{4} = \frac{3}{2} \times \frac{4+x^2}{9+x^2}$$

Nous avons, à ce moment là, $\lim\limits_{x\to+\infty} \widehat{f}(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3}{2} \times \frac{4+x^2}{9+x^2} = \frac{3}{2}$, ce qui contredit le lemme de Riemann-Lebesgue 5.6.6.
f n'existe donc pas, et il n'y a pas de solution à l'équation de convolution $f \star e^{-2|x|} = e^{-3|x|}$

Exercice 35 :

Le but de cet exercice est de rechercher des fonctions u intégrables telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$u(x) = e^{-|x|} + \beta \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x-s|} u(s)\, \mathrm{d}s$$

où $\beta \in \mathbb{R}$. On pose $f(x) = e^{-|x|}$.

1. *Ecrire cette équation sous forme d'une équation faisant intervenir un produit de convolution*

   Pas exactement compliqué!!

   $$u(x) = f(x) + \beta \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-s)\, u(s)\, \mathrm{d}s \Longleftrightarrow u(x) = f(x) + \beta f \star u(x)$$

2. *On suppose que l'équation admet une solution. Déterminer $\widehat{u}$. En déduire que $\beta < \frac{1}{2}$*

   $\Longrightarrow$ Comme $u(x) = f(x) + \beta f \star u(x)$, nous avons, par 5.6.7 :

   $$\begin{aligned} \widehat{u}(x) = \widehat{f}(x) + \widehat{\beta f \star u}(x) &\Longleftrightarrow \widehat{u}(x) = \widehat{f}(x) + \beta \widehat{f}(x) \times \widehat{u}(x) \\ &\Longleftrightarrow \widehat{u}(x) - \beta \widehat{f}(x) \times \widehat{u}(x) = \widehat{f}(x) \\ &\Longleftrightarrow \widehat{u}(x) = \frac{\widehat{f}(x)}{1 - \beta \widehat{f}(x)} = \frac{\frac{2}{1+x^2}}{1 - \frac{2\beta}{1+x^2}} \\ &\Longleftrightarrow \widehat{u}(x) = \frac{2}{x^2 + (1-2\beta)} \end{aligned}$$

   $\Longrightarrow$ Ainsi, si $1 - 2\beta > 0 \Longleftrightarrow \beta < \frac{1}{2}$, alors, il n'y a aucun problème de continuité pour $\widehat{u}(x)$

   $\Longrightarrow$ Si $1 - 2\beta \geqslant 0 \Longleftrightarrow \beta \geqslant \frac{1}{2}$, il y a des points de discontinuité sur $\mathbb{R}$ pour $\widehat{u}$, ce qui est en contradiction avec 5.6.3

Troisième partie

Les séries

Chapitre 6

Les séries numériques

Disons-le tout net, ce chapitre est très proche du chapitre con cernant les suites vu en L_1. Beaucoup de méthodes en sont issues. Vous devez donc avoir bien assimilé la notion de limite : si vous avez bien compris la convergence des suites, vous ne devriez pas avoir de problème

6.1 Définition de séries

6.1.1 Définition d'une série

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique, réelle ou complexe.$((u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$
On considère les sommes partielles

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$$

On appelle série de terme général u_n le couple $\boxed{\sum u_n = \left((u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (S_n)_{n\in\mathbb{N}}\right)}$

On dit que la série $\sum u_n$ converge, si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{C}$

Lorsque la série $\sum u_n$ converge, le nombre $S = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ est appelé Somme de la série $\sum u_n$ et on note :

$$\boxed{S = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k}$$

Remarque 1 :

1. Etudier une série, *ou en chercher la nature*, c'est chercher si elle converge, ou si elle diverge.
2. Si elle diverge, on peut chercher comment elle diverge *(en lui cherchant, par exemple, un équivalent)*
3. Si elle converge, on essaie de connaitre sa limite exacte, ou une approximation de sa limite et/ou la rapidité avec laquelle cette série converge vers la limite ; ce qui n 'est pas si simple ; l'outil informatique peut alors être utile *(les outils de l'analyse numérique)*

Exemple 1 :

Exemples simples de séries
Avant de poursuivre dans la théorie, il est loin d'être inutile que de manipuler les premiers objets les plus simples

1. La série harmonique est la somme infinie des inverses des entiers positifs $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$; c'est une série

qui diverge. On sait même que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{+\infty}{\approx} \ln n$. Ce qui montre que la série harmonique diverge lentement vers $+\infty$. On peut donner quelques valeurs :

n	S_n
100	$S_{100} = 5,19$
214	$S_{214} = 5,94$
746	$S_{746} = 7,19$

La divergence de cette série est très lente. Pour le démontrer, nous utilisons l'outil classique de comparaison avec une intégrale.voir la figure 6.1*(Voir le cours de L_0)*

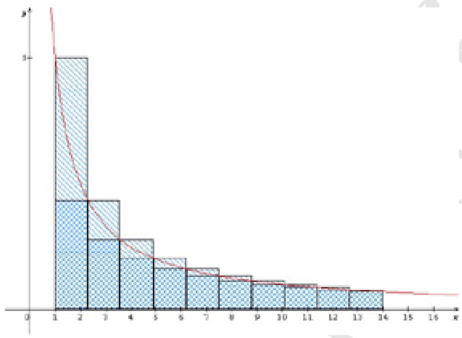

FIGURE 6.1 – Exemple d'encadrement par des rectangles

Un autre moyen pour démontrer que la série harmonique est divergente, est d'utiliser le critère de Cauchy. En effet, nous avons :

$$S_{2n} - S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geqslant n \times \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

La suite des sommes partielles $(S_n)_{n\geqslant 1}$ ne peut être de Cauchy ; et la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ est donc divergente.

2. Observons le développement décimal d'un réel strictement compris entre 0 et 1.
   $x = 0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$, où pour tout n, $a_n \in \{0, 1, \dots, 9\}$
   Cette écriture correspond en fait à la série de terme général $\left(\frac{a_n}{10^n}\right)$.
   La somme partielle $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{10^k}$ est l'approximation décimale par défaut, à 10^{-n} près. Voici les 50 premières décimales de $\sqrt{\frac{1}{2}}$

$$\sqrt{\frac{1}{2}} = 0.70710678118654752440084436210484903928483593768847\dots$$

   Les nombres décimaux $S_1 = 0.7$, $S_3 = 0.707$, $S_6 = 0.707106$ sont des sommes partielles de la série.
   Soit $x \in]0; 1[$ en utilisant le développement décimal de x, nous avons $x = \sum_{n\geqslant 1} \frac{a_n}{10^n}$

3. La série géométrique $\sum_{n\geqslant 0} x^n$ avec $x \in \mathbb{C}$.
   Voici un exemple très important, que nous retrouverons dans beaucoup de résultats de la théorie des séries. Il part, de plus, des premiers exemples simples de suites.

On commence par étudier les sommes partielles $S_n = \sum_{k=0}^{n} x^k$.

S_n est en fait la somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique de raison x. Donc,

$$S_n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \text{ si } x \neq 1$$

Il faut, en fait, étudier $\lim_{n\to+\infty} x^{n+1}$; or, si $|x| < 1$, alors $\lim_{n\to+\infty} x^{n+1} = 0$, et si $|x| \geqslant 1$, alors, x^{n+1} diverge. On en conclue que si $|x| < 1$, alors, S_n converge vers $\frac{1}{1-x}$, et que si $|x| \geqslant 1$, S_n diverge.
On en conclue que :

$$\boxed{\begin{cases} |x| < 1 \Rightarrow \sum_{n\geqslant 0} x^n = \dfrac{1}{1-x} \\ |x| > 1 \Rightarrow \sum_{n\geqslant 0} x^n \text{ diverge} \end{cases}}$$

Pour $x = \frac{1}{2}$, nous avons $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$ On peut donner quelques valeurs pour les premiers calculs :

n	S_n
1	$S_1 = 1,5$
4	$S_4 = 1,94$
7	$S_7 = 1,99$
8	$S_8 = 2$

Dans notre cas, nous voyons que la convergence est très rapide.

Que se passe-t-il si $x = 1$ ou $x = -1$?

⋆ Si $x = 1$, alors $S_n = n + 1$ et $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$ et donc la série diverge

⋆ Si $x = -1$, alors :

$$S_1 = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots + (-1)^n = \begin{cases} 0 \text{ si } n \text{ est impair} \\ 1 \text{ si } n \text{ est pair} \end{cases}$$

La série diverge aussi dans ce cas.

4. La série exponentielle. Nous avons démontré que $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n!} = e$

5. Un exemple moins canonique :
$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)}$ est une série définie à partir de $n = 1$.

On étudie donc les sommes partielles $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$;

Or, $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, et alors,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

donc, $S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$, et $\lim_{n\to+\infty} S_n = 1$

On en conclue que $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)}$ converge, et que $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

Exercice 1 :

Etudier la convergence de $\sum_{n\geqslant 1} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

6.1.2 Conditions nécessaires de convergence

Si $\sum u_n$ converge, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$. C'est à dire $\sum_{n\geqslant 0} u_n = S \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = 0$

Démonstration

Evidemment, nous avons : $u_n = S_n - S_{n-1}$.
Comme $\sum u_n$ converge alors $\lim_{n\to+\infty} S_n = S$ et donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} (S_n - S_{n-1})$.
D'où $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} S_n - S_{n-1} = 0$.
Ce que nous voulions

Remarque 2 :

Ce résultat vaut surtout pour sa contrapposée, c'est à dire :

$$\boxed{\text{si } \lim_{n\to+\infty} u_n \neq 0 \text{ alors, } \sum u_n \text{ diverge}}$$

Exemple 2 :

1. Si $u_n = \dfrac{2n+1}{n+3}$ alors, $\sum u_n$ diverge.
   En effet, $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{2n+1}{n+3} = 2$; comme $\lim_{n\to+\infty} u_n \neq 0$, la série diverge
2. **Ce n'est pas parce que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ que $\sum u_n$ converge**
   Exemples : nous avons étudié ces séries dont les termes généraux tendent vers zéro, mais qui divergent :
   → La série harmonique $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$
   → La série du logarithme $\sum_{n\geqslant 1} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

Exercice 2 :

On considère la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Montrer que les sommes partielles $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ sont minorées par $v_n = \sqrt{n}$.

Que conclure ?

6.1.3 Définition des restes d'une série numérique

Nous considérons la série convergente $\sum u_n$ et nous posons $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$. S_n désigne toujours la somme partielle d'ordre n : $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$

Pour chaque entier naturel n, on considère le reste d'ordre n de la série $\sum u_n$ défini par :

$$R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$$

Pour tout entier naturel n, nous avons $S = S_n + R_n$

6.1.4 Théorème

Soit $\sum u_n$ une série numérique convergente.Alors, la suite des restes $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie en 6.1.3 converge vers 0

Démonstration

Par définition de la suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$, nous avons $R_n = S - S_n$ et donc $\lim_{n\to+\infty} R_n = \lim_{n\to+\infty} (S - S_n) = 0$, puisque $\lim_{n\to+\infty} S_n = S$

6.1.5 Somme de Séries

On dispose pour les séries, des mêmes théorèmes que pour les suites, et la démonstration en est très simple

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ 2 séries numériques convergentes.

Alors, la série somme, $\sum (u_n + v_n)$ est aussi convergente.

De plus, si $\sum u_n = U$ et si $\sum v_n = V$ alors, $\sum (u_n + v_n) = U + V$

Démonstration

La démonstration n'est pas difficile. Il suffit d'utiliser les résultat sur les suites.

Soit $S_n^1 = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et $S_n^2 = \sum_{k=0}^{n} v_k$; alors $\lim_{n\to+\infty} S_n^1 = U$ et $\lim_{n\to+\infty} S_n^2 = V$.

Posons $S_n^3 = \sum_{k=0}^{n} (u_k + v_k)$; alors $S_n^3 = S_n^2 + S_n^1$ et donc :

$$\lim_{n\to+\infty} S_n^3 = \lim_{n\to+\infty} \left(S_n^2 + S_n^1\right) = \lim_{n\to+\infty} S_n^2 + \lim_{n\to+\infty} S_n^1 = U + V$$

Donc $\sum (u_n + v_n)$ est aussi convergente et $\sum (u_n + v_n) = U + V$

6.1.6 Proposition

Soit $\sum u_n$ une série numérique convergente.

Alors, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ la série $\sum \alpha u_n$ converge , et si $\sum u_n = U$, alors, $\sum \alpha u_n = \alpha U$

Démonstration

La démonstration est simple et laissée au lecteur.

Exercice 3 :

1. Montrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leur somme.

(a) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{3}{8^n}$ (b) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n \frac{7^n}{11^n}$ (c) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{2^n-1}{3^n}$ (d) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{5^n+(-3)^n}{11^n}$

2. Montrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leur somme. *(Ce sont les mêmes séries que ci-dessus, mais, nous avons changé le point de départ - ou le premier terme-)*

(a) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{3}{8^n}$ (b) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 5} (-1)^n \frac{7^n}{11^n}$ (c) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 100} \frac{2^n-1}{3^n}$ (d) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{5^n+(-3)^n}{11^n}$

Exercice 4 :

Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 3} \frac{2n-1}{n\,(n^2-4)}$ est convergente et calculer sa somme

Remarque 3 :

On n'a pas du tout les mêmes résultats avec le produit. L'étude du problème du produit de 2 séries numériques dépasse le cadre de ce cours. En fait, nous sommes obligés d'introduire ce qu'on peut appeler : le produit convolé de 2 séries :

6.1.7 Définition de la convolution de 2 séries

Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont 2 séries , on appelle « produit convolé » ou produit de Cauchy de 2 séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$, la série de terme général

$$\boxed{(u*v)_n = \sum_{p=0}^{n} u_p v_{n-p} = \sum_{p=0}^{n} u_{n-p} v_p = \sum_{p+q=n} u_p v_q}$$

6.1.8 Séries complexes

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de de nombres complexes. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, notons a_n et b_n la partie réelle et la partie imaginaire de u_n.

La série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge si et seulement si les deux séries $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ et $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$ convergent.

Si c'est le cas, nous avons $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n + i\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$

Démonstration

Rappelons qu'une suite de nombres complexes converge si et seulement si la suite des parties réelles et la suite des parties imaginaires convergent. c'est à dire que :

$$\left(\lim_{n\to+\infty} A_n = A \text{ et } \lim_{n\to+\infty} B_n = B\right) \Longleftrightarrow \left(\lim_{n\to+\infty} (A_n+iB_n) = A+iB\right)$$

Posons alors $\displaystyle A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, $\displaystyle B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$ et $\displaystyle S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$

Nous avons :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} (a_k+ib_k) = \sum_{k=0}^{n} a_k + i\sum_{k=0}^{n} b_k = A_n + iB_n$$

Et donc $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent et $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n + i\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$

Exemple 3 :

Considérons par exemple la série géométrique $\sum_{n\in\mathbb{N}} r^n$ où r est un nombre complexe de module ρ tel que $0 < \rho < 1$ et d'argument θ. Pour tout $n_i n\mathbb{N}$, nous avons, $r^n = \rho^n e^{in\theta}$. Les parties réelles et imaginaires de r^n sont :

$$a_n = \rho^n \cos n\theta \text{ et } b_n = \rho^n \sin n\theta$$

On déduit de la proposition précédente que, comme $\sum_{n\geqslant 0} r^n = \dfrac{1}{1-r}$:

$$\sum_{n\geqslant 0} a_n = \operatorname{Re}\left(\frac{1}{1-r}\right) \text{ et } \sum_{n\geqslant 0} b_n = \operatorname{Im}\left(\frac{1}{1-r}\right)$$

Tous calculs faits :

$$\sum_{n\geqslant 0} \rho^2 \cos n\theta = \frac{1-\rho\cos\theta}{1-\rho\cos\theta+\rho^2} \text{ et } \sum_{n\geqslant 0} \rho^2 \sin n\theta = \frac{1-\rho\sin\theta}{1-\rho\cos\theta+\rho^2}$$

6.2 Critères de convergences

Dans les lignes qui suivent, on va mettre en place plusieurs critères de convergence qu'il faudra utiliser dans la pratique ; ces critères sont, en fait les mêmes que ceux utilisés pour les suites. Les énoncés ne seront qu'une adaptation aux séries.

6.2.1 Théorème

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ 2 séries numériques de terme général positif
On suppose qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $(\forall n \in \mathbb{N})\,((n \geqslant n_0) \Longrightarrow (u_n \leqslant v_n))$. Alors :

1. Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ aussi
2. Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ aussi

Démonstration

Ce n'est qu'une application des théorèmes sur les suites.

Soient $S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k$ et $T_n = \sum_{k=n_0}^{n} v_k$

Les nombres u_n et v_n étant positifs, les suites $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont toutes deux croissantes et $S_n \leqslant T_n$

1. Ssupposons $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ converge

   Comme $\lim_{n\to+\infty} T_n = T$, nous avons, pour tout $n \in \mathbb{N}$ $T_n \leqslant T$ et, en particulier $S_n \leqslant T$. La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant croissante et majorée est convergente et donc la série $\sum u_n$ converge.
2. Supposons que $\sum u_n$ diverge

   Si la série $\sum u_n$ diverge, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée, et donc $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$, et comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n \leqslant T_n$, nous avons $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$ et la série $\sum v_n$ diverge

Remarque 4 :

De la nécessité de connaître des **séries de références** dont on connait la convergence ou la divergence.

Exemple 4 :

1. Comme premier exemple de série de référence : les séries géométriques : $\sum_{n\geqslant 0} x^n$ où $x \in \mathbb{R}$
2. Considérons un développement décimal. Soit $(a_n)_{n\geqslant 1}$ une suite d'entiers tous compris entre 0 et 9.

   Alors la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n}$ est une série convergente.

   En effet, son terme général $\frac{a_n}{10^n}$ est majoré par $\frac{9}{10^n}$

   La série géométrique $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{10^n}$ est une série géométrique convergente car $0 < \frac{1}{10} < 1$

   La série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{9}{10^n} = 9\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{10^n}$ converge aussi par linéarité, et donc $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n}$ converge.
3. Pour $0 < \alpha < 1$, et $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons : $\frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{n^\alpha}$; comme la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ diverge, il en est de même de $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$; on retrouve la divergence de $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ (*on a choisi* $\alpha = \frac{1}{2}$)
4. Nous avons démontré que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)}$ converge. Nous allons montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ converge.

   Nous avons $\lim_{n\to+\infty} \frac{n(n+1)}{n^2} = 1$. Il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant n_0$, $\frac{n(n+1)}{n^2} \leqslant \frac{3}{2}$. Par calcul, nous trouvons $n_0 = 3$.

   Ainsi, si $n \geqslant 3$, nous avons $\frac{n(n+1)}{n^2} \leqslant \frac{3}{2} \iff \frac{1}{n^2} \leqslant \frac{3}{2} \times \frac{1}{n(n+1)}$.

   Comme la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)}$ converge, il en est de même de $\frac{3}{2}\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)}$ et donc la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ converge
5. Pour $\alpha < 1$ et $\beta \in \mathbb{R}$, la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ diverge

   En effet, $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^\alpha (\ln n)^\beta}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(\ln n)^\beta}{n^{1-\alpha}} = 0$

   Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que, si $n \geqslant N$, alors, $\frac{(\ln n)^\beta}{n^{1-\alpha}} \leqslant 1$.

   Or, $\frac{(\ln n)^\beta}{n^{1-\alpha}} \leqslant 1 \iff \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$

   Comme la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ diverge, il en est de même de la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$

Exercice 5 :

1. Soient $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ deux séries à termes strictement positifs convergentes. Montrer que les séries suivantes sont aussi convergentes :

   (a) $\sum_{n\geqslant 0} \max(u_n, v_n)$ (b) $\sum_{n\geqslant 0} \sqrt{u_n v_n}$ (c) $\sum_{n\geqslant 0} \frac{u_n v_n}{u_n + v_n}$ (d) $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sqrt{u_n}}{n}$

2. Soient $\alpha \in \left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ une série à termes strictement positifs convergente. Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{\sqrt{u_n}}{n^\alpha}$ est convergente

Exercice 6 :

On considère la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$, à termes positifs et convergente. Montrer que si $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n$ existe, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n = 0$

6.2.2 Définition

On dit que la série $\sum u_n$ est absolument convergente si la série $\sum |u_n|$ converge.

6.2.3 Théorème

Une série absolument convergente est convergente

Démonstration

On considère la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ et nous démontrons qu'elle est de Cauchy.
Soit donc $\varepsilon > 0$ Soient $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}$ tels que $p > q$; alors, d'après l'inégalité triangulaire

$$|S_p - S_q| = \left|\sum_{k=q+1}^{p} u_k\right| \leqslant \sum_{k=q+1}^{p} |u_k| \tag{6.1}$$

Comme la série $\sum |u_n|$ converge, la suite des sommes partielles $S'_n = \sum\limits_{k=0}^{n} |u_k|$ est de Cauchy,
Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tels que, pour tout $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}$ tels que si $p > q \geqslant N$, alors $\left|S'_p - S'_q\right| \leqslant \varepsilon$.
Or, $S'_p - S'_q = \sum\limits_{k=q+1}^{p} |u_k| = \left|S'_p - S'_q\right|$

D'après l'inégalité 6.1, si $p > q \geqslant N$, alors $|S_p - S_q| = \left|\sum\limits_{k=q+1}^{p} u_k\right| \leqslant \sum\limits_{k=q+1}^{p} |u_k| \leqslant \varepsilon$

La suite $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ est donc de Cauchy et la série $\sum u_n$ converge.

Remarque 5 :

1. On dit aussi d'une série convergente qu'elle est simplement convergente.
2. Il y a des séries simplement convergentes, qui ne le sont pas absolument *(la réciproque est donc fausse)* : il existe donc des séries qui convergent simplement, et qui ne convergent pas absolument.
   Exemple : $\frac{(-1)^n}{n}$, série qui sera étudiée plus tard est une série convergente alors qu'elle ne l'est pas absolument.
   On appelle série semi-convergente, les séries qui sont convergentes, sans être absolument convergentes.

6.2.4 Corollaire

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ 2 séries numériques, la $\sum v_n$ étant à termes positifs.
On suppose que, à partir d'un certain rang $n_0 \in \mathbb{N}$, pour tout $n \geqslant n_0$, nous avons $|u_n| \leqslant v_n$
Alors, si la série $\sum v_n$ converge, la série $\sum u_n$ converge aussi

Démonstration

La démonstration n'est pas difficile : c'est la combinaison des résultats 6.2.1 et 6.2.3 précédents.
La série $\sum |u_n|$ est une série à termes positifs tels que $|u_n| \leqslant v_n$ Comme la série $\sum v_n$ converge, d'après 6.2.1, la série $\sum |u_n|$ converge.
Ce qui veut dire que la série $\sum u_n$ est absolument convergente, et donc d'après 6.2.3 elle est convergente.
Ce que nous voulions

Exemple 5 :

1. **Quelle est la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{e^{in\theta}}{n^2}$?**

   C'est assez simple : nous avons $\left|\dfrac{e^{in\theta}}{n^2}\right| = \dfrac{1}{n^2}$. Comme la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ est convergente, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{e^{in\theta}}{n^2}$ est absolument convergente, donc convergente.

2. **Quelle est la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{e^{in\theta}}{2^n}$**

   Tout aussi simple. En utilisant la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{e^{in\theta}}{2^n} = \sum_{n\geqslant 0} \left(\frac{e^{i\theta}}{2}\right)^n$, nous avons $\left|\dfrac{e^{in\theta}}{2^n}\right| = \dfrac{1}{2^n}$. Comme la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{2^n}$ est une série géométrique convergente, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{e^{in\theta}}{2^n}$ est une série absolument convergente, donc convergente.
   En fait $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{e^{in\theta}}{2^n} = \sum_{n\geqslant 0} \left(\frac{e^{i\theta}}{2}\right)^n$ est une série géométrique, et nous avons $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \left(\frac{e^{i\theta}}{2}\right)^n = \frac{1}{1-e^{i\theta}}$
   On démontre, par calculs que $\dfrac{1}{1-e^{i\theta}} = \dfrac{1}{2}\left(1 + i\dfrac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\right)$

3. **Si $\sum u_n$ est une série absolument convergente, alors, $\sum u_n^2$ est aussi une série convergente**
   En effet, si $\sum u_n$ est absolument convergente, alors, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} |u_n| = 0$; il existe donc un entier N_1, tel que si $n > N_1$, alors $|u_n| < 1$; donc, d'après les propriétés des carrés, si $n \geqslant N_1$, alors $(u_n)^2 \leqslant |u_n|$; comme $\sum |u_n|$ converge, il en est de même pour $\sum u_n^2$

Exercice 7 :

1. Déterminer la nature des séries suivantes :

   (a) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \cos n$

   (b) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} e^{\frac{1}{n}}$

   (c) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^{n^2}}{2^n}$

   (d) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{\sin n}{2^n}$

   (e) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} e^{-n}$

   (f) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} e^{-n^2}$

   (g) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \sin\frac{1}{2^n}$

   (h) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} n!$

2. Si la série $\sum u_n$ est absolument convergente, que dire de $\sum\limits_{n\geqslant 0} (u_n)^\alpha$ où $\alpha > 1$?

6.2.5 Théorème

Soient $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ 2 séries complexes absolument convergentes.
Nous posons $S_U = \sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ et $S_V = \sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$
Alors, la série convolée *(cf 6.1.7)* $\sum\limits_{n\geqslant 0} (u \star v)_n$ est convergente et $\sum\limits_{n\geqslant 0} (u \star v)_n = S_U \times S_V$

Démonstration

1. On démontre que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} (u \star v)_n$ est absolument convergente

   Rappelons que $(u * v)_n = \sum\limits_{p=0}^{n} u_p v_{n-p}$ et que, donc $|(u * v)_n| \leqslant \sum\limits_{p=0}^{n} |u_p|\,|v_{n-p}|$
   Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et considérons le carré de côté N ; les éléments u_p et v_{n-p} sont situés sur une droite du type $p + q = n \Longleftrightarrow q = -p + n$ où p varie de 0 à n. Visualisons ceci dans la figure 6.2

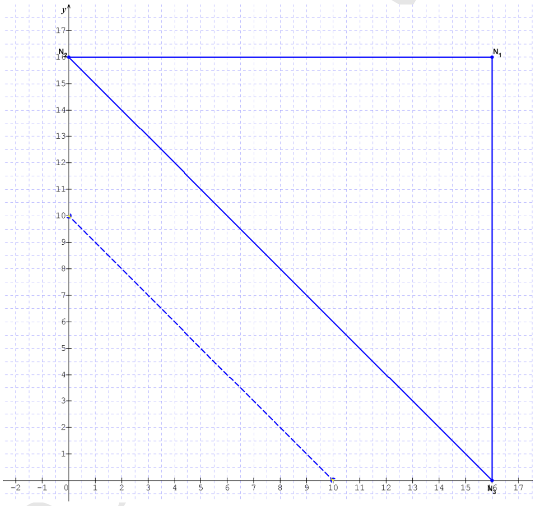

FIGURE 6.2 – Visualisation de l'ensemble de sommation. p est en abscisses et q en ordonnées ; la droite en pointillés est une droite du type $q = -p + n$

La sommation $\sum\limits_{p=0}^{n} |u_p|\,|v_{n-p}| = \sum\limits_{p+q=n} |u_p|\,|v_q|$ se fait sur la droite $q = -p + n$.

Nous avons : $\sum\limits_{n=0}^{N} |(u * v)_n| \leqslant \sum\limits_{n=0}^{N}\sum\limits_{p=0}^{n} |u_p|\,|v_{n-p}|$, cette sommation se faisant sur le triangle inférieur gauche du carré de côté N.

Elle est inférieure à la sommation sur le carré en entier, à savoir $\sum\limits_{p=0}^{N}\left(\sum\limits_{q=0}^{N} |u_p|\,|v_{n-p}|\right)$.

Nous avons donc :

$$\sum_{n=0}^{N} |(u * v)_n| \leqslant \sum_{n=0}^{N}\sum_{p=0}^{n} |u_p|\,|v_{n-p}| \leqslant \sum_{p=0}^{N}\left(\sum_{q=0}^{N} |u_p|\,|v_q|\right)$$

Or, $\displaystyle\sum_{p=0}^{N}\left(\sum_{q=0}^{N}|u_p|\,|v_q|\right)=\left(\sum_{p=0}^{N}|u_p|\right)\left(\sum_{q=0}^{N}|v_q|\right)$

Les séries $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}u_n$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}v_n$ étant absolument convergentes nous avons $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\sum_{p=0}^{N}|u_p|$ qui admet une limite L_u et $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\sum_{p=0}^{N}|v_p|$ qui admet une limite L_v telles que $\displaystyle\sum_{p=0}^{N}|u_p|\leqslant L_u$ et $\displaystyle\sum_{p=0}^{N}|v_p|\leqslant L_v$.

Nous avons donc $\displaystyle\sum_{n=0}^{N}\left|(u*v)_n\right|\leqslant L_uL_v$. La suite $\displaystyle\left(\sum_{n=0}^{N}\left|(u*v)_n\right|\right)_{N\in\mathbb{N}}$ étant positive, croissante et majorée, elle est donc convergente.

La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}(u\star v)_n$ est donc absolument convergente.

Comme elle est absolument convergente, elle est aussi simplement convergente. Appelons alors $S_{U\star V}=\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}(u\star v)_n$

2. Il nous faut donc, maintenant, montrer que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}(u*v)_n=S_US_V$

Soit $N\in\mathbb{N}^*$

Appelons $S_{U,N}=\displaystyle\sum_{n=0}^{N}u_n$ et $S_{V,N}=\displaystyle\sum_{n=0}^{N}v_n$

- ▷ En posant $S_N=\displaystyle\sum_{n=0}^{N}(u*v)_n-S_{U,N}\times S_{V,N}$, nous avons $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}S_N=S_{U\star V}-S_U\times S_V$. Il faut donc montrer que $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}S_N=0$
- ▷ D'après l'étude précédente, et à l'aide de la figure 6.2, nous avons $S_N=\displaystyle\sum_{n=0}^{N}\left(\sum_{q=0}^{n}u_{N-q}v_q\right)$, et donc $|S_N|\leqslant\displaystyle\sum_{n=0}^{N}\left(\sum_{q=0}^{n}|u_{N-q}|\,|v_q|\right)$. Refaisons le schéma 6.2 en y ajoutant un carré plus grand :

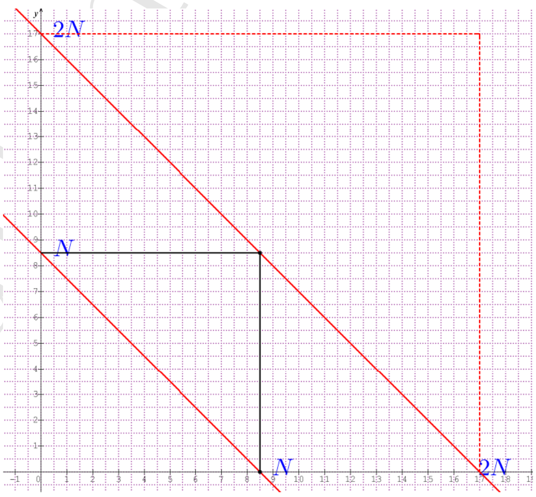

FIGURE 6.3 – Figure faite pour se rendre compte des différentes inclusions

Nous avons alors :

$$\sum_{n=0}^{N}\left(\sum_{q=0}^{n}|u_{N-q}|\,|v_q|\right)\leqslant\sum_{n=N}^{2N}\left(\sum_{q=0}^{n}|u_{n-q}|\,|v_q|\right)$$

- ▷ Considérons les séries $\sum_{n\geqslant 0}|u_n|$ et $\sum_{n\geqslant 0}|v_n|$; elles sont toutes deux absolument convergentes.
Donc la série convolée de terme général $\sum_{q=0}^{n}|u_{n-q}|\,|v_q|$ est, elle aussi, convergente.
En posant $T_N = \sum_{n=0}^{N}\left(\sum_{q=0}^{n}|u_{n-q}|\,|v_q|\right)$, nous avons $\sum_{n=N}^{2N}\left(\sum_{q=0}^{n}|u_{n-q}|\,|v_q|\right) = T_{2N} - T_{N-1}$
Nous avons alors $|S_N| \leqslant T_{2N} - T_{N-1}$
- ▷ Comme la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, elle est de Cauchy, et donc $\lim_{N\to+\infty} T_{2N} - T_{N-1} = 0$ et donc $\lim_{N\to+\infty} S_N = 0$.
Ce que nous voulions.
Donc, $\sum_{n\geqslant 0}(u*v)_n = S_U S_V$

Quod erat demonstratum

Remarque 6 :

Cette démonstration montre l'importance de savoir ce que nous sommons, et comment nous le sommons *(pour cela, allez voir les annexes)*.

6.2.6 Proposition

Soient r et r' deux réels tels que $0 < r < r' < 1$. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe telle que la suite $\left(\frac{r}{r'}\right)^n |a_n|$ soit bornée pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors la série $\sum_{n\geqslant 0} r^n a_n$ converge

Démonstration

Que la suite $\left(\frac{r}{r'}\right)^n |a_n|$ soit bornée pour tout $n \in \mathbb{N}$ signifie qu'il existe $M > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant \left(\frac{r}{r'}\right)^n |a_n| \leqslant M$
En multipliant par r'^n, nous avons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $r^n |a_n| \leqslant r'^n M$
La série $\sum_{n\geqslant 0} r'^n M$ est une série géométrique convergente et nous déduisons que la série $\sum_{n\geqslant 0} r^n |a_n|$ converge elle aussi. Ainsi, la série $\sum_{n\geqslant 0} r^n a_n$ converge absolument, donc simplement.

6.2.7 Application

Pour $r \in \mathbb{R}$ tel que $0 < r < 1$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ quelconque, la série $\sum_{n\geqslant 1} n^\alpha r^n$ converge

Démonstration

Soit $r' \in \mathbb{R}$ tel que $0 < r < r' < 1$. Alors, l'expression $\left|\left(\frac{r}{r'}\right)^n n^\alpha\right|$ est bornée.
Pour cela, posons $x = \frac{r}{r'}$ et étudions $\lim_{n\to+\infty} x^n n^\alpha$.
Si $y_n = x^n n^\alpha$, alors $\ln y_n = n\ln x + \alpha \ln n = n\left(\ln x + \alpha\frac{\ln n}{n}\right)$.
Comme $\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln n}{n} = 0$, $\lim_{n\to+\infty} \ln x + \alpha\frac{\ln n}{n} = \ln x$ et $\lim_{n\to+\infty} \ln y_n = -\infty$ parce que comme $0 < x < 1$, $\ln x < 0$; nous en déduisons que $\lim_{n\to+\infty} y_n = 0$

De ce dernier résultat, nous tirons que l'expression $\left|\left(\dfrac{r}{r'}\right)^n n^\alpha\right|$ est bornée et que donc, d'après 6.2.6 la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} n^\alpha r^n$ converge

6.3 Règle de D'Alembert et de Cauchy

6.3.1 Théorème : règle de d'Alembert

Soit $\sum u_n$ une série numérique à termes non nuls à partir d'un certain rang telle que :

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = l$$

Alors :

1. Si $l < 1$, alors, la série $\sum u_n$ converge
2. Si $l > 1$, alors, la série $\sum u_n$ diverge
3. On ne peut rien dire lorsque $l = 1$

Démonstration

Le principe de la démonstration est de comparer la série étudiée à une série géométrique

1. Si $l < 1$, soit $k \in]l, 1[$, c'est à dire $l < k < 1$
   Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = l$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant N_1 \Rightarrow \left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| < k$
   On a donc, pour $n \geqslant N_1$,
   $$\begin{aligned}\left|\frac{u_{N_1+2}}{u_{N_1+1}}\right| &< k\\ \left|\frac{u_{N_1+3}}{u_{N_1+2}}\right| &< k\\ \vdots \quad & \quad \vdots\\ \left|\frac{u_{n-1}}{u_{n-2}}\right| &< k\\ \left|\frac{u_n}{u_{n-1}}\right| &< k\end{aligned}$$
   Soit, en multipliant termes à termes,
   $$\left|\frac{u_{N_1+2}}{u_{N_1+1}}\right| \times \left|\frac{u_{N_1+3}}{u_{N_1+2}}\right| \times \cdots \times \left|\frac{u_{n-1}}{u_{n-2}}\right| \times \left|\frac{u_n}{u_{n-1}}\right| < k^{n-N_1+1}$$
   puis, en simplifiant termes à termes :
   $$\left(\left|\frac{u_n}{u_{N_1+1}}\right| < k^{n-N_1+1}\right) \iff |u_n| < \left(\left|\frac{u_{N_1+1}}{k^{N_1-1}}\right|\right) \times k^n$$
   comme la série de terme général $\left(\left|\frac{u_{N_1+1}}{k^{N_1-1}}\right|\right) \times k^n$ est une série géométrique convergente *(puisque $k < 1$)*, on en déduit, d'après 6.2.1 que la série de terme général u_n est absolument convergente, donc convergente.
2. Si $l > 1$, de la même manière, on prend k tel que $1 < k < l$, et on peut minorer le terme $|u_n|$ par une expression de la forme Ak^n *(c'est à dire* $|u_n| > Ak^n$) à partir d'un certain rang. Comme la série de terme général Ak^n est divergente *(puisque $k > 1$)*, la série $\sum u_n$ diverge, toujours d'après 6.2.1

Remarque 7 :

Cette règle, ***à retenir***, n'est à utiliser que si le rapport $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ s'exprime simplement.

Exemple 6 :

1. **Si on considère une série déjà bien connue : la série géométrique $\sum x^n$; pour quelles valeurs de x converge-t-elle ?**

   Il suffit de faire le rapport $\left|\dfrac{x^{n+1}}{x^n}\right| = |x|$; et, bien entendu, on retrouve que si $|x| < 1$, la série $\sum x^n$ converge.

2. **Soit la série $\sum \dfrac{x^n}{n!}$; pour quelles valeurs de x converge-t-elle ?**

   On fait donc le rapport
   $$\left|\frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}}\right| = \frac{|x|}{n+1}$$
   Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|x|}{n+1} = 0$, et ce pour tout $x \in \mathbb{R}$; donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série $\sum \dfrac{x^n}{n!}$ est **toujours convergente.** [1]

3. **La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{n\,!}{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n-1)}$ converge.**

   Il suffit donc d'utiliser le critère de D'Alembert :
   $$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{(n+1)!}{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n+1)} \times \frac{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n-1)}{n!} = \frac{n+1}{2n+1}$$
   Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n+1}{2n+1} = \dfrac{1}{2}$

   Donc, d'après le critère de D'Alembert, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{n\,!}{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n-1)}$ converge

4. **La série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{(2n)\,!}{(n\,!)^2}$ diverge.**

   Nous utilisons toujours le critère de D'Alembert :
   $$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{(2n+2)!}{((n+1)\,!)^2} \times \frac{(n\,!)^2}{(2n)\,!} = \frac{(2n+1)\,(2n+2)}{(n+1)^2}$$
   Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(2n+1)\,(2n+2)}{(n+1)^2} = 4$

   Donc, d'après le critère de D'Alembert, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{(2n)\,!}{(n\,!)^2}$ diverge.

5. **Nous considérons la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ où le terme général u_n est défini par :**
   $$u_n = \begin{cases} \dfrac{1}{3^k} & \textbf{si } n = 2k \\ \dfrac{1}{3^{k+1}} & \textbf{si } n = 2k+1 \end{cases}$$
   En utilisant la règle de D'Alembert, nous avons :

1. On rappelle que $\sum \dfrac{x^n}{n!} = e^x$

$\star$ $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{2}{3}$ si n est pair $\star$ $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{1}{2}$ si n est impair

Dans tous les cas, le rapport $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ est strictement inférieur à 1 et la série converge

Exercice 8 :

Donner la somme de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ où le terme général u_n est défini par :

$$u_n = \begin{cases} \dfrac{1}{3^k} & \text{si } n = 2k \\ \dfrac{1}{3^{k+1}} & \text{si } n = 2k+1 \end{cases}$$

6.3.2 Théorème : règle de Cauchy

Soit $\sum u_n$, une série numérique telle que

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = l$$

Alors :

1. Si $l < 1$, alors, la série $\sum u_n$ converge
2. Si $l > 1$, alors la série $\sum u_n$ diverge
3. On ne sait rien lorsque $l = 1$

Démonstration

La démonstration est tout à fait semblable à celle du théorème de d'Alembert.

1. Si $l < 1$, soit $k \in]l; 1[$, c'est à dire k tel que $l < k < 1$
   Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = l$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant N_1 \Longrightarrow \sqrt[n]{|u_n|} < k$
   On a donc, pour $n \geqslant N_1$, $|u_n| < k^n$
   Comme la série de terme général k^n est une série géométrique convergente, on en déduit que la série de terme général u_n est absolument convergente, donc convergente.
2. De même, si $l > 1$, il existe k tel que $1 < k < l$, et, à partir d'un certain rang N_1, nous avons $1 < k^n < u_n$. La série $\sum\limits_{n\geqslant 0} k^n$ étant divergente, il en est de même de $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$

Exemple 7 :

Exemples d'utilisation :

1. **Quelle est la nature de de la série** $\sum \left(\dfrac{2n+3}{n+1}\right)^n x^n$

   On calcule $\sqrt[n]{\left(\dfrac{2n+3}{n+1}\right)^n |x|^n} = \left(\dfrac{2n+3}{n+1}\right)|x|$ qui tend vers $2\,|x|$ lorsque n tend vers $+\infty$

   Donc, $2\,|x| < 1$ si et seulement si $|x| < \dfrac{1}{2}$. Donc la série $\sum \left(\dfrac{2n+3}{n+1}\right)^n x^n$ converge si et seulement si $|x| < \dfrac{1}{2}$
2. **Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ et de $q \in \mathbb{C}$, la série de terme général $u_n = n^\alpha q^n$ converge-t-elle ?**

Faisons le calcul $\sqrt[n]{n^\alpha |q|^n}$.
Nous avons :

$$\sqrt[n]{n^\alpha |q|^n} = |q|\, n^{\frac{\alpha}{n}} = |q|\, e^{\frac{\alpha \ln n}{n}}$$

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, nous avons $\lim\limits_{n \to +\infty} e^{\frac{\alpha \ln n}{n}} = 1$, et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{n^\alpha |q|^n} = |q|$

Donc, la série $\sum n^\alpha q^n$ ne converge, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, que si $|q| < 1$

Remarque 8 :

Quel lien y-a-t-il entre les différents critères de D'Alembert et de Cauchy ? Etudions par exemple la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} u_n$ où

$$u_n = \begin{cases} \left(\dfrac{2}{3}\right)^k & \text{si } n = 2k \\ \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{3}\right)^k & \text{si } n = 2k+1 \end{cases}$$

1. Utilisons la règle de D'Alembert. Nous avons alors :

   ⋆ $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{1}{3}$ si n est pair

   ⋆ $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 2$ si n est impair

   Nous voyons qu'ici la règle de D'Alembert ne s'applique pas
2. Allons du côté de la règle de Cauchy

   ⋆ Si n est pair, c'est à dire $n = 2k$, nous avons $\sqrt[n]{|u_n|} = \sqrt[2k]{\left(\dfrac{2}{3}\right)^k} = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$

   ⋆ Si n est impair, c'est à dire $n = 2k+1$, nous avons

   $$\sqrt[n]{|u_n|} = \sqrt[2k+1]{\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^k} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2k+1}} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{k}{2k+1}}$$

   Nous avons $\lim\limits_{k \to +\infty} \left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2k+1}} = 1$ et $\lim\limits_{k \to +\infty} \left(\dfrac{2}{3}\right)^{\frac{k}{2k+1}} = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$

   ⋆ Donc, nous avons $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$

   Et donc, d'après la règle de Cauchy, la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} u_n$ converge

D'où l'étude de la proposition suivante

6.3.3 Proposition

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite numérique telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} \left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = l$, alors, $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = l$

Démonstration

Soit $\varepsilon > 0$

→ Supposons $\lim\limits_{n \to +\infty} \left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = l$

Il existe alors $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N_0$, $\left|\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| - l\right| < \varepsilon \iff l - \varepsilon < \left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| < l + \varepsilon$

Alors, pour tout $n \geqslant n_0$, nous avons :

$$\begin{array}{ccc} l-\varepsilon < & \left|\dfrac{u_{n_0+1}}{u_{n_0}}\right| & < l+\varepsilon \\ l-\varepsilon < & \left|\dfrac{u_{n_0+2}}{u_{n_0+1}}\right| & < l+\varepsilon \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ l-\varepsilon < & \left|\dfrac{u_{n-1}}{u_{n-2}}\right| & < l+\varepsilon \\ l-\varepsilon < & \left|\dfrac{u_{n}}{u_{n-1}}\right| & < l+\varepsilon \end{array}$$

Multiplions termes à termes et simplifions ; nous avons alors :

$$(l-\varepsilon)^{n_0-n} < \left|\frac{u_n}{u_{n_0}}\right| < (l+\varepsilon)^{n_0-n} \iff |u_{n_0}|\,(l-\varepsilon)^{n_0-n} < |u_n| < |u_{n_0}|\,(l-\varepsilon)^{n_0-n}$$

De la croissance de la fonction $\sqrt[n]{x}$, nous tirons :

$$\sqrt[n]{|u_{n_0}|}\,\sqrt[n]{(l-\varepsilon)^{n_0-n}} < \sqrt[n]{|u_n|} < \sqrt[n]{|u_{n_0}|}\,\sqrt[n]{(l+\varepsilon)^{n_0-n}}$$

→ Par des calculs simples, nous montrons que :

- ⋆ $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|u_{n_0}|}\,\sqrt[n]{(l-\varepsilon)^{n_0-n}} = l-\varepsilon$ ⋆ $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|u_{n_0}|}\,\sqrt[n]{(l+\varepsilon)^{n_0-n}} = l+\varepsilon$
- ⋆ Il existe donc $n_1 \in \mathbb{N}$, avec $n_1 \geqslant n_0$ tel que si $n \geqslant n_1$, alors

$$(l-\varepsilon)-\varepsilon < \sqrt[n]{|u_{n_0}|}\,\sqrt[n]{(l-\varepsilon)^{n_0-n}} < (l-\varepsilon)+\varepsilon$$

- ⋆ De même, il existe donc $n_2 \in \mathbb{N}$, avec $n_2 \geqslant n_0$ tel que si $n \geqslant n_2$, alors

$$(l+\varepsilon)-\varepsilon < \sqrt[n]{|u_{n_0}|}\,\sqrt[n]{(l-\varepsilon)^{n_0-n}} < (l+\varepsilon)+\varepsilon$$

- ⋆ En posant $N = \max\{n_1; n_2\}$, pour $n \geqslant N$, nous avons :

$$l-2\varepsilon < \sqrt[n]{|u_n|} < l+2\varepsilon$$

→ Ainsi, pour $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que si $n \geqslant N$, nous ayons $\left|\sqrt[n]{|u_n|}-l\right| < 2\varepsilon$, ce qui signifie que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = l$

Nous venons de montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = l$, alors, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = l$

Remarque 9 :

1. Ceci veut donc dire que, si le critère de d'Alembert pose quelques problèmes, on peut se retourner vers la règle de Cauchy.
2. Le résultat démontré ci-dessus est plus large que le seul cadre des séries

Exercice 9 :

D'Alembert ? Cauchy ?
Utiliser les règles de D'Alembert ou de Cauchy pour décider si ces séries sont convergentes ou divergentes :

1. $\sum \left(\dfrac{n+3}{2n+1}\right)^n$
2. $\sum \dfrac{n\,!}{n^n}$
3. $\sum \left(\dfrac{n+3}{2n+1}\right)^{(-1)^n n}$
4. $\sum \left(\dfrac{n}{2n+1}\right)^{n^2}$
5. $\sum \dfrac{2^n}{n^2 \sin^{2n} \alpha}$
6. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n^p}{a^n}$
7. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{2^n n!}{n^n}$
8. $\sum\limits_{n\geqslant 1} \left(\prod\limits_{k=2}^{n} \dfrac{\ln k}{k}\right)$

6.4 Equivalences et comparaison à une intégrale

6.4.1 Théorème sur les séries à termes généraux équivalents

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ 2 séries numériques telles que les termes u_n et v_n soient de signe constant, et, de plus $u_n \underset{+\infty}{\approx} v_n$ alors, ces 2 séries sont de même nature

Démonstration

1. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ et $v_n > 0$
   Nous avons : $u_n \underset{+\infty}{\approx} v_n \iff \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$
   Il existe donc $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, tel que $n \geqslant N_\varepsilon \Rightarrow \left|\dfrac{u_n}{v_n} - 1\right| \leqslant \dfrac{1}{2}$
   C'est à dire, en tenant compte de la signification de la valeur absolue :
   $$\frac{1}{2} \leqslant \frac{u_n}{v_n} \leqslant \frac{3}{2} \iff \frac{1}{2}v_n \leqslant u_n \leqslant \frac{3}{2}v_n$$
   dès que $n \geqslant N_\varepsilon$.
   Donc, si $n \geqslant N_\varepsilon$, alors $v_n \leqslant 2u_n$ et $2u_n \leqslant 3v_n$, ce qui montre que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.
2. Qu'est ce qui change, si $u_n < 0$ et $v_n < 0$?
   Nous appliquons le résultat précédent aux séries de terme général $-u_n$ et $-v_n$.
   Si $u_n \underset{+\infty}{\approx} v_n$, c'est à dire $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$, nous avons aussi $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-u_n}{-v_n} = 1$, c'est à dire, d'après le résultat ci-dessus, que les séries $\sum -u_n$ et $\sum -v_n$ sont de même nature, et donc que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature

6.4.2 Théorème

On a des résultats remarquables sur les restes et les sommes partielles :

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ 2 séries numériques telles que les termes u_n et v_n soient de signe constant, et, de plus $u_n \underset{+\infty}{\approx} v_n$.

Nous appelons $S_n^u = \sum_{k=0}^{n} u_k$ la somme partielle d'ordre n de la série $\sum u_n$ et $S_n^v = \sum_{k=0}^{n} v_k$ la somme partielle d'ordre n de la série $\sum v_n$

De même, nous appelons $R_n^u = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ le reste d'ordre n de la série $\sum u_n$ et $R_n^v = \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$ le reste d'ordre n de la série $\sum v_n$

1. Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, alors $R_n^u \underset{+\infty}{\approx} R_n^v$,
   c'est à dire que les restes d'ordre n sont équivalents
2. Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent, alors $S_n^u \underset{+\infty}{\approx} S_n^v$,
   c'est à dire que les sommes d'ordre n sont équivalentes

Démonstration

Pour simplifier, sans toutefois perdre de généralité, nous supposerons $u_n > 0$ et $v_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ou, tout au moins, à partir d'un certain rang.

1. **Supposons que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent**

   Comme $\lim_{n\to+\infty} R_n^u = \lim_{n\to+\infty} R_n^v = 0$, nous allons étudier ici, la façon dont les restes tendent vers 0.

   De $u_n \underset{+\infty}{\approx} v_n$, nous avons $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$.

   Soit donc $\varepsilon > 0$. Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n > N$, alors

   $$\left|\frac{u_n}{v_n} - 1\right| < \varepsilon \iff v_n (1-\varepsilon) < u_n < v_n (1+\varepsilon)$$

   Donc, pour tout $k > n$, nous avons $v_k (1-\varepsilon) < u_k < v_k (1-\varepsilon)$, et en faisant les sommations de $n+1$ à $p \geqslant n+1$, nous obtenons :

   $$(1-\varepsilon) \sum_{k=n+1}^{p} v_k < \sum_{k=n+1}^{p} u_k < (1-\varepsilon) \sum_{k=n+1}^{p} v_k$$

   Et en passant aux limites :

   $$(1-\varepsilon) \lim_{p\to+\infty} \sum_{k=n+1}^{p} v_k < \lim_{p\to+\infty} \sum_{k=n+1}^{p} u_k < (1-\varepsilon) \lim_{p\to+\infty} \sum_{k=n+1}^{p} v_k \iff (1-\varepsilon) R_n^v < R_n^u < (1-\varepsilon) R_n^v$$

   La dernière inégalité donnant la définition de deux suites équivalentes en $+\infty$; donc $R_n^v \underset{+\infty}{\approx} R_n^u$

2. **Supposons que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent**

   Les suites $(S_n^u)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_n^v)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles sont des suites positives, croissantes telles que $\lim_{n\to+\infty} S_n^u = \lim_{n\to+\infty} S_n^v = +\infty$.

   Il faut donc montrer que $\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n^u}{S_n^v} = 1$ *(Ce qui n'est pas une mince affaire !!)*

   Soit $\varepsilon > 0$ tel que, plus précisément, $0 < \varepsilon < 1$

   Comme $u_n \underset{+\infty}{\approx} v_n$, il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que si $n > N_0$, alors $v_n (1-\varepsilon) < u_n < v_n (1+\varepsilon)$, et donc en additionnant, pour $n > N_0$, nous avons :

   $$(1-\varepsilon) \sum_{k=N_0+1}^{n} v_k < \sum_{k=N_0+1}^{n} u_k < (1+\varepsilon) \sum_{k=N_0+1}^{n} v_k$$

Or, $\displaystyle\sum_{k=N_0+1}^{n} u_k = S_n^u - S_{N_0}^u$, tout comme $\displaystyle\sum_{k=N_0+1}^{n} v_k = S_n^v - S_{N_0}^v$ de telle sorte que l'inégalité devient :

$$(1-\varepsilon)\left(S_n^v - S_{N_0}^v\right) < \left(S_n^u - S_{N_0}^u\right) < (1+\varepsilon)\left(S_n^v - S_{N_0}^v\right)$$

D'où :

$$(1-\varepsilon)\left(S_n^v - S_{N_0}^v\right) + S_{N_0}^u < S_n^u < (1+\varepsilon)\left(S_n^v - S_{N_0}^v\right) + S_{N_0}^u$$

Il faut, maintenant, s'aventurer à quelques tripatouillages :

→ Nous avons $(1-\varepsilon)\left(S_n^v - S_{N_0}^v\right) + S_{N_0}^u = (1-\varepsilon) S_n^v - (1-\varepsilon) S_{N_0}^v + S_{N_0}^u$
De la double inégalité $0 < \varepsilon < 1$, nous tirons $0 < 1-\varepsilon < 1$ et donc $0 < (1-\varepsilon) S_{N_0}^v < S_{N_0}^v$, ce qui est équivalent à $-S_{N_0}^v < -(1-\varepsilon) S_{N_0}^v$. Et donc, nous concluons que :

$$(1-\varepsilon)\left(S_n^v - S_{N_0}^v\right) + S_{N_0}^u > (1-\varepsilon) S_n^v - S_{N_0}^v + S_{N_0}^u$$

→ De la même manière, et plus simplement, nous avons

$$(1+\varepsilon)\left(S_n^v - S_{N_0}^v\right) + S_{N_0}^u < (1+\varepsilon) S_n^v - S_{N_0}^v + S_{N_0}^u$$

→ De telle sorte que nous avons l'inégalité :

$$(1-\varepsilon) S_n^v - S_{N_0}^v + S_{N_0}^u < S_n^u < (1+\varepsilon) S_n^v - S_{N_0}^v + S_{N_0}^u$$

En divisant par S_n^v, nous obtenons :

$$(1-\varepsilon) + \frac{S_{N_0}^u - S_{N_0}^v}{S_n^v} < \frac{S_n^u}{S_n^v} < (1+\varepsilon) S_n^v + \frac{S_{N_0}^u - S_{N_0}^v}{S_n^v}$$

Comme $S_{N_0}^u - S_{N_0}^v$ est un nombre fixé et que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n^v = +\infty$, nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{S_{N_0}^u - S_{N_0}^v}{S_n^v} = 0$.

Il existe donc $N_1 \in \mathbb{N}$, avec $N_1 \geqslant N_0$, tel que si $n > N_1$, alors $-\varepsilon < \dfrac{S_{N_0}^u - S_{N_0}^v}{S_n^v} < \varepsilon$ et donc, si $n > N_1$, nous avons :

$$1 - 2\varepsilon < \frac{S_n^u}{S_n^v} < 1 + 2\varepsilon$$

Ce qui prouve bien que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{S_n^u}{S_n^v} = 1$

Ce que nous voulions

Exercice 10 :

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs. On construit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en écrivant : $v_n = \dfrac{u_n}{1+u_n}$.
Démontrer que les séries $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ sont de même nature.

Remarque 10 :

Le problème est donc de **connaître des séries de « référence »**, dont on connait bien le comportement. On connait les séries géométriques, et le théorème suivant va parler des séries de Riemann

6.4.3 Théorème : les séries de Riemann

La série $\displaystyle\sum_{n>0} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$

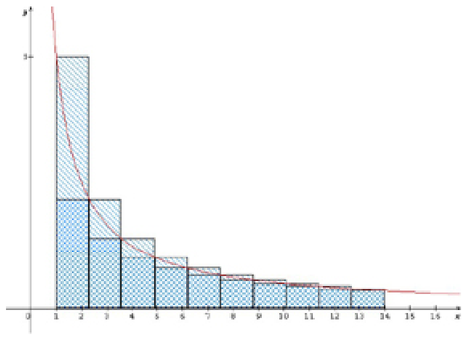

FIGURE 6.4 – Exemple d'encadrement par des rectangles

Démonstration

L'idée de la démonstration est classique : elle est d'utiliser une intégrale et de comparer la série à une intégrale.

Soit $f :]0;+\infty] \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \dfrac{1}{t^\alpha}$ où $\alpha > 0$

f est décroissante sur $]0;+\infty[$, et donc, pour $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons

$$\frac{1}{(n+1)^\alpha} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leqslant \frac{1}{n^\alpha}$$

D'où, en sommant, nous avons :

$$\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{(p+1)^\alpha} \leqslant \sum_{p=1}^{n} \int_p^{p+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leqslant \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^\alpha}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\sum_{p=2}^{n+1} \frac{1}{p^\alpha} \leqslant \sum_{p=1}^{n} \int_p^{p+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leqslant \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^\alpha}$$

Posons $S_n = \displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^\alpha}$; on a donc :

$$S_n - 1 + \frac{1}{(n+1)^\alpha} \leqslant \int_1^{n+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leqslant S_n$$

C'est à dire :

$$S_n - 1 + \frac{1}{(n+1)^\alpha} \leqslant \left[\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_1^{n+1} \leqslant S_n$$

ou encore, après calculs,

$$\boxed{S_n - 1 + \frac{1}{(n+1)^\alpha} \leqslant \frac{(n+1)^{-\alpha+1} - 1}{-\alpha+1} \leqslant S_n}$$

Donc,

- ⋆ Si $-\alpha + 1 > 0 \Longleftrightarrow 0 < \alpha < 1$, alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (n+1)^{-\alpha+1} = +\infty$, et donc, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$
  La série diverge.
- ⋆ Si, $-\alpha + 1 < 0 \Longleftrightarrow \alpha > 1$, nous avons $S_n \leqslant 1 - \dfrac{1}{(n+1)^\alpha} + \dfrac{1}{(n+1)^{\alpha-1}(1-\alpha)} + \dfrac{1}{\alpha-1}$
  Comme $-\dfrac{1}{(n+1)^\alpha} + \dfrac{1}{(n+1)^{\alpha-1}(1-\alpha)} \leqslant 0$, nous avons $S_n \leqslant 1 + \dfrac{1}{\alpha-1} = \dfrac{\alpha}{\alpha-1}$
  La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant une suite croissante et majorée est donc convergente.
- ⋆ Si $\alpha = 1$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant1} \frac{1}{n^\alpha} = \sum_{n\geqslant1} \frac{1}{n}$ est la série harmonique, divergente.

Remarque 11 :

1. La série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ est donc bien convergente ! La recherche de sa limite est un tout autre problème *(voir les exercices)*
2. Nous venons de trouver une classe de séries importantes les séries de Riemann qui sont toutes du type $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ avec $\alpha > 0$
3. La série $\sum u_n$ où $u_n = \frac{n^3 + 7n^2 - \sqrt{2}\frac{\ln(n)}{n}}{4n^5 + 25n^4}$ est convergente, car $u_n \underset{+\infty}{\approx} \frac{1}{4n^2}$

Exercice 11 :

On se donne P et Q, 2 polynômes non nuls à une indéterminée et à coefficients réels. k est le premier entier supérieur à la plus grande racine réelle de Q. Etudier la série $\sum_{n\geqslant k} \frac{P(n)}{Q(n)}$

Exercice 12 :

On considère la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

1. Montrer au moyen d'un théorème de comparaison que cette série est convergente
2. Retrouver le résultat en calculant la somme.

Exercice 13 :

Etudier la série de terme général $\sqrt{n^4 + 2n + 1} - \sqrt{n^4 + an}$ où a est un réel positif.

6.4.4 Théorème : séries et intégrales

L'objet de ce théorème est bien de généraliser le théorème précédent

Soient f une fonction continue par morceaux, positive et décroissante sur l'intervalle $[a; +\infty[$ avec $a \geqslant 0$ et telle que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

Alors, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f(n)$ et l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\ dt$ ont même nature

Démonstration

Nous nous reportons au schéma 6.4
Soit $p \in \mathbb{N}$ et $x \in [p; p+1]$
Alors, de la décroissance de f, nous tirons $f(p) \geqslant f(x) \geqslant f(p+1)$, et donc, en utilisant la positivité de l'intégrale *(respect de la relation d'ordre)*

$$\int_p^{p+1} f(p)\ dx \geqslant \int_p^{p+1} f(x)\ dx \geqslant \int_p^{p+1} f(p+1)\ dx$$

C'est à dire, tout simplement,

$$f(p) \geqslant \int_p^{p+1} f(x)\ dx \geqslant f(p+1)$$

En posant N, l'entier supérieur ou égal à a et $S_p = \sum_{k=\mathbb{N}}^{p} f(k)$, nous avons, en sommant, nous avons :

$$\sum_{k=N}^{p} f(k) \geqslant \sum_{k=N}^{p} \int_{k}^{k+1} f(x)\ dx \geqslant \sum_{k=N}^{p} f(k+1)$$

C'est à dire,

$$S_p \geqslant \int_{N}^{p+1} f(x)\ dx \geqslant S_p + f(p+1) - f(N)$$

L'inégalité précédente permet de montrer que $\sum_{n\in\mathbb{N}} f(n)$ et $\int_{a}^{+\infty} f(t)\ dt$ ont même nature. En effet :

→ <u>Etude de la divergence</u>

- ⋆ Si $\int_{N}^{+\infty} f(x)\ dx = \lim_{p\to+\infty} \int_{N}^{p} f(x)\ dx = +\infty$, c'est à dire que l'intégrale diverge, alors comme $\int_{N}^{p+1} f(x)\ dx \leqslant S_p$, alors $\lim_{p\to+\infty} S_p = +\infty$ et donc la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f(n)$ diverge
- ⋆ Supposons que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f(n)$ diverge ; alors $\lim_{p\to+\infty} S_p = +\infty$, et, partant

$$\lim_{p\to+\infty} S_p + f(p+1) - f(N) = +\infty$$

Comme $S_p + f(p+1) - f(N) \leqslant \int_{N}^{p+1} f(x)\ dx$, nous avons $\lim_{p\to+\infty} \int_{N}^{p+1} f(x)\ dx = +\infty$, c'est à dire que l'intégrale $\int_{a}^{+\infty} f(t)\ dt$ diverge

→ <u>Etude de la convergence</u>

- ⋆ Supposons la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f(n)$ convergente, comme la suite $(S_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante, si la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f(n)$ a pour somme S alors $\lim_{p\to+\infty} S_p = S$ et, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $S_p \leqslant S$. De l'inégalité $\int_{N}^{p+1} f(x)\ dx \leqslant S_p$, nous tirons que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\int_{N}^{p+1} f(x)\ dx \leqslant S$

Pour tout $T > 1$, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $p \leqslant T < p+1$ et de la positivité et de la décroissance de f nous obtenons :

$$\int_{N}^{p+1} f(x)\ dx \leqslant \int_{N}^{T} f(x)\ dx < \int_{N}^{p} f(x)\ dx \leqslant S$$

Donc $\lim_{T\to+\infty} \int_{N}^{T} f(x)\ dx$ est finie, ce qui veut dire que l'intégrale $\int_{a}^{+\infty} f(t)\ dt$ converge

- ⋆ Supposons que l'intégrale $\int_{a}^{+\infty} f(t)\ dt$ converge, nous avons $\int_{a}^{+\infty} f(t)\ dt = L$. de l'inégalité $S_p + f(p+1) - f(N) \leqslant \int_{N}^{p+1} f(x)\ dx$, nous tirons $S_p + f(p+1) - f(N) \leqslant \int_{N}^{+\infty} f(x)\ dx \leqslant L$ et donc :

$$S_p \leqslant f(N) - f(p+1) + L \leqslant f(N) + L$$

Nous mettons ainsi en évidence que la suite $(S_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante et majorée (par $f(N) + L$), donc convergente. La série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f(n)$ est donc convergente.

Exemple 8 :

Le plus bel exemple pour ce théorème est formé par les séries de Riemann $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^\alpha}$ et les intégrales $\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^\alpha}\,dt$

Exercice 14 :

On considère la série $\sum_{n\geqslant 1}u_n$ où $u_n=\frac{\ln n}{n^\alpha}$ avec $\alpha>0$. Discuter suivant les valeurs de α de la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1}u_n$

6.4.5 Corollaire : encadrement du reste

Pour $a>0$, soit $f:[a;+\infty[\longrightarrow\mathbb{R}$ positive et décroissante, telle que $\int_a^{+\infty}f(x)\,dx$ converge.

Notons pour $n\geqslant a$ $R_n=\sum_{k=n+1}^{+\infty}f(k)$ *(c'est le reste d'ordre n)*

Alors, pour tout $n\geqslant a$, nous avons

$$\int_{n+1}^{+\infty}f(x)\,dx\leqslant R_n\leqslant\int_n^{+\infty}f(x)\,dx$$

Démonstration

Soit $n\in\mathbb{N}$

1. En utilisant le fait que f soit positive et décroissante, nous avons, pour tout $k\geqslant n$, $f(k+1)\leqslant\int_k^{k+1}f(x)\,dx$, et en passant à la sommation, pour $p>n$:

$$\sum_{k=n}^{p}f(k+1)\leqslant\sum_{k=n}^{p}\int_k^{k+1}f(x)\,dx\Longleftrightarrow\sum_{k=n+1}^{p+1}f(k)\leqslant\int_n^{p+1}f(x)\,dx$$

   Et, en passant à la limite, nous avons :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty}f(k)\leqslant\int_n^{+\infty}f(x)\,dx\Longleftrightarrow R_n\leqslant\int_n^{+\infty}f(x)\,dx$$

2. De la même manière, nous avons, pour tout $k\geqslant n$, $\int_k^{k+1}f(x)\,dx\leqslant f(k)$, et en passant à la sommation, pour $p>n$:

$$\sum_{k=n+1}^{p}\int_k^{k+1}f(x)\,dx\leqslant\sum_{k=n+1}^{p}f(k)\Longleftrightarrow\int_{n+1}^{p+1}f(x)\,dx\leqslant\sum_{k=n+1}^{p}f(k)$$

   Et, en passant à la limite, nous avons :

$$\int_{n+1}^{+\infty}f(x)\,dx\leqslant\sum_{k=n+1}^{+\infty}f(k)\Longleftrightarrow\int_{n+1}^{+\infty}f(x)\,dx\leqslant R_n$$

En faisant la synthèse des deux inégalités, nous obtenons : $\int_{n+1}^{+\infty}f(x)\,dx\leqslant R_n\leqslant\int_n^{+\infty}f(x)\,dx$.

Ce que nous voulions

6.5 Séries alternées, critère d'Abel

6.5.1 Théorème : critère des séries alternées

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique telle que
- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à termes positifs, c'est à dire que $(\forall n \in \mathbb{N})\,(u_n \geqslant 0)$
- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante
- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 à l'infini, c'est à dire que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

Alors, la série $\sum (-1)^n u_n$ est convergente

Démonstration

Cette démonstration est très simple.

Soit $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k u_k$

1. Nous allons d'abord montrer que la suite $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante et majorée.
   (a) La suite $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante.
   En effet :
   $$\begin{aligned} S_{2(n+1)+1} - S_{2n+1} &= S_{2n+3} - S_{2n+1} \\ &= (-1)^{2n+3} u_{2n+3} + (-1)^{2n+2} u_{2n+2} \\ &= -u_{2n+3} + u_{2n+2} \geqslant 0 \end{aligned}$$
   Car la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Donc, nous avons $S_{2(n+1)+1} - S_{2n+1} \geqslant 0$ et la suite $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est bien une suite croissante
   (b) La suite $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite majorée
   En effet :
   $$\begin{aligned} S_{2n+1} &= \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k u_k \\ &= u_0 + (-u_1 + u_2) + (u_4 - u_3) + \ldots + (u_{2k} - u_{2k-1}) + \ldots + (u_{2n} - u_{2n-1}) - u_{2n+1} \end{aligned}$$
   Comme $u_{2k} \leqslant u_{2k-1}$ *(décroissance de* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$*)*, nous avons $S_{2n+1} \leqslant u_0$, c'est à dire que la suite $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite majorée
   (c) La suite $(S_{2n+1})_{\mathbb{N}\in\mathbb{N}}$ étant donc croissante et majorée, elle est donc convergente. Soit S sa limite
2. La suite $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ admet pour limite S
   En effet, $S_{2n} = S_{2n-1} + u_{2n}$; comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{2n-1} = S$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{2n-1} = \lim\limits_{n\to+\infty} S_{2n} = S$
   Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{2n}$ existe et $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{2n} = S$
3. Les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{\mathbb{N}\in\mathbb{N}}$ sont des suites extraites de la suites $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui admettent la même limite S, donc la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, et nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = S$.
   Ce qui signifie que la série $\sum (-1)^n u_n$ est convergente
4. On peut démontrer, comme ci-dessus, que S_{2n} est une suite décroissante et, qu'en fait, les 2 suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont des suites adjacentes telles que $S_{2n+1} \leqslant S \leqslant S_{2n}$, et on a donc :
   $$S_{2n} - u_{2n+1} \leqslant S \leqslant S_{2n}$$
   ou
   $$S_{2n+1} \leqslant S \leqslant S_{2n+1} + u_{2n+2}$$
   Ce qui montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $|S - S_n| \leqslant u_{n+1}$
5. Ce qui montre aussi que si on remplace S par S_n , on commet une erreur de l'ordre de u_{n+1}

Exemple 9 :

1. Pour $\alpha > 0$, $\left(\dfrac{1}{n^\alpha}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite positive, décroissante, et telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^\alpha} = 0$; donc, $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$ est convergente.
2. On a, en particulier, $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^n}{n}$ **convergente, mais pas absolument convergente.** [2]

Exercice 15 :

Etudier les séries suivantes. Sont-elles alternées ? Convergent-elles absolument ?

1. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \tan\left(\dfrac{1}{n}\right)$
2. $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{\cos \pi n}{\ln n}$
3. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \sqrt[n]{n} \sin \dfrac{1}{n}$
4. $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{\ln n}{n}$
5. $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n}\right)$
6. $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n \ln n}$

6.5.2 Une généralisation du théorème sur les séries alternées

Etape 1 : Transformation d'Abel

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$2 suites quelconques.
On définit les expressions suivantes :

$$\begin{cases} A_{m,n} = \sum\limits_{k=m}^{n} a_k \\ A_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k \\ A_{-1} = 0 \end{cases}$$

Alors, nous avons :

$$\sum_{k=m}^{n} a_k b_k = \sum_{k=m}^{n} A_k (b_k - b_{k+1}) + A_n b_n - A_{m-1} b_m$$

Démonstration

On peut d'abord faire remarquer que $a_k = A_k - A_{k-1}$, et, que $\sum\limits_{k=m}^{n} a_k b_k = \sum\limits_{k=m}^{n} (A_k - A_{k-1})\, b_k$

De là,

$$\begin{aligned} \sum_{k=m}^{n} a_k b_k &= \sum_{k=m}^{n} (A_k - A_{k-1})\, b_k \\ &= \sum_{k=m}^{n} A_k b_k - \sum_{k=m}^{n} A_{k-1} b_k \\ &= \sum_{k=m}^{n} A_k b_k - \sum_{k=m-1}^{n-1} A_k b_{k+1} \\ &= \sum_{k=m}^{n} A_k (b_k - b_{k+1}) + A_n b_n - A_{m-1} b_m \end{aligned}$$

2. Semi-convergente, donc

Etape 2 : le critère d'Abel

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 2 suites quelconques.
On suppose de plus que :

1. $(\exists M \geqslant 0)\,(\forall m \in \mathbb{N})\,(\forall n \in \mathbb{N})\,(m \leqslant n \Rightarrow |a_m + \cdots + a_n| \leqslant M)$
   Ce qui veut donc dire que la somme $|a_m + \cdots + a_n|$ est bornée pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $m \in \mathbb{N}$
2. La suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers zéro
3. La série $\sum\limits_{n\geqslant 0} |b_{n+1} - b_n|$ est convergente

Alors, la série $\sum a_n b_n$ converge

Démonstration

On considère la somme partielle $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_k$, et on va montrerque la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy ; elle sera donc convergente.
Soient donc $m \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que $m \leqslant n$; alors :

$$\begin{aligned}
|S_n - S_m| &= \left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k b_k\right| \\
&= \left|\sum_{k=m+1}^{n} A_k\,(b_k - b_{k+1}) + A_n b_n - A_m b_{m+1}\right| \\
&\leqslant M\left(\sum_{k=m+1}^{n} |b_k - b_{k+1}| + |b_n| + |b_{m+1}|\right)
\end{aligned}$$

Comme la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers zéro, il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, tel que $n \geqslant N_\varepsilon \Rightarrow |b_n| < \dfrac{\varepsilon}{3M}$
De même, comme la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} |b_{n+1} - b_n|$ est convergente, elle est de Cauchy, et donc, il existe $N_\varepsilon^1 \in \mathbb{N}$ tel que $m \geqslant n \geqslant N_\varepsilon^1 \Rightarrow \sum\limits_{k=m+1}^{n} |b_k - b_{k+1}| < \dfrac{\varepsilon}{3M}$
Ainsi, pour $m \geqslant n \geqslant \sup\left(N_\varepsilon, N_\varepsilon^1\right)$, alors $|b_n| < \dfrac{\varepsilon}{3M}$ et $\sum\limits_{k=m+1}^{n} |b_k - b_{k+1}| < \dfrac{\varepsilon}{3M}$
Donc, pour $m \geqslant n \geqslant \sup\left(N_\varepsilon, N_\varepsilon^1\right)$

$$\begin{aligned}
|S_n - S_m| &\leqslant M\left(\sum_{k=m+1}^{n} |b_k - b_{k+1}| + |b_n| + |b_{m+1}|\right) \\
&\leqslant M\left(\frac{3\times\varepsilon}{3M}\right) = \varepsilon
\end{aligned}$$

Ce qui montre que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy ; la série est donc convergente.

Remarque 12 :

En quoi le théorème d'Abel implique-t-il le "critère des séries alternées" ?
On considère donc une série $\sum (-1)^n b_n$, où la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers zéro en décroissant.
On pose alors, $a_n = (-1)^n$, et on a donc la somme $|a_m + \cdots + a_n|$ est bornée pour tout $n \in \mathbb{N}$
De plus, $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} |b_{k+1} - b_k| = \sum\limits_{k=0}^{n} (b_{k+1} - b_k) = b_{n+1} - b_0$; comme $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$ $\sum\limits_{n\geqslant 0} |b_{n+1} - b_n| = b_0$, et donc, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} |b_{n+1} - b_n|$ est convergente. On conclue donc à la convergence de la série $\sum (-1)^n b_n$

Exemple 10 :

Application à l'étude des séries $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{e^{inx}}{n^\alpha}$ **avec** $\alpha > 0$

1. Dans un premier temps, si $x = 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, alors $\dfrac{e^{inx}}{n^\alpha} = \dfrac{\left(e^{ix}\right)^n}{n^\alpha} = \dfrac{1}{n^\alpha}$ qui converge si $\alpha > 1$ et diverge si $0 < \alpha \leqslant 1$
2. Supposons $x \neq 2k\pi$; nous allons alors utiliser le théorème d'Abel en posant $a_n = e^{inx}$ et $b_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$. Alors, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{e^{inx}}{n^\alpha}$ devient $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} a_n b_n$. Examinons, maintenant, les différents critères du théorème d'Abel
   - → Tout d'abord, la suite $(b_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite qui tend vers 0 en décroissant.
     Ensuite,
     $$\sum_{k=1}^{n}|b_{k+1}-b_k| = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k^\alpha}-\frac{1}{(k+1)^\alpha}\right) = \left(1-\frac{1}{2^\alpha}\right)+\left(\frac{1}{2^\alpha}-\frac{1}{3^\alpha}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n^\alpha}-\frac{1}{(n+1)^\alpha}\right) = 1-\frac{1}{(n+1)^\alpha}$$
     Donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}|b_{k+1}-b_k| = 1$ et la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}|b_{n+1}-b_n|$ est bien convergente.
   - → Ensuite, soient $m \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que $n \geqslant m$; alors :
     $$\begin{aligned}\left|\sum_{k=m}^{n} e^{ikx}\right| &= \left|\sum_{k=0}^{n-m} e^{i(k+m)x}\right| \\ &= \left|e^{imx}\sum_{k=0}^{n-m} e^{ikx}\right| \\ &= \left|e^{imx}\right|\left|\sum_{k=0}^{n-m} e^{ikx}\right| \\ &= \left|\sum_{k=0}^{n-m} e^{ikx}\right| \\ &= \left|\frac{1-e^{i(n-m+1)x}}{1-e^{ix}}\right|\end{aligned}$$
     Or, $\left|\dfrac{1-e^{i(n-m+1)x}}{1-e^{ix}}\right| = \dfrac{\left|1-e^{i(n-m+1)x}\right|}{\left|1-e^{ix}\right|} \leqslant \dfrac{2}{\left|1-e^{ix}\right|}$
     Ainsi, pour tout $m \in \mathbb{N}$ et tout $n \in \mathbb{N}$ tels que $n \geqslant m$, nous avons la somme $\left|\displaystyle\sum_{k=m}^{n} e^{ikx}\right|$ qui est bornée.
   - → Donc, si $x \neq 2k\pi$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{e^{inx}}{n^\alpha}$ est convergente pour tout $\alpha > 0$

Ainsi, on vient de montrer aussi que les séries réelles $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{\cos nx}{n^\alpha}$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{\sin nx}{n^\alpha}$ convergent pour tout $\alpha > 0$ et tout $x \in \mathbb{R}$ tels que $x \neq 2k\pi$; les cas où $x = k\pi$ sont faciles à étudier pour ces deux séries.

6.6 Exercices complémentaires sur les séries numériques

6.6.1 Applications directes du cours

Exercice 16 :

Nous savons que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{n\,!} = e$

1. Montrer que les séries $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^2}{n\,!}$ et $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^3}{n\,!}$ sont convergentes et calculer leur somme.
2. Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^p}{n\,!}$ converge et que sa somme est un multiple entier de e

Exercice 17 :

1. Etudier la suite la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence :
$$u_0 \in \mathbb{C} \text{ et } (\forall n \in \mathbb{N})\,(u_{n+1} = u_n + a^n) \text{ où } a \in \mathbb{C}$$
2. De manière générale, démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence :
$$u_0 \in \mathbb{C} \text{ et } (\forall n \in \mathbb{N})\,(u_{n+1} = u_n + v_n)$$
est convergente si et seulement si la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ est convergente.

Exercice 18 :

Etudier la convergence des séries suivantes.*(Les méthodes à utiliser pourront être diverses : règles de Cauchy ou de d'Alembert, recherche d'équivalents simples, ou recherche d'équivalents à l'aide des développements limités)*

1. $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} n \sin\frac{1}{n}$
2. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}\ln n}{n^2+1}$
3. $\sum_{n\geqslant 1} (n)^{\frac{1}{n^2}} - 1$
4. $\sum_{n\geqslant 1} \left(1 - \cos\frac{1}{n}\right)$
5. $\sum_{n\geqslant 1} \left(\frac{2n-1}{n+1}\right)^{2n}$
6. $\sum_{n\geqslant 1} \ln\left(\frac{n^2+2n+1}{n^2+1}\right)$
7. $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1+2+3+\cdots+n}{1^2+2^2+\cdots+n^2}$
8. $\sum_{n\geqslant 0} \frac{\cos nx^2}{2^n}$
9. $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{a^n}{(1+a)(1+a)^2\cdots(1+a)^n}$ avec $a > -1$
10. $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sqrt{n^2+n} - n\right)$
11. $\sum_{n\geqslant 1} n^2 \sin\frac{\pi}{2^n}$
12. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$
13. $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 - e^{\frac{1}{n}}\right)$
14. $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} + \ln\left(\frac{n-1}{n}\right)\right)$

Exercice 19 :

1. Montrer que la série de terme général $u_n = \int_0^1 \left(1 - \sqrt{x}\right)^n dx$ est convergente.
2. Etudier la convergence, de la série de terme général $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{n}} \sqrt{\sin x}\, dx$ pour $n \geqslant 2$

Exercice 20 :

Pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{R}$, la série de terme général $u_n = \frac{\ln n!}{n^a}$ converge-t-elle ?

Exercice 21 :

1. Etudier la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|x(x-1)(x-2)\dots(x-n+1)|}{n!} a^n$ où x est un réel donné quelconque, et $0 < a < 1$.
2. En déduire la limite de la suite de terme général $u_n = \frac{|x(x-1)(x-2)\dots(x-n+1)|}{n!} a^n$

Exercice 22 :

Dans cet exercice, on suppose $\alpha > 1$

1. Démontrer que nous avons $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^{\alpha-1}}\right) = 1$
2. Montrer que, pour tout réel $\beta > 0$ et tout $t \in [0;1]$, nous avons $(1-t)^{\beta} \leqslant \dfrac{1}{1+\beta t}$
3. En déduire que, pour tout $n \geqslant 2$, nous avons $\dfrac{\alpha-1}{n^{\alpha}} \leqslant \dfrac{1}{(n-1)^{\alpha-1}} - \dfrac{1}{n^{\alpha-1}}$
4. Conclure

Exercice 23 :

Etudier la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$ où $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(n-k)!k!}$

Exercice 24 :

1. Soit la série de terme général $u_n = a_n - a_{n+1}$ avec $a_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n} - \ln n$ montrer que $u_n \underset{+\infty}{\approx} \dfrac{1}{2n^2}$
2. En déduire la convergence de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Exercice 25 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de réels positifs.

1. On suppose que la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge.
   (a) On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$. Donner $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_{2n} - S_n$
   (b) En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 2nu_{2n} = 0$
   (c) Conclure que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} nu_n = 0$
2. Soit $\alpha > 0$ et on suppose que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} n^{\alpha}u_n$ converge. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^{\alpha+1}u_n = 0$

6.6.2 Etude de convergence des séries numériques et calcul des sommes

Exercice 26 :

On considère la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 4}\frac{1}{n^3-9n}$

1. Cette série est-elle convergente ?
2. Décomposer $\dfrac{1}{n^3-9n}$ en éléments simples, c'est à dire trouvez A, B, et C, tels que :

$$\frac{1}{n^3-9n} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n-3} + \frac{C}{n+3}$$

3. En déduire la somme de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 4}\frac{1}{n^3-9n}$

Exercice 27 :

1. Etudier la convergence de la série : $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$
2. Vérifier que $\ln\left(1-\dfrac{1}{k^2}\right) = \ln(k-1)+\ln(k+1)-2\ln k$
3. Calculez la somme de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$

Exercice 28 :

Si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite numérique tendant vers 0 et si a, b et c sont trois réels vérifiant $a+b+c=0$, on pose pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$u_n = av_n + bv_{n+1} + cv_{n+2}$$

Montrer que la suite de terme général v_n converge et calculer sa somme.

Exercice 29 :

On considère la série de terme général $u_n = \displaystyle\int_0^n e^{-n^2t^2}dt$. Etudier la convergence de cette série.

Exercice 30 :

Dans cet exercice, nous allons travailler **le « critère de condensation » de Cauchy**

1. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de réels positifs.
   Démontrer que la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ converge si et seulement si la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} 2^n a_{2^n}$ converge
2. **Applications :**
   (a) Les séries de Riemann
   Montrer que les séries $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^\alpha}$ convergent si et seulement si $\alpha>1$
   (b) Les séries de Bertrand
   Montrer que les séries $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n(\ln n)^p}$ convergent si et seulement si $p>1$

Exercice 31 :

Règle de Raabe-Duhamel
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels strictement positifs.

1. On suppose qu'à partir d'un certain rang nous avons $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\leqslant\dfrac{v_{n+1}}{v_n}$. Montrer que $u_n\in O(v_n)$
2. On suppose que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1-\dfrac{\alpha}{n}+\dfrac{1}{n}\varepsilon\left(\dfrac{1}{n}\right)$ avec $\alpha>1$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)=0$. Montrer, à l'aide d'une comparaison avec une série de Riemann que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge
3. On suppose , cette fois ci, que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1-\dfrac{\alpha}{n}+\dfrac{1}{n}\varepsilon\left(\dfrac{1}{n}\right)$ avec $\alpha<1$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)=0$. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$ diverge

Exercice 32 :

Etudier la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$ où $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{n-1}+x^n}$

Exercice 33 :

Les 3 questions de cet exercice, même si elles sont indépendantes, sont toutes sur un même thème

1. Soit $f : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée. Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} (-1)^n \int_0^1 x^n f(x)\,dx$ converge et que sa somme est $\int_0^1 \frac{f(x)}{1+x}dx$
2. Notons $u_n = \int_0^1 x^n \sin(\pi x)\,dx$. Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge et que $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n = \int_0^\pi \frac{\sin x}{x}\,dx$
3. Soit $\alpha > 0$. Montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{n+\alpha} = \int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,dx$

Exercice 34 :

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(0) \neq 0$. Etudier la convergence de la série de terme général $u_n = \frac{1}{n^\alpha}\int_0^{\frac{1}{n}} f(t^n)\,dt$

Exercice 35 :

1. Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de réels positifs. On considère la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :
$$v_n = \frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n} ku_k$$
Montrer que les séries $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} v_n$ ont même nature, et qu'en cas de convergence,
$$\sum_{n\geqslant 1} u_n = \sum_{n\geqslant 1} v_n$$
2. Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de réels positifs telle que $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge.
Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \frac{(n!(u_1 \times u_2 \times \cdots u_n))^{\frac{1}{n}}}{n+1}$. Démontrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} v_n$ converge et que $\sum\limits_{n\geqslant 1} v_n \leqslant \sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$

Exercice 36 :

Soit z_n le terme général d'une série complexe absolument convergente. Démontrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{z_n}{n}$ est convergente.

6.6.3 Séries alternées- théorème d'ABEL

Exercice 37 :

Déterminer la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \sin\left(n\pi + \frac{\pi}{n}\right)$

Exercice 38 :

Montrer que la série de terme général $u_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x} \sin x \, dx$ est une série alternée ; exprimer u_n en fonction de u_0 ; en déduire $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *(Indication : faire le changement de variables $t = x - n\pi$)*

Exercice 39 :

1. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx$ tend vers 0 en décroissant
2. Montrer que la série de terme général $u_n = (-1)^n \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx$ est convergente et calculer sa somme.

Exercice 40 :

1. Quelle est la nature de la série numérique $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$?
2. Pour $t \in \mathbb{R}$, montrer que
$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{2k} = \frac{1}{1+t^2} + \frac{(-1)^n t^{2n+2}}{1+t^2}$$
3. En déduire que
$$\left| \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \int_0^1 t^{2k} \, dt - \frac{\pi}{4} \right| \leqslant \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} \, dt$$
4. On appelle S_n la suite des sommes partielles, c'est à dire : $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$.

   Montrer que $\left| S_n - \dfrac{\pi}{4} \right| \leqslant \dfrac{1}{2n+3}$
5. En déduire que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$

Exercice 41 :

1. La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{(-1)^n}{n\sqrt{\ln n}}$ est-elle convergente ?
2. L'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$ est-elle convergente ?
3. La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{(-1)^n}{n\sqrt{\ln n}}$ est-elle absolument convergente ?

Exercice 42 :

1. **Questions préliminaires :**
   (a) Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t^{3n} \, \mathrm{d}t$
   (b) Décomposer la fraction $\dfrac{1}{1+t^3}$ en éléments simples
   (c) Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^3} \, \mathrm{d}t$

2. La série $\sum_{n_i n\mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{3n+1}$ est-elle convergente ?

3. Montrer que nous avons $\sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k}{3k+1} = \int_0^1 \frac{1}{1+t^3}\,\mathrm{d}t + \int_0^1 \frac{t^{3N+3}}{1+t^3}\,\mathrm{d}t$

4. En déduire la somme de la série $\sum_{n_i n\mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{3n+1}$

6.6.4 Séries à termes réels ou complexes

Exercice 43 :

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 2 suites à termes complexes telles que les séries $\sum_{n\geqslant 0} |u_n|^2$ et $\sum_{n\geqslant 0} |v_n|^2$ convergent.
Démontrer que, pour tout entier $p \geqslant 2$, la série $\sum_{n\geqslant 0} (u_n - v_n)^p$ converge.

Exercice 44 :

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes complexes telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la partie réelle de u_n soit positive, c'est à dire $\mathrm{Re}\,(u_n) \geqslant 0$.
On suppose que les séries $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} u_n^2$ convergent. Démontrer que la série $\sum_{n\geqslant 0} |u_n|^2$ converge.

Exercice 45 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels et $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $f(0) = 0$
Démontrer que, si les séries $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} u_n^2$ convergent alors, la série $\sum_{n\geqslant 0} f(u_n)$ converge.

6.6.5 Etudes

Exercice 46 :

Nous avons vu, en cours, que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ *était une série de Riemann convergente. L'objet de ce problème est de se poser des questions, à travers cette série, sur divers aspects de l'étude des séries numériques. Nous allons chercher la somme de* $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ *avec des outils très rudimentaires*

Partie 1 : Somme de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$

1. **Le lemme de Riemann-Lebesgue**
   Soient $a \in \mathbb{R}$, et $b \in \mathbb{R}$ tels que que $a < b$. On suppose que f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $[a; b]$. Démontrer que $\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t) \sin ntdt = 0$

2. Soit t un réel de l'intervalle $]0; \pi]$; pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $c_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \cos kt$
   (a) Calculer $c_n(t)$ pour $t \in]0; \pi]$
   (b) On pose $c_n(0) = n$. Démontrer qu'alors, c_n est continue sur $[0; \pi]$

3. On pose $W_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$

(a) Montrer que $W_n = \displaystyle\int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) c_n(t)\, dt$

(b) Montrer que $W_n = \dfrac{\pi^2}{6} - \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\pi} \left(t - \frac{t^2}{2\pi}\right) \frac{1}{\sin\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right) dt$

(c) Soit la fonction f définie par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} f : [0\,;\,\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \left\{\begin{array}{l} 2 \text{ si } x = 0 \\ \left(x - \dfrac{x^2}{2\pi}\right)\dfrac{1}{\sin\frac{x}{2}} \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Démontrer que f est continue sur $[0\,;\,\pi]$

(d) Utiliser le lemme de Riemann-Lebesgue pour démontrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi} \left(t - \frac{t^2}{2\pi}\right) \frac{1}{\sin\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right) dt = 0$$

4. En déduire la somme de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$

<u>Partie 2</u> : Approximation de la limite

1. Démontrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $k \geqslant 2$, nous avons $\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1} \leqslant \dfrac{1}{k^2} \leqslant \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}$
2. On considère la suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $R_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$
   (a) Justifier de l'existence de cette somme, et donner $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} R_n$
   (b) Montrer qu'au voisinage de $+\infty$, $R_n \underset{+\infty}{\approx} \dfrac{1}{n}$
3. Ecrire un algorithme que permette d'approcher la limite aussi précisément que souhaité.

Exercice 47 :

L'objet de problème est de trouver, par des méthodes élémentaires, la somme de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ *et* $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$

Ce problème ne pose aucune difficulté ; la question a déjà été résolue dans les exercices avec une autre méthode

Dans cet exercice, m, n, p et q désignent des entiers naturels.

1. Prouver que les séries $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$ sont convergentes.

   Sont-elles absolument convergentes ?
2. **<u>Calcul de la somme des séries</u>**

   Dans la suite du problème, nous utilisons les sommes partielles, et nous notons, pour $n \geqslant 1$:

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \text{ et } v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}$$

   On considère, pour tout $p \geqslant 0$, les intégrales $I_p = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^p}{1+x^2} dx$

   (a) Calculez I_0 et I_1

   (b) Calculez $I_p + I_{p+2}$ en fonction de p. En déduire I_2 et I_3

(c) Pour $q \geqslant 1$ on appelle $(U_q)_{q\in\mathbb{N}^\star}$ la suite dont le terme général est donné par : $U_q = u_q + 2(-1)^q I_{2q+1}$.
En calculant $U_{q+1} - U_q$, montrez que le suite $(U_q)_{q\in\mathbb{N}^\star}$ est constante.

(d) En déduire que $u_q + 2(-1)^q I_{2q+1} = \ln 2$

(e) On définit $V_q = v_q + (-1)^q I_{2q}$; en utilisant les méthodes décrites dans les 2 questions précédentes, montrer que $v_q + (-1)^q I_{2q} = \dfrac{\pi}{4}$

(f) Démontrer que $\lim\limits_{p\to+\infty} I_p = 0$

(g) En déduire les valeurs de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$

Exercice 48 :

L'objet de cet exercice est de s'intéresser au problème posé par l'accélération de la convergence. Ce problème se situe à un niveau bien plus général, mais nous allons le traiter dans un cas particulier. Pratiquement,on dit qu'une série converge lentement, si il faut beaucoup de temps(à la machine) pour obtenir une approximation raisonnable de la limite. Pour réduire ce temps, on accélère la convergence en lui adjoignant une autre suite.

On considère la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ qu'on sait convergente et de somme $\dfrac{\pi^2}{6}$. On appelle $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ les sommes partielles, et $x_k = \dfrac{1}{k^2}$, et nous avons donc $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k$

1. Montrer que $R_n = \displaystyle\sum_{k\geqslant n} \frac{1}{k^2} < \frac{1}{n-\frac{1}{2}}$. En déduire une méthode d'approximation de $\dfrac{\pi^2}{6} = \displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$

   Donner une approximation de $\dfrac{\pi^2}{6}$ à 10^{-4} près, et mesurer le temps pour y arriver

2. On appelle $u_n = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{2}x_n$ et $y_n = u_n - u_{n+1}$

   (a) Montrer que $0 \leqslant x_n - y_n \leqslant \dfrac{1}{2n^4}$

   (b) Montrer que $\dfrac{1}{n^4} \leqslant \displaystyle\int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t^4}$.

   (c) En déduire que $0 \leqslant x_n - y_n \leqslant \dfrac{1}{6}\left(\dfrac{1}{(n-1)^3} - \dfrac{1}{n^3}\right)$

3. On appelle $T_n = \displaystyle\sum_{p=2}^{n} (x_p - y_p)$. Montrer que $T_n = S_n - u_2 + u_{n+1}$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n = \dfrac{\pi^2}{6} - u_2$

4. (a) Pour $p \in \mathbb{N}$ et, $p \geqslant 2$,$q \in \mathbb{N}$ et $q > p$,montrer que $0 \leqslant T_q - T_p \leqslant \dfrac{1}{6}\left(\dfrac{1}{p^3} - \dfrac{1}{q^3}\right)$

   (b) En déduire que $0 \leqslant \dfrac{\pi^2}{6} - u_2 - T_p \leqslant \dfrac{1}{6p^3}$ puis que $0 \leqslant \dfrac{\pi^2}{6} - (S_n + u_{n+1}) \leqslant \dfrac{1}{6n^3}$

   (c) Donner une approximation de $\dfrac{\pi^2}{6}$ à 10^{-4} près, et mesurer le temps pour y arriver

5. Prévoir le temps nécessaire pour donner une approximation de $\dfrac{\pi^2}{6}$ à 10^{-6} près avec les 2 méthodes

Exercice 49 :

Voici un petit problème qui vous mène par la main. Sans difficultés

Dans ce problème, e désigne la base du logarithme népérien, c'est à dire le nombre réel tel que $\ln e = 1$

1. **Étude d'une série dépendant d'un paramètre**
   Soit $x \in \mathbb{R}^+$; on considère la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{1}{e^n + x}$
   (a) En majorant correctement $\dfrac{1}{e^n + x}$ par le terme général d'une série convergente, montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{1}{e^n + x}$ est convergente.
   (b) On appelle $S(x)$ la somme de la série, c'est à dire $S(x) = \sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{1}{e^n + x}$. Calculez $S(0)$
2. **Étude d'une intégrale dépendant d'un paramètre**
   Dans cette partie, x est un paramètre tel que $x \in \mathbb{R}^+$ et u désigne la variable par rapport à laquelle on calcule l'intégrale.
   (a) **Question préliminaire**
   Décomposer la fraction $Q(u) = \dfrac{1}{u(u+x)}$ en éléments simples
   (b) **Calcul d'une intégrale**
   i. On considère l'intégrale $\displaystyle\int_0^T \frac{\mathrm{d}t}{e^t + x}$. En faisant le changement de variables $u = e^t$, montrer que
   $$\int_0^T \frac{\mathrm{d}t}{e^t + x} = \frac{1}{x}\left[\ln\left(\frac{e^T}{e^T + x}\right) + \ln(1+x)\right]$$
   ii. En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{e^t + x}$ existe et que
   $$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{e^t + x} = \frac{\ln(1+x)}{x}$$
   iii. Dans la suite, on appelle $G(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x}$. Donner $\lim\limits_{x\to+\infty} G(x)$
3. **Etude des liens entre $S(x)$ et $G(x)$**
   (a) On appelle $f(t) = \dfrac{1}{e^t + x}$; démontrer que la fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}$.
   (b) Déduire de la décroissance de f que :
   i. $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{dt}{e^t + x} \leqslant \frac{1}{e^{-1} + x}$
   ii. pour tout $n \in \mathbb{N}$
   $$\int_n^{n+1} \frac{dt}{e^t + x} \leqslant \frac{1}{e^n + x} \leqslant \int_{n-1}^n \frac{dt}{e^t + x} \tag{6.2}$$
   (c) Pour $N \in \mathbb{N}$, en sommant les inégalités de (6.2) de 0 à N, montrer que
   $$\int_0^{N+1} \frac{dt}{e^t + x} \leqslant \sum_{n=0}^N \frac{1}{e^n + x} \leqslant \int_0^N \frac{dt}{e^t + x} + \frac{1}{e^{-1} + x}$$
   (d) i. En déduire que : $G(x) \leqslant S(x) \leqslant G(x) + \dfrac{1}{e^{-1} + x}$
   ii. Démontrer que $0 \leqslant S(x) - G(x) \leqslant \dfrac{1}{e^{-1} + x}$
   iii. En déduire, qu'en $+\infty$, $S(x) \simeq G(x)$
4. Donner $\lim\limits_{x\to+\infty} S(x)$

6.7 Corrections d'exercices

Comme toujours, nous proposons ci-après, la correction de quelques exercices, en fait de ceux que nous avons trouvé les plus « percutants »

6.7.1 Exercices du cours

Exercice 1 :

Etudier la convergence de $\sum_{n\geqslant 1} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

On utilise la somme partielle $S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$

Comme $\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \ln\left(\frac{1+k}{k}\right) = \ln(1+k) - \ln k$ et donc :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (\ln(1+k) - \ln k) = \sum_{k=1}^{n} \ln(1+k) - \sum_{k=1}^{n} \ln k = \sum_{k=2}^{n+1} \ln k - \sum_{k=1}^{n} \ln k = n\ln(n+1)$$

Donc $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$ et la série $\sum_{n\geqslant 1} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ est donc divergente.

Exercice 2 :

On considère la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$. Montrer que les sommes partielles $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ sont minorées par $v_n = \sqrt{n}$.

Pour tout $k = 1, \cdots, n$, nous avons $\frac{1}{\sqrt{k}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}}$ et donc, en passant à la sommation, nous avons :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$$

Comme $S_n \geqslant \sqrt{n}$, nous avons $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$ et donc la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge ;

> *Dans les deux exercices que nous venons de résoudre, nous voyons que ce n'est pas parce que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ que la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge ; le critère $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ est un critère nécessaire pour la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$, mais pas suffisant.*

Exercice 4 :

Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 3} \frac{2n-1}{n(n^2-4)}$ est convergente et calculer sa somme

1. Nous allons toujours étudier les sommes partielles $S_n = \sum_{k=3}^{n} \frac{2k-1}{k(k^2-4)}$.

   Il nous faut commencer par décomposer en éléments simples l'expression $\frac{2k-1}{k(k^2-4)}$

   Tous calculs faits, nous avons :

$$\frac{2k-1}{k(k^2-4)} = \frac{\frac{1}{4}}{k} - \frac{\frac{5}{8}}{k+2} + \frac{\frac{3}{8}}{k-2}$$

2. De telle sorte que $S_n = \sum_{k=3}^{n} \frac{\frac{1}{4}}{k} - \sum_{k=3}^{n} \frac{\frac{5}{8}}{k+2} + \sum_{k=3}^{n} \frac{\frac{3}{8}}{k-2} = \frac{1}{4}\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k} - \frac{5}{8}\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k+2} + \frac{3}{8}\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k-2}$

   Il nous faut, maintenant, réarranger les indices ; ce qui nous donne :

$$S_n = \frac{1}{4}\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k} - \frac{5}{8}\sum_{k=5}^{n+2} \frac{1}{k} + \frac{3}{8}\sum_{k=1}^{n-2} \frac{1}{k}$$

   En prenant les termes communs, qui sont les termes d'indices 5 à $n-2$ nous obtenons :

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{\frac{1}{4}}{3} + \frac{\frac{1}{4}}{4} + \frac{1}{4}\sum_{k=5}^{n-2} \frac{1}{k} + \frac{\frac{1}{4}}{n-1} + \frac{\frac{1}{4}}{n} \\ &- \frac{5}{8}\sum_{k=5}^{n-2} \frac{1}{k} - \frac{\frac{5}{8}}{n-1} - \frac{\frac{5}{8}}{n} - \frac{\frac{5}{8}}{n+1} - \frac{\frac{5}{8}}{n+2} \\ &+ \frac{\frac{3}{8}}{1} + \frac{\frac{3}{8}}{2} + \frac{\frac{3}{8}}{3} + \frac{\frac{3}{8}}{4} + \frac{3}{8}\sum_{k=5}^{n-2} \frac{1}{k} \end{aligned}$$

   D'où on tire : $S_n = \frac{89}{96} - \frac{3}{8}\left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}\right) - \frac{5}{8}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right)$

3. De l'expression ci-dessus, nous tirons : $\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{89}{96}$, c'est à dire que la série $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{2n-1}{n(n^2-4)}$ converge, et que $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{2n-1}{n(n^2-4)} = \frac{89}{96}$

Exercice 5 :

Soient $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ deux séries à termes strictement positifs convergentes. Montrer que les séries suivantes sont aussi convergentes :

1. $\sum_{n\geqslant 0} \max(u_n, v_n)$ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $\max(u_n, v_n) \leqslant u_n + v_n$. Comme les séries $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ sont deux séries à termes strictement positifs convergentes, la série somme $\sum_{n\geqslant 0} u_n + v_n$ est, elle aussi convergente.

   En vertu des théorèmes de majorations, la série $\sum_{n\geqslant 0} \max(u_n, v_n)$ est, elle aussi convergente.

2. $\sum_{n\geqslant 0} \sqrt{u_n v_n}$ En utilisant l'inégalité de Schwarz, nous avons, pour tout $x \geqslant 0$ et tout $y \geqslant 0$ l'inégalité $\sqrt{xy} \leqslant \frac{x+y}{2}$. En l'appliquant à u_n et v_n, nous avons $\sqrt{u_n v_n} \leqslant \frac{u_n + v_n}{2}$

   Et la conclusion est la même que ci-dessus ; la série $\sum_{n\geqslant 0} \sqrt{u_n v_n}$ est donc convergente.

3. $\sum_{n\geqslant 0} \frac{u_n v_n}{u_n + v_n}$ De l'inégalité $\sqrt{xy} \leqslant \frac{x+y}{2}$ utilisée dans l'exercice précédent, nous tirons $\frac{1}{x+y} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{xy}}$ et donc, $\frac{xy}{x+y} \leqslant \frac{xy}{2\sqrt{xy}} = \frac{\sqrt{xy}}{2}$.

   En remplaçant x et y par u_n et v_n, nous obtenons : $\frac{u_n v_n}{u_n + v_n} \leqslant \frac{\sqrt{u_n v_n}}{2}$. Comme la série $\sum_{n\geqslant 0} \sqrt{u_n v_n}$ converge, par les théorèmes de majorations, on en déduit que la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{u_n v_n}{u_n + v_n}$ converge aussi.

4. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{\sqrt{u_n}}{n}$

Nous savons que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$ est une série convergente ; donc, d'après la question ci-dessus, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\sqrt{\frac{1}{n^2}\times u_n}$ est elle aussi convergente, et donc, comme $\displaystyle\sqrt{\frac{1}{n^2}\times u_n}=\frac{1}{n}\sqrt{u_n}=\frac{\sqrt{u_n}}{n}$, nous en déduisons que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{\sqrt{u_n}}{n}$ est, elle aussi convergente.

5. *Soient $\alpha\in\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}u_n$ une série à termes strictement positifs convergente. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{\sqrt{u_n}}{n^\alpha}$ est convergente*

Soit donc $\alpha\in\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$; alors, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^{2\alpha}}$ est convergente, puisque $2\alpha>1$. Ainsi, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\sqrt{\frac{1}{n^{2\alpha}}\times u_n}$ est convergente.

Or, $\displaystyle\sqrt{\frac{1}{n^{2\alpha}}\times u_n}=\sqrt{\frac{u_n}{n^{2\alpha}}}=\frac{\sqrt{u_n}}{n^\alpha}$, et donc, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{\sqrt{u_n}}{n^\alpha}$ est convergente.

Exercice 6 :

On considère la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}u_n$, à termes positifs et convergente. Montrer que si $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}nu_n$ existe, alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}nu_n=0$

On suppose le contraire, c'est à dire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}nu_n=k$ où $k\neq 0$

- ⋆ Premièrement, comme $u_n>0$, alors $k>0$
- ⋆ Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}nu_n=k$, il existe un entier $N\in\mathbb{N}$ tel que si $n>N$, alors $\displaystyle\frac{-k}{2}\leqslant nu_n-k\leqslant\frac{k}{2}$, c'est à dire, qu'à partir d'un certain rang N, nous avons $\displaystyle\frac{k}{2}\leqslant nu_n$, c'est à dire qu'à partir du rang N, $\displaystyle u_n\geqslant\frac{k}{2n}$.
- ⋆ Le terme général u_n est alors minoré par le terme général d'une série divergente, et la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}u_n$ serait alors divergente. Contradiction avec l'hypothèse.

La résolution est semblable si $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}nu_n=+\infty$

Exercice 7 :

Nous ne corrigeons pas tous les items de cet exercice

Déterminer la nature des séries suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\cos n$ Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\cos n$ n'existe pas, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\cos n$ est divergente
2. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^{n^2}}{2^n}$ Nous avons $\displaystyle\left|\frac{(-1)^{n^2}}{2^n}\right|=\frac{1}{2^n}$. La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^{n^2}}{2^n}$ est donc absolument convergente, donc convergente.
3. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}e^{-n^2}$ Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, nous avons $n\leqslant n^2$ et donc $-n^2\leqslant -n$; de là nous tirons que

$0 < e^{-n^2} \leqslant e^{-n}$. La série $\sum_{n\geqslant 0} e^{-n}$ étant une série géométrique convergente, d'après les théorèmes de majoration, la série $\sum_{n\geqslant 0} e^{-n^2}$ converge, elle aussi.

4. $\sum_{n\geqslant 0} \sin \frac{1}{2^n}$ Il y a deux façons de démontrer la convergence de cete série :

   ⋆ La première utilise l'inégalité vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$: $|\sin x| \leqslant |x|$. Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < \frac{1}{2^n} < \frac{\pi}{2}$, nous avons $0 < \sin \frac{1}{2^n}$ et nous avons alors $0 < \sin \frac{1}{2^n} \leqslant \frac{1}{2^n}$. La série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{2^n}$ étant une série géométrique convergente, par les théorèmes de majoration, nous déduisons que $\sum_{n\geqslant 0} \sin \frac{1}{2^n}$ est une série convergente

   ⋆ Une autre méthode consiste à utiliser l'équivalence. En $+\infty$, nous avons : $\sin \frac{1}{2^n} \underset{+\infty}{\approx} \frac{1}{2^n}$. De la convergence de $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{2^n}$, on en déduit celle de $\sum_{n\geqslant 0} \sin \frac{1}{2^n}$

Exercice 8 :

Donner la somme de la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ où le terme général u_n est défini par :

$$u_n = \begin{cases} \frac{1}{3^k} & \text{si } n = 2k \\ \frac{1}{3^{k+1}} & \text{si } n = 2k+1 \end{cases}$$

Ce n'est pas exactement une question difficile :

$$\sum_{n\geqslant 0} u_n = \sum_{k\geqslant 0} u_{2k} + u_{2k+1} = \sum_{k\geqslant 0} u_{2k} + \sum_{k\geqslant 0} u_{2k+1} = \sum_{k\geqslant 0} \frac{1}{3^k} + \sum_{k\geqslant 0} \frac{1}{3^{k+1}} = \frac{4}{3} \sum_{k\geqslant 0} \frac{1}{3^k}$$

Comme $\sum_{k\geqslant 0} \frac{1}{3^k} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$, nous avons $\sum_{n\geqslant 0} u_n = \frac{4}{3} \times \frac{3}{2} = 2$

Exercice 9 :

Utiliser les règles de D'Alembert ou de Cauchy pour décider si ces séries sont convergentes ou divergentes :

1. $\sum \left(\frac{n+3}{2n+1}\right)^n$

   Il facile de voir qu'il faut, ici, utiliser le critère de Cauchy.

   En effet, $\sqrt[n]{\left(\frac{n+3}{2n+1}\right)^n} = \frac{n+3}{2n+1}$; comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{n+3}{2n+1} = \frac{1}{2}$, nous déduisons que la série $\sum \left(\frac{n+3}{2n+1}\right)^n$ est convergente.

2. $\sum \frac{n\,!}{n^n}$

   Nous allons, dans ce cas, utiliser le critère de D'Alembert.

   ⋆ Tout d'abord, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \times \frac{n^n}{n!} = \frac{(n+1) \times n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{n^n}{(n+1)^n}$

   ⋆ Ensuite, $\frac{n^n}{(n+1)^n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(\frac{1}{(n+1) \times \frac{1}{n}}\right)^n = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$

⋆ Et là, nous tombons sur le piège classique !! Nous avons : $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$ Il est facile de prouver *(avec les équivalents ou les développements limités)* que

$$\lim_{n\to+\infty} n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1$$

Donc, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$

Nous en déduisons que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{e}$

Comme $\dfrac{1}{e} < 1$, la série $\displaystyle\sum\frac{n\,!}{n^n}$ est une série convergente.

En prime : comme la série $\displaystyle\sum\frac{n\,!}{n^n}$ est une série convergente, nous pouvons déduire un résultat que nous avons déjà établi : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{n\,!}{n^n} = 0$ et que, donc $n! \in o\left(n^n\right)$

3. $\displaystyle\sum\left(\frac{n+3}{2n+1}\right)^{(-1)^n n}$

En fait cette série est l'addition de 2 séries. Posons $u_n = \left(\dfrac{n+3}{2n+1}\right)^{(-1)^n n}$

⋆ Si n est pair, alors $u_n = \left(\dfrac{n+3}{2n+1}\right)^n$ et si n est impair, alors $u_n = \left(\dfrac{2n+1}{n+3}\right)^n$

⋆ De telle sorte que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{n+3}{2n+1}\right)^{(-1)^n n} = \sum_{k\geqslant 0}\left(\frac{2k+3}{4k+1}\right)^{2k} + \sum_{k\geqslant 0}\left(\frac{4k+3}{2k+4}\right)^{2k+1}$

⋆ Utilisons le critère de Cauchy pour étudier ces 2 séries :

→ Tout d'abord $\sqrt[k]{\left(\dfrac{2k+3}{4k+1}\right)^{2k}} = \left(\dfrac{2k+3}{4k+1}\right)^2$.

Or, $\displaystyle\lim_{k\to+\infty}\left(\frac{2k+3}{4k+1}\right)^2 = \frac{1}{4}$ et donc la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0}\left(\frac{2k+3}{4k+1}\right)^{2k}$ converge

→ Ensuite $\sqrt[k]{\left(\dfrac{4k+3}{2k+4}\right)^{2k+1}} = \left(\dfrac{4k+3}{2k+4}\right)^{2+\frac{1}{k}} = \left(\dfrac{4k+3}{2k+4}\right)^2 \times \left(\dfrac{4k+3}{2k+4}\right)^{\frac{1}{k}}$

Clairement, $\displaystyle\lim_{k\to+\infty}\left(\frac{4k+3}{2k+4}\right)^2 = 4.$

De plus, $\left(\dfrac{4k+3}{2k+4}\right)^{\frac{1}{k}} = e^{\dfrac{1}{k}\ln\left(\dfrac{4k+3}{2k+4}\right)}$.

Nous avons $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{k}\ln\left(\frac{4k+3}{2k+4}\right) = 0$, et donc $\displaystyle\lim_{k\to+\infty}\left(\frac{4k+3}{2k+4}\right)^{\frac{1}{k}} = 1$

→ Nous en déduisons donc que $\displaystyle\lim_{k\to+\infty}\sqrt[k]{\left(\frac{4k+3}{2k+4}\right)^{2k+1}} = 4$ et que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0}\left(\frac{4k+3}{2k+4}\right)^{2k+1}$ diverge

En conclusion, $\displaystyle\sum\left(\frac{n+3}{2n+1}\right)^{(-1)^n n}$ est la somme d'une série convergente et d'une série divergente et est donc divergente.

4. $\displaystyle\sum\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{n^2}$

Nous allons utiliser le critère de Cauchy.

$$\sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{n^2}} = \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n = \left(\frac{2n+1}{n}\right)^{-n} = \left(2+\frac{1}{n}\right)^{-n} = 2^{-n}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{-n}$$

Nous avons $2^{-n}\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^{-n} = e^{-n\ln 2} \times e^{-n\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)}$

* ⋆ Dans un premier temps, $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-n\ln 2} = 0$
* ⋆ Ensuite, $-n\ln\left(1+\dfrac{1}{2n}\right) = -\dfrac{1}{2}\times 2n\ln\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)$.

  Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n\ln\left(1+\dfrac{1}{2n}\right) = 1$, nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty} -n\ln\left(1+\dfrac{1}{2n}\right) = -\dfrac{1}{2}$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-n\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)} = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$
* ⋆ En conclusion, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left(\dfrac{n}{2n+1}\right)^{n^2}} = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{-n\ln 2} \times \lim\limits_{n\to+\infty} e^{-n\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)} = 0$

La série $\sum \left(\dfrac{n}{2n+1}\right)^{n^2}$ converge donc

5. $\sum \dfrac{2^n}{n^2\sin^{2n}\alpha}$ *avec $\alpha \neq k\pi$ où $k\in\mathbb{Z}$*

   Et c'est toujours du Cauchy !!...Nous avons :

$$\sqrt[n]{\frac{2^n}{n^2\sin^{2n}\alpha}} = \frac{2}{n^{\frac{2}{n}}\sin^2\alpha}$$

   Il est facile de montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{\frac{2}{n}} = 1$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{n^{\frac{2}{n}}\sin^2\alpha} = \dfrac{2}{\sin^2\alpha}$. Or, si $0<\sin^2\alpha\leqslant 1$, nous avons toujours $\dfrac{1}{\sin^2\alpha}\geqslant 1$ et donc $\dfrac{2}{\sin^2\alpha}\geqslant 2$.

   La série $\sum \dfrac{2^n}{n^2\sin^{2n}\alpha}$ est donc divergente.

6. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n^p}{a^n}$

   C'est un exercice intéressant, qui tente de comparer les termes d'une progression géométrique avec les termes d'une série puissance.

   Un bon moyen consiste à utiliser le critère de d'Alembert :

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{\frac{(n+1)^p}{a^{n+1}}}{\frac{n^p}{a^n}} \\ &= \frac{(n+1)^p\,a^n}{n^p a^{n+1}} \\ &= \frac{1}{a}\left(1+\frac{1}{n}\right)^p\end{aligned}$$

   Or, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = 1$, de telle sorte que $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{a}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^p = \dfrac{1}{a}$.

   Ainsi, si $a<1$, $\dfrac{1}{a}>1$ et la série diverge, et que si, au contraire, $a>1$ alors $\dfrac{1}{a}<1$ et la série converge.

   Que se passe-t-il si $a=1$?

   La série devient : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n^p$ qui est une série de Riemann. Cette série converge si et seulement $p<-1$, et diverge sinon

7. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{2^n n!}{n^n}$

La meilleure méthode semble être, ici, d'utiliser le critère de D'Alembert :

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{2^{n+1}(n+1)!n^n}{(n+1)^{n+1}2^n n!}\\ &= 2\frac{n^n}{(n+1)^n}\end{aligned}$$

Reste donc à calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^n}{(n+1)^n}$.

Or, rien de plus simple ; il suffit de voir que $\dfrac{n^n}{(n+1)^n} = \dfrac{1}{\dfrac{(n+1)^n}{n^n}}$.

Comme $\dfrac{(n+1)^n}{n^n} = \dfrac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$, il suffit de se rappeler que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e$, de telle sorte que $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{2}{e}$, et $\dfrac{2}{e} < 1$, ce qui montre que la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{2^n n!}{n^n}$ converge.

8. $\sum\limits_{n\geqslant 1}\prod\limits_{k=2}^{n}\dfrac{\ln k}{k}$

Une nouvelle fois, il faut utiliser le critère de D'Alembert, et ici, c'est très simple !!

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{\prod\limits_{k=2}^{n+1}\dfrac{\ln k}{k}}{\prod\limits_{k=2}^{n}\dfrac{\ln k}{k}}\\ &= \frac{\ln(n+1)}{n}\end{aligned}$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\ln(n+1)}{n} = 0$; donc, la série converge

Exercice 10 :

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs. On construit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en écrivant : $v_n = \dfrac{u_n}{1+u_n}$

Démontrer que les séries $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} v_n$ sont de même nature.

1. Nous avons $u_n \geqslant 0$ et $u_n < u_n + 1$. Nous avons donc $0 \leqslant \dfrac{u_n}{1+u_n} < 1$, c'est à dire $0 \leqslant v_n < 1$
2. Par un calcul simple, on démontre que $u_n = \dfrac{v_n}{1-v_n}$ et nous voyons, très facilement que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$
3. Ainsi, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet pas pour limite 0 en $+\infty$ si et seulement si la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet pas pour limite 0 en $+\infty$ et alors, les 2 séries $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} v_n$ sont divergentes.
4. Supposons que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, alors les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont équivalentes en $+\infty$: $u_n \underset{+\infty}{\approx} v_n$

   En effet, $\dfrac{v_n}{u_n} = \dfrac{1}{1+u_n}$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{v_n}{u_n} = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{1+u_n} = 1$. Les deux séries $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} v_n$ sont alors de même nature.

Dans tous les cas, les séries $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} v_n$ sont de même nature.

Exercice 11 :

On se donne P et Q, 2 polynômes non nuls à une indéterminée et à coefficients réels. k est le premier entier supérieur à la plus grande racine réelle de Q. Etudier la série $\sum_{n\geqslant k}\frac{P(n)}{Q(n)}$

Si k est l'entier directement supérieur à la plus grande racine réelle de Q, la fraction $\frac{P(n)}{Q(n)}$ ne pose pas de problème d'existence.
Posons $P(X)=a_pX^p+a_{p-1}X^{p-1}+\cdots+a_1X+a_0$ avec $a_p\neq 0$ et $Q(X)=b_qX^q+b_{q-1}X^{q-1}+\cdots+b_1X+b_0$ avec $b_q\neq 0$.
Classiquement, en $+\infty$, nous avons $\frac{P(n)}{Q(n)}\underset{+\infty}{\approx}\frac{a_pn^p}{b_qn^q}$. Et donc :

- $\star$ Si $p\geqslant q$, $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_pn^p}{b_qn^q}\neq 0$ et la série $\sum_{n\geqslant k}\frac{P(n)}{Q(n)}$ est divergente
- $\star$ Si $q=p+1$, alors $\frac{a_pn^p}{b_qn^q}=\frac{a_p}{b_q}\times\frac{1}{n}$ et la série $\frac{a_p}{b_q}\sum_{n\geqslant k}\frac{1}{n}$ est la série harmonique divergente et donc la série $\sum_{n\geqslant k}\frac{P(n)}{Q(n)}$ est divergente
- $\star$ Si $q\geqslant p+2$, alors $\frac{a_pn^p}{b_qn^q}=\frac{a_p}{b_q}\times\frac{1}{n^{q-p}}$ et comme $q-p\geqslant 2$, la série $\frac{a_p}{b_q}\sum_{n\geqslant k}\frac{1}{n^{q-p}}$ est une série de Riemann convergente et donc la série $\sum_{n\geqslant k}\frac{P(n)}{Q(n)}$ est convergente

Exercice 12 :

On considère la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

1. *Montrer au moyen d'un théorème de comparaison que cette série est convergente*

   Nous avons $\frac{1}{n(n+1)(n+2)}\underset{+\infty}{\approx}\frac{1}{n^3}$. Les séries $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ et $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^3}$ sont donc de même nature ; or, la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^3}$ est une série de Riemann convergente. La série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ est donc une série convergente.
2. *Retrouver le résultat en calculant la somme.*

   Nous allons tout d'abord étudier la somme partielle $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

   Décomposons $\frac{1}{k(k+1)(k+2)}$ en éléments simples. Nous avons facilement, par calcul :

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{\frac{1}{2}}{k}-\frac{1}{k+1}+\frac{\frac{1}{2}}{k+2}$$

De telle sorte que

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{1}{2}}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{1}{2}}{k+2} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} + \frac{1}{2}\sum_{k=3}^{n+2} \frac{1}{k} \\
&= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k}\right) - \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k} + \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{2}\left(\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right) \\
&= \frac{3}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right) \\
&= \frac{1}{4} - \frac{\frac{1}{2}}{(n+1)(n+2)}
\end{aligned}$$

Ainsi, $S_n = \dfrac{1}{4} - \dfrac{\frac{1}{2}}{(n+1)(n+2)}$, et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\frac{1}{2}}{(n+1)(n+2)} = 0$, nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \dfrac{1}{4}$.
Et donc, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$ est convergente et $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)} = \dfrac{1}{4}$

Exercice 13 :

Etudier la série de terme général $\sqrt{n^4+2n+1} - \sqrt{n^4+an}$ où a est un réel positif.

Pas aussi facile que cela!! L'une des idées majeures pour résoudre cet exercice, est l'utilisation des équivalents. Tout d'abord :

$$\begin{aligned}
\sqrt{n^4+2n+1} - \sqrt{n^4+an} &= \frac{n^4+2n+1-n^4-an}{\sqrt{n^4+2n+1}+\sqrt{n^4+an}} \\
&= \frac{(2-a)n+1}{n^2\left(\sqrt{1+2\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n^4}}+\sqrt{1+\frac{a}{n^3}}\right)}
\end{aligned}$$

1. Ce qui montre que, si $a=2$, alors, en $+\infty$, $\sqrt{n^4+2n+1} - \sqrt{n^4+an} \underset{+\infty}{\approx} \dfrac{1}{2n^2}$, ce qui montre que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\left(\sqrt{n^4+2n+1} - \sqrt{n^4+an}\right)$ est de même nature que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{2n^2}$ qui est une série de Riemann convergente.
   Donc, si $a=2$, alors la série $\sqrt{n^4+2n+1} - \sqrt{n^4+an}$ converge
2. Et, si $a\neq 2$, alors $\sqrt{n^4+2n+1} - \sqrt{n^4+an} \underset{+\infty}{\approx} \dfrac{2-a}{2n}$; comme la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n}$ diverge, il en est de même de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\left(\sqrt{n^4+2n+1} - \sqrt{n^4+an}\right)$

Exercice 14 :

On considère la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ où $u_n = \dfrac{\ln n}{n^\alpha}$ avec $\alpha > 0$. Discuter suivant les valeurs de α de la convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$

Remarque : avant de commencer, il est clair que les cas où $\alpha \leqslant 0$ sont inintéressants, puis que si $\alpha \leqslant 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln n}{n^\alpha} = +\infty$ et la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{\ln n}{n^\alpha}$ diverge.

1. Nous allons commencer par étudier $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^{\alpha}}$ avec $\alpha > 0$
   (a) Tout d'abord, le domaine de définition de f est $\mathbb{R}^{*+}$, mais comme nous allons utiliser des comparaisons avec une série numérique, nous allons étudier f sur l'intervalle non borné $[+1; +\infty[$
   (b) Comme $\alpha > 0$, nous avons $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^{\alpha}} = 0$
   (c) Calculons la dérivée de f :
   $$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x^{\alpha} - \alpha x^{\alpha-1} \ln x}{x^{2\alpha}} = \frac{x^{\alpha-1}(1 - \alpha \ln x)}{x^{2\alpha}}$$
   Le signe de f' ne dépend donc que de celui de $1 - \alpha \ln x$. f' s'annule en $x_0 = e^{\frac{1}{\alpha}}$ et donc, en utilisant le fait que $\ln x$ soit strictement croissante sur $[+1; +\infty[$:
   ⋆ Si $x \in \left[+1; e^{\frac{1}{\alpha}}\right]$ alors $f'(x) \geqslant 0$ et f y est croissante.
   ⋆ Si $x \geqslant e^{\frac{1}{\alpha}}$, alors $f'(x) \leqslant 0$ et f y est décroissante
   f est donc décroissante à partir de x_0
   (d) Nous en déduisons, d'après 6.4.4 que la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{\ln n}{n^{\alpha}}$ et l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^{\alpha}}\,dx$ ont même nature
2. Etude de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^{\alpha}}\,dx$
   Soit $X > 1$. Pour connaître le sens de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^{\alpha}}\,dx$, nous allons étudier $\displaystyle\int_1^{X} \frac{\ln x}{x^{\alpha}}\,dx$
   (a) Si $\alpha = 1$, alors nous avons $\displaystyle\int_1^{X} \frac{\ln x}{x^{\alpha}}\,dx = \int_1^{X} \frac{\ln x}{x}\,dx = \left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^X = \frac{(\ln X)^2}{2}$
   Nous avons $\lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{(\ln X)^2}{2} = +\infty$ et donc l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^{\alpha}}\,dx$ est divergente
   (b) Si $\alpha \neq 1$, nous allons calculer $\displaystyle\int_1^{X} \frac{\ln x}{x^{\alpha}}\,dx$ par parties.
   $$\begin{cases} u = \ln x & u' = \dfrac{1}{x} \\ v' = x^{-\alpha} & v = \dfrac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} = \dfrac{1}{1-\alpha} \times \dfrac{1}{x^{\alpha-1}} \end{cases}$$
   D'où :
   $$\begin{aligned} \int_1^{X} \frac{\ln x}{x^{\alpha}}\,dx &= \left[\frac{1}{1-\alpha} \times \frac{\ln x}{x^{\alpha-1}}\right]_1^X - \frac{1}{1-\alpha} \int_1^X \frac{1}{x^{\alpha}}\,dx \\ &= \frac{1}{1-\alpha} \times \frac{\ln X}{X^{\alpha-1}} - \frac{1}{1-\alpha}\left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_1^X \\ &= \frac{1}{1-\alpha} \times \frac{\ln X}{X^{\alpha-1}} - \frac{1}{(1-\alpha)^2}\left(\frac{1}{X^{\alpha-1}} - 1\right) \end{aligned}$$
   (c) Ainsi :
   → Si $\alpha > 1$, alors $\lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{\ln X}{X^{\alpha-1}} = 0$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{1}{X^{\alpha-1}} = 0$ et donc $\lim\limits_{X \to +\infty} \displaystyle\int_1^{X} \frac{\ln x}{x^{\alpha}}\,dx = \frac{1}{(1-\alpha)^2}$
   Ce qui veut dire que si $\alpha > 1$, alors $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^{\alpha}}\,dx$ existe, et nous avons, même : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^{\alpha}}\,dx = \frac{1}{(1-\alpha)^2}$

$\rightarrow$ Supposons $\alpha < 1$. Alors :

$$\int_1^X \frac{\ln x}{x^\alpha}\,dx = \frac{1}{1-\alpha} \times \frac{1}{X^{\alpha-1}}\left(\ln X - \frac{1}{1-\alpha}\right) + \frac{1}{(1-\alpha)^2}$$

- $\star$ Nous avons $\lim\limits_{X\to+\infty}\left(\ln X - \dfrac{1}{1-\alpha}\right) = +\infty$
- $\star$ Comme $\alpha < 1$, nous avons $\lim\limits_{X\to+\infty}\left(\dfrac{1}{1-\alpha} \times \dfrac{1}{X^{\alpha-1}}\right) = +\infty$
- $\star$ Donc, $\lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{1}{1-\alpha}\times\dfrac{1}{X^{\alpha-1}}\left(\ln X - \dfrac{1}{1-\alpha}\right)+\dfrac{1}{(1-\alpha)^2} = +\infty$ et donc $\lim\limits_{X\to+\infty}\displaystyle\int_1^X \frac{\ln x}{x^\alpha}\,dx = +\infty$

  Ce qui veut dire que si $\alpha < 1$, alors l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha}\,dx$ diverge

$\rightarrow$ Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha}\,dx$ converge si et seulement si $\alpha > 1$

3. Et donc, d'après 6.4.4, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln n}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$

Exercice 15 :

Etudier les séries suivantes. Sont-elles alternées ? Convergent-elles absolument ?

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \tan\left(\frac{1}{n}\right)$

   (a) Est-ce une série alternée ?

   Il faut remarquer que si $n \geqslant 1$, alors, $0 < \dfrac{1}{n} \leqslant 1 < \dfrac{\pi}{2}$, et donc $\tan\left(\dfrac{1}{n}\right) > 0$; nous avons donc bien affaire à une série alternée.

   (b) Est-ce une série alternée convergente ?

   La fonction $\tan x$ est croissante sur l'intervalle $\left]0\ \dfrac{\pi}{2}\right[$; ainsi, comme $\dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{n}$, nous avons $\tan\dfrac{1}{n+1} < \tan\dfrac{1}{n}$; ce qui montre que la suite $\left(\tan\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

   De plus, $\lim\limits_{n\to\infty} \tan\left(\dfrac{1}{n}\right) = 0$. D'après le critère de convergence des séries alternées, la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \tan\left(\frac{1}{n}\right)$ converge simplement.

   (c) Cette série converge-t-elle absolument ?

   Une série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est dite absolument convergente, si la série des valeurs absolues $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$ converge.

   Ici, $\left|(-1)^n \tan\left(\dfrac{1}{n}\right)\right| = \tan\left(\dfrac{1}{n}\right)$, et, en $+\infty$, $\tan\left(\dfrac{1}{n}\right) \simeq \dfrac{1}{n}$; or, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}$ étant la série harmonique, diverge ; nous en concluons donc que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left|(-1)^n \tan\left(\frac{1}{n}\right)\right|$ diverge.

   La série n'est donc pas absolument convergente

2. $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\cos \pi n}{\ln n}$

(a) Est-ce une série alternée ?
Un piège ? ? Où ? ? Il faut juste remarquer que $\cos \pi n = (-1)^n$....Petit piège ! !
Puis, il va sans dire que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{\ln n} = 0$ et que la suite $\left(\dfrac{1}{\ln n}\right)_{n \geqslant 2}$ est une suite décroissante.
La série $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{\cos \pi n}{\ln n}$ est une série alternée convergente

(b) La série $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{\cos \pi n}{\ln n}$ converge-t-elle absolument ?
Il est assez évident que $\left|\dfrac{\cos \pi n}{\ln n}\right| = \dfrac{1}{\ln n}$
D'autre part, pour tout $n \geqslant 2$, nous avons $n > \ln n$ et donc $\dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{\ln n}$. Le terme général $\dfrac{1}{\ln n}$ est minoré par le terme général d'une série divergente et donc la série $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{1}{\ln n}$ est divergente.
Nous en déduisons que la série $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{\cos \pi n}{\ln n}$ n'est pas absolument convergente.

3. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \sqrt[n]{n} \sin \dfrac{1}{n}$

(a) Est-ce une série alternée ?
La première idée consiste à regarder le signe de $\sqrt[n]{n} \sin \dfrac{1}{n}$. Il faut qu'il soit constant et positif.
→ Nous avons $\sqrt[n]{n} = e^{\frac{\ln n}{n}}$, et donc $\sqrt[n]{n} > 0$
→ Et, si $n \geqslant 1$, alors, $0 < \dfrac{1}{n} \leqslant 1 < \dfrac{\pi}{2}$, et donc $\sin\left(\dfrac{1}{n}\right) > 0$
→ En synthèse, nous avons $\sqrt[n]{n} \sin \dfrac{1}{n} > 0$
Nous avons donc bien affaire à une série alternée.

(b) Est-ce une série alternée convergente ?
Il faut vérifier que le terme général vérifie le critère des séries alternées.
→ D'une part, $\lim\limits_{n \to +\infty} e^{\frac{\ln n}{n}} = 1$, et d'autre part $\lim\limits_{n \to +\infty} \sin \dfrac{1}{n} = 0$, et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} e^{\frac{\ln n}{n}} \sin \dfrac{1}{n} = 0$, c'est à dire $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{n} \sin \dfrac{1}{n} = 0$
→ Il faut maintenant montrer que la suite $\left(\sqrt[n]{n} \sin \dfrac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante.
Comme la fonction $\sin x$ est croissante sur l'intervalle $\left]0\ \dfrac{\pi}{2}\right[$, comme $\dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{n}$, nous avons $\sin \dfrac{1}{n+1} < \sin \dfrac{1}{n}$; ce qui montre que la suite $\left(\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante (et positive !).
→ Il faut maintenant montrer que la suite $\left(e^{\frac{\ln n}{n}}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est elle aussi décroissante.
On considère la fonction associée $f(x) = e^{\frac{\ln x}{x}}$ définie pour $x > 0$ et calculons sa dérivée f'.
Nous avons :$f'(x) = \dfrac{1 - \ln x}{x^2} e^{\frac{\ln x}{x}}$ qui est négative si $x \geqslant e$, ce qui montre que la suite $\left(e^{\frac{\ln n}{n}}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante si $n \geqslant 3$.
Ainsi, la suite $\left(\sqrt[n]{n} \sin \dfrac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ décroit dès que $n \geqslant 3$ comme produit de suites positives et décroissantes

On vient de montrer que, d'après le critère des séries alternées, la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \sqrt[n]{n} \sin \dfrac{1}{n}$ converge simplement.

(c) Cette série converge-t-elle absolument ?

Il faut donc regarder le terme $\sqrt[n]{n}\sin\frac{1}{n}$ qui est équivalent, en $+\infty$ à $\frac{1}{n}$, terme général d'une série de Riemann divergente ; la série $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\sqrt[n]{n}\sin\frac{1}{n}$ ne converge donc pas absolument.

4. $\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n}$

(a) C'est triste à dire, mais **cette série ne converge pas absolument**.

En effet $\sum_{n=2}^{+\infty}\left|(-1)^n\frac{\ln n}{n}\right| = \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\ln n}{n}$.

Or, $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\ln n}{n}$ est une série du type $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\ln n}{n^\alpha}$ où $\alpha = 1$.

Nous avons prouvé que les séries du type $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\ln n}{n^\alpha}$ divergeaient si $\alpha \leqslant 1$.

Donc la série $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\ln n}{n}$ diverge et la série $\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n}$ ne converge pas absolument

(b) Converge-t-elle simplement ?

$\rightarrow$ Tout d'abord, $\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln n}{n} = 0$

$\rightarrow$ On considère la fonction associée $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ définie pour $x > 0$ et calculons sa dérivée f'.

Nous avons : $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$ qui est négative si $x \geqslant e$, ce qui montre que la suite $\left(\frac{\ln n}{n}\right)_{n\geqslant 2}$ est décroissante si $n \geqslant 3$.

D'après le critère des séries alternées, la série $\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n}$ converge donc simplement.

5. $\sum_{n=2}^{+\infty}\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)$

Voilà une question qui n'est pas très évidente ! !

Est-ce une série alternée ?

Une série alternée est une série dont le terme général n'est pas de signe constant, et qu'il prend alternativement une valeur positive, puis une valeur négative.

- ⋆ Pour tout $n \geqslant 2$, nous avons $\frac{-1}{n} \leqslant \frac{(-1)^n}{n} \leqslant \frac{1}{n}$ et donc $1+\frac{-1}{n} \leqslant 1+\frac{(-1)^n}{n} \leqslant 1+\frac{1}{n}$

  Lorsque n est impair, alors $1+\frac{(-1)^n}{n} = 1-\frac{1}{n} < 1$ et $\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) < 0$, alors que si n est pair $1+\frac{(-1)^n}{n} = 1+\frac{1}{n} > 1$ et $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) > 0$.

  La série est donc bien alternée.
- ⋆ D'autre part, $\lim_{n\to+\infty}\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right) = 0$
- ⋆ Appelons $u_n = \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)$ et étudions la décroissance de la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$

  $\rightarrow$ Tout d'abord, étudions $u_{2n+1} - u_{2n}$:

$$\begin{aligned} u_{2n+1} - u_{2n} &= \ln\left(1-\frac{1}{2n+1}\right) - \ln\left(1+\frac{1}{2n}\right) \\ &= \ln\left(\frac{2n}{2n+1}\right) - \ln\left(\frac{2n+1}{2n}\right) \\ &= 2\ln\left(\frac{2n}{2n+1}\right) \end{aligned}$$

Comme $0 < \dfrac{2n}{2n+1} < 1$, alors $\ln\left(\dfrac{2n}{2n+1}\right) < 0$ et donc $u_{2n+1} - u_{2n} < 0 \Longleftrightarrow u_{2n+1} < u_{2n}$

$\rightarrow$ Etudions maintenant $u_{2n} - u_{2n-1}$

$$\begin{aligned}
u_{2n} - u_{2n-1} &= \ln\left(1+\frac{1}{2n}\right) - \ln\left(1-\frac{1}{2n-1}\right)\\
&= \ln\left(\frac{2n+1}{2n}\right) - \ln\left(\frac{2n-2}{2n-1}\right)\\
&= \ln(2n+1) - \ln 2n - \ln(2n-2) + \ln(2n-1)\\
&= (\ln(2n+1) - \ln 2n) + (\ln(2n-1) - \ln(2n-2))
\end{aligned}$$

De la croissance de la fonction ln, nous tirons $(\ln(2n+1) - \ln 2n) > 0$ et $(\ln(2n-1) - \ln(2n-2)) > 0$ et donc, par addition de 2 quantités positives, nous avons

$$u_{2n} - u_{2n-1} > 0 \Longleftrightarrow u_{2n} > u_{2n-1}$$

$\rightarrow$ Nous ne pouvons donc rien conclure quant à la croissance ou à la décroissance de $(u_n)_{n\geqslant 2}$ et on ne peut pas appliquer à cette série le critère des séries alternées.

6. $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n\ln n}$

Voilà une question qui ne pose aucune difficulté

(a) La série est bien alternée, et, clairement la suite $\left(\dfrac{1}{n\ln n}\right)_{n\geqslant 2}$ est décroissante et tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

La série $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n\ln n}$ converge donc simplement

(b) Cette série converge-t-elle absolument ?

Il faut donc démontrer que la série $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\ln n}$ converge

- ⋆ Considérons la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x\ln x}$ définie sur l'intervalle $[+2; +\infty[$.
- ⋆ Nous avons, clairement $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x\ln x} = 0$
- ⋆ La dérivée de f est donnée par $f'(x) = \dfrac{-(\ln x + 1)}{(x\ln x)^2}$. f' est négative sur $[+2; +\infty[$, et la fonction f y est décroissante et positive

D'après 6.4.4, la série $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\ln n}$ et l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\ln x}\,dx$ ont même nature

(c) Etudions donc $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\ln x}\,dx$

Soit $X > 2$.

Alors $\displaystyle\int_2^X \frac{1}{x\ln x}\,dx = [\ln|\ln x|]_2^X = \ln(\ln X) - \ln(\ln 2)$

Nous avons $\displaystyle\lim_{X\to+\infty} \ln(\ln X) - \ln(\ln 2) = +\infty$ et donc l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\ln x}\,dx$ diverge, et donc la série $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\ln n}$ diverge elle aussi

Ainsi, la série $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n\ln n}$ est-elle simplement convergente sans l'être absolument.

Exercice 16 :

Nous savons que $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n\,!} = e$

1. *Montrer que la série* $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^2}{n\,!}$ *est convergente et calculer sa somme.*

   (a) On remarque que la série commence à $n = 1$

   (b) Pour démontrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{n!}$ est convergente, on utilise le critère de D'Alembert.

   $$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)!} \times \frac{n\,!}{n^2} = \frac{n+1}{n^2}$$

   Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n^2} = 0$, le critère de D'Alembert montre que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{n!}$ est convergente.

   (c) La recherche de la somme de la série n'est pas immédiate ; il faut d'abord remarquer que $n^2 = n^2 - n + n = n\,(n-1) + n$, et que donc :

   $$\frac{n^2}{n!} = \frac{n\,(n-1)+n}{n!} = \frac{n\,(n-1)}{n!} + \frac{n}{n!}$$

   (d) Ensuite, nous écrivons différemment la somme de cette série :

   $$\begin{aligned}
   \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{n!} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n\,(n-1)}{n!} + \frac{n}{n!} \right) \\
   &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n\,(n-1)}{n!} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n!} \\
   &= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n\,(n-1)}{n!} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n!} \\
   &= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-2)!} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} \\
   &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \\
   &= 2e
   \end{aligned}$$

   (e) Donc, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{n!} = 2e$

2. *Même question pour la série* $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^3}{n\,!}$

   (a) La convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^3}{n\,!}$ se fait de manière identique en utilisant le critère de D'Alembert :

   $$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^3}{(n+1)!} \times \frac{n\,!}{n^3} = \frac{(n+1)^2}{n^3}$$

   Et nous terminons la question en remarquant que $\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^2}{n^3} = 0$.

   La série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^3}{n\,!}$ converge donc.

(b) Nous avons, une nouvelle fois : $n^3 = n^3 - n^2 + n^2 = n^2\,(n-1) + n^2$.
Ecrivons différemment la série :

$$\begin{aligned}\sum_{n\geqslant 1}\frac{n^3}{n\,!} &= \sum_{n\geqslant 1}\frac{n^2\,(n-1)+n^2}{n\,!}\\ &= \sum_{n\geqslant 2}\frac{n^2\,(n-1)}{n\,!}+\sum_{n\geqslant 1}\frac{n^2}{n\,!}\\ &= \sum_{n\geqslant 2}\frac{n}{(n-2)\,!}+2e\end{aligned}$$

(c) Maintenant, c'est $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\frac{n}{(n-2)\,!}$ que nous allons étudier.
Il est clair que $n = (n-2)+2$ et que, donc :

$$\begin{aligned}\sum_{n\geqslant 2}\frac{n}{(n-2)\,!} = \sum_{n\geqslant 2}\frac{(n-2)+2}{(n-2)\,!} = \sum_{n\geqslant 2}\frac{(n-2)}{(n-2)\,!}+\sum_{n\geqslant 2}\frac{2}{(n-2)\,!}\\ = \sum_{n\geqslant 3}\frac{1}{(n-3)\,!}+\sum_{n\geqslant 0}\frac{2}{n\,!} = \sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{n\,!}+2e = 3e\end{aligned}$$

(d) Et donc, nous avons $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{n^3}{n\,!} = 5e$

3. *Soit $p \in \mathbb{N}$.*

(a) *Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{n^p}{n\,!}$ converge*

C'est toujours le même travail : le règle de D'Alembert :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^p}{(n+1)!}\times\frac{n!}{n^p} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^p\times\frac{1}{n+1}$$

Nous avons $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^p\times\frac{1}{n+1} = 0$ et donc la série converge.

Nous appelons $S_p = \displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{n^p}{n\,!}$; nous pouvons déjà remarquer que $S_0 = e$, $S_2 = 2e$ et $S_3 = 5e$

(b) *Montrer que la somme de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{n^p}{n\,!}$ est un multiple entier de e*

Nous allons faire cette démonstration par récurrence sur p.
→ **C'est vrai pour** $p = 0$ puisque $S_0 = e$
→ **Supposons que c'est vrai à l'ordre** p, c'est à dire que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{n^p}{n\,!}$ est un multiple entier de e
→ **Démontrons le à l'ordre** $p+1$
Nous appelons $S_{p+1}^n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k^{p+1}}{k!}$ la somme partielle de la série S_{p+1}. Nous avons alors :

$$S_{p+1}^n = \sum_{k=1}^{n}\frac{k^{p+1}}{k!} = \sum_{k=1}^{n}\frac{k^p\times k}{k!} = \sum_{k=1}^{n}\frac{k^p}{(k-1)!} = \sum_{m=0}^{n-1}\frac{(m+1)^p}{m!}$$

En utilisant la formule du binôme, nous avons : $(m+1)^p = \displaystyle\sum_{j=0}^{p}\binom{p}{j}m^j$

D'où :

$$S_{p+1}^n = \sum_{m=0}^{n-1}\left(\sum_{j=0}^{p}\binom{p}{j}\frac{m^j}{m!}\right) = \sum_{j=0}^{p}\binom{p}{j}\sum_{m=0}^{n-1}\frac{m^j}{m!} = \sum_{j=0}^{p}\binom{p}{j}S_j^{n-1}$$

En utilisant les théorèmes sur les limites, nous avons

$$\lim_{n\to+\infty} S_{p+1}^n = \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{j=0}^{p}\binom{p}{j}S_j^{n-1}\right) = \sum_{j=0}^{p}\binom{p}{j}\lim_{n\to+\infty} S_j^{n-1}$$

C'est à dire $S_{p+1} = \displaystyle\sum_{j=0}^{p}\binom{p}{j}S_j$.

Comme $0 \leqslant j \leqslant p$, S_j est un multiple entier de e et comme $\binom{p}{j} \in \mathbb{N}$, nous avons $\displaystyle\sum_{j=0}^{p}\binom{p}{j}S_j$ multiple entier de e

Ce que nous voulions.

Donc, pour tout $p \in \mathbb{N}$, la somme de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{n^p}{n\,!}$ est un multiple entier de e

Nous avons même démontré la relation $S_{p+1} = \displaystyle\sum_{j=0}^{p}\binom{p}{j}S_j$. Par exemple :

- $S_1 = S_0 = e$
- $S_2 = \displaystyle\sum_{j=0}^{1}\binom{1}{j}S_j = \binom{1}{0}S_0 + \binom{1}{1}S_1 = e + e = 2e$
- $S_3 = \displaystyle\sum_{j=0}^{2}\binom{2}{j}S_j = \binom{2}{0}S_0 + \binom{2}{1}S_1 + \binom{2}{2}S_2 = e + 2e + 2e = 5e$

Ce que nous avions déjà ! !

Exercice 17 :

Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence :

$$u_0 \in \mathbb{C} \text{ et } (\forall n \in \mathbb{N})\,(u_{n+1} = u_n + v_n)$$

est convergente si et seulement si la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ est convergente.

Nous avons $u_{n+1} = u_n + v_n \iff u_{n+1} - u_n = v_n$. En faisant une sommation, nous avons :

$$\sum_{k=0}^{n} u_{k+1} - u_k = \sum_{k=0}^{n} v_k \iff u_{n+1} = u_0 + \sum_{k=0}^{n} v_k$$

Ainsi, il est clair que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_{n+1}$ existe si et seulement si $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n} v_k$ existe, c'est à dire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente si et seulement si la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ est convergente.

Ce que nous voulions

6.7.2 Pour aller plus loin *(miscelleanous)*

Exercice 18 :

Etudier la convergence des séries suivantes.

1. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} n\sin\frac{1}{n}$

   La question ne pose pas de difficulté ; en $+\infty$, nous avons $\sin\frac{1}{n} \underset{+\infty}{\approx} \frac{1}{n}$ et donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\sin\frac{1}{n} = 1$. Le terme général ne tendant pas vers 0, la série est divergente.

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}\ln n}{n^2+1}$

   En $+\infty$, nous avons $\dfrac{\sqrt{n}\ln n}{n^2+1} \underset{+\infty}{\approx} \dfrac{\ln n}{n^{\frac{3}{2}}}$. Nous avons montré que les séries du type $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{\ln n}{n^\alpha}$ convergent si et seulement si $\alpha > 1$. Donc la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{\ln n}{n^{\frac{3}{2}}}$ est convergente. Donc, la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}\ln n}{n^2+1}$ est, elle aussi, convergente

3. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} (n)^{\frac{1}{n^2}} - 1$

   C'est une question plus délicate !!

   Tout d'abord, remarquons que $(n)^{\frac{1}{n^2}} = e^{\frac{\ln n}{n^2}}$ et que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n^2} = 0$.

   Un développement limité de e^x au voisinage de 0 et à l'ordre 1, nous donne $e^x = 1 + x + x\varepsilon(x)$ où $\displaystyle\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

   En utilisant la composition des développements limités, nous avons : $e^{\frac{\ln n}{n^2}} = 1 + \dfrac{\ln n}{n^2} + \dfrac{\ln n}{n^2}\varepsilon\left(\dfrac{\ln n}{n^2}\right)$, et donc, au voisinage de $+\infty$, nous avons :

$$(n)^{\frac{1}{n^2}} - 1 = e^{\frac{\ln n}{n^2}} - 1 = 1 + \frac{\ln n}{n^2} + \frac{\ln n}{n^2}\varepsilon\left(\frac{\ln n}{n^2}\right) - 1 = \frac{\ln n}{n^2} + \frac{\ln n}{n^2}\varepsilon\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)$$

   Nous avons donc $(n)^{\frac{1}{n^2}} - 1 \underset{+\infty}{\approx} \dfrac{\ln n}{n^2}$.

   Les séries du type $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{\ln n}{n^\alpha}$ convergent si et seulement si $\alpha > 1$. Donc la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{\ln n}{n^2}$ est convergente. Donc, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} (n)^{\frac{1}{n^2}} - 1$ est, elle aussi, convergente

4. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \left(1 - \cos\frac{1}{n}\right)$

   Un développement limité de $\cos x$ au voisinage de 0 est donné par : $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$ où $\displaystyle\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$

   Donc, au voisinage de $+\infty$, nous avons $\cos\dfrac{1}{n} = 1 - \dfrac{1}{2n^2} + \dfrac{1}{n^2}\varepsilon\left(\dfrac{1}{n}\right)$ et :

$$1 - \cos\frac{1}{n} = 1 - 1 + \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{n^2}\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{n^2}\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)$$

   Donc, au voisinage de $+\infty$, nous avons $\left(1 - \cos\dfrac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\approx} \dfrac{1}{2n^2}$.

   Les séries du type $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^2}$ sont des séries de Riemann convergentes.

   Donc, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \left(1 - \cos\frac{1}{n}\right)$ est, elle aussi, convergente

5. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{2n-1}{n+1}\right)^{2n}$

Et si nous utilisions le critère de Cauchy ? ?

$$\sqrt[n]{\left(\frac{2n-1}{n+1}\right)^{2n}}=\left(\frac{2n-1}{n+1}\right)^{2}$$

Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{2n-1}{n+1}=2$, nous avons $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{2n-1}{n+1}\right)^{2n}}=4$

La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{2n-1}{n+1}\right)^{2n}$ est donc divergente.

6. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\ln\left(\frac{n^2+2n+1}{n^2+1}\right)$

Il nous est tout à fait possible d'écrire $\ln\left(\dfrac{n^2+2n+1}{n^2+1}\right)=\ln\left(1+\dfrac{2n}{n^2+1}\right)$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{2n}{n^2+1}=0$.

En 0, nous avons $\ln(1+x)\underset{0}{\approx}x$, et donc, en $+\infty$, nous avons $\ln\left(1+\dfrac{2n}{n^2+1}\right)\underset{+\infty}{\approx}\dfrac{2n}{n^2+1}$.

Comme nous avons aussi, en $+\infty$, $\dfrac{2n}{n^2+1}\underset{+\infty}{\approx}\dfrac{2}{n}$, nous avons aussi $\ln\left(1+\dfrac{2n}{n^2+1}\right)\underset{+\infty}{\approx}\dfrac{2}{n}$.

Comme la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{2}{n}$ est une série divergente, il en est de même de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\ln\left(\frac{n^2+2n+1}{n^2+1}\right)$

7. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{1+2+3+\cdots+n}{1^2+2^2+\cdots+n^2}$

Il y a quelque chose qui tient du jeu dans cette question *(L'auteur est un facétieux !)*. En effet, dans les résultats classiques que nous devons tous savoir, nous avons :

$\rightarrow$ $\displaystyle 1+2+3+4+\cdots+n=\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$

$\rightarrow$ $\displaystyle 1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+n^2=\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Et donc $\dfrac{1+2+3+\cdots+n}{1^2+2^2+\cdots+n^2}=\dfrac{n(n+1)}{2}\times\dfrac{6}{n(n+1)(2n+1)}=\dfrac{3}{2n+1}$.

Donc, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{1+2+3+\cdots+n}{1^2+2^2+\cdots+n^2}=\sum_{n\geqslant 0}\frac{3}{2n+1}$ qui est, bien entendu, une série divergente.

8. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{\cos nx^2}{2^n}$

Il est facile de démontrer que cette série est absolument convergente, donc convergente. En effet :

$$\left|\frac{\cos nx^2}{2^n}\right|\leqslant\frac{1}{2^n}$$

La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{2^n}$ est une série géométrique convergente et donc, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\left|\frac{\cos nx^2}{2^n}\right|$ converge (par les théorèmes de majoration), c'est à dire que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{\cos nx^2}{2^n}$ est absolument convergente, donc convergente.

9. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{a^n}{(1+a)(1+a)^2\cdots(1+a)^n}$ avec $a>-1$

Pour étudier sa divergence ou sa convergence, nous allons utiliser l'outil du critère de D'Alembert

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{a^{n+1}}{(1+a)(1+a)^2\cdots(1+a)^{n+1}} \times \frac{(1+a)(1+a)^2\cdots(1+a)^n}{a^n}\right| = \left|\frac{a}{1+a}\right|$$

L'étude de la fonction $f(a) = \dfrac{a}{1+a}$ sur l'intervalle $]-1;+\infty[$ montre que $-1 < \dfrac{a}{1+a} < +1$ si et seulement si $a > -\dfrac{1}{2}$. Ainsi :

- ⋆ La série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{a^n}{(1+a)(1+a)^2\cdots(1+a)^n}$ converge si et seulement si $a > -\dfrac{1}{2}$
- ⋆ La série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{a^n}{(1+a)(1+a)^2\cdots(1+a)^n}$ diverge si et seulement si $-1 < a < -\dfrac{1}{2}$

Remarques

Le « **si et seulement si** » de ci-dessus est, un tant soit peu, rapide ! ! Alors, faisons des précisions

→ Si $a = -\dfrac{1}{2}$, alors $1 + a = \dfrac{1}{2}$, de telle sorte que nous avons, pour le dénominateur :

$$(1+a)(1+a)^2\cdots(1+a)^n = \prod_{k=1}^{n}(1+a)^k = \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \left(\frac{1}{2}\right)^{\sum\limits_{k=1}^{n} k} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

Et donc $\displaystyle\frac{1}{(1+a)(1+a)^2\cdots(1+a)^n} = \frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n}(1+a)^k} = 2^{\frac{n(n+1)}{2}}$

→ D'autre part, $a^n = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$, et donc :

$$\frac{a^n}{(1+a)(1+a)^2\cdots(1+a)^n} = \frac{(-1)^n\, 2^{\frac{n(n+1)}{2}}}{2^n} = (-1)^n\, 2^{\frac{n(n+1)}{2}-n} = (-1)^n\, 2^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

La série devient donc $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{a^n}{(1+a)(1+a)^2\cdots(1+a)^n} = \sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n\, 2^{\frac{n(n-1)}{2}}$ qui est, bien entendu divergente

→ D'autre part, l'étude de la fonction $f(a) = \dfrac{a}{1+a}$ sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, montre que si $a < -1$, alors $\dfrac{a}{1+a} > +1$.

Le « **si et seulement si** » est donc justifié.

10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sqrt{n^2+n} - n\right)$

En voilà une qui est des plus reposantes ! !

$$\sqrt{n^2+n} - n = \frac{\left(\sqrt{n^2+n} - n\right)\left(\sqrt{n^2+n} + n\right)}{\sqrt{n^2+n}+n} = \frac{n^2+n-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n} = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}$$

Nous avons :

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n} = \frac{n}{n\sqrt{1+\frac{1}{n}}+n} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}$$

Et donc comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n^2+n} - n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = \frac{1}{2}$, la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sqrt{n^2+n} - n\right)$ est divergente car son terme général ne tend pas vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$

11. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} n^2 \sin\frac{\pi}{2^n}$

Utilisons le fait qu'au voisinage de 0, nous avons $\sin x \underset{0}{\approx} x$ et que donc, comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{\pi}{2^n}=0$,

$$\sin\frac{\pi}{2^n}\underset{+\infty}{\approx}\frac{\pi}{2^n}$$

Ainsi, $n^2\sin\dfrac{\pi}{2^n}\underset{+\infty}{\approx}n^2\dfrac{\pi}{2^n}$

Nous savons que les séries $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^p}{a^n}$ convergent si $a>1$, et donc, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}n^2\frac{\pi}{2^n}$ est du type $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^p}{a^n}$ avec $p=2$ et $a=2$

La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}n^2\frac{\pi}{2^n}$ converge ; donc, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}n^2\sin\frac{\pi}{2^n}$ converge, elle aussi.

12. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$

La meilleure méthode semble être, ici, d'utiliser le critère de D'Alembert :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{2^{n+1}(n+1)!n^n}{(n+1)^{n+1}2^n n!}=2\frac{n^n}{(n+1)^n}$$

Reste donc à calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{n^n}{(n+1)^n}$

Rien de plus simple ; il suffit de voir que $\dfrac{n^n}{(n+1)^n}=\dfrac{1}{\dfrac{(n+1)^n}{n^n}}$

Comme $\dfrac{(n+1)^n}{n^n}=\dfrac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$, il suffit de se rappeler que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$, de telle sorte que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{2}{e}$

Or, $\dfrac{2}{e}<1$, ce qui montre que la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$ converge.

13. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(1-e^{\frac{1}{n}}\right)$

On peut, au départ, remarquer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}1-e^{\frac{1}{n}}=0$, mais que ceci est insuffisant pour décider si la série est convergente.

On recherche donc le développement limité de e^x au voisinage de 0.

Or, $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}+x^3\varepsilon(x)$; comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$, nous pouvons écrire :

$$1-e^{\frac{1}{n}}=1-\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{6n^3}\right)+\frac{1}{n^3}\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)$$

Ce qui montre que $1-e^{\frac{1}{n}}\underset{+\infty}{\approx}-\dfrac{1}{n}$; ce qui termine de montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}1-e^{\frac{1}{n}}$ est divergente.

14. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}+\ln\left(\frac{n-1}{n}\right)\right)$

Le terme $\left(\dfrac{1}{n}+\ln\left(\dfrac{n-1}{n}\right)\right)$ peut s'écrire différemment

En effet, $\ln\left(\frac{n-1}{n}\right) = \ln\left(1-\frac{1}{n}\right)$.

Au voisinage de 0, nous avons : $\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x)$, et donc, lorsque n est voisin de $+\infty$,

$$\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} + \frac{1}{n^3}\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)$$

Donc, en $+\infty$, $\left(\frac{1}{n} + \ln\left(\frac{n-1}{n}\right)\right) = -\frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} + \frac{1}{n^3}\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)$

Ce qui montre que, en $+\infty$, $\left(\frac{1}{n} + \ln\left(\frac{n-1}{n}\right)\right) \underset{+\infty}{\approx} -\frac{1}{2n^2}$, et donc que la série converge.

Exercice 19 :

1. *Montrer que la série de terme général $u_n = \int_0^1 (1-\sqrt{x})^n\,dx$ est convergente.*

   Ce n'est pas une question difficile, parce qu'il est très facile de calculer u_n.

   Effectuons le changement de variables $u = 1-\sqrt{x}$; alors, $\frac{du}{dx} = -\frac{1}{2\sqrt{x}} \Longleftrightarrow dx = -2(1-u)\,du$.

   Donc :

$$\begin{aligned}\int_0^1 (1-\sqrt{x})^n\,dx &= -2\int_1^0 (1-u)\,u^n du\\ &= 2\int_0^1 u^n - u^{n+1}du\\ &= 2\left\{\left[\frac{u^{n+1}}{n+1} - \frac{u^{n+2}}{n+2}\right]_0^1\right\}\\ &= 2\left\{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right\}\end{aligned}$$

   Nous avons donc $u_n = 2\left\{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right\}$ et nous allons nous intéresser aux sommes partielles $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$

$$\begin{aligned}S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \quad S_n &= \sum_{k=0}^{n} 2\left\{\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right\}\\ &= 2\left\{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right\}\\ &= 2\left\{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+2}\right\}\\ &= 2\left\{\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+2} \frac{1}{k}\right\}\\ &= 2\left\{\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} + 1 - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} - \frac{1}{n+2}\right\}\\ &= 2 - \frac{2}{n+2}\end{aligned}$$

   D'où, $\lim_{n\to+\infty} S_n = 2$, et la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n = 2$

2. *Etudier la convergence, de la série de terme général $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{n}} \sqrt{\sin x}\,dx$ pour $n \geqslant 2$*

Si $x \geqslant 0$, nous avons $0 \leqslant \sin x \leqslant x$, c'est à dire $0 \leqslant \sqrt{\sin x} \leqslant \sqrt{x}$. Donc :

$$0 \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{n}} \sqrt{\sin x}\, dx \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{n}} \sqrt{x}\, dx = \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^{\frac{\pi}{n}} = \frac{2 \times \pi^{\frac{3}{2}}}{3} \times \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ est une série de Riemann convergente ; donc la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{n}} \sqrt{\sin x}\, dx\right)$ est convergente

Exercice 20 :

Pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{R}$, la série de terme général $u_n = \dfrac{\ln n!}{n^a}$ converge-t-elle ?

⇒ Premièrement, il faut remarquer que $\ln n! = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \ln k$, et il n'est pas hors de propos de nous intéresser à la fonction $\ln : [1; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, laquelle est croissante.

Donc, pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $k \geqslant 2$, nous avons $\displaystyle\int_{k-1}^{k} \ln t dt \leqslant \int_{k-1}^{k} \ln k dt = \ln k$ et $\displaystyle\int_{k}^{k+1} \ln t dt \geqslant \int_{k}^{k+1} \ln k dt = \ln k$, de telle sorte que nous ayions :

$$\int_{k-1}^{k} \ln t dt \leqslant \ln k \leqslant \int_{k}^{k+1} \ln k dt$$

⇒ En faisant, maintenant, la somme de $k = 2$ jusqu'à n, nous avons :

$$\sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \ln t dt \leqslant \sum_{k=2}^{n} \ln k \leqslant \sum_{k=2}^{n} \int_{k}^{k+1} \ln k dt$$

Et donc :

$$\int_{1}^{n} \ln t dt \leqslant \ln n! \leqslant \int_{2}^{n+1} \ln k dt$$

Nous avons $\displaystyle\int_{1}^{n} \ln t dt = [t \ln t - t]_1^n = n \ln n - n + 1$ et $\displaystyle\int_{2}^{n+1} \ln k dt = [t \ln t - t]_2^{n+1} = (n+1)\ln(n+1) - (n+1) - 2\ln 2 + 2$ et donc :

$$n \ln n - n + 1 \leqslant \ln n! \leqslant (n+1)\ln(n+1) - (n+1) - 2\ln 2 + 2$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$1 - \frac{1}{\ln n} + \frac{1}{n \ln n} \leqslant \frac{\ln n!}{n \ln n} \leqslant \frac{(n+1)\ln(n+1)}{n \ln n} - \frac{n+1}{n \ln n} + \frac{2 - 2\ln 2}{n \ln n}$$

Clairement, nous avons

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{\ln n} + \frac{1}{n \ln n}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{(n+1)\ln(n+1)}{n \ln n} - \frac{n+1}{n \ln n} + \frac{2 - 2\ln 2}{n \ln n}\right) = 1$$

De telle sorte que nous pouvons conclure que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n!}{n \ln n} = 1$

⇒ Ce qui veut dire qu'au voisinage de $+\infty$, nous avons $\ln n! \underset{+\infty}{\approx} n \ln n$ et donc, qu'au voisinage de $+\infty$, nous avons $u_n \underset{+\infty}{\approx} \dfrac{n \ln n}{n^a} = \dfrac{\ln n}{n^{a-1}}$

La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{\ln n}{n^{a-1}}$ ne converge que si $a - 1 > 1$, c'est à dire $a > 2$

Exercice 21 :

Voici un exercice qui pose peu de difficultés

1. *Etudier la série* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|x(x-1)(x-2)\dots(x-n+1)|}{n!}a^n$ *où x est un réel donné quelconque, et $0 < a < 1$.*

   Une fois de plus, c'est le critère de D'Alembert qui nous sera utile :

$$\begin{aligned}
\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{|x(x-1)(x-2)\dots(x-n+1)(x-(n+1)+1)|\,a^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{|x(x-1)(x-2)\dots(x-n+1)|\,a^n} \\
&= \frac{|x-n| \times a}{n+1} \\
&= a\frac{n\left|1-\frac{x}{n}\right|}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)} \\
&= a\frac{\left|1-\frac{x}{n}\right|}{\left(1+\frac{1}{n}\right)}
\end{aligned}$$

   Or, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\left|1-\frac{x}{n}\right|}{\left(1+\frac{1}{n}\right)} = 1$, c'est à dire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a\frac{\left|1-\frac{x}{n}\right|}{\left(1+\frac{1}{n}\right)} = a$
   Comme $0 < a < 1$, la série converge.

2. *En déduire la limite de la suite de terme général* $u_n = \dfrac{|x(x-1)(x-2)\dots(x-n+1)|}{n!}a^n$

   Comme la série converge, son terme général tend vers 0, on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|x(x-1)(x-2)\dots(x-n+1)|}{n!}a^n = 0$$

Exercice 22 :

Dans cet exercice, on suppose $\alpha > 1$

1. *Démontrer que nous avons* $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^{\alpha-1}}\right) = 1$

   On s'intéresse aux sommes partielles $S_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{(k-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{k^{\alpha-1}}\right)$.

   Nous avons :

$$S_n = \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{(k-1)^{\alpha-1}} - \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^{\alpha-1}} = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^{\alpha-1}} - \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^{\alpha-1}} = 1 - \frac{1}{n^{\alpha-1}}$$

   Comme $\alpha > 1$, nous avons $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^{\alpha-1}} = 0$ et donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = 1$, c'est à dire

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^{\alpha-1}}\right) = 1$$

2. *Montrer que, pour tout réel $\beta > 0$ et tout $t \in [0;1]$, nous avons* $(1-t)^\beta \leqslant \dfrac{1}{1+\beta t}$

   Nous considérons la fonction f définie sur $[0;1]$ par $f(t) = (1-t)^\beta \times (1+\beta t)$.
   La dérivée de f, notée f', est donnée par :

$$\begin{aligned}
f'(t) = &\; -\beta(1-t)^{\beta-1} \times (1+\beta t) + \beta(1-t)^\beta \\
= &\; -\beta(1-t)^{\beta-1}((1+\beta t) - (1-t)) \\
= &\; -\beta(1-t)^{\beta-1}(t(\beta+1))
\end{aligned}$$

Pour $t \in [0;1]$, nous avons $(1-t)^{\beta-1} \geqslant 0$ et $t(\beta+1) \geqslant 0$, et donc, pour $t \in [0;1]$, $f'(t) \leqslant 0$, c'est à dire que f est décroissante sur l'intervalle $[0;1]$.
Et donc, pour tout $t \in [0;1]$, nous avons $f(t) \leqslant f(0) = 1$, c'est à dire que, pour tout $t \in [0;1]$,

$$(1-t)^{\beta} \times (1+\beta t) \leqslant 1 \Longleftrightarrow (1-t)^{\beta} \leqslant \frac{1}{1+\beta t}$$

3. *En déduire que, pour tout $n \geqslant 2$, nous avons $\dfrac{\alpha-1}{n^{\alpha}} \leqslant \dfrac{1}{(n-1)^{\alpha-1}} - \dfrac{1}{n^{\alpha-1}}$*

   Voilà une question qui ne pose pas trop de difficultés. Il faut utiliser l'inégalité $(1-t)^{\beta} \leqslant \dfrac{1}{1+\beta t}$ en posant, pour $n \geqslant 2$, $t = \dfrac{1}{n}$ et $\beta = \alpha - 1$. Nous avons donc :

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\alpha-1} \leqslant \frac{1}{1+\frac{\alpha-1}{n}} \Longleftrightarrow 1 + \frac{\alpha-1}{n} \leqslant \frac{1}{\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{\alpha-1}} = \frac{n^{\alpha-1}}{(n-1)^{\alpha-1}}$$

   C'est à dire que $\dfrac{\alpha-1}{n} \leqslant \dfrac{n^{\alpha-1}}{(n-1)^{\alpha-1}} - 1$
   Or $\dfrac{n^{\alpha-1}}{(n-1)^{\alpha-1}} - 1 = n^{\alpha-1}\left(\dfrac{1}{(n-1)^{\alpha-1}} - \dfrac{1}{n^{\alpha-1}}\right)$, ce qui veut dire que :

$$\frac{\alpha-1}{n} \leqslant n^{\alpha-1}\left(\frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^{\alpha-1}}\right) \Longleftrightarrow \frac{\alpha-1}{n^{\alpha}} \leqslant \frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^{\alpha-1}}$$

   Ce que nous voulions

4. *Conclure*

   Nous avons obtenu l'inégalité $\dfrac{\alpha-1}{n^{\alpha}} \leqslant \dfrac{1}{(n-1)^{\alpha-1}} - \dfrac{1}{n^{\alpha-1}}$ laquelle est équivalente à

$$\frac{1}{n^{\alpha}} \leqslant \frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^{\alpha-1}}\right)$$

   Nous savons que la série $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^{\alpha-1}}\right)$ est une série à termes positifs convergente.

   Donc, par les théorèmes de majoration 6.2.1 nous concluons que si $\alpha > 1$, alors les séries $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ convergent.

Exercice 23 :

Etudier la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$ où $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(n-k)!k!}$

Voilà une question qui ne devrait pas poser trop de difficultés.

⋆ Tout d'abord, un compagnonnage de longue date des mathématiques nous pousse à tourner notre regard vers les coefficients binômiaux. En effet, nous avons :

$$\mathrm{C}_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

C'est à dire $\dfrac{1}{(n-k)!k!} = \dfrac{1}{n!}\mathrm{C}_n^k = \dfrac{1}{n!}\dbinom{n}{k}$, de telle sorte que :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(n-k)!k!} = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k$$

⋆ C'est ici qu'intervient la fameuse formule du binôme : $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k a^k b^{n-k}$, de telle sorte que nous pouvons écrire :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!k!} = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k 1^k 1^{n-k} = \frac{1}{n!}(1+1)^n = \frac{2^n}{n!}$$

⋆ La série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est donc la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{2^n}{n!}$ qui est convergente *(Utiliser D'Alembert)*

⋆ La somme de cette série est facile à connaître. Nous avons $\sum_{n\geqslant 0} \frac{2^n}{n!} = e^2$

Exercice 24 :

1. *Soit la série de terme général $u_n = a_n - a_{n+1}$ avec $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$.*
   Montrer que $u_n \underset{+\infty}{\approx} \frac{1}{2n^2}$

   Evaluons u_n ; nous avons $u_n = -\frac{1}{n+1} + \ln(n+1) - \ln n = -\frac{1}{n+1} + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

   En utilisant les développements limités, nous avons $u_n = -\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + \frac{1}{n^3}\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)$

   Tous calculs faits, nous obtenons :

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + \frac{1}{n^3}\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n^2}{2n^3(n+1)} + \frac{1}{3n^3} + \frac{1}{n^3}\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)$$

   Ce qui montre que, au voisinage de $+\infty$, nous avons $u_n \underset{+\infty}{\approx} \frac{n^2}{2n^3(n+1)} \underset{+\infty}{\approx} \frac{1}{2n^2}$

2. *En déduire la convergence de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$*

   De la question ci dessus, nous déduisons que la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge.

   Considérons, maintenant, la suite des sommes partielles :$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$; nous avons $\lim_{n\to+\infty} S_n = L$; or :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k+1}) = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_{k+1} = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=2}^{n+1} a_k = a_1 - a_{n+1}$$

   Ce qui montre que $a_{n+1} = a_1 - S_n$, et que, donc, $\lim_{n\to+\infty} a_{n+1} = a_1 - L$.

   La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc, et sa limite est appelée la constante d'Euler.

Exercice 25 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de réels positifs.

1. *On suppose que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge.*

   (a) *On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. Donner $\lim_{n\to+\infty} S_{2n} - S_n$*

   Comme la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge, nous avons $\lim_{n\to+\infty} S_{2n} = \lim_{n\to+\infty} S_n = S$, d'où, bien sûr, $\lim_{n\to+\infty} S_{2n} - S_n = 0$

(b) *En déduire que* $\lim\limits_{n\to+\infty} 2nu_{2n}=0$

Nous avons $S_{2n}-S_n=\sum\limits_{k=0}^{2n}u_k-\sum\limits_{k=0}^{n}u_k=\sum\limits_{k=n+1}^{2n}u_k$

Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante, pour tout $k=n+1,\cdots,2n$, nous avons $u_k\geqslant u_{2n}$. Ainsi, $\sum\limits_{k=n+1}^{2n}u_k\geqslant\sum\limits_{k=n+1}^{2n}u_{2n}=nu_{2n}$

Nous avons donc $S_{2n}-S_n\geqslant nu_{2n}\geqslant 0$, d'où, par encadrement, nous tirons $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_{2n}=0$ et donc, par multiplication par un scalaire, $\lim\limits_{n\to+\infty} 2nu_{2n}=0$

(c) *Conclure que* $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n=0$

Comme nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty} 2nu_{2n}=0$, il faudrait aussi montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}(2n+1)\,u_{2n+1}=0$. Or, $(2n+1)\,u_{2n+1}=2nu_{2n+1}+u_{2n+1}$; de la décroissance, nous avons $u_{2n+1}\leqslant u_{2n}$ et donc $(2n+1)\,u_{2n+1}\leqslant 2nu_{2n}+u_{2n}$. Comme nous savons, puisque la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}u_n$ converge, que $\lim\limits_{n\to+\infty}u_{2n}=0$, que nous avons démontré que $\lim\limits_{n\to+\infty}2nu_{2n}=0$, nous avons bien, par les théorèmes de majoration, $\lim\limits_{n\to+\infty}(2n+1)\,u_{2n+1}=0$

Nous en concluons donc que $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n=0$

2. *Soit* $\alpha>0$ *et on suppose que* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}n^\alpha u_n$ *converge. Montrer que* $\lim\limits_{n\to+\infty}n^{\alpha+1}u_n=0$

Nous allons procéder comme pour la question précédente.

→ Nous posons, une nouvelle fois, $S_n=\sum\limits_{k=0}^{n}k^\alpha u_k$; et nous avons toujours $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=S$, et donc $\lim\limits_{n\to+\infty}S_{2n}-S_n=0$

Or, $S_{2n}-S_n=\sum\limits_{k=n+1}^{2n}k^\alpha u_k$, et pour tout $k=n+1,\cdots,2n$, nous avons $k^\alpha\geqslant n^\alpha$ et $u_k\geqslant u_{2n}$ et donc :

$$S_{2n}-S_n=\sum_{k=n+1}^{2n}k^\alpha u_k\geqslant\sum_{k=n+1}^{2n}n^\alpha u_{2n}=n^{\alpha+1}u_{2n}$$

Ainsi, de l'inégalité $0\leqslant n^{\alpha+1}u_{2n}\leqslant S_{2n}-S_n$, nous déduisons, par encadrements que $\lim\limits_{n\to+\infty}n^{\alpha+1}u_{2n}=0$

→ Nous avons $(2n)^{\alpha+1}u_{2n}=2^{\alpha+1}n^{\alpha+1}u_{2n}$.
Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}n^{\alpha+1}u_{2n}=0$, nous déduisons que $\lim\limits_{n\to+\infty}2^{\alpha+1}n^{\alpha+1}u_{2n}=\lim\limits_{n\to+\infty}(2n)^{\alpha+1}u_{2n}=0$

→ D'autre part, nous avons $0\leqslant(2n+1)^{\alpha+1}u_{2n+1}\leqslant(2n+1)^{\alpha+1}u_{2n}$.
Nous avons aussi :

$$\begin{aligned}(2n+1)^{\alpha+1}u_{2n}&=(2n+1)^{\alpha+1}\times\frac{(2n)^{\alpha+1}}{(2n)^{\alpha+1}}u_{2n}\\&=\frac{(2n+1)^{\alpha+1}}{(2n)^{\alpha+1}}\times(2n)^{\alpha+1}u_{2n}=\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{\alpha+1}\times\left((2n)^{\alpha+1}u_{2n}\right)\end{aligned}$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{\alpha+1}=1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(2n)^{\alpha+1}u_{2n}=0$; donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(2n+1)^{\alpha+1}u_{2n}=0$

De l'inégalité $0\leqslant(2n+1)^{\alpha+1}u_{2n+1}\leqslant(2n+1)^{\alpha+1}u_{2n}$, nous déduisons que :

$$\lim_{n\to+\infty}(2n+1)^{\alpha+1}u_{2n+1}=0$$

C'est à dire que $\lim\limits_{n\to+\infty}n^{\alpha+1}u_n=0$

6.7.3 Etude de convergence des séries numériques et calcul des sommes

Exercice 26 :

On considère la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 4} \frac{1}{n^3-9n}$

1. *Cette série est-elle convergente ?*

   Nous avons, au voisinage de $+\infty$, $\displaystyle\frac{1}{n^3-9n} \underset{+\infty}{\approx} \frac{1}{n^3}$

   Or, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^3}$ est une série de Riemann convergente, donc la série $\displaystyle\sum_{n=4}^{+\infty} \frac{1}{n^3-9n}$ est convergente.

2. *Décomposer* $\displaystyle\frac{1}{n^3-9n}$ *en éléments simples, c'est à dire trouvez* A, B, *et* C, *tels que :* $\displaystyle\frac{1}{n^3-9n} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n-3} + \frac{C}{n+3}$

   C'est une question classique et....fatigante !!
   Nous avons

   $$\frac{A}{n}+\frac{B}{n-3}+\frac{C}{n+3} = \frac{A\left(n^2-9\right)+Bn\left(n+3\right)+Cn\left(n-3\right)}{n\left(n^2-9\right)} = \frac{\left(A+B+C\right)n^2+\left(3B-3C\right)n-9A}{n\left(n^2-9\right)}$$

   D'où nous tirons, par identification :

   $$\left\{\begin{array}{rl} A+B+C= & 0 \\ B-C= & 0 \\ -9A= & 1 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} A= & -\dfrac{1}{9} \\ B=C= & \dfrac{1}{18} \end{array}\right.$$

3. *En déduire la somme de la série* $\displaystyle\sum_{n\geqslant 4} \frac{1}{n^3-9n}$

   Nous appelons comme toujours $\displaystyle S_n = \sum_{k=4}^{n} \frac{1}{k^3-9k}$ et nous avons :

   $$\begin{aligned} S_n = \sum_{k=4}^{n} \frac{1}{k^3-9k} &= \sum_{k=4}^{n} \frac{A}{k} + \sum_{k=4}^{n} \frac{B}{k-3} + \sum_{k=4}^{n} \frac{C}{k+3} \\ &= \sum_{k=4}^{n} \frac{A}{k} + \sum_{k=1}^{n-3} \frac{B}{k} + \sum_{k=7}^{n+3} \frac{C}{k} \\ &= \left(\sum_{k=7}^{n-3} \frac{A}{k} + \frac{A}{4} + \frac{A}{5} + \frac{A}{6} + \frac{A}{n-2} + \frac{A}{n-1} + \frac{A}{n}\right) \\ &\quad + \left(\sum_{k=7}^{n-3} \frac{B}{k} + \frac{B}{1} + \frac{B}{2} + \frac{B}{3} + \frac{B}{4} + \frac{B}{5} + \frac{B}{6}\right) \\ &\quad + \left(\sum_{k=7}^{n-3} \frac{C}{k} + \frac{C}{n-2} + \frac{C}{n-1} + \frac{C}{n} + \frac{C}{n+1} + \frac{C}{n+2} + \frac{C}{n+3}\right) \end{aligned}$$

   Et donc, en simplifiant et regroupant, nous avons :

   $$S_n = A\times\frac{37}{60} + B\times\frac{49}{30} + \left(A+C\right)\left(\frac{3n^2-6n+2}{n\left(n-1\right)\left(n-2\right)}\right) + C\left(\frac{3n^2+12n+11}{\left(n+1\right)\left(n+2\right)\left(n+3\right)}\right)$$

   Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(A+C\right)\left(\frac{3n^2-6n+2}{n\left(n-1\right)\left(n-2\right)}\right) = \lim_{n\to+\infty} C\left(\frac{3n^2+12n+11}{\left(n+1\right)\left(n+2\right)\left(n+3\right)}\right) = 0$, nous avons $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = A\times\frac{37}{60} + B\times\frac{49}{30} = \frac{1}{45}$

   Ainsi, nous avons $\displaystyle\sum_{n\geqslant 4} \frac{1}{n^3-9n} = \frac{1}{45}$

Exercice 27 :

1. *Etudier la convergence de la série :* $\sum_{n\geqslant 2} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$

   Comme, au voisinage de 0, $\ln(1+x) \underset{0}{\approx} x$, qu'en $+\infty$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2}=0$, nous avons $\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) \underset{+\infty}{\approx} -\frac{1}{n^2}$

   Or, la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente, donc la série $\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ est convergente.

2. *Calculez la somme de la série* $\sum_{n\geqslant 2} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$

   Comme à chaque fois, nous allons utiliser les sommes partielles $S_n = \sum_{k=2}^{n} \ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$.

   Auparavant, il faut recalculer $\sum_{k=2}^{n} \ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{n} \ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right) &= \sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{k^2-1}{k^2}\right)\\
&= \sum_{k=2}^{n} \left(\ln\left(k^2-1\right) - 2\ln k\right)\\
&= \sum_{k=2}^{n} \left(\ln(k+1) + \ln(k-1) - 2\ln k\right)\\
&= \sum_{k=2}^{n} \ln(k+1) + \sum_{k=2}^{n} \ln(k-1) - 2\sum_{k=2}^{n} \ln k\\
&= \sum_{k=3}^{n+1} \ln(k) + \sum_{k=1}^{n-1} \ln(k) - 2\sum_{k=2}^{n} \ln k
\end{aligned}$$

   On regroupe maintenant tous les termes communs aux 3 sommes et nous avons :

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=3}^{n-1} \ln(k) + \ln n + \ln(n+1) + \ln 2 + \sum_{k=3}^{n-1} \ln(k) - 2\ln 2 - 2\ln n - 2\sum_{k=3}^{n-1} \ln(k)\\
&= -\ln n + \ln(n+1) - \ln 2\\
&= -\ln 2 + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

   Comme $\lim_{n\to+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 0$, nous avons $\lim_{n\to+\infty} S_n = -\ln 2$, et on conclue que

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = -\ln 2$$

Exercice 28 :

Si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite numérique tendant vers 0 et si a, b et c sont trois réels vérifiant $a+b+c=0$, on pose pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_n = av_n + bv_{n+1} + cv_{n+2}$
Montrer que la suite de terme général v_n converge et calculer sa somme.

Nous appelons $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$

Alors :

$$\begin{aligned}
S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = & \sum_{k=0}^{n} (av_k + bv_{k+1} + cv_{k+2}) \\
= & \; a \sum_{k=0}^{n} v_k + b \sum_{k=0}^{n} v_{k+1} + c \sum_{k=0}^{n} v_{k+2} \\
= & \; a \sum_{k=0}^{n} v_k + b \sum_{k=1}^{n+1} v_k + c \sum_{k=2}^{n+2} v_k \\
= & \; a \left(\sum_{k=2}^{n} v_k + v_0 + v_1 \right) + b \left(\sum_{k=2}^{n} v_k + v_1 + v_{n+1} \right) + c \left(\sum_{k=2}^{n} v_k + v_{n+1} + v_{n+2} \right) \\
= & \; a (v_0 + v_1) + b (v_1 + v_{n+1}) + c (v_{n+1} + v_{n+2}) \\
= & \; av_0 + (a+b) v_1 + (b+c) v_{n+1} + cv_{n+2} \\
= & \; av_0 - cv_1 - av_{n+1} + cv_{n+2}
\end{aligned}$$

Comme, par hypothèse, $\lim\limits_{n \to +\infty} v_{n+1} = \lim\limits_{n \to +\infty} v_{n+2} = 0$, nous avons $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = av_0 - cv_1$
Ainsi, la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} u_n$ est-elle convergente, et admet pour somme $av_0 - cv_1$

Exercice 29 :

On considère la série de terme général $u_n = \displaystyle\int_0^n e^{-n^2 t^2} dt$. Etudier la convergence de cette série.

- ⋆ Une première remarque, c'est que, pour $n = 0$, nous avons $u_0 = \displaystyle\int_0^0 dt = 0$, de telle sorte que nous considérerons, désormais, que $n \geqslant 1$
- ⋆ Nous faisons le changement de variable $x = nt$. Alors $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = n$. Et donc, nous avons :

$$u_n = \int_0^n e^{-n^2 t^2} dt = \int_0^{n^2} e^{-x^2} \frac{dx}{n} = \frac{1}{n} \int_0^{n^2} e^{-x^2} dx$$

Pour tout $n \geqslant 1$, nous avons $\displaystyle\int_0^{n^2} e^{-x^2} dx = \int_0^1 e^{-x^2} dx + \int_1^{n^2} e^{-x^2} dx$

Comme la fonction e^{-x^2} est positive sur $[1; n^2]$, nous avons $\displaystyle\int_1^{n^2} e^{-x^2} dx \geqslant 0$, de telle sorte que $u_n = \dfrac{1}{n} \displaystyle\int_0^{n^2} e^{-x^2} dx \geqslant \frac{1}{n} \int_0^1 e^{-x^2} dx = K \times \frac{1}{n}$.
Le terme général u_n est donc minoré par le terme général d'une série divergente et la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} u_n$ diverge

Exercice 30 :

Le « critère de condensation » de Cauchy

1. *Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante de réels positifs. Démontrer que la série $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} a_n$ converge si et seulement si la série $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} 2^n a_{2^n}$ converge*

   Nous allons appeler $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ et $T_n = \sum\limits_{k=0}^{n} 2^k u_{2^k}$.
   Il faut remarquer que les suites $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont des sommes de suites à termes positifs, donc croissantes.

⋆ Pour tout $k \in \mathbb{N}$, nous avons $2^k \leqslant 2^k + j \leqslant 2^{k+1}$ avec $j \in \mathbb{N}$ et $0 \leqslant j \leqslant 2^k$,
Comme la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, nous avons, pour $0 \leqslant j \leqslant 2^k - 1$, $a_{2^{k+1}} \leqslant a_{2^k+j} \leqslant a_{2^k}$, c'est à dire, en l'écrivant dans un tableau :

$$\begin{array}{ccc}
a_{2^{k+1}} \leqslant & a_{2^k} & \leqslant a_{2^k} \\
a_{2^{k+1}} \leqslant & a_{2^k+1} & \leqslant a_{2^k} \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
a_{2^{k+1}} \leqslant & a_{2^k+j} & \leqslant a_{2^k} \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
a_{2^{k+1}} \leqslant & a_{2^k+2^k-2} & \leqslant a_{2^k} \\
a_{2^{k+1}} \leqslant & a_{2^k+2^k-1} & \leqslant a_{2^k}
\end{array}$$

En additionnant, nous obtenons :

$$2^k a_{2^{k+1}} \leqslant \sum_{j=0}^{2^k-1} a_{2^k+j} \leqslant 2^k a_{2^k}$$

Puis, en sommant de $k = 0$ à $k = n$, nous obtenons :

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k a_{2^{k+1}} \leqslant \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{2^k-1} a_{2^k+j} \right) \leqslant \sum_{k=0}^{n} 2^k a_{2^k}$$

⋆ Regardons de manière plus précise $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k a_{2^{k+1}}$. Nous avons :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} 2^k a_{2^{k+1}} &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} 2^{k+1} a_{2^{k+1}} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n+1} 2^k a_{2^k} \\
&= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^{n+1} 2^k a_{2^k} - a_1 \right) \\
&= \frac{1}{2} T_{n+1} - \frac{a_1}{2}
\end{aligned}$$

⋆ Regardons, de manière tout aussi précise $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{2^k-1} a_{2^k+j} \right)$. En fait, nous avons :

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{2^k-1} a_{2^k+j} \right) = \sum_{k=0}^{2^n-1} a_k = S_{2^n-1}$$

⋆ Nous avons donc : $\dfrac{1}{2} T_{n+1} - \dfrac{a_1}{2} \leqslant S_{2^n-1} \leqslant T_n$

$\Longrightarrow$ Supposons que la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ diverge, alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_{2^n-1} = +\infty$ et donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} T_n = +\infty$ et la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} 2^n a_{2^n}$ diverge

$\Longrightarrow$ De même, supposons que la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} 2^n a_{2^n}$ diverge, alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} T_n = +\infty$, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2} T_{n+1} - \frac{a_1}{2} = +\infty$ et, pour terminer, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_{2^n-1} = +\infty$; ainsi, la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ diverge.

$\Longrightarrow$ Supposons maintenant, que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ converge et soit S sa somme. La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, et donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $S_n \leqslant S$.

De l'inégalité $\dfrac{1}{2}T_{n+1} - \dfrac{a_1}{2} \leqslant S_{2^n-1}$, nous tirons $T_{n+1} \leqslant a_1 + 2S_{2^n-1}$ et donc $T_{n+1} \leqslant a_1 + 2S$.

La suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est, elle aussi, croissante et, dans notre cas, majorée, donc convergente et donc la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} 2^n a_{2^n}$ converge

$\Longrightarrow$ On démontrerait, de la même manière que si la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} 2^n a_{2^n}$ converge, il en serait de même de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$

En conclusion, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ converge si et seulement si la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} 2^n a_{2^n}$ converge

2. *Applications :*

(a) *Montrer que les séries $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^\alpha}$ convergent si et seulement si $\alpha > 1$*

Nous allons, bien entendu, utiliser le critère de condensation de Cauchy.

En posant $a_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$, nous avons $a_{2^n} = \dfrac{1}{(2^n)^\alpha} = \dfrac{1}{2^{n\alpha}}$ et $2^n a_{2^n} = \dfrac{2^n}{2^{n\alpha}} = 2^{n(1-\alpha)} = \left(2^{(1-\alpha)}\right)^n$, et nous avons $\sum_{n\geqslant 1} 2^n a_{2^n} = \sum_{n\geqslant 1} \left(2^{(1-\alpha)}\right)^n$

Nous avons $0 < 2^{(1-\alpha)}$ et la série $\sum_{n\geqslant 1} \left(2^{(1-\alpha)}\right)^n$ converge si et seulement si $2^{(1-\alpha)} < 1$, c'est à dire si $1-\alpha < 0$, c'est à dire $\alpha > 1$

Ce que nous voulions.

(b) *Montrer que les séries $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n(\ln n)^p}$ convergent si et seulement si $p > 1$*

De même, en utilisant le critère de condensation de Cauchy, si nous posons $a_n = \dfrac{1}{n(\ln n)^p}$, nous avons $a_{2^n} = \dfrac{1}{2^n(\ln 2^n)^p} = \dfrac{1}{2^n \times n^p (\ln 2)^p}$ et $2^n a_{2^n} = \dfrac{1}{n^p(\ln 2)^p}$

La série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^p(\ln 2)^p}$ converge si et seulement si $p > 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n(\ln n)^p}$ converge si et seulement si $p > 1$

Exercice 31 :

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels strictement positifs.

1. *On suppose qu'à partir d'un certain rang nous avons $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$. Montrer que $u_n \in O(v_n)$*

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$, le rang à partir duquel nous avons $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$. Alors, pour $n > n_0$, nous avons :

$$\begin{array}{ccc} \dfrac{u_{n_0+1}}{u_{n_0}} & \leqslant & \dfrac{v_{n_0+1}}{v_{n_0}} \\ \dfrac{u_{n_0+2}}{u_{n_0+1}} & \leqslant & \dfrac{v_{n_0+2}}{v_{n_0+1}} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{u_{n-1}}{u_{n-2}} & \leqslant & \dfrac{v_{n-1}}{v_{n-2}} \\ \dfrac{u_n}{u_{n-1}} & \leqslant & \dfrac{v_n}{v_{n-1}} \end{array}$$

En multipliant termes à termes et en simplifiant, nous obtenons :

$$\frac{u_n}{u_{n_0}} \leqslant \frac{v_n}{v_{n_0}} \iff 0 < \frac{u_n}{v_n} \leqslant \frac{u_{n_0}}{v_{n_0}} \iff u_n \leqslant k v_n$$

Ce qui montre que $u_n \in O(v_n)$

Ainsi, si la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ diverge, il en est de même de la série $\sum_{n\geqslant 0} v_n$, et d'autre part, si la série $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ converge, il en est de même de la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$

2. *On suppose que $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + \frac{1}{n}\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)$ avec $\alpha > 1$ et $\lim_{n\to+\infty} \varepsilon\left(\frac{1}{n}\right) = 0$. Montrer, à l'aide d'une comparaison avec une série de Riemann que la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge*

Nous avons, là un développement limité de la fraction $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

Soit $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $1 < \beta < \alpha$ et nous considérons la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = \frac{1}{n^\beta}$. Alors :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{n^\beta}{(n+1)^\beta} = \frac{1}{\frac{(n+1)^\beta}{n^\beta}} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^\beta} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\beta}$$

Un développement limité de $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\beta}$ en $+\infty$ est donné par :

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\beta} = 1 - \frac{\beta}{n} + \frac{1}{n}\varepsilon_1\left(\frac{1}{n}\right)$$

Au voisinage de $+\infty$, nous avons :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{v_{n+1}}{v_n} = \left(1 - \frac{\alpha}{n} + \frac{1}{n}\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)\right) - \left(1 - \frac{\beta}{n} + \frac{1}{n}\varepsilon_1\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{\beta-\alpha}{n} + \frac{1}{n}\varepsilon'\left(\frac{1}{n}\right)$$

Comme $\beta < \alpha$, nous avons $\frac{\beta-\alpha}{n} < 0$, et à partir d'un certain rang, nous avons $\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{v_{n+1}}{v_n} \leqslant 0$, c'est à dire $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}$

Comme la série $\sum_{n\geqslant 1} v_n = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\beta}$ converge, d'après la question 1, il en est de même de $\sum_{n\geqslant 0} u_n$

3. *On suppose , cette fois ci, que $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + \frac{1}{n}\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)$ avec $\alpha < 1$ et $\lim_{n\to+\infty} \varepsilon\left(\frac{1}{n}\right) = 0$. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ diverge*

La résolution est tout à fait semblable

Soit $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $0 < \alpha < \beta < 1$ et nous considérons la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = \frac{1}{n^\beta}$. Alors :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{n^\beta}{(n+1)^\beta} = \frac{1}{\frac{(n+1)^\beta}{n^\beta}} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^\beta} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\beta}$$

Un développement limité de $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\beta}$ en $+\infty$ est donné par :

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\beta} = 1 - \frac{\beta}{n} + \frac{1}{n}\varepsilon_1\left(\frac{1}{n}\right)$$

Au voisinage de $+\infty$, nous avons :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{v_{n+1}}{v_n} = \left(1 - \frac{\alpha}{n} + \frac{1}{n}\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)\right) - \left(1 - \frac{\beta}{n} + \frac{1}{n}\varepsilon_1\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{\beta-\alpha}{n} + \frac{1}{n}\varepsilon'\left(\frac{1}{n}\right)$$

Comme $\alpha < \beta$, nous avons $\dfrac{\beta-\alpha}{n} > 0$, et à partir d'un certain rang, nous avons $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} - \dfrac{v_{n+1}}{v_n} \geqslant 0$, c'est à dire $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$

Comme la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} v_n = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\beta}$ diverge, d'après la question 1, il en est de même de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$

Exercice 32 :

Etudier la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *où* $\displaystyle u_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{n-1}+x^n}$

- $\star$ Soit $f(x) = \dfrac{1}{1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{n-1}+x^n}$ définie sur l'intervalle $[0;+1]$. Nous avons $f(0) = 1$ et $f(1) = \dfrac{1}{n+1}$.
- $\star$ Pour $x \in [0;+1[$, nous avons $1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{n-1}+x^n = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$, et donc, pour $x \in [0;+1[$, nous avons $f(x) = \dfrac{1-x}{1-x^{n+1}}$. L'étude des limites aux bornes montre que $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{1-x}{1-x^{n+1}} = \frac{1}{n+1}$, ce qui montre que $f(x) = \dfrac{1-x}{1-x^{n+1}}$ est continue sur $[0;+1]$ *(Toute méthode de calcul est bienvenue, en particulier l'utilisation du rapport de dérivation)*

  De telle sorte que $\displaystyle u_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{n-1}+x^n} = \int_0^1 \frac{1-x}{1-x^{n+1}}dx$
- $\star$ Nous avons, pour $x \in [0;+1[$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1-x}{1-x^{n+1}} = 1-x$.

  Démontrons que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \int_0^1 1-xdx = \left[x - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$, de telle sorte que, comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n \neq 0$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$ diverge grossièrement

  $\Rightarrow$ Tout d'abord,

$$\begin{aligned}
\left|u_n - \int_0^1 1-xdx\right| &= \left|\int_0^1 \frac{1-x}{1-x^{n+1}} - (1-x)\,dx\right| \\
&= \left|\int_0^1 \frac{1-x}{1-x^{n+1}}\left(1 - \left(1-x^{n+1}\right)\right)dx\right| \\
&= \left|\int_0^1 \frac{x^{n+1}(1-x)}{1-x^{n+1}}dx\right| \\
&\leqslant \int_0^1 x^{n+1}\left|\frac{(1-x)}{1-x^{n+1}}\right|dx
\end{aligned}$$

  $\Rightarrow$ D'autre part, comme $0 \leqslant x \leqslant 1$, nous avons $0 \leqslant x^{n+1} \leqslant 1$, puis $0 \leqslant 1-x \leqslant 1$ et $0 \leqslant 1-x^{n+1} \leqslant 1$, de telle sorte que $\dfrac{(1-x)}{1-x^{n+1}} \geqslant 0$, et donc

$$\int_0^1 x^{n+1}\left|\frac{(1-x)}{1-x^{n+1}}\right|dx = \int_0^1 x^{n+1}\frac{(1-x)}{1-x^{n+1}}dx$$

  $\Rightarrow$ Ensuite, nous avons $\dfrac{(1-x)}{1-x^{n+1}} \leqslant 1$. En effet :

$$\frac{(1-x)}{1-x^{n+1}} - 1 = \frac{(1-x) - \left(1-x^{n+1}\right)}{1-x^{n+1}} = \frac{x^{n+1}-x}{1-x^{n+1}}$$

Comme $0 \leqslant x \leqslant 1$, nous avons $0 \leqslant x^{n+1} \leqslant x \leqslant 1$ et donc $\dfrac{x^{n+1}-x}{1-x^{n+1}} \leqslant 0$, c'est à dire $\dfrac{(1-x)}{1-x^{n+1}} \leqslant 1$

Une autre possibilité aurait été d'utiliser la fonction $\varphi(x) = \dfrac{(1-x)}{1-x^{n+1}}$ et d'en étudier les variations ; relativement simple

$\Rightarrow$ Donc $\displaystyle\int_0^1 x^{n+1}\left|\frac{(1-x)}{1-x^{n+1}}\right|dx = \int_0^1 x^{n+1}\frac{(1-x)}{1-x^{n+1}}dx \leqslant \int_0^1 x^{n+1}dx = \left[\frac{x^{n+2}}{n+2}\right]_0^1 = \frac{1}{n+2}$

Donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left|u_n - \int_0^1 1-xdx\right| = 0$ et donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \int_0^1 1-xdx = \frac{1}{2}$

Ce que nous voulions

Quod erat demonstratum

Exercice 33 :

1. *Soit $f : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n\int_0^1 x^n f(x)\,dx$ converge et que sa somme est $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(x)}{1+x}dx$*

$\rightarrow$ Soit $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\int_0^1 x^k f(x)\,dx$. Alors, nous avons aussi $S_n = \displaystyle\int_0^1 f(x)\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k\right)dx$.

Nous avons $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k = \frac{1-(-1)^{n+1}x^{n+1}}{1+x}$ et donc $S_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{f(x)\left(1-(-1)^{n+1}x^{n+1}\right)}{1+x}dx$

$\rightarrow$ Nous avons donc $S_n - \displaystyle\int_0^1 \frac{f(x)}{1+x}dx = (-1)^n\int_0^1 \frac{f(x)\,x^{n+1}}{1+x}dx$ et donc :

$$\left|S_n - \int_0^1 \frac{f(x)}{1+x}dx\right| \leqslant \int_0^1 \frac{|f(x)|\,x^{n+1}}{1+x}dx$$

$\rightarrow$ Comme f est bornée sur $[0;1]$ il existe $M > 0$ tel que pour tout $x \in [0;1]$ nous ayions $|f(x)| \leqslant M$.

D'autre part, pour $x \in [0;1]$, nous avons $0 < \dfrac{1}{1+x} \leqslant 1$, de telle sorte que nous ayions :

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{|f(x)|\,x^{n+1}}{1+x}dx \leqslant M\int_0^1 x^{n+1}dx = \frac{M}{n+2}$$

D'où nous déduisons que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{|f(x)|\,x^{n+1}}{1+x}dx = 0$ et que donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left|S_n - \int_0^1 \frac{f(x)}{1+x}dx\right| = 0$, c'est à dire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_0^1 \frac{f(x)}{1+x}dx$

Quod erat demonstratum

Application

Pour $u_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \sin(\pi x)\,dx$, donner la somme de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n u_n$

2. *Notons $u_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \sin(\pi x)\,dx$. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}u_n$ converge et que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}u_n = \int_0^\pi \frac{\sin x}{x}\,dx$*

Comme toujours, appelons $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$

Nous avons alors

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \int_0^1 x^n \sin(\pi x)\, dx = \int_0^1 \sin(\pi x) \left(\sum_{k=0}^{n} x^k \right) dx = \int_0^1 \sin(\pi x) \times \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}\, dx$$

De telle sorte que :

$$\left| S_n - \int_0^1 \frac{\sin(\pi x)}{1-x}\, dx \right| \leqslant \int_0^1 \left| \frac{\sin(\pi x)\, x^{n+1}}{1-x} \right| dx = \int_0^1 \left| \frac{\sin(\pi x)}{1-x} \right| x^{n+1}\, dx$$

Appelons $\psi(x) = \dfrac{\sin(\pi x)}{1-x}$ et démontrons que ψ est continue sur $[0;1]$.
Le seul souci se pose en $x = 1$.
Le rapport $\dfrac{\sin(\pi x)}{1-x} = -\dfrac{\sin(\pi x)}{x-1}$ est un rapport de dérivation de la fonction $\sin(\pi x)$ et :

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sin(\pi x)}{x-1} = \pi \cos \pi = -\pi$$

De telle sorte que $\lim\limits_{x\to 1} \psi(x) = \lim\limits_{x\to 1} -\dfrac{\sin(\pi x)}{x-1} = \pi$.
On peut donc prolonger ψ par continuité en $x = 1$ en posant $\psi(1) = \pi$.
ψ, fonction continue sur le compact $[0;1]$ y est bornée, c'est à dire qu'il existe $M > 0$ tel que, pour tout $x \in [0;1]$, $|\psi(x)| \leqslant M$. Ainsi :

$$\left| S_n - \int_0^1 \frac{\sin(\pi x)}{1-x}\, dx \right| \leqslant \int_0^1 \left| \frac{\sin(\pi x)}{1-x} \right| x^{n+1}\, dx \leqslant \int_0^1 M x^{n+1}\, dx = M \left[\frac{x^{n+2}}{n+2} \right]_0^1 = \frac{M^{n+2}}{n+2}$$

Nous avons bien $\lim\limits_{n\to+\infty} \left| S_n - \displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(\pi x)}{1-x}\, dx \right| = 0$, c'est à dire $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n = \int_0^1 \frac{\sin(\pi x)}{1-x}\, dx$

Pour démontrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(\pi x)}{1-x}\, dx = \int_0^\pi \frac{\sin x}{x}\, dx$, il suffit de faire des changements de variables

- ⋆ On fait un premier changement $u = \pi x \iff x = \dfrac{u}{\pi}$ et donc $\dfrac{du}{dx} = \pi \iff \dfrac{du}{\pi} = dx$. Nous avons alors :

$$\int_0^1 \frac{\sin(\pi x)}{1-x}\, dx = \int_0^\pi \frac{\sin u}{\left(1 - \frac{u}{\pi}\right)} \frac{du}{\pi} = \int_0^\pi \frac{\sin u}{(\pi - u)}\, du$$

- ⋆ Nous faisons le second changement de variables $v = \pi - u \iff u = \pi - v$ et $\dfrac{du}{dv} = -1 \iff du = -dv$. Nous avons alors :

$$\int_0^\pi \frac{\sin u}{(\pi - u)}\, du = \int_\pi^0 \frac{\sin(\pi - v)}{v} - dv = \int_0^\pi \frac{\sin(\pi - v)}{v}\, dv$$

  Comme $\sin(\pi - v) = \sin v$, nous avons $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin(\pi - v)}{v}\, dv = \int_0^\pi \frac{\sin v}{v}\, dv$

C'est à dire $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(\pi x)}{1-x}\, dx = \int_0^\pi \frac{\sin v}{v}\, dv$, et nous pouvons conclure que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n = \int_0^\pi \frac{\sin x}{x}\, dx$

3. *Soit $\alpha > 0$. Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{n+\alpha} = \int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\, dx$*

Appelons $P_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k$; classiquement, nous avons $P_n(x) = \dfrac{1 - (-1)^{n+1} x^{n+1}}{1+x}$ et donc :

$$x^{\alpha-1} P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{k+\alpha-1} = \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} + \frac{(-1)^n x^{n+\alpha}}{1+x}$$

En passant à l'intégrale, nous avons :

$$\int_0^1 x^{\alpha-1} P_n(x)\, dx = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \int_0^1 x^{k+\alpha-1}\, dx = \int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\, dx + \int_0^1 \frac{(-1)^n x^{n+\alpha}}{1+x}\, dx$$

Nous avons $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \int_0^1 x^{k+\alpha-1}\, dx = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left[\frac{x^{k+\alpha}}{\alpha+k}\right]_0^1 = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{\alpha+k}$

En appelant $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{\alpha+k}$, nous allons démontrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\, dx$.

$$\left| S_n - \int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\, dx \right| = \left| \int_0^1 \frac{(-1)^n x^{n+\alpha}}{1+x}\, dx \right| \leqslant \int_0^1 \frac{x^{n+\alpha}}{1+x}\, dx$$

Comme $x \in [0;1]$, nous avons $1 \leqslant 1+x \leqslant 2$ et donc $\dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{1}{1+x} \leqslant 1$. Dès lors

$$\int_0^1 \frac{x^{n+\alpha}}{1+x}\, dx \leqslant \int_0^1 x^{n+\alpha}\, dx = \left[\frac{x^{n+\alpha+1}}{n+\alpha+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+\alpha+1}$$

Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+\alpha+1} = 0$, nous avons $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left| S_n - \int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\, dx \right| = 0$ et donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\, dx$, c'est à dire $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{n+\alpha} = \int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\, dx$

QED, ce que nous voulions.

Exercice 34 :

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(0) \neq 0$. Etudier la convergence de la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha} \displaystyle\int_0^{\frac{1}{n}} f(t^n)\, dt$

La difficulté dans cet exercice, c'est que l'intégrale dépend de n.

D'autre part, comme $t \in [0;1]$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} t^n = 0$, de la continuité de f, il est loisible de penser que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f(t^n) = f(0)$.

Nous allons démontrer que $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{n}} f(t^n)\, dt \underset{+\infty}{\approx} \frac{f(0)}{n}$.

⇒ Premièrement, nous avons $\dfrac{f(0)}{n} = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{n}} f(0)\, dt$ et donc :

$$\left| \int_0^{\frac{1}{n}} f(t^n)\, dt - \frac{f(0)}{n} \right| = \left| \int_0^{\frac{1}{n}} f(t^n) - f(0)\, dt \right| \leqslant \int_0^{\frac{1}{n}} |f(t^n) - f(0)|\, dt \leqslant \frac{1}{n} \sup_{t\in[0;\frac{1}{n}]} |f(t) - f(0)|$$

⇒ Nous appelons $M_n = \displaystyle\sup_{t\in[0;\frac{1}{n}]} |f(t) - f(0)|$. Nous allons démontrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} M_n = 0$

Soit donc $\varepsilon > 0$.

Comme f est continue sur $[0;1]$, il existe $\eta > 0$ tel que si $0 < t < \eta$, alors $|f(t) - f(0)| < \varepsilon$.

Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N$, alors $0 < \dfrac{1}{n} < \eta$. Donc, si $n \geqslant N$, alors $\displaystyle\sup_{t\in[0;\frac{1}{n}]} |f(t) - f(0)| < \varepsilon$,

c'est à dire $0 < M_n < \varepsilon$

Donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} M_n = 0$

⇒ Nous allons démontrer, qu'en $+\infty$, $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{n}} f(t^n)\, dt \underset{+\infty}{\approx} \frac{f(0)}{n}$

Nous avons les équivalences suivantes :

$$\left|\int_0^{\frac{1}{n}} f\left(t^n\right) dt - \frac{f(0)}{n}\right| \leqslant \frac{M_n}{n} \Longleftrightarrow \frac{|f(0)|}{n}\left|\frac{\displaystyle\int_0^{\frac{1}{n}} f\left(t^n\right) dt}{\frac{f(0)}{n}} - 1\right| \leqslant \frac{M_n}{n} \Longleftrightarrow \left|\frac{\displaystyle\int_0^{\frac{1}{n}} f\left(t^n\right) dt}{\frac{f(0)}{n}} - 1\right| \leqslant \frac{M_n}{|f(0)|}$$

La dernière équivalence étant possible car $f(0) \neq 0$

De $\lim\limits_{n\to+\infty} M_n = 0$, nous tirons $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{\displaystyle\int_0^{\frac{1}{n}} f\left(t^n\right) dt}{\frac{f(0)}{n}} - 1\right| = 0$, c'est à dire $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\displaystyle\int_0^{\frac{1}{n}} f\left(t^n\right) dt}{\frac{f(0)}{n}} = 1$,

et que donc $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{n}} f\left(t^n\right) dt \underset{+\infty}{\approx} \frac{f(0)}{n}$

⇒ Dès lors, $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha}\displaystyle\int_0^{\frac{1}{n}} f\left(t^n\right) dt \underset{+\infty}{\approx} \frac{1}{n^\alpha} \times \frac{f(0)}{n} = \frac{f(0)}{n^{\alpha+1}}$

La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge donc si et seulement si $\alpha + 1 > 1$, c'est à dire $\alpha > 0$

Exercice 35 :

1. *Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de réels positifs. On considère la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :*

$$v_n = \frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n} k u_k$$

Montrer que les séries $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} v_n$ ont même nature, et qu'en cas de convergence, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n = \sum_{n\geqslant 1} v_n$

⇒ Il faut remarquer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} v_n$ est aussi une série à termes positifs

⇒ Classiquement, nous avons $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{(n+1)}$, de telle sorte que :

$$v_n = \frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n} k u_k = \sum_{k=1}^{n} k u_k\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{(n+1)}\right) = \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k u_k}{n} - \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k u_k}{(n+1)}$$

⇒ Appelons $\alpha_n = \dfrac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k u_k}{n}$; nous avons, en particulier $\alpha_1 = u_1$. Alors :

$$\frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k u_k}{(n+1)} = \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k u_k}{(n+1)} + \frac{(n+1)\,u_{n+1}}{n+1} - u_{n+1} = \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} k u_k}{(n+1)} - u_{n+1} = \alpha_{n+1} - u_{n+1}$$

De telle sorte que $v_n = \alpha_n - \alpha_{n+1} + u_{n+1}$

⇒ Appelons $S_n^v = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} v_k$ la somme partielle de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} v_n$. Alors :

$$S_n^v = \sum_{k=1}^{n} v_k = \sum_{k=1}^{n}\left(\alpha_k - \alpha_{k+1} + u_{k+1}\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\alpha_k - \alpha_{k+1}\right) + \sum_{k=1}^{n} u_{k+1}$$

Classiquement, nous avons $\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k - \alpha_{k+1}) = \alpha_1 - \alpha_{n+1} = u_1 - \alpha_{n+1}$, de telle sorte que :

$$\begin{aligned}
S_n^v &= -\alpha_{n+1} + \sum_{k=1}^{n+1} u_k \\
&= -\frac{\sum_{k=1}^{n} ku_k + (n+1)\,u_{n+1}}{n+1} + \sum_{k=1}^{n+1} u_k \\
&= -\frac{\sum_{k=1}^{n} ku_k}{n+1} - \frac{(n+1)\,u_{n+1}}{n+1} + \sum_{k=1}^{n+1} u_k \\
&= -\frac{\sum_{k=1}^{n} ku_k}{n+1} - u_{n+1} + \sum_{k=1}^{n+1} u_k \\
&= -\frac{\sum_{k=1}^{n} ku_k}{n+1} + \sum_{k=1}^{n} u_k
\end{aligned}$$

C'est à dire que nous avons $S_n^v = \sum_{k=1}^{n} v_k = -\frac{\sum_{k=1}^{n} ku_k}{n+1} + \sum_{k=1}^{n} u_k$

Comme $v_n = \frac{1}{n\,(n+1)}\sum_{k=1}^{n} ku_k$, nous avons $\frac{\sum_{k=1}^{n} ku_k}{n+1} = n \times \frac{1}{n\,(n+1)}\sum_{k=1}^{n} ku_k = nv_n$ et nous pouvons donc écrire $\sum_{k=1}^{n} v_k = \sum_{k=1}^{n} u_k - \frac{nv_n}{n+1}$

⇒ Nous en concluons donc que $\sum_{k=1}^{n} v_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} u_k$ et donc :

- ⋆ Si $\sum_{k=1}^{n} v_k$ diverge, alors $\sum_{k=1}^{n} u_k$ diverge
- ⋆ Si $\sum_{k=1}^{n} u_k$ converge, alors $\sum_{k=1}^{n} v_k$ converge

Ainsi, si la série $\sum_{n\geqslant 1} v_n$, il en est de même de la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ et si la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge, il en est de même de la série $\sum_{n\geqslant 1} v_n$

⇒ Il faut maintenant étudier les réciproque.

⋆ Supposons $\sum_{n\geqslant 1} v_n$ converge.

Alors $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$ et de l'égalité $\sum_{k=1}^{n} v_k = \sum_{k=1}^{n} u_k - \frac{nv_n}{n+1}$ prouvée ci-dessus, nous déduisons que

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} v_k = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} u_k$$

C'est à dire que la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ est convergente, et que mieux : $\sum_{n\geqslant 1} u_n = \sum_{n\geqslant 1} v_n$

- $\star$ Supposons, maintenant que $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ diverge.

  Supposons que la série $\sum_{n\geqslant 1} v_n$ converge. L'égalité $\sum_{k=1}^{n} v_k = \sum_{k=1}^{n} u_k - \frac{nv_n}{n+1}$ mène à une contradiction. En effet, si le membre de gauche converge vers un nombre positif, le membre de droite diverge vers $+\infty$. Il y a donc contradiction.
  Donc la série $\sum_{n\geqslant 1} v_n$ diverge.

2. *Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de réels positifs telle que $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge.*

   Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \frac{(n!\,(u_1 \times u_2 \times \cdots u_n))^{\frac{1}{n}}}{n+1}$. Démontrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} v_n$ converge et que $\sum_{n\geqslant 1} v_n \leqslant \sum_{n\geqslant 1} u_n$

   Pour résoudre cette question, nous utilisons une inégalité entre moyenne géométrique et moyenne arithmétique[3] :
   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout réels strictement positifs $a_1, \cdots, a_n$ nous avons

$$(a_1 \times \cdots \times a_n)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

   Il est facile de voir que $n!\,(u_1 \times u_2 \times \cdots u_n) = u_1 \times 2u_2 \times \cdots \times ku_k \times \cdots \times nu_n$ et en appliquant l'inégalité des moyennes :

$$(n!\,(u_1 \times u_2 \times \cdots u_n))^{\frac{1}{n}} = (u_1 \times 2u_2 \times \cdots \times ku_k \times \cdots \times nu_n)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{u_1 + 2u_2 + \cdots + ku_k + \cdots + nu_n}{n}$$

   Nous avons donc :

$$v_n = \frac{(n!\,(u_1 \times u_2 \times \cdots u_n))^{\frac{1}{n}}}{n+1} \leqslant \frac{u_1 + 2u_2 + \cdots + ku_k + \cdots + nu_n}{n\,(n+1)}$$

   La série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ étant convergente, d'après la question précédente,

$$\frac{u_1 + 2u_2 + \cdots + ku_k + \cdots + nu_n}{n\,(n+1)} = \frac{1}{n\,(n+1)} \sum_{k=1}^{n} ku_k$$

   est le terme général d'une série convergente, et donc la série $\sum_{n\geqslant 1} v_n$ converge.

   D'autre part, toujours d'après la question précédente, $\sum_{n\geqslant 1} u_n = \sum_{n\geqslant 1} \left(\frac{1}{n\,(n+1)} \sum_{k=1}^{n} ku_k \right)$, nous avons bien l'inégalité demandée :

$$\sum_{n\geqslant 1} v_n \leqslant \sum_{n\geqslant 1} \left(\frac{1}{n\,(n+1)} \sum_{k=1}^{n} ku_k \right) = \sum_{n\geqslant 1} u_n$$

Exercice 36 :

Soit z_n le terme général d'une série complexe absolument convergente. Démontrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{z_n}{n}$ est convergente.

3. A démontrer !!

Nous allons démontrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{z_n}{n}$ est absolument convergente

Nous appelons $S_n = \sum_{k=1}^{n} |z_k|$ et $S_n^1 = \sum_{k=1}^{n} \frac{|z_k|}{k}$.

On peut remarquer que nous avons, en particulier $S_1 = S_1^1 = |z_1|$.

Comme la série $\sum_{n\geqslant 1} z_n$ est absolument convergente, nous avons $\lim_{n\to+\infty} S_n = S$ et nous devons montrer que $\lim_{n\to+\infty} S_n^1$ existe.

Nous avons :

$$\begin{aligned}
S_n^1 = \sum_{k=1}^{n} \frac{|z_k|}{k} &= |z_1| + \sum_{k=2}^{n} \frac{|z_k|}{k} \\
&= |z_1| + \sum_{k=2}^{n} \frac{S_k - S_{k-1}}{k} \\
&= |z_1| + \sum_{k=2}^{n} \frac{S_k}{k} - \sum_{k=2}^{n} \frac{S_{k-1}}{k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{S_k}{k} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{S_k}{k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{S_k}{k} + \frac{S_n}{n} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{S_k}{k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} S_k \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) + \frac{S_n}{n} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{S_k}{k\,(k+1)} + \frac{S_n}{n}
\end{aligned}$$

Comme la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, elle est aussi bornée. Soit donc $M > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous ayons $S_n \leqslant M$. Alors :

$$S_n^1 \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{M}{k\,(k+1)} + \frac{M}{n}$$

Nous avons $\sum_{k=1}^{n} \frac{M}{k\,(k+1)} = M\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) < M$ et $\frac{M}{n} \leqslant M$

Donc la suite $\left(S_n^1\right)_{n\geqslant 1}$ est une suite croissante, de termes réels positifs, majorée, donc convergente.

La série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{z_n}{n}$ est donc absolument convergente

6.7.4 Séries alternées- théorème d'ABEL

Exercice 37 :

Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \sin\left(n\pi + \frac{\pi}{n}\right)$

Dans un premier temps, nous pouvons voir que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin(n\pi + x) = (-1)^n \sin x$ et donc $\sin\left(n\pi + \frac{\pi}{n}\right) = (-1)^n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$.

D'autre part, la suite $\left(\frac{\pi}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite décroissant vers 0, et si $n \geqslant 2$, alors $0 < \frac{\pi}{n} \leqslant \frac{\pi}{2}$, c'est à dire $\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) > 0$ et comme la fonction sinus est décroissante sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, nous avons $\sin\frac{\pi}{n+1} \leqslant \sin\frac{\pi}{n}$

En plus, $\lim_{n\to+\infty} \sin\frac{\pi}{n} = 0$.

La série $\sum_{n\geqslant 1} \sin\left(n\pi + \frac{\pi}{n}\right)$ est donc une série alternée convergente.

Cette série est-elle absolument convergente ? ? ?....Non, puisque $\left|\sin\left(n\pi + \dfrac{\pi}{n}\right)\right| = \left|(-1)^n \sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right)\right| = \left|\sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right)\right| = \sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right)$

En $+\infty$, nous avons $\sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right) \underset{+\infty}{\approx} \dfrac{\pi}{n}$. Or, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{\pi}{n}$ est divergente, et donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \sin\left(n\pi + \dfrac{\pi}{n}\right)$ ne converge pas absolument

Exercice 38 :

Montrer que la série de terme général $u_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x}\sin x\, dx$ est une série alternée ; exprimer u_n en fonction de u_0 ; en déduire $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$

1. En puisant dans vos souvenirs de calcul intégral, on effectue un **changement de variables**. Lequel ? Celui ci est très simple : $u = x - n\pi$, et alors $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 1$, et nous avons :

$$u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x}\sin x\, dx = \int_0^{\pi} e^{-(u+n\pi)}\sin(u+n\pi)\ du$$

   Or, $\sin(u+n\pi) = (-1)^n \sin u$ et $e^{-(u+n\pi)} = e^{-n\pi}e^{-u}$, de telle sorte que

$$u_n = (-1)^n e^{-n\pi}\int_0^{\pi} e^{-u}\sin u\, du$$

   Comme $e^{-n\pi} > 0$ et que, pour $0 \leqslant u \leqslant \pi$, $\sin u \geqslant 0$, nous avons bien u_n qui est le terme général d'une série alternée.

2. **Exprimons u_n en fonction de u_0**

   L'item ci-dessus montre que $u_n = (-1)^n e^{-n\pi}u_0$, où $u_0 = \displaystyle\int_0^{\pi} e^{-x}\sin x\, dx$

3. **Déduisons, maintenant, $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$**

   Clairement, $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ est une série géométrique ; sa somme est donc : $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n = \dfrac{u_0}{1+e^{-\pi}}$; il faut donc calculer u_0, et comment le calculons nous ? En effectuant une classique intégration par parties.

$$\begin{cases} u = e^{-x} & u' = -e^{-x} \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{cases}$$

   D'où

$$u_0 = \left[-\cos x e^{-x}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^{-x}\cos x\, dx = 1 + e^{-\pi} - \int_0^{\pi} e^{-x}\cos x\, dx$$

   Nous faisons une seconde intégration par parties :

$$\begin{cases} u = e^{-x} & u' = -e^{-x} \\ v' = \cos x & v = \sin x \end{cases}$$

   D'où,

$$\int_0^{\pi} e^{-x}\cos x\, dx = \left[e^{-x}\sin x\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} e^{-x}\sin x\, dx = u_0$$

   De telle sorte que : $u_0 = 1 + e^{-\pi} - u_0$, et on trouve que $u_0 = \dfrac{1+e^{-\pi}}{2}$; ainsi, $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n = \dfrac{1}{2}$

Exercice 39 :

1. *Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx$ tend vers 0 en décroissant*

   ⇒ La suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante
   En effet :
   $$I_{n+1} - I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^{n+1} - (\cos x)^n \ dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^n (\cos x - 1)\ dx$$
   Si $x \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$, alors $0 \leqslant \cos x \leqslant 1$ et donc $(\cos x)^n (\cos x - 1) \leqslant 0$, c'est à dire $I_{n+1} - I_n \leqslant 0$ et la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien décroissante

   ⇒ Nous avons $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$
   C'est une question classique, mais pas d'une grande évidence.
   Soit $\varepsilon > 0$ avec $0 < \varepsilon < \dfrac{\pi}{2}$.
   Alors $I_n = \displaystyle\int_0^{\varepsilon} \cos^n x\,dx + \int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx$
   - ⋆ Comme $0 \leqslant \cos x \leqslant 1$, nous avons $\displaystyle\int_0^{\varepsilon} \cos^n x\,dx \leqslant \varepsilon$
   - ⋆ D'autre part, la fonction cos étant décroissante sur $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$, nous avons :
   $$0 \leqslant \int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx \leqslant \int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n \varepsilon\,dx = \cos^n \varepsilon \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)$$
   Comme $0 < \cos\varepsilon < 1$, nous avons $\displaystyle\lim_{n\to+\varepsilon} \cos^n \varepsilon = 0$. Il existe donc $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N_\varepsilon$ alors $0 < \cos^n \varepsilon \left(\dfrac{\pi}{2} - \varepsilon\right) < \varepsilon$
   Donc, pour $n \geqslant N_\varepsilon$ alors nous avons $0 \leqslant \displaystyle\int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx \leqslant \varepsilon$
   En synthèse, si $n \geqslant N_\varepsilon$, alors $0 \leqslant I_n \leqslant 2\varepsilon$
   Nous en concluons donc que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$

2. *Montrer que la série de terme général $u_n = (-1)^n \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx$ est convergente et calculer sa somme.*

   ⇒ En fait, $u_n = (-1)^n I_n$. Nous venons de montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ était positive, décroissante, et tendait vers 0. La série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est donc une série alternée. D'après le critère des séries alternées, la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est donc convergente.

   ⇒ Pour $n \geqslant 0$, soit $A_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cos^k x$
   $A_n(x)$ apparaît donc comme la somme des termes d'une suite géométrique de raison $-\cos x$.
   Nous avons donc :
   $$A_n(x) = \frac{1 - (-1)^{n+1} \cos^{n+1} x}{1 + \cos x}$$

   ⇒ Appelons $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.
   Nous avons $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} A_n(x)\ dx = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^k x\,dx = S_n$
   Donc, $S_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} A_n(x)\ dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - (-1)^{n+1} \cos^{n+1} x}{1 + \cos x}\,dx.$

Nous avons donc :

$$\left|S_n - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\cos x}\,dx\right| = \left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(-1)^n \cos^{n+1} x}{1+\cos x}\,dx\right| \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{n+1} x}{1+\cos x}\,dx$$

De $0 \leqslant \cos x \leqslant 1$ pour $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, nous déduisons $1 \leqslant 1+\cos x \leqslant 2$ et donc $\frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{1+\cos x} \leqslant 1$, c'est à dire $\frac{\cos^{n+1} x}{2} \leqslant \frac{\cos^{n+1} x}{1+\cos x} \leqslant \cos^{n+1} x$.

D'où, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{n+1} x}{2}\,dx \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{n+1} x}{1+\cos x}\,dx \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1} x\,dx$, c'est à dire que nous avons :

$$\frac{I_n}{2} \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{n+1} x}{1+\cos x}\,dx \leqslant I_n$$

Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$, nous avons $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{n+1} x}{1+\cos x}\,dx = 0$, et donc

$$\lim_{n\to+\infty} \left|S_n - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\cos x}\,dx\right| = 0 \Longleftrightarrow \lim_{n\to+\infty} S_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\cos x}\,dx$$

Ce qui montre que la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ admet pour somme $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\cos x}\,dx$

$\Rightarrow$ Il faut, maintenant, calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\cos x}\,dx$

Faisons le changement de variables $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$; alors $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2}\left(1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(1+t^2\right)$.

Avec ce changement de variables, nous avons $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, de telle sorte que :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\cos x}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}} \frac{2dt}{1+t^2} = 2\int_0^1 \frac{1}{\frac{1+t^2+1-t^2}{1+t^2}} \frac{dt}{1+t^2} = 22\int_0^1 \frac{1}{2}\,dt = 1$$

Ainsi, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\cos x}\,dx = 1$ et $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n = 1$

Faisons une incise sur ce changement de variables

Pour faire ce changement de variables, il faut bien connaître les formules trigonométriques ! !

Nous partons de $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$, et nous avons donc $\cos x = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1$.

Nous poursuivons en observant que $1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \Longleftrightarrow \cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x}$ et donc $\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}$

Revenons à $\cos x = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1$. Nous avons alors :

$$\cos x = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1 \Longleftrightarrow \cos x = \frac{2}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} - 1 = \frac{1-\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

C'est à dire que si nous posons $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, nous avons $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

Exercice 40 :

1. *Quelle est la nature de la série numérique $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$?*

   C'est visiblement une série alternée ! Nous devons donc considéerer la suite $\left(\frac{1}{2n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

   (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $\frac{1}{2n+1} > 0$

   (b) Nous avons : $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n+1} = 0$

   (c) La suite $\left(\frac{1}{2n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante

   D'après le critère des séries alternées, la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ est convergente.

2. *Pour $t \in \mathbb{R}$, montrer que $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{2k} = \frac{1}{1+t^2} + \frac{(-1)^n t^{2n+2}}{1+t^2}$*

   C'est une question tout ce qu'il y a de plus classique.

   (a) On considère tout d'abord la suite géométrique $\left(\left(-t^2\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et on calcule la somme des $n+1$ premiers termes : $\sum_{k=0}^{n} \left(-t^2\right)^k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{2k} = \frac{1-\left(-t^2\right)^{n+1}}{1+t^2}$

   (b) En écrivant

   $$\frac{1-\left(-t^2\right)^{n+1}}{1+t^2} = \frac{1-(-1)^{n+1}\left(t^2\right)^{n+1}}{1+t^2} = \frac{1}{1+t^2} + \frac{(-1)^n t^{2n+2}}{1+t^2}$$

   nous avons donc $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{2k} = \frac{1}{1+t^2} + \frac{(-1)^n t^{2n+2}}{1+t^2}$

3. *En déduire que $\left|\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \int_0^1 t^{2k}\, dt - \frac{\pi}{4}\right| \leqslant \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\, dt$*

   (a) Remarquons que nous avons $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{2k} - \frac{1}{1+t^2} = \frac{(-1)^n t^{2n+2}}{1+t^2}$

   (b) Et alors, nous avons, en passant à l'intégrale :

   $$\left|\int_0^1 \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{2k} - \frac{1}{1+t^2}\, dt\right| = \left|\int_0^1 \frac{(-1)^n t^{2n+2}}{1+t^2}\, dt\right| \leqslant \int_0^1 \left|\frac{(-1)^n t^{2n+2}}{1+t^2}\right| dt = \int_0^1 \left|\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\right| dt$$

   (c) De la linéarité de l'intégrale, nous avons

   $$\int_0^1 \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{2k} - \frac{1}{1+t^2}\, dt = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \int_0^1 t^{2k}\, dt - \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\, dt$$

   comme $\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\, dt = [\arctan t]_0^1 = \frac{\pi}{2}$, et que si $0 \leqslant t \leqslant 1$, $\frac{t^{2n+2}}{1+t^2} \geqslant 0$, nous avons l'inégalité :

   $$\left|\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \int_0^1 t^{2k}\, dt - \frac{\pi}{4}\right| \leqslant \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\, dt$$

4. *On appelle S_n la suite des sommes partielles, c'est à dire : $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$.*

   Montrer que $\left| S_n - \frac{\pi}{4} \right| \leqslant \frac{1}{2n+3}$

   En fait, pour $t \in [0\ 1]$, nous avons : $\frac{t^{2n+2}}{1+t^2} \leqslant t^{2n+2}$, et donc
$$\int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\, dt \leqslant \int_0^1 t^{2n+2}\, dt = \left[\frac{t^{2n+3}}{2n+3} \right]_0^1 = \frac{1}{2n+3}$$
   Par transitivité de la relation d'ordre, nous avons :$\left| S_n - \frac{\pi}{4} \right| \leqslant \frac{1}{2n+3}$

5. *En déduire que $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$*

   Nous avons $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2n+3} = 0$; on montre ainsi que $\lim_{n \to +\infty} S_n = \frac{\pi}{4}$, et donc, $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$

Exercice 41 :

1. *La série $\sum_{n \geqslant 2} \frac{(-1)^n}{n\sqrt{\ln n}}$ est-elle convergente ?*

   C'est visiblement une série alternée. D'autre part, la suite $\left(\frac{1}{n\sqrt{\ln n}} \right)_{n \geqslant 2}$ est une suite décroissante qui tend vers 0.

   Nous en déduisons que la série $\sum_{n \geqslant 2} \frac{(-1)^n}{n\sqrt{\ln n}}$ est convergente.

2. *L'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$ est-elle convergente ?*

   Soit $T > 2$; nous allons étudier l'intégrale $\int_2^T \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$

   L'intégrale $\int_2^T \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$ est du type $\int_2^T \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}} dx = \int_2^T u'(x) (u(x))^{\frac{-1}{2}}\, dx$, où $u(x) = \ln x$ et nous avons :
$$\int_2^T u'(x) (u(x))^{\frac{-1}{2}}\, dx = \left[\frac{(u(x))^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right]_2^T = 2\sqrt{u(T)} - 2\sqrt{u(2)}$$
   C'est à dire $\int_2^T \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} = 2\sqrt{\ln T} - 2\sqrt{\ln 2}$.

   Comme $\lim_{T \to +\infty} 2\sqrt{\ln T} = +\infty$, l'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$ diverge

3. *La série $\sum_{n \geqslant 2} \frac{(-1)^n}{n\sqrt{\ln n}}$ est-elle absolument convergente ?*

   La série $\sum_{n \geqslant 2} \frac{(-1)^n}{n\sqrt{\ln n}}$ est absolument convergente si et seulement si la série $\sum_{n \geqslant 2} \left| \frac{(-1)^n}{n\sqrt{\ln n}} \right| = \sum_{n \geqslant 2} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$ converge.

   On considère la fonction f définie par :
$$\begin{cases} f : [2; +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \quad x & \longmapsto & f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{\ln x}} \end{cases}$$

Cette fonction est positive pour tout $x \geqslant 2$. D'autre part $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x\sqrt{\ln x}} = 0$.

D'autre part, par un calcul de dérivée classique, nous obtenons $f'(x) = \dfrac{-\left(\frac{1}{2}+\ln x\right)}{x^2\ln x\sqrt{\ln x}}$; nous avons bien $f'(x) \leqslant 0$ et la fonction f est décroissante sur $[2;+\infty[$

D'après le théorème 6.4.4, l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} f(x)\,dx$ et la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} f(n)$ ont même nature, c'est à dire que l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$ et la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$ ont même nature.

Comme l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$ diverge, il en est de même de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$.

Ainsi, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{(-1)^n}{n\sqrt{\ln n}}$ ne converge pas absolument. Elle est donc semi-convergente

Exercice 42 :

1. *Questions préliminaires :*

(a) *Calculer l'intégrale* $\displaystyle\int_0^1 t^{3n}\,\mathrm{d}t$

Honnêtement, voilà qui ne pose aucune difficulté :

$$\int_0^1 t^{3n}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{3n+1}}{3n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{3n+1}$$

(b) *Décomposer la fraction* $\dfrac{1}{1+t^3}$ *en éléments simples*

Question plutôt calculatoire. Remarquons que $1+t^3 = (t+1)\left(t^2-t+1\right)$ et donc, il nous faut trouver $A\in\mathbb{R}$, $B\in\mathbb{R}$ et $C\in\mathbb{R}$ tels que :

$$\frac{1}{1+t^3} = \frac{A}{t+1} + \frac{Bt+C}{t^2-t+1} = \frac{(A+B)\,t^2 + (-A+B+C)\,t + (A+C)}{t^3+1}$$

Et donc, en identifiant, nous obtenons un système :

$$\begin{cases} A+B = & 0 \\ -A+B+C = & 0 \\ A+C = & 1 \end{cases} \iff A = \frac{1}{3} \qquad B = \frac{-1}{3} \qquad C = \frac{2}{3}$$

Et nous avons alors :

$$\frac{1}{1+t^3} = \frac{\frac{1}{3}}{t+1} + \frac{\frac{-1}{3}t+\frac{2}{3}}{t^2-t+1} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{t+1} + \frac{-t+2}{t^2-t+1}\right)$$

(c) *Calculer l'intégrale* $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^3}\,\mathrm{d}t$

Voilà une question qui, si elle n'est pas compliquée, est calculatoire et longue. Prenons donc notre temps !!

$\Rightarrow$ De l'égalité $\dfrac{1}{1+t^3} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{t+1} + \dfrac{-t+2}{t^2-t+1}\right)$, nous déduisons :

$$\int_0^1 \frac{1}{1+t^3}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1}{3}\left(\frac{1}{t+1} + \frac{-t+2}{t^2-t+1}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\left(\int_0^1 \frac{1}{t+1}\,\mathrm{d}t + \int_0^1 \frac{-t+2}{t^2-t+1}\,\mathrm{d}t\right)$$

Nous allons donc d'abord calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t+1}\,\mathrm{d}t$, puis $\displaystyle\int_0^1 \frac{-t+2}{t^2-t+1}\,\mathrm{d}t$

⇒ Calcul de $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t+1}\,\mathrm{d}t$

Bon, ben là, c'est du gateaux : $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t+1}\,\mathrm{d}t = [\ln(t+1)]_0^1 = \ln 2$

⇒ Calcul de $\displaystyle\int_0^1 \frac{-t+2}{t^2-t+1}\,\mathrm{d}t$

Alors là, c'est bien autre chose ! ! ! Commençons par un petit tripatouillage :

$$\frac{-t+2}{t^2-t+1} = \frac{-1}{2} \times \frac{2t-4}{t^2-t+1} = \frac{-1}{2}\left(\frac{2t-1}{t^2-t+1} - \frac{3}{t^2-t+1}\right)$$

⋆ Alors $\displaystyle\int_0^1 \frac{2t-1}{t^2-t+1}\,\mathrm{d}t = \left[\ln\left(t^2-t+1\right)\right]_0^1 = 0$, de telle sorte que :

$$\int_0^1 \frac{-t+2}{t^2-t+1}\,\mathrm{d}t = \frac{-1}{2}\int_0^1 \frac{-3}{t^2-t+1}\,\mathrm{d}t = \frac{3}{2}\int_0^1 \frac{1}{t^2-t+1}\,\mathrm{d}t$$

⋆ Nous calculons donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^2-t+1}\,\mathrm{d}t$

▷ Nous avons :

$$\begin{aligned} t^2-t+1 = & \left(t-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1 \\ = & \left(t-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \\ = & \frac{3}{4}\left(\left(\frac{2}{\sqrt{3}}t - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1\right) \end{aligned}$$

Et donc $\displaystyle\frac{1}{t^2-t+1} = \frac{\frac{4}{3}}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}t - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1}$, de telle sorte que

$$\int_0^1 \frac{1}{t^2-t+1}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\frac{4}{3}}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}t - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1}\,\mathrm{d}t = \frac{4}{3}\int_0^1 \frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}t - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1}\,\mathrm{d}t$$

▷ Calculons maintenant $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}t - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1}\,\mathrm{d}t$

Faisons le changement de variables $u = \dfrac{2}{\sqrt{3}}t - \dfrac{1}{\sqrt{3}}$; alors

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{2}{\sqrt{3}} \Longleftrightarrow \mathrm{d}t = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{d}u$$

Et donc :

$$\int_0^1 \frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}t-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\,\mathrm{d}t = \int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1}{u^2+1}\frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{d}u$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1}{u^2+1}\,\mathrm{d}u$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\left[\arctan u\right]_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}}$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}-\arctan\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\pi}{6}-\frac{-\pi}{6}\right)$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\pi}{3}$$
$$= \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$$

$\triangleright$ Donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^2-t+1}\,\mathrm{d}t = \frac{4}{3}\times\frac{\pi}{2\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$

Donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{-t+2}{t^2-t+1}\,\mathrm{d}t = \frac{3}{2}\int_0^1 \frac{1}{t^2-t+1}\,\mathrm{d}t = \frac{3}{2}\times\frac{2\pi}{3\sqrt{3}} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow$ Et donc :

$$\int_0^1 \frac{1}{1+t^3}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\left(\int_0^1 \frac{1}{t+1}\,\mathrm{d}t + \int_0^1 \frac{-t+2}{t^2-t+1}\,\mathrm{d}t\right) = \frac{1}{3}\left(\ln 2+\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\ln 2}{3}+\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

2. *La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n}{3n+1}$ est-elle convergente ?*

La suite $\left(\dfrac{1}{3n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite à termes positifs, décroissante et telle que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{3n+1}=0$.

D'après le crière des séries alternées, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n}{3n+1}$ est donc convergente

3. *Montrer que nous avons $\displaystyle\sum_{k=0}^{N}\frac{(-1)^k}{3k+1} = \int_0^1 \frac{1}{1+t^3}\,\mathrm{d}t + \int_0^1 \frac{t^{3N+3}}{1+t^3}\,\mathrm{d}t$*

C'est une question des plus classiques !!

$$\sum_{k=0}^{N}\left(-t^3\right)^k = \frac{1-(-1)^{N+1}t^{3N+3}}{1+t^3} = \frac{1}{1+t^3}+\frac{(-1)^N t^{3N+3}}{1+t^3}$$

D'où en passant par l'intégrale :

$$\int_0^1\sum_{k=0}^{N}\left(-t^3\right)^k\,\mathrm{d}t = \int_0^1\frac{1}{1+t^3}\,\mathrm{d}t+\int_0^1\frac{(-1)^N t^{3N+3}}{1+t^3}\,\mathrm{d}t$$

Or : $\displaystyle\int_0^1\sum_{k=0}^{N}\left(-t^3\right)^k\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{N}\int_0^1\left(-t^3\right)^k\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{N}(-1)^k\int_0^1 t^{3k}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{N}(-1)^k\frac{1}{3k+1}$, c'est à dire :

$$\sum_{k=0}^{N}\frac{(-1)^k}{3k+1} = \int_0^1\frac{1}{1+t^3}\,\mathrm{d}t+\int_0^1\frac{t^{3N+3}}{1+t^3}\,\mathrm{d}t$$

Ce que nous voulions

4. *En déduire la somme de la série* $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{3n+1}$

   Toujours une question classique :

$$\left|\sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k}{3k+1} - \int_0^1 \frac{1}{1+t^3}\,\mathrm{d}t\right| = \left|\int_0^1 \frac{t^{3N+3}}{1+t^3}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^1 \frac{t^{3N+3}}{1+t^3}\,\mathrm{d}t$$

   Comme $t \in [0;+1]$, nous avons $\dfrac{t^{3N+3}}{1+t^3} \leqslant t^{3N+3}$ et alors :

$$\int_0^1 \frac{t^{3N+3}}{1+t^3}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t^{3N+3}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3N+4}$$

   Comme nous avons $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{3N+4} = 0$, nous avons aussi $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \left|\sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k}{3k+1} - \int_0^1 \frac{1}{1+t^3}\,\mathrm{d}t\right| = 0$

   et donc :

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k}{3k+1} = \int_0^1 \frac{1}{1+t^3}\,\mathrm{d}t = \frac{\ln 2}{3} + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

   En conclusion, $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{3n+1} = \frac{\ln 2}{3} + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$

6.7.5 Séries à termes réels ou complexes

Exercice 43 :

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 2 suites à termes complexes telles que les séries $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} |u_n|^2$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} |v_n|^2$ convergent.

Démontrer que, pour tout entier $p \geqslant 2$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} (u_n - v_n)^p$ converge.

Nous allons démontrer, qu'en fait, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} (u_n - v_n)^p$ est absolument convergente.

Nous avons : $|(u_n - v_n)^p| = |u_n - v_n|^p \leqslant (|u_n| + |v_n|)^p$
Comme les séries $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} |u_n|^2$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} |v_n|^2$ convergent, nous avons $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} |u_n| = \lim_{n\to+\infty} |u_n| = 0$. Il existe donc un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que, si $n \geqslant N$, alors $0 < |u_n| + |v_n| < \dfrac{1}{2}$ [4]
Alors, pour $n \geqslant N$, nous avons $(|u_n| + |v_n|)^p \leqslant (|u_n| + |v_n|)^2$
Nous utilisons alors l'inégalité classique vraie pour tout $a \in \mathbb{C}$ et tout $b \in \mathbb{C}$: $(|a| + |b|)^2 \leqslant 2\left(|a|^2 + |b|^2\right)$ [5]
et nous avons donc $(|u_n| + |v_n|)^2 \leqslant 2\left(|u_n|^2 + |v_n|^2\right)$
C'est à dire que si $n \geqslant N$, alors $|(u_n - v_n)^p| \leqslant 2\left(|u_n|^2 + |v_n|^2\right)$.
Les séries $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} |u_n|^2$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} |v_n|^2$ étant convergentes, nous en déduisons que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} (u_n - v_n)^p$ est absolument convergente, donc convergente.

Exercice 44 :

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes complexes telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la partie réelle de u_n soit positive, c'est à dire $\mathrm{Re}\,(u_n) \geqslant 0$.
On suppose que les séries $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n^2$ convergent. Démontrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} |u_n|^2$ converge.

4. $\dfrac{1}{2}$ par exemple ; cela aurait pu être n'importe quel nombre strictement inférieur à 1
5. Démonstration classique à revoir dans les nombres complexes

Une première remarque : c'est qu'il faut bien nous dire que nous sommes dans $\mathbb{C}$, puisque, dans $\mathbb{R}$, ce serait trivial ; en effet, dans $\mathbb{R}$, nous avons $u_n^2 = |u_n|^2$

$\Rightarrow$ Comme la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge, nous avons aussi les séries $\sum_{n\geqslant 0} \mathrm{Re}\,(u_n)$ et $\sum_{n\geqslant 0} \mathrm{Im}\,(u_n)$ qui sont convergentes.
D'autre part, $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ et donc $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{Re}\,(u_n) = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{Im}\,(u_n) = 0$. Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N$, alors $0 < \mathrm{Re}\,(u_n) < 1$, c'est à dire que si $n \geqslant N$, alors $0 < (\mathrm{Re}\,(u_n))^2 < \mathrm{Re}\,(u_n) < 1$.
Comme $\sum_{n\geqslant 0} \mathrm{Re}\,(u_n)$ converge, il en est de même de $\sum_{n\geqslant 0} (\mathrm{Re}\,(u_n))^2$

$\Rightarrow$ Nous avons $u_n^2 = \mathrm{Re}\,(u_n)^2 - \mathrm{Im}\,(u_n)^2 + 2i\,\mathrm{Im}\,(u_n)\,\mathrm{Re}\,(u_n)$ et comme la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n^2$ converge, nous pouvons en déduire que les séries à termes réels $\sum_{n\geqslant 0} (\mathrm{Re}\,(u_n))^2 - (\mathrm{Im}\,(u_n))^2$ et $\sum_{n\geqslant 0} \mathrm{Im}\,(u_n)\,\mathrm{Re}\,(u_n)$ convergent.
Comme $\sum_{n\geqslant 0} (\mathrm{Re}\,(u_n))^2$ et $\sum_{n\geqslant 0} (\mathrm{Re}\,(u_n))^2 - (\mathrm{Im}\,(u_n))^2$ convergent, la série $\sum_{n\geqslant 0} (\mathrm{Im}\,(u_n))^2$ converge elle aussi.

$\Rightarrow$ Or, $|u_n|^2 = (\mathrm{Re}\,(u_n))^2 + (\mathrm{Im}\,(u_n))^2$; nous pouvons donc conclure que la série $\sum_{n\geqslant 0} |u_n|^2$ converge.

Exercice 45 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels et $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $f(0) = 0$
Démontrer que, si les séries $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} u_n^2$ convergent alors, la série $\sum_{n\geqslant 0} f(u_n)$ converge.

$\Rightarrow$ Comme la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge, nous avons, comme toujours, $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$, et donc, pour $A > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que si $n \geqslant N$, nous avons $-A \leqslant u_n \leqslant A$

$\Rightarrow$ Nous écrivons la formule de Taylor en 0 :

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2} f''(\theta) \iff f(x) = xf'(0) + \frac{x^2}{2} f''(\theta)$$

f étant de classe $\mathcal{C}^2$, f'' est donc bornée sur l'intervalle $[-A; +A]$, c'est à dire qu'il existe $M > 0$ tel que, pour tout $x \in [-A; +A]$, nous avons $|f''(x)| \leqslant M$

$\Rightarrow$ Donc, pour $n \geqslant N$, en appliquant la formule de Taylor à u_n et en utilisant la majoration, nous avons :

$$|f(u_n) - u_n f'(0)| \leqslant M \frac{u_n^2}{2}$$

La série $\sum_{n\geqslant 0} u_n^2$ étant convergente, la série $\sum_{n\geqslant 0} (f(u_n) - u_n f'(0))$ est absolument convergente, donc convergente.
Comme, par hypothèse, la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est convergente, il en est de même de $\sum_{n\geqslant 0} f(u_n)$

6.7.6 Etudes

Exercice 46 :

Partie 1 : Somme de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$

1. *Le lemme de Riemann-Lebesgue*
   Soient $a \in \mathbb{R}$, et $b \in \mathbb{R}$ tels que que $a < b$. On suppose que f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $[a; b]$. Démontrer que $\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t) \sin nt\,dt = 0$

C'est une question classique que nous pouvons résoudre avec les outils vus dans le cours de calcul intégral de L_0. Nous résolvons cette question en utilisant une **intégration par parties**
Posons :

$$\left\{\begin{array}{ll} u = f(t) & u' = f'(t) \\ v' = \sin nt & v = -\dfrac{\cos nt}{n} \end{array}\right\}$$

Et donc :

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)\sin nt dt &= \left[-\frac{\cos nt}{n}\times f(t)\right]_a^b + \int_a^b f'(t)\times\frac{\cos nt}{n}dt \\ &= \frac{f(a)\cos na - f(b)\cos nb}{n} + \int_a^b f'(t)\times\frac{\cos nt}{n}dt\end{aligned}$$

→ Nous avons $0 \leqslant \left|\dfrac{f(a)\cos na - f(b)\cos nb}{n}\right| \leqslant \dfrac{|f(a)|+|f(b)|}{n}$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{|f(a)|+|f(b)|}{n} = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{f(a)\cos na - f(b)\cos nb}{n}\right| = 0$, c'est à dire $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{f(a)\cos na - f(b)\cos nb}{n} = 0$

→ Ensuite, $\left|\displaystyle\int_a^b f'(t)\times\frac{\cos nt}{n}dt\right| \leqslant \displaystyle\int_a^b |f'(t)|\times\left|\frac{\cos nt}{n}\right|dt \leqslant \frac{1}{n}\int_a^b |f'(t)|\,dt$

f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $[a;b]$, donc f' est continue sur l'intervalle $[a;b]$ et y est donc bornée. Soit $M>0$ tel que, pour tout $x\in[a;b]$, nous ayions $|f'(x)|\leqslant M$. alors :

$$\left|\int_a^b f'(t)\times\frac{\cos nt}{n}dt\right| \leqslant \frac{1}{n}\int_a^b |f'(t)|\,dt \leqslant \frac{M(b-a)}{n}$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{M(b-a)}{n} = 0$, nous en déduisons que $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_a^b f'(t)\times\frac{\cos nt}{n}dt = 0$

En conclusion, comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{f(a)\cos na - f(b)\cos nb}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_a^b f'(t)\times\frac{\cos nt}{n}dt = 0$, nous en déduisons que $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_a^b f(t)\sin nt dt = 0$

Quod erat demonstratum

2. *Soit t un réel de l'intervalle $]0;\pi]$; pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $c_n(t) = \sum\limits_{k=1}^{n}\cos kt$*

(a) *Calculer $c_n(t)$ pour $t\in]0;\pi]$*

Nous allons utiliser l'exponentielle complexe : $\cos kt = \dfrac{e^{ikt}+e^{-ikt}}{2}$, de telle sorte que :

$$c_n(t) = \sum_{k=1}^{n}\cos kt = \sum_{k=1}^{n}\frac{e^{ikt}+e^{-ikt}}{2} = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}e^{ikt}+\sum_{k=1}^{n}e^{-ikt}\right)$$

Or, $\sum\limits_{k=1}^{n}e^{ikt}$ est la somme des termes d'une suite géométrique, et donc, $\sum\limits_{k=1}^{n}e^{ikt} = \dfrac{e^{it}\left(1-e^{int}\right)}{1-e^{it}}$

De même, $\sum\limits_{k=1}^{n}e^{-ikt} = \dfrac{e^{-it}\left(1-e^{-int}\right)}{1-e^{-it}}$

D'où la somme :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} e^{ikt}+e^{-ikt} &= \frac{e^{it}\left(1-e^{int}\right)}{1-e^{it}}+\frac{e^{-it}\left(1-e^{-int}\right)}{1-e^{-it}}\\ &= \frac{\left(e^{it}-1\right)\left(1-e^{int}\right)+\left(e^{-it}-1\right)\left(1-e^{-int}\right)}{2-2\cos t}\\ &= \frac{e^{it}-e^{i(n+1)t}-1+e^{int}+e^{-it}-e^{-i(n+1)t}-1+e^{-int}}{2-2\cos t}\\ &= \frac{2\cos t+2\cos nt-2\cos\left(n+1\right)t-2}{2-2\cos t}\\ &= \frac{\cos t-1+\cos nt-\cos\left(n+1\right)t}{1-\cos t}\\ &= -1+\frac{\cos nt-\cos\left(n+1\right)t}{1-\cos t}\end{aligned}$$

Les formules trigonométriques classiques donnent :

$$\cos nt-\cos\left(n+1\right)t=-2\sin\left(\frac{\left(n-\left(n+1\right)t\right)}{2}\right)\sin\left(\frac{\left(2n+1\right)t}{2}\right)=2\sin\frac{t}{2}\sin\left(\frac{\left(2n+1\right)t}{2}\right)$$

$$\cos t=1-2\sin^2\frac{t}{2}\iff 1-\cos t=2\sin^2\frac{t}{2}$$

Donc, $\boxed{\sum_{k=1}^{n}\cos kt=-\frac{1}{2}+\frac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{2\sin\frac{t}{2}}}$

(b) *On pose $c_n\left(0\right)=n$. Démontrer qu'alors, c_n est continue sur $[0;\pi]$*

Il est clair que c_n est continue sur $]0;\pi]$. Regardons maintenant $\lim\limits_{t\to 0} c_n\left(t\right)$

Nous allons plutôt étudier $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{2\sin\frac{t}{2}}$

Nous avons :

$$\begin{aligned}\frac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{2\sin\frac{t}{2}} &= \left(\frac{\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)\times\left(\frac{1}{\frac{t}{2}}\right)\times\left(\frac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}\right)\times\left(\frac{\left(2n+1\right)t}{2}\right)\times\frac{1}{2}\\ &= \left(\frac{\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)\times\left(\frac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}\right)\times\left(n+\frac{1}{2}\right)\end{aligned}$$

Comme $\lim\limits_{t\to 0}\left(\frac{\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)=1$ et $\lim\limits_{t\to 0}\left(\frac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}\right)=1$, nous avons $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{2\sin\frac{t}{2}}=n+\frac{1}{2}$

Ce qui montre que $\lim\limits_{t\to 0} c_n\left(t\right)=n$. La fonction c_n est bien continue sur $[0;\pi]$

3. *On pose $W_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$*

(a) *Montrer que $W_n=\int_0^{\pi}\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)c_n\left(t\right)\,dt$*

Nous avons $\int_0^{\pi}\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)c_n\left(t\right)\,dt=\int_0^{\pi}\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\sum\limits_{k=1}^{n}\cos kt\,dt=\sum\limits_{k=1}^{n}\int_0^{\pi}\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\cos kt\,dt$

Nous allons calculer $\int_0^{\pi}\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\cos kt\,dt$ par parties.

On pose donc :

$$\begin{cases} u=\dfrac{t^2}{2\pi}-t & u'=\dfrac{t}{\pi}-1\\ v'=\cos kt & v=\dfrac{1}{k}\sin kt\end{cases}$$

D'où :

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi}-1\right)\cos kt\,dt &= \left[\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\times\frac{1}{k}\sin kt\right]_0^\pi-\frac{1}{k}\int_0^\pi\left(\frac{t}{\pi}-1\right)\sin kt\,dt\\ &= -\frac{1}{k}\int_0^\pi\left(\frac{t}{\pi}-1\right)\sin kt\,dt\end{aligned}$$

Nous faisons une seconde intégration par parties pour calculer $\displaystyle\int_0^\pi\left(\frac{t}{\pi}-1\right)\sin kt\,dt$. Nous posons donc :

$$\begin{cases} u=\dfrac{t}{\pi}-1 & u'=\dfrac{1}{\pi}\\ v'=\sin kt & v=\dfrac{-1}{k}\cos kt\end{cases}$$

D'où :

$$\begin{aligned}\int_0^\pi\left(\frac{t}{\pi}-1\right)\sin kt\,dt &= \left[\left(\frac{t}{\pi}-1\right)\times\frac{-1}{k}\cos kt\right]_0^\pi+\frac{1}{k\pi}\int_0^\pi\cos kt\,dt\\ &= -\frac{1}{k}+\frac{1}{k\pi}\left[\frac{1}{k}\sin kt\right]_0^\pi\\ &= -\frac{1}{k}\end{aligned}$$

D'où $\displaystyle\int_0^\pi\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\cos kt\,dt=\frac{1}{k^2}$, et donc $\displaystyle W_n=\int_0^\pi\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)c_n(t)\,dt$

(b) *Montrer que* $\displaystyle W_n=\frac{\pi^2}{6}-\frac{1}{2}\int_0^\pi\left(t-\frac{t^2}{2\pi}\right)\frac{1}{\sin\frac{t}{2}}\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)\,dt$

De la question précédente qui nous montre que $\displaystyle W_n=\int_0^\pi\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)c_n(t)\,dt$, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}W_n &= \int_0^\pi\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)c_n(t)\,dt\\ &= \int_0^\pi\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{2\sin\frac{t}{2}}\right)dt\\ &= \int_0^\pi-\frac{1}{2}\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)dt+\int_0^\pi\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\left(\frac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{2\sin\frac{t}{2}}\right)dt\\ &= -\frac{1}{2}\int_0^\pi\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)dt+\frac{1}{2}\int_0^\pi\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\left(\frac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{\sin\frac{t}{2}}\right)dt\end{aligned}$$

Il faut donc calculer $\displaystyle\int_0^\pi\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)dt$. C'est simple :

$$\int_0^\pi\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)dt=\left[\frac{t^3}{6\pi}-\frac{t^2}{2}\right]_0^\pi=\frac{\pi^3}{6\pi}-\frac{\pi^2}{2}=-\frac{\pi^2}{3}$$

D'où $\displaystyle-\frac{1}{2}\int_0^\pi\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)dt=\frac{\pi^2}{6}$

Et donc, $\boxed{\displaystyle W_n=\frac{\pi^2}{6}-\frac{1}{2}\int_0^\pi\left(t-\frac{t^2}{2\pi}\right)\frac{1}{\sin\frac{t}{2}}\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)\,dt}$

(c) *Soit la fonction* f *définie par :*

$$\begin{cases} f:[0\,;\,\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ \qquad x & \longmapsto & f(x)=\begin{cases}2 \text{ si } x=0\\ \left(x-\dfrac{x^2}{2\pi}\right)\dfrac{1}{\sin\frac{x}{2}}\end{cases}\end{cases}$$

Démontrer que f est continue sur $[0\,;\,\pi]$

Clairement, f est continue sur $]0\,;\,\pi]$ comme produit et composé de fonctions continues sur $]0\,;\,\pi]$. Il faut, maintenant démontrer la continuité en 0, à droite.

Nous allons rechercher $\lim\limits_{x\to 0}\left(x-\dfrac{x^2}{2\pi}\right)\dfrac{1}{\sin\frac{x}{2}}$. Or :

$$\left(x-\frac{x^2}{2\pi}\right)\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}=\left(1-\frac{x}{2\pi}\right)\frac{x}{\sin\frac{x}{2}}=2\left(1-\frac{x}{2\pi}\right)\frac{\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$

Comme :

- $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\dfrac{x}{2\pi}\right)=1$
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}=1$

Nous déduisons que $\lim\limits_{x\to 0}2\left(1-\dfrac{x}{2\pi}\right)\dfrac{\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}=2$

f est donc bien continue sur $[0\,;\,\pi]$

(d) *Utiliser le lemme de Riemann-Lebesgue pour démontrer que*

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi}\left(t-\frac{t^2}{2\pi}\right)\frac{1}{\sin\frac{t}{2}}\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)\,dt=0$$

En fait, nous avons à démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_0^{\pi}f(t)\sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right)\,dt=0$

En faisant le changement de variables $u=\dfrac{t}{2}$, nous avons : $\displaystyle\int_0^{\pi}f(t)\sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right)\,dt=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(2u)\sin\left((2n+1)u\right)\,du$

f est continue sur $[0\,;\,\pi]$, par composée des fonctions continues, $f(2u)$ est continue sur $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$, et donc, d'aporès le lemme de Riemann, $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(2u)\sin\left((2n+1)u\right)\,du=0$, et donc,

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi}\left(t-\frac{t^2}{2\pi}\right)\frac{1}{\sin\frac{t}{2}}\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)\,dt=0$$

4. *En déduire la somme de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n^2}$*

De l'égalité $W_n=\dfrac{\pi^2}{6}-\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\pi}\left(t-\frac{t^2}{2\pi}\right)\frac{1}{\sin\frac{t}{2}}\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)\,dt$, et de l'étude de la limite précédente, nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty}W_n=\dfrac{\pi^2}{6}$, c'est à dire que $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{\pi^2}{6}$

Partie 2 : Approximation de la limite

1. *Démontrer que, pour tout $k\in\mathbb{N}$ et $k\geqslant 2$, nous avons $\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}\leqslant\dfrac{1}{k^2}\leqslant\dfrac{1}{k-1}-\dfrac{1}{k}$*

Voilà une inégalité facile à démontrer. Pour $k\in\mathbb{N}$ et $k\geqslant 2$, nous avons :

$$k(k-1)\leqslant k^2\leqslant k(k+1)\iff\frac{1}{k(k+1)}\leqslant\frac{1}{k^2}\leqslant\frac{1}{k(k-1)}$$

Or, si nous faisons une décomposition en éléments simples, nous avons :

$$\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\text{ et }\frac{1}{k(k-1)}=\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}$$

Nous avons donc $\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}\leqslant\dfrac{1}{k^2}\leqslant\dfrac{1}{k-1}-\dfrac{1}{k}$

2. *On considère la suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$*

   (a) *Justifier de l'existence de cette somme, et donner $\lim_{n\to+\infty} R_n$*

   On sait que R_n est le reste d'une série numérique convergente, et donc R_n existe et $\lim_{n\to+\infty} R_n = 0$

   (b) *Montrer qu'au voisinage de $+\infty$, $R_n \underset{+\infty}{\approx} \frac{1}{n}$*

   Nous avons $R_n = \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=n}^{N} \frac{1}{k^2}$. Des inégalités établies en 1, nous tirons :

$$\sum_{k=n}^{N} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \leqslant \sum_{k=n}^{N} \frac{1}{k^2} \leqslant \sum_{k=n}^{N} \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

   Et donc, en effectuant les calculs :

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{N+1} \leqslant \sum_{k=n}^{N} \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{n-1} - \frac{1}{N}$$

   Donc, par passage à la limite, en faisant tendre N vers $+\infty$, nous obtenons :

$$\frac{1}{n} \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{n-1} \iff 1 \leqslant nR_n \leqslant \frac{n}{n-1}$$

   En utilisant le théorème des limites par encadrements, nous avons $\lim_{n\to+\infty} nR_n = 1$, c'est à dire $R_n \underset{+\infty}{\simeq} \frac{1}{n}$

3. *Ecrire un algorithme que permette d'approcher la limite aussi précisément que souhaité.*

   Si $\frac{\pi^2}{6}$ est la somme de $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$, nous avons $\frac{\pi^2}{6} - W_n = R_{n+1}$ et comme $\frac{1}{n+1} \leqslant R_{n+1} \leqslant \frac{1}{n}$, l'erreur commise en remplaçant $\frac{\pi^2}{6}$ par R_{n+1} est majorée par $\frac{1}{n}$.

   Ci-dessous, un algorithme donné en langage `Python`

```
import numpy
import math
def SommeInverseCarres_1(n):
     s,k = 1,1
     Pi=math.pi
     while k<= n:
         k=k+1
         s=s+ 1.0/(k*k)
     return 1./n, s, (Pi*Pi)/6 - s #Donne l'inverse de n, le résultat calculé
                                   #et la différence entre
                                     #la limite et le résultat calculé
```

   `SommeInverseCarres_1(100)` nous retourne $\frac{1}{100} = 0.01$, $s = 1,635081929$ et $\frac{\pi^2}{6} - s = 0,00985$

Exercice 47 :

Dans cet exercice, m, n, p et q désignent des entiers naturels.

1. *Prouver que les séries* $\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ *et* $\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$ *sont convergentes.*
   Sont-elles absolument convergentes ?

   Il faut remarquer que $\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=-\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n}}{n}$ et $\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}=-\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n}}{2n-1}$

   $\Rightarrow$ Les suites $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ et $\left(\frac{1}{2n-1}\right)_{n\geqslant 1}$ sont des suites à termes positifs, décroissantes et telles que $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2n-1}=0$

   $\Rightarrow$ Donc, d'après le critère de séries alternées, les séries $\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=-\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n}}{n}$ et $\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}=-\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n}}{2n-1}$ sont bien convergentes

   $\Rightarrow$ Sont-elles absolument convergentes ?

   - La série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ est absolument convergente si la série $\sum_{n\geqslant 1}\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right|=\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}$.
     La série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}$ est la série harmonique, qui diverge. Donc, la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ n'est pas absolument convergente.
   - De la même manière, la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$ est absolument convergente si la série $\sum_{n\geqslant 1}\left|\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}\right|=\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{2n-1}$
     En $+\infty$, nous avons $\frac{1}{2n-1}\underset{+\infty}{\approx}\frac{1}{2n}$. La série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{2n}$ est une série divergente, et donc la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{2n-1}$ est une série divergente.
     La série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$ n'est donc pas absolument convergente.

   Ainsi, aucune des 2 séries proposées n'est absolument convergente.

2. **Calcul de la somme des séries**
   Dans la suite du problème, nous utilisons les sommes partielles, et nous notons, pour $n\geqslant 1$ *:*

$$u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\text{ et }v_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}$$

   On considère, pour tout $p\geqslant 0$, *les intégrales* $I_p=\int_0^1\frac{x^p}{1+x^2}dx$

   (a) *Calculez* I_0 *et* I_1

   $\Rightarrow$ Calcul de I_0

   Nous avons : $I_0=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=[\arctan x]_0^1=\frac{\pi}{2}$

   $\Rightarrow$ Calcul de I_1

   Nous avons : $I_1=\int_0^1\frac{x}{1+x^2}dx=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{2x}{1+x^2}dx=\frac{1}{2}\left[\ln\left(1+x^2\right)\right]_0^1=\frac{1}{2}\ln 2=\ln\sqrt{2}$

   (b) *Calculez* I_p+I_{p+2} *en fonction de* p. *En déduire* I_2 *et* I_3

C'est une question qui pose peu de difficulté :

$$I_p + I_{p+2} = \int_0^1 \frac{x^p + x^{p+2}}{1+x^2}dx = \int_0^1 \frac{x^p\left(1+x^2\right)}{1+x^2}dx = \int_0^1 x^p dx = \frac{1}{p+1}$$

D'où :

$\Rightarrow$ $I_0 + I_2 = \dfrac{1}{0+1} = 1 \iff I_2 = 1 - I_0 \iff I_2 = 1 - \dfrac{\pi}{2}$

$\Rightarrow$ $I_1 + I_3 = \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2} \iff I_3 = \dfrac{1}{2} - I_1 = \dfrac{1}{2} - \ln\sqrt{2}$

(c) *Pour $q \geqslant 1$ on appelle $(U_q)_{q\in\mathbb{N}^\star}$ la suite dont le terme général est donné par : $U_q = u_q + 2\,(-1)^q\, I_{2q+1}$.*
En calculant $U_{q+1} - U_q$, montrez que la suite $(U_q)_{q\in\mathbb{N}^\star}$ est constante.

Calculons donc $U_{q+1} - U_q$:

$$\begin{aligned}
U_{q+1} - U_q = &\ \left(u_{q+1} + 2\,(-1)^{q+1}\, I_{2q+3}\right) - \left(u_q + 2\,(-1)^q\, I_{2q+1}\right)\\
= &\ (u_{q+1} - u_q) + 2\,(-1)^{q+1}\left(I_{2q+3} + I_{2q+1}\right)\\
= &\ \frac{(-1)^{q+2}}{q+1} + 2\,(-1)^{q+1} \times \frac{1}{2q+2}\\
= &\ \frac{(-1)^q}{q+1} - (-1)^q \times \frac{2}{2q+2}\\
= &\ 0
\end{aligned}$$

Comme $U_{q+1} - U_q = 0$, la suite $(U_q)_{q\in\mathbb{N}^\star}$ est donc constante.

(d) *En déduire que $u_q + 2\,(-1)^q\, I_{2q+1} = \ln 2$*

La suite $(U_q)_{q\geqslant 1}$ étant constante, nous avons, en particulier, pour tout $q \geqslant 1$, $U_q = U_1$. Il faut donc calculer U_1

$$U_1 = u_1 - 2I_3 = 1 - 2\left(\frac{1}{2} - \ln\sqrt{2}\right) = 2\ln\sqrt{2} = \ln 2$$

Donc, pour tout $q \in \mathbb{N}^*$, nous avons $U_q = \ln 2 \iff u_q = \ln 2 - 2\,(-1)^q\, I_{2q+1}$

(e) *On définit $V_q = v_q + (-1)^q\, I_{2q}$; en utilisant les méthodes décrites dans les 2 questions précédentes, montrer que $v_q + (-1)^q\, I_{2q} = \dfrac{\pi}{4}$*

$\Rightarrow$ On démontre que la suite $(V_q)_{q\in\mathbb{N}^\star}$ est constante

$$\begin{aligned}
V_{q+1} - V_q = &\ \left(v_{q+1} + (-1)^{q+1}\, I_{2q+2}\right) - \left(v_q + (-1)^q\, I_{2q}\right)\\
= &\ (v_{q+1} - v_q) - (-1)^q\left(I_{2q+2} + I_{2q}\right)\\
= &\ \frac{(-1)^{q+2}}{2q+1} - (-1)^q\, \frac{1}{2q+1}\\
= &\ \frac{(-1)^q}{2q+1} - (-1)^q\, \frac{1}{2q+1}\\
= &\ 0
\end{aligned}$$

Comme $V_{q+1} - V_q = 0$, la suite $(V_q)_{q\in\mathbb{N}^\star}$ est donc constante.

$\Rightarrow$ Calcul de V_1

La suite $(V_q)_{q\geqslant 1}$ étant constante, nous avons, en particulier, pour tout $q \geqslant 1$, $V_q = V_1$. Il faut donc calculer V_1

$$V_1 = v_1 - I_2 = 1 - \left(1 - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Donc, pour tout $q \in \mathbb{N}^*$, nous avons $V_q = \dfrac{\pi}{2} \iff v_q = \dfrac{\pi}{2} - (-1)^q\, I_{2q}$

(f) *Démontrer que $\lim\limits_{p\to+\infty} I_p = 0$*

Rien de plus classique !!

Nous avons $I_p = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^p}{1+x^2}dx$, et comme $x \in [0;1]$, nous avons $0 \leqslant \dfrac{x^p}{1+x^2} \leqslant x^p$ et donc :

$$0 \leqslant I_p \leqslant \int_0^1 x^p\,dx = \frac{1}{p+1}$$

Comme $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} \frac{1}{p+1} = 0$, nous avons aussi $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} I_p = 0$

(g) *En déduire les valeurs de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$*

$\Rightarrow$ Nous avons $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \left(\ln 2 - 2(-1)^n I_{2n+1}\right)$. Comme $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} I_p = 0$, nous avons $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} 2(-1)^n I_{2n+1} = 0$, c'est à dire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \left(\ln 2 - 2(-1)^n I_{2n+1}\right) = \ln 2$

u_n étant la somme partielle de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, nous avons $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$

$\Rightarrow$ De la même manière, nous avons $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\pi}{2} - (-1)^n I_{2n}\right)$. Comme $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} I_p = 0$, nous avons $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} 2(-1)^n I_{2n} = 0$, c'est à dire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\pi}{2} - (-1)^n I_{2n}\right) = \frac{\pi}{2}$

v_n étant la somme partielle de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$, nous avons $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = \frac{\pi}{2}$

En conclusion :

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2 \Longleftrightarrow \sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n}}{n} = -\ln 2$$

et

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = \frac{\pi}{2} \Longleftrightarrow \sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n}}{2n-1} = \frac{-\pi}{2}$$

Exercice 49 :

1. *Étude d'une série dépendant d'un paramètre*

   Soit $x \in \mathbb{R}^+$; on considère la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{e^n+x}$

   (a) *En majorant correctement $\dfrac{1}{e^n+x}$ par le terme général d'une série convergente, montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{e^n+x}$ est convergente.*

   Cette question est classique. Elle part de la constation simple, que, pour tout $x \geqslant 0$, $e^n+x \geqslant e^n$, et que nous avons, en passant à l'inverse, $\dfrac{1}{e^n+x} \leqslant \dfrac{1}{e^n}$

   Or, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{e^n} = \sum_{n\geqslant 0} \left(\frac{1}{e}\right)^n$ est une série géométrique convergente car $0 < \dfrac{1}{e} < 1$.

   Le terme général de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{e^n+x}$ est positif, majoré par le terme général d'une série convergente ; la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{e^n+x}$ est donc convergente.

   (b) *On appelle $S(x)$ la somme de la série, c'est à dire $S(x) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{e^n+x}$. Calculez $S(0)$*

Nous avons :$S(0) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{e^n} = \sum_{n\geqslant 0} \left(\frac{1}{e}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{e}} = \frac{e}{e-1}$. Donc,

$$\boxed{S(0) = \frac{e}{e-1}}$$

2. *Étude d'une intégrale dépendant d'un paramètre*

   (a) *Question préliminaire*

   Décomposer la fraction $Q(u) = \dfrac{1}{u(u+x)}$ en éléments simples

   Question classique qui ne mérite pas de développement particulier :

$$\frac{1}{u(u+x)} = \frac{\frac{1}{x}}{u} - \frac{\frac{1}{x}}{u+x} = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+x}\right)$$

   (b) *Calcul d'une intégrale*

   i. *On considère l'intégrale $\displaystyle\int_0^T \frac{dt}{e^t+x}$. En faisant le changement de variables $u = e^t$, montrer que*

$$\int_0^T \frac{\mathrm{d}t}{e^t+x} = \frac{1}{x}\left[\ln\left(\frac{e^T}{e^T+x}\right) + \ln(1+x)\right]$$

   Le changement de variables est donné, ce qui nous simplifie la vie !
   Pour $u = e^t$, nous avons $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = e^t$, c'est à dire que $\mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{d}u}{e^t} = \dfrac{\mathrm{d}u}{u}$, de telle sorte que :

$$\int_0^T \frac{\mathrm{d}t}{e^t+x} = \int_1^{e^T} \frac{\mathrm{d}u}{u(u+x)}$$

   C'est ici qu'intervient la décomposition en élément simples :

$$\begin{aligned}
\int_1^{e^T} \frac{du}{u(u+x)} &= \frac{1}{x}\int_1^{e^T}\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+x}\right)du \\
&= \frac{1}{x}\left(\int_1^{e^T}\frac{1}{u}du - \int_1^{e^T}\frac{1}{u+x}du\right) \\
&= \frac{1}{x}\left([\ln u]_1^{e^T} - [\ln(x+u)]_1^{e^T}\right) \\
&= \frac{1}{x}\left(\ln e^T - \ln\left(x+e^T\right) + \ln(x+1)\right) \\
&= \frac{1}{x}\left(\ln\frac{e^T}{x+e^T} + \ln(x+1)\right)
\end{aligned}$$

   Ce que nous voulions

   ii. *En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{e^t+x}$ existe et que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{e^t+x} = \frac{\ln(1+x)}{x}$*

   D'après le cours, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{e^t+x}$ existe si et seulement si $\displaystyle\lim_{T\to+\infty}\int_0^T \frac{dt}{e^t+x}$ existe.

   Or, nous venons de montrer que $\displaystyle\int_0^T \frac{dt}{e^t+x} = \frac{1}{x}\left[\ln\left(\frac{e^T}{e^T+x}\right) + \ln(1+x)\right]$; il nous suffit donc d'étudier $\displaystyle\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{x}\left[\ln\left(\frac{e^T}{e^T+x}\right) + \ln(1+x)\right]$ où, en fait, seule l'étude de $\displaystyle\lim_{T\to+\infty} \ln\left(\frac{e^T}{e^T+x}\right)$ importe.

Or, $\displaystyle\lim_{T\to+\infty}\frac{e^T}{e^T+x}=1$, et donc $\displaystyle\lim_{T\to+\infty}\ln\left(\frac{e^T}{e^T+x}\right)=0$, et on conclue :

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{x}\left[\ln\left(\frac{e^T}{e^T+x}\right)+\ln(1+x)\right]=\frac{\ln(1+x)}{x}$$

Ce que nous voulions

iii. *Dans la suite, on appelle $G(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{x}$. Donner $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}G(x)$*

Question classique de comparaison de fonctions ; nous avons, bien entendu, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}G(x)=0$

3. *Etude des liens entre $S(x)$ et $G(x)$*

(a) *On appelle $f(t)=\dfrac{1}{e^t+x}$; démontrer que la fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}$.*

On calcule donc la dérivée de f ; or, de manière très simple, nous obtenons

$$f'(t)=\frac{-e^t}{(e^t+x)^2}$$

La dérivée de f est donc négative ; la fonction f est décroissante.

(b) *Déduire de la décroissance de f que :*

i. $\boxed{\displaystyle\int_{-1}^{0}\frac{dt}{e^t+x}\leqslant\frac{1}{e^{-1}+x}}$

f étant décroissante sur $\mathbb{R}$, nous pouvons écrire, pour tout $t\in[-1;0]$, $f(t)\leqslant f(-1)$, c'est à dire $f(t)\leqslant\dfrac{1}{e^{-1}+x}$

En utilisant le fait que l'intégrale respecte la relation d'ordre, nous pouvons écrire :

$$\int_{-1}^{0}\frac{dt}{e^t+x}\leqslant\int_{-1}^{0}\frac{1}{e^{-1}+x}dt=\frac{1}{e^{-1}+x}$$

Ce que nous voulions

ii. *Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\displaystyle\int_{n}^{n+1}\frac{dt}{e^t+x}\leqslant\frac{1}{e^n+x}\leqslant\int_{n-1}^{n}\frac{dt}{e^t+x}$*

Une nouvelle fois, c'est l'utilisation de la décroissance de f que nous utiliserons.

A. Pour tout $t\in[n;n+1]$, $f(t)\leqslant f(n)$, c'est à dire $f(t)\leqslant\dfrac{1}{e^n+x}$

En utilisant le fait que l'intégrale respecte la relation d'ordre, nous pouvons écrire :

$$\int_{n}^{n+1}\frac{dt}{e^t+x}\leqslant\int_{n}^{n+1}\frac{1}{e^n+x}dt=\frac{1}{e^n+x}$$

B. De même, pour tout $t\in[n-1;n]$, $f(n)\leqslant f(t)$, c'est à dire $\dfrac{1}{e^n+x}\leqslant f(t)$

En utilisant le fait que l'intégrale respecte la relation d'ordre, nous pouvons écrire :

$$\int_{n-1}^{n}\frac{dt}{e^t+x}\geqslant\int_{n-1}^{n}\frac{1}{e^n+x}dt=\frac{1}{e^n+x}$$

En faisant la synthèse des 2 points précédents, nous obtenons

$$\int_{n}^{n+1}\frac{dt}{e^t+x}\leqslant\frac{1}{e^n+x}\leqslant\int_{n-1}^{n}\frac{dt}{e^t+x}$$

(c) *Pour $N \in \mathbb{N}$, en sommant les inégalités précédentes de 0 à N, montrer que*

$$\int_0^{N+1} \frac{dt}{e^t+x} \leqslant \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{e^n+x} \leqslant \int_0^N \frac{dt}{e^t+x} + \frac{1}{e^{-1}+x}$$

Soit $N \in \mathbb{N}$; alors,

$$\sum_{n=0}^{N} \int_n^{n+1} \frac{dt}{e^t+x} \leqslant \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{e^n+x} \leqslant \sum_{n=0}^{N} \int_{n-1}^{n} \frac{dt}{e^t+x}$$

D'après la relation de Chasles, nous avons :

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{n=0}^{N} \int_n^{n+1} \frac{dt}{e^t+x} = \int_0^{N+1} \frac{dt}{e^t+x} \\ \displaystyle\sum_{n=0}^{N} \int_{n-1}^{n} \frac{dt}{e^t+x} = \int_{-1}^{N} \frac{dt}{e^t+x} \end{cases}$$

Nous avons donc :

$$\int_0^{N+1} \frac{dt}{e^t+x} \leqslant \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{e^n+x} \leqslant \int_{-1}^{N} \frac{dt}{e^t+x}$$

Or, $\displaystyle\int_{-1}^{N} \frac{dt}{e^t+x} = \int_{-1}^{0} \frac{dt}{e^t+x} + \int_0^N \frac{dt}{e^t+x}$

Et nous avons montré que $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{dt}{e^t+x} \leqslant \frac{1}{e^{-1}+x}$

D'où la double inégalité demandée :

$$\boxed{\int_0^{N+1} \frac{dt}{e^t+x} \leqslant \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{e^n+x} \leqslant \int_0^N \frac{dt}{e^t+x} + \frac{1}{e^{-1}+x}}$$

(d) i. *En déduire que :* $G(x) \leqslant S(x) \leqslant G(x) + \dfrac{1}{e^{-1}+x}$

Tout ceci s'obtient par passage à la limite. En effet, nous avons :

$$\begin{cases} \displaystyle\lim_{N\to+\infty} \int_0^{N+1} \frac{dt}{e^t+x} = G(x) \\ \displaystyle\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{e^n+x} = S(x) \\ \displaystyle\lim_{N\to+\infty} \int_0^{N} \frac{dt}{e^t+x} + \frac{1}{e^{-1}+x} = G(x) + \frac{1}{e^{-1}+x} \end{cases}$$

Comme le passage à la limite respecte les inégalités, nous avons $G(x) \leqslant S(x) \leqslant G(x) + \dfrac{1}{e^{-1}+x}$

ii. *Démontrer que* $0 \leqslant S(x) - G(x) \leqslant \dfrac{1}{e^{-1}+x}$

Evident ! !
Nous avons :

$$G(x) - G(x) \leqslant S(x) - G(x) \leqslant G(x) + \frac{1}{e^{-1}+x} - G(x)$$

C'est à dire $0 \leqslant S(x) - G(x) \leqslant \dfrac{1}{e^{-1}+x}$

iii. *En déduire, qu'en $+\infty$, $S(x) \simeq G(x)$*

Pour montrer que $S(x) \simeq G(x)$, il faut montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{S(x)}{G(x)} = 1$. Pour y arriver, dans l'inégalité $0 \leqslant S(x) - G(x) \leqslant \dfrac{1}{e^{-1}+x}$, nous divisons par $G(x)$; nous obtenons donc :

$$0 \leqslant \frac{S(x)}{G(x)} - 1 \leqslant \frac{1}{(e^{-1}+x)\,G(x)}$$

Or, $\dfrac{1}{(e^{-1}+x)\,G(x)} = \dfrac{x}{(e^{-1}+x)\ln(1+x)}$.

Nous avons $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{(e^{-1}+x)} = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\ln(1+x)} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{(e^{-1}+x)\ln(1+x)} = 0$ et nous avons bien, en utilisant les encadrements $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{S(x)}{G(x)} = 1$

Ce que nous voulions.

4. *Donner $\lim\limits_{x\to+\infty} S(x)$*

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} G(x) = 0$, de l'équivalence, nous tirons $\lim\limits_{x\to+\infty} S(x) = 0$

Chapitre 7

Les séries de fonctions

7.1 Séries de fonctions

7.1.1 Définition d'une série de fonctions

Une série de fonctions de terme général f_n de $D \subset \mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$ est un couple formé de deux suites de fonctions définies sur $D \subset \mathbb{K}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n = \left((f_n)_{n \in \mathbb{N}}, (S_n)_{n \in \mathbb{N}} \right)$$

telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous ayions $S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$ et donc, pour tout $x \in D$, $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n s'appelle le terme général d'ordre n de la série de fonctions et S_n s'appelle la somme partielle d'ordre n

Remarque 1 :

1. Si, pour tout $x \in D$, la suite numérique $(S_n(x))_{n_i n \mathbb{N}}$ converge vers un nombre $S(x)$, on dit que la série numérique $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$ est convergente et de somme $S(x)$, Ce qui veut dire :

$$(\forall x \in D) \left(\lim_{n \to +\infty} S_n(x) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} f_k(x) = S(x) \right)$$

2. Bien entendu, si la suite $(f_p)_{p \geqslant n_0}$ n'est définie qu'à partir d'un entier n_0, alors, la suite $(S_n)_{n \geqslant n_0}$ n'est définie qu'à partir de n_0 par $S_n = \sum_{p=n_0}^{n} f_p$
3. Pour les résultats théoriques, nous supposerons toujours $n_0 = 0$, ce qui ne change rien ni aux définitions, ni aux résultats

7.1.2 Convergence simple

On dit que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$ converge simplement si et seulement si la suite des sommes partielles $(S_n)_{n \geqslant n_0}$ converge simplement

Remarque 2 :

1. Il est tout autant possible de nous intéresser aux restes d'ordre n : $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$

2. Ce qui veut dire que pour tout $x \in D$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $N(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $n \geqslant N(\varepsilon, x)$, alors $|S_n(x) - S(x)| = |R_n(x)| \leqslant \varepsilon$.

Exemple 1 :

1. **Séries géométriques**
   Soit $u_n : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction définie par :
   $$\left\{ \begin{array}{rcl} u_n : \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & u_n(z) = z^n \end{array} \right.$$
   Alors, pour tout $z \in \mathbb{C}$, nous avons :
   $$\begin{array}{rl} S_n(z) = & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} \text{ si } z \neq 1 \\ S_n(1) = & n + 1 \end{array}$$
   L'ensemble de convergence de la série de terme général u_n est donc $E_0 = \{z \in \mathbb{C} \text{ avec } |z| < 1\}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n(z) = \dfrac{1}{1 - z}$ pour tout z tel que $|z| < 1$
2. Soit v_n une fonction définie sur $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$ par :
   $$\left\{ \begin{array}{rcl} v_n : \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & v_n(x) = \sin^2(x) \cos^n(x) \end{array} \right.$$
   La série de fonctions de terme général u_n converge simplement vers la fonction S définie par :
   $$\begin{array}{l} S(x) = \dfrac{\sin^2 x}{1 - \cos x} \text{ si } 0 < x < \dfrac{\pi}{2} \\ S(0) = S\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0 \end{array}$$

7.1.3 Proposition

La série de fonctions $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} f_n$ de D dans $\mathbb{K}$ converge simplement et a pour somme S si et seulement si, la suite des restes d'ordre n tend vers 0, c'est à dire si et seulement si :

$$(\forall x \in D)\,(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists N \in \mathbb{N})\,((n \geqslant N) \Longrightarrow (|R_n(x)| \leqslant \varepsilon))$$

Démonstration

Pour tout $x \in D$, nous avons $S(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} f_k(x)$. La convergence simple de la série $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} f_n$ implique que, pour tout tout $x \in D$, la série numérique de terme général $f_k(x)$ converge, et donc que sa série de restes $R_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$ converge vers 0, c'est à dire que pour tout $x \in D$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N$, alors $|R_n(x)| \leqslant \varepsilon$
Q.E.D.

Exercice 1 :

Etudier les convergences des séries de fonctions dont les termes généraux sont :

1. $\sum_{n\geqslant 0} x^{2n}$
2. $\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{1+x^n}$
3. $\sum_{n\geqslant 1} \frac{x}{n^3+x^3}$
4. $\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^2}{n+x^4}$

7.1.4 Critère de Cauchy pour la convergence simple

La série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge simplement sur $D \subset \mathbb{K}$ si et seulement si pour tout $x \in D$, et tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $N(x,\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que si $p > q > N(x,\varepsilon)$, alors

$$|S_p(x) - S_q(x)| = \left| \sum_{n=q+1}^{p} f_n(x) \right| = |f_{q+1}(x) + f_{q+2}(x) + \cdots + f_{p-1}(x) + f_p(x)| < \varepsilon$$

7.1.5 Convergence uniforme

On dit que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge uniformément si et seulement si la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\geqslant n_0}$ converge uniformément

Remarque 3 :

1. Ce qui veut dire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $n \geqslant N(\varepsilon)$, alors, pour tout $x \in D$ $|S_n(x) - S(x)| \leqslant \varepsilon$
2. Un autre point de vue qui peut être adopté, est celui d'écrire :
$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists N \in \mathbb{N})\left((n \geqslant N) \Longrightarrow \left(\sup_{x\in D} |S_n(x) - S(x)| = \sup_{x\in D} |R_n(x)| \leqslant \varepsilon\right)\right)$$
3. Bien entendu, une série qui converge uniformément, converge simplement
4. Comme pour les suites, la réciproque est fausse : une série qui converge simplement peut ne pas converger uniformément

   Par exemple on peut démontrer que la série $\sum_{n\geqslant 0} x^n$ converge simplement sur l'intervalle $[0;1[$ vers la fonction $S(x) = \frac{1}{1-x}$.
   Par contre, elle n'y converge pas uniformément.
   En effet, s'il y a convergence uniforme, la série converge aussi vers $S(x)$ et nous avons :
$$\left| S(x) - \sum_{k=0}^{n} x^k \right| = \left| \frac{1}{1-x} - \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \right| = \frac{x^{n+1}}{1-x}$$
   Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = 1 - \frac{1}{n}$
   Alors $\frac{u_n^{n+1}}{1-u_n} = \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\frac{1}{n}} = n \times e^{(n+1)\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)}$
   Or, $\lim_{n\to+\infty} (n+1)\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) = 1$ et donc $\lim_{n\to+\infty} n \times e^{(n+1)\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n^{n+1}}{1-u_n} = +\infty$.
   Or, $\sup_{x\in[0;1[} \left| S(x) - \sum_{k=0}^{n} x^k \right| \geqslant \frac{u_n^{n+1}}{1-u_n}$, et donc $\sup_{x\in[0;1[} \left| S(x) - \sum_{k=0}^{n} x^k \right| = +\infty$, ce qui termine de montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0} x^n$ ne converge pas uniformément sur l'intervalle $[0;1[$
5. Par contre, la série $\sum_{n\geqslant 0} x^n$ converge uniformément sur tout intervalle du type $[-a : +a]$ où $a < 1$.

   En effet :

Nous avons, pour tout $x \in [-a : +a]$:

$$\left|S(x) - \sum_{k=0}^{n} x^k\right| = \left|\frac{1}{1-x} - \frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right| = \frac{|x|^{n+1}}{1-x} \leqslant \frac{a^{n+1}}{1-a}$$

Or, comme $a < 1$, nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a^{n+1}}{1-a} = 0$ et donc, pour tout $x \in [-a : +a]$,

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in[0;1[} \left|S(x) - \sum_{k=0}^{n} x^k\right| = 0$$

Ce qui termine de montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} x^n$ converge uniformément sur l'intervalle $[-a; +a]$ lorsque $a < 1$

Exercice 2 :

Démontrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \sin^2(x)\cos^n(x)$ ne converge pas uniformément sur l'intervalle $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$

7.1.6 Critère de Cauchy pour la convergence uniforme

La série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge uniformément sur $D \subset \mathbb{K}$ si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que si $p > q > N$, alors, pour tout $x \in D$

$$|S_p(x) - S_q(x)| = \left|\sum_{n=q+1}^{p} f_n(x)\right| = |f_{q+1}(x) + f_{q+2}(x) + \cdots + f_{p-1}(x) + f_p(x)| < \varepsilon$$

On dit que la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$ vérifie le critère de Cauchy

Démonstration

Nous appelons toujours $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} f_k$.

1. Supposons que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers S
   Soit $\varepsilon > 0$.
   Il existe alors $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N_\varepsilon$, alors , pour tout $x \in D$, nous avons $|S_n(x) - S(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.
   Alors, pour $p \geqslant N_\varepsilon$ et $q \geqslant N_\varepsilon$, et pour tout $x \in D$:
   $$|S_p(x) - S_q(x)| \leqslant |S_p(x) - S(x)| + |S(x) - S_q(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$
2. Réciproquement, supposons que la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$ vérifie le critère de Cauchy
   Supposons que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que si $p > q > N$, alors, pour tout $x \in D$, $|S_p(x) - S_q(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.
   Soit $x \in D$. De l'hypothèse, nous pouvons déduire que la suite $(S_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{K}$, lequel est un espace complet. Cette suite $(S_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est donc convergente vers une limite

que nous notons $S(x)$. Nous définissons ainsi une fonction S définie sur D. Montrons que la convergence est uniforme. Nous avons :

$$S_p(x) - S(x) = S_p(x) - S_q(x) + S_q(x) - S(x)$$

D'où

$$|S_p(x) - S(x)| \leqslant |S_p(x) - S_q(x)| + |S_q(x) - S(x)|$$

Comme $\lim_{n\to+\infty} S_n(x) = S(x)$, il existe donc $\nu_1 \in \mathbb{N}$ tel que si $q \geqslant \nu_1$, alors $|S_q(x) - S(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Ainsi, pour $q \geqslant \max\{N_\varepsilon, \nu_1\}$, tout $p \geqslant N_\varepsilon$ et tout $x \in D$, nous avons

$$|S_p(x) - S(x)| \leqslant |S_p(x) - S_q(x)| + |S_q(x) - S(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Ce qui montre que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge uniformément sur $D \subset \mathbb{K}$ vers S

Remarque 4 :

1. Il faut toujours remarquer **la place du quantificateur universel**.
2. Ce critère de Cauchy pour la convergence uniforme peut aussi s'écrire :

$$(\forall\varepsilon > 0)\,(\exists N \in \mathbb{N})\left((p > q > N) \Longrightarrow \left(\left|\sum_{n=q+1}^{p} f_n(x)\right| = |f_{q+1}(x) + f_{q+2}(x) + \cdots + f_{p-1}(x) + f_p(x)| < \varepsilon\right)\right)$$

7.1.7 Corollaire

Si une série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge uniformément sur $D \subset \mathbb{K}$ alors $\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in D} |f_n(x)| = 0$

Démonstration

Si la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge uniformément sur $D \subset \mathbb{K}$ alors, elle vérifie le critère de Cauchy. Or :

$$|f_n(x)| = |S_n(x) - S_{n-1}(x)|$$

Et donc, d'après ce critère de Cauchy, nous avons le résultat.

Exemple 2 :

En fait, il est facile d'utiliser la contraposée pour démontrer que la série ne converge pas uniformément.

1. La série de terme général $f_n(x) = x^n$ converge simplement sur $]-1;+1[$; on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\sup_{x\in]-1;+1[} |f_n(x)| = \sup_{x\in]-1;+1[} |x^n| = 1$$

   On retrouve ainsi le fait, déjà vu précédemment, que cette série ne converge pas uniformément sur $]-1;+1[$

2. La série de terme général $f_n(x) = \frac{x}{x+n^2}$ converge simplement sur $[0;+\infty[$; en effet, pour chaque $x \geqslant 0$ nous avons $0 \leqslant \frac{x}{x+n^2} \leqslant \frac{x}{n^2}$ et la série numérique de terme général $\frac{x}{n^2}$ est une série de Riemann convergente.

   D'autre part, nous avons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sup_{x\in[0;+\infty[} \frac{x}{x+n^2} = 1$

   En effet :

   ⋆ La fonction $f_n(x) = \frac{x}{x+n^2}$ est croissante sur $[0;+\infty[$

$\star$ Et $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{x+n^2} = 1$

Donc, $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\sup\limits_{x \in [0;+\infty[} \dfrac{x}{x+n^2} \right) = 1$

La série de terme général $f_n(x) = \dfrac{x}{x+n^2}$ ne converge donc pas uniformément sur $[0; +\infty[$

Exercice 3 :

Déterminer les intervalles de convergence uniformes pour les séries

1. $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{1}{n^2 x^2}$
2. $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{1}{n^2 + x^2}$

7.1.8 Convergence absolue

On dit que la série $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} f_n$ converge absolument si et seulement si la suite des sommes partielles $\sum\limits_{k=0}^{n} |f_k|$ converge simplement

7.1.9 Proposition

Soit $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} f_n$ une série de fonctions qui converge absolument, alors, la série $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} f_n$ converge simplement
Autrement dit : la convergence absolue implique la convergence simple.

Démonstration

Supposons que la série de fonctions $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} f_n$ converge absolument.

Soit $x \in D$; ceci veut donc dire que la série numérique $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)$ converge absolument et, d'après ce qui a été vu dans les séries numériques, la série numérique $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)$ converge.

Ce qui veut dire que la série de fonctions $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} f_n$ converge simplement.

Remarque 5 :

1. Bien entendu, la réciproque est fausse ! !

   Par exemple :

   Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}^{*+}$, nous considérons la fonction $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{x+n}$

   Considérons maintenant la série de fonctions $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}^*} f_n$.

   (a) Cette série est simplement convergente

   $\to$ Soit $x > 0$. La série numérique $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}^*} f_n(x) = \sum\limits_{n \in \mathbb{N}^*} \dfrac{(-1)^n}{x+n}$ est une série numérique alternée convergente

   $\to$ En effet, d'une part $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{x+n} = 0$ et d'autre part, la suite $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*} = \left(\dfrac{1}{x+n} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante.

   $\to$ D'après le critère des séries alternées 6.5.1, la série $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}^*} f_n(x)$ est donc convergente

La série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ est une série simplement convergente.

(b) <u>Cette série est-elle absolument convergente ?</u>

→ Soit $x>0$. La série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} |f_n(x)| = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{x+n}$

→ En $+\infty$, nous avons $\frac{1}{x+n} \approx_{+\infty} \frac{1}{n}$; la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$ est divergente et donc la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} |f_n(x)|$ est divergente.

→ La série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ n'est pas une série absolument convergente.

Nous venons d'exhiber une série de fonctions qui est simplement convergente sans l'être absolument

2. **Il n'y a pas de lien entre la convergence absolue et la convergence uniforme**

$\Longrightarrow$ Considérons toujours la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n}{x+n}$; nous avons démontré qu'elle convergeait simplement sur $[0;+\infty[$ mais pas absolument. Nous allons montrer qu'elle converge uniformément sur $[0;+\infty[$ vers la fonction $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n}{x+n}$

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^n}{x+n} - \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n}{x+n}\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}\right| = |R_n(x)|$$

Lorsque nous avons travaillé le critère des séries alternées en 6.5.1, nous avons démontré que, si S est la somme de la série alternée, nous avons $|S-S_n| \leqslant u_{n+1}$.
Donc, pour tout $x\in[0;+\infty[$, nous avons :

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^n}{x+n} - \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n}{x+n}\right| = |R_n(x)| \leqslant \frac{1}{x+n+1} \leqslant \frac{1}{n+1}$$

Donc, comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, pour tout $x \geqslant 0$, nous avons $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} \left|\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^n}{x+n} - \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n}{x+n}\right| = 0$, ce qui montre que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n}{x+n}$ converge uniformément sur $[0;+\infty[$

$\Longrightarrow$ Considérons maintenant la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{x}{1+n^2x^2}$

C'est une série qui converge absolument sur $[0;+\infty[$, mais pas uniformément.

→ Soit $x\in[0;+\infty[$. Alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} \left|\frac{x}{1+n^2x^2}\right| = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{x}{1+n^2x^2}$.

Lorsque n tend vers $+\infty$, nous avons $\frac{x}{1+n^2x^2} \underset{+\infty}{\approx} \frac{1}{n^2x}$.

Comme la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2x}$ est une série de Riemann convergente, il en est de même de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{x}{1+n^2x^2}$.

La série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{x}{1+n^2x^2}$ converge donc bien absolument sur $[0;+\infty[$

→ Montrons qu'elle ne converge pas uniformément.
Comme souvent, nous utilisons les restes d'ordre n. En effet :

$$\left|\sum_{k=0}^{n} \frac{x}{1+k^2x^2} - \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{x}{1+n^2x^2}\right| = \left|\sum_{k\geqslant n+1} \frac{x}{1+k^2x^2}\right| = |R_n(x)|$$

Or :

$$R_n(x) = \lim_{N \to +\infty} \sum_{k=n+1}^{N} \frac{x}{1+k^2x^2}$$

Et nous avons (parce que $x \geqslant 0$) :

$$R_n(x) \geqslant \sum_{k=n+1}^{N} \frac{x}{1+k^2x^2} \geqslant x \times \frac{N-n}{1+N^2x^2}$$

Nous avons, clairement :

$$\sup_{x \in [0;+\infty[} |R_n(x)| \geqslant R_n\left(\frac{1}{N}\right) \geqslant \frac{N-n}{2N}$$

Comme $\lim\limits_{N \to +\infty} \dfrac{N-n}{2N} = \dfrac{1}{2}$, et de $R_n(x) = \lim\limits_{N \to +\infty} \sum\limits_{k=n+1}^{N} \dfrac{x}{1+k^2x^2}$, nous avons :

$$\sup_{x \in [0;+\infty[} |R_n(x)| \geqslant \frac{1}{2}$$

Nous ne pouvons donc pas avoir $\lim\limits_{n \to +\infty} \sup\limits_{x \in [0;+\infty[} |R_n(x)| = 0$, ce qui montre que la série de fonctions $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} \dfrac{x}{1+n^2x^2}$ ne converge pas uniformément sur $[0;+\infty[$.

7.1.10 Convergence normale

On dit que la série de fonctions $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} f_n$ converge normalement sur $D \subset \mathbb{K}$ s'il existe une série numérique $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} u_n$ à termes positifs et convergente telle que :

$$(\forall x \in D)\,(\forall n \in \mathbb{N})\,(|f_n(x)| \leqslant u_n)$$

7.1.11 Proposition

On considère $\|f_n\|_\infty = \sup\limits_{x \in D} |f_n(x)|$. Alors, la série de fonctions $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} f_n$ converge normalement sur $D \subset \mathbb{K}$ si et seulement si, la série numérique $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} \|f_n\|_\infty$ converge

Démonstration

1. Supposons que la série de fonctions $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} f_n$ converge normalement

   Alors, pour tout $x \in D$ et tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $|f_n(x)| \leqslant u_n$, en particulier, $\sup\limits_{x \in D} |f_n(x)| \leqslant u_n$, et donc $\|f_n\|_\infty \leqslant u_n$.
   En utilisant les résultats sur les séries numériques, le terme général $\|f_n\|_\infty$ de la série $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} \|f_n\|_\infty$ est majoré par celui d'une série numérique convergente et donc la série $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} \|f_n\|_\infty$ converge

2. Réciproquement, supposons que la série $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} \|f_n\|_\infty$ converge

   Alors, pour tout $x \in D$, nous avons $|f_n(x)| \leqslant \|f_n\|_\infty$, ce qui est la définition de la convergence normale.

Remarque 6 :

Le vocabulaire de **convergence normale** est bien utilisé puisque $\|f_n\|_\infty$ définit une norme sur $\mathcal{B}(X)$, le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des fonctions bornées sur D

Exemple 3 :

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}^*$, posons $f_n(x) = \dfrac{x}{(x+n)^3}$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \geqslant 0$:
$$|f_n(x)| = \frac{x}{(x+n)^3} \leqslant \frac{x+n}{(x+n)^3} = \frac{1}{(x+n)^2} \leqslant \frac{1}{n^2}$$
La série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ est une série numérique convergente, donc la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} f_n(x) = \sum_{n \geqslant 1} \frac{x}{(x+n)^3}$ converge normalement.
2. Soit $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n^2}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons $\left|\dfrac{\sin(nx)}{n^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{n^2}$.
La série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ est une série numérique convergente, donc la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} f_n(x) = \sum_{n \geqslant 1} \frac{\sin(nx)}{n^2}$ converge normalement.

7.1.12 Proposition

Si une série de fonctions $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$ converge normalement sur un ensemble $D \subset \mathbb{K}$, alors elle converge absolument sur D
Autrement dit : la convergence normale implique la convergence absolue

Démonstration

Soit $x \in D$. Alors $|f_n(x)| \leqslant u_n$ où u_n est le terme général d'une série à termes positifs et convergente. Donc, la série numérique $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N}} |f_n(x)|$ converge, c'est à dire que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$ converge absolument.

7.1.13 Proposition

Si une série de fonctions $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$ converge normalement sur un ensemble $D \subset \mathbb{K}$, alors elle converge uniformément sur D
Autrement dit : la convergence normale implique la convergence uniforme

Démonstration

Pour le démontrer, nous allons utiliser le critère de Cauchy pour les convergences uniformes vu en 7.1.6. Soient $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}$ tels que $q > p$. Alors :
$$|f_p(x) + f_{p+1}(x) + \cdots + f_q(x)| \leqslant |f_p(x)| + |f_{p+1}(x)| + \cdots + |f_q(x)| \tag{7.1}$$
Comme la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$ converge normalement, il existe une série numérique $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ à termes positifs et convergente, telle que, pour tout $x \in D$, $|f_n(x)| \leqslant u_n$, en particulier $\displaystyle\sup_{x \in D} |f_n(x)| \leqslant u_n$

De l'inégalité 7.1, nous tirons :

$$\sup_{x\in D}\left(\left|f_p\left(x\right)+f_{p+1}\left(x\right)+\cdots+f_q\left(x\right)\right|\right)\leqslant\sup_{x\in D}\left|f_p\left(x\right)\right|+\sup_{x\in D}\left|f_{p+1}\left(x\right)\right|+\cdots+\sup_{x\in D}\left|f_q\left(x\right)\right|$$

Nous avons donc :

$$\sup_{x\in D}\left(\left|f_p\left(x\right)+f_{p+1}\left(x\right)+\cdots+f_q\left(x\right)\right|\right)\leqslant u_p+u_{p+1}+\cdots+u_q=\sum_{n=p}^{q}u_n$$

La série $\sum_{n\in\mathbb{N}}u_n$ étant convergente, elle est de Cauchy. Donc, pour $\varepsilon>0$, il existe $N_\varepsilon\in\mathbb{N}$ tel que si $q>p\geqslant N_\varepsilon$, alors

$$u_p+u_{p+1}+\cdots+u_q=\sum_{n=p}^{q}u_n<\varepsilon$$

Donc, pour ce même $\varepsilon>0$, pour $q>p\geqslant N_\varepsilon$, nous avons

$$\sup_{x\in D}\left(\left|f_p\left(x\right)+f_{p+1}\left(x\right)+\cdots+f_q\left(x\right)\right|\right)\leqslant u_p+u_{p+1}+\cdots+u_q<\varepsilon$$

Ce qui montre que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}}f_n$ converge uniformément sur $D\subset\mathbb{K}$

Remarque 7 :

1. **Bien entendu, nous n'avons pas la réciproque**
   Exemple :
   Nous avons démontré que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{(-1)^n}{x+n}$ convergeait uniformément sur $\mathbb{R}^+$. Nous allons démontrer que cette série n'est pas normalement convergente. En effet,
   $$\left\|f_n\right\|_\infty=\sup_{x\geqslant0}\left|\frac{(-1)^n}{x+n}\right|=\sup_{x\geqslant0}\frac{1}{x+n}=\frac{1}{n}$$
   Or, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\left\|f_n\right\|_\infty=\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n}$ est une série divergente, et donc la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{(-1)^n}{x+n}$ n'est pas normalement convergente.
   Nous avons donc un exemple de série uniformément convergente qui n'est pas normalement convergente.
2. Nous avons donc :

$$\begin{tikzcd}
 & \text{Convergence absolue} \arrow[dr] & \\
\text{Convergence normale} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \text{Convergence simple} \\
 & \text{Convergence uniforme} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Exercice 4 :

Etudier la convergence simple, absolue, uniforme et normale de la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{x^n}{n}$

Exercice 5 :

Montrer que la série de terme général $f_n(x) = (-1)^n \left(\dfrac{x^2+n}{n^2}\right)$ pour $n \geqslant 1$ est uniformément convergente sur tout intervalle $[a;b] \subset \mathbb{R}$ mais n'est absolument convergente pour aucune valeur $x \in \mathbb{R}$

Exercice 6 :

Montrer que si la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} |a_n|$ converge, alors la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n e^{inx}$ est uniformément convergente sur $\mathbb{R}$

Exercice 7 :

Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} \dfrac{e^{-nx}\sin nx}{\ln n}$ est normalement convergente sur l'intervalle $[a;+\infty[$ où $a > 0$

7.2 Théorèmes généraux

CERTAINES LITTÉRATURES APPELLENT AUSSI CES THÉORÈMES GÉNÉRAUX, DES THÉORÈMES DE TRANSFERT. L'IDÉE EST EFFECTIVEMENT DE VOIR CE QUI SE PASSE LORSQUE LES FONCTIONS ONT CERTAINES QUALITÉS, ET SI CES QUALITÉS SONT CONSERVÉES PAR « PASSAGE AUX SÉRIES »

Les outils utilisés dans cette section reprennent en très grande partie, ceux exposés dans les suites de fonctions de L_1. Ils seront rappelés lorsque cela sera nécessaire

7.2.1 Théorème d'interversion des limites pour les séries de fonctions

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur $D \subset \mathbb{K}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$. Soit $a \in \overline{D}$. On suppose :

1. La série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge uniformément sur D vers une fonction S
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in D}} f_n(x) = l_n(a)$

Alors

1. La série numérique $\sum\limits_{n\geqslant 0} l_n(a)$ est convergente dans $\mathbb{K}$. Appelons $L(a) = \sum\limits_{n\geqslant 0} l_n(a)$
2. Nous avons $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in D}} S(x) = L(a)$; autrement dit :

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\in D}} \left(\sum_{n\geqslant 0} f_n(x)\right) = \sum_{n\geqslant 0} \left(\lim_{\substack{x\to a\\ x\in D}} f_n(x)\right)$$

Démonstration

Avant de débuter la démonstration, nous allons rappeler un théorème vu en L_1 :

Soit $D \subset \mathbb{R}$ et $a \in \overline{D}$ adhérent à D. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur D telles que :
$\Longrightarrow$ $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in D}} f_n(x) = l_n$
$\Longrightarrow$ La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction f définie sur D
Alors
$\longrightarrow$ La suite $(l_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite $l \in \mathbb{K}$, c'est à dire $\lim\limits_{n\to+\infty} l_n = l$
$\longrightarrow$ La fonction f admet une limite lorsque x tend vers a, plus précisément : $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in D}} f(x) = l$
Nous avons donc :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{\substack{x\to a\\ x\in D}} f_n(x)\right) = \lim_{\substack{x\to a\\ x\in D}}\left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right)$$

Nous allons appliquer ce résultat à la suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $S_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} f_n(x)$

$\rightarrow$ D'après l'hypothèse, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction S
$\rightarrow$ D'après les théorèmes classiques sur les limites, nous avons :

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\in D}} S_n(x) = \lim_{\substack{x\to a\\ x\in D}}\left(\sum_{k=0}^{n} f_n(x)\right) = \sum_{k=0}^{n}\lim_{\substack{x\to a\\ x\in D}} f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} l_k(a) = L_n(a)$$

Donc, d'après le résultat vu en L_1 :
$\rightarrow$ La suite numérique $(L_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{K}$, c'est à dire que $\lim\limits_{n\to+\infty} L_n(a) = L(a)$, c'est à dire, traduit en termes de séries :

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n} l_k(a) = L(a)$$

La série numérique $\sum\limits_{n\geqslant 0} l_n(a)$ est convergente et a pour somme $L(a)$
$\rightarrow$ Et $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in D}} S(x) = L(a)$
Ce que nous voulions

7.2.2 Proposition

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur $D \subset \mathbb{K}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$. On suppose :

1. La série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge uniformément sur D vers une fonction S
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, les fonctions f_n sont continues sur D

Alors la somme $S = \sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ est une fonction continue sur D

Démonstration

On rappelle le résultat vu en L_1 :

La limite uniforme d'une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions continues est continue.

$\longrightarrow$ Appelons $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} f_k$; S_n est une fonction continue sur D, comme somme finie de fonctions continues sur D
$\longrightarrow$ La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction S
La fonction S est donc continue sur D

Exemple 4 :

Exemple et contre-exemple :

1. On considère la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ où $f_n(x) = (1-x)\,x^n$.
   - ▷ Cette série converge simplement sur l'intervalle $[0;+1]$ vers la fonction S définie par :
     $$\begin{cases} S(x) = 1 \text{ si } x \in \left]0;+1\right[\\ S(0) = S(1) = 0 \end{cases}$$
   - ▷ La fonction S n'est pas continue sur $[0;+1]$
   - ▷ La série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ où $f_n(x) = (1-x)\,x^n$ ne converge donc pas uniformément sur l'intervalle $[0;+1]$
2. Considérons la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{e^{-nx^2}}{n^2}$
   - ▷ Nous avons, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\left|\dfrac{e^{-nx^2}}{n^2}\right| = \dfrac{e^{-nx^2}}{n^2} \leqslant \dfrac{1}{n^2}$

     La série numérique $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente ; la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{e^{-nx^2}}{n^2}$ est donc normalement convergente sur $\mathbb{R}$. Elle est donc uniformément convergente sur $\mathbb{R}$
   - ▷ Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $\dfrac{e^{-nx^2}}{n^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et donc la somme $S(x) = \sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{e^{-nx^2}}{n^2}$ est elle-même continue sur $\mathbb{R}$
   - ▷ Nous avons, en particulier $S(0) = \sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$

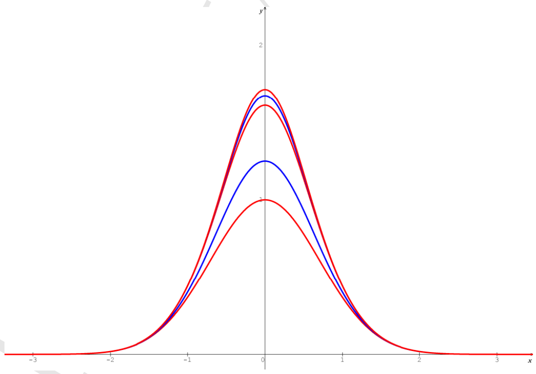

FIGURE 7.1 – Une visualisation des sommes successives (jusque $n = 5$) amenant au graphe de S

3. **La série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} (-1)^n \dfrac{e^{-nx^2}}{(n+1)^3}$ est continue sur $\mathbb{R}$**

   Nous avons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $(-1)^n \dfrac{e^{-nx^2}}{(n+1)^3}$ continue sur $\mathbb{R}$ en entier.

   D'autre part, pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons :
   $$\left|(-1)^n \frac{e^{-nx^2}}{(n+1)^3}\right| = \frac{e^{-nx^2}}{(n+1)^3} \leqslant \frac{1}{(n+1)^3}$$

   La série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{1}{(n+1)^3}$ est une série de Riemann convergente ; la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} (-1)^n \dfrac{e^{-nx^2}}{(n+1)^3}$ est donc uniformément convergente sur $\mathbb{R}$.

Nous en déduisons donc que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n\dfrac{e^{-nx^2}}{(n+1)^3}$ est continue sur $\mathbb{R}$

Exercice 8 :

Soit α un réel tel que $\alpha < 2$. On considère la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} x^{2-\alpha}e^{-nx}$ définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$

1. Démontrer que cette série est simplement convergente sur $[0;+\infty[$
2. Démontrer que, si $1 \leqslant \alpha < 2$ alors la série $\sum_{n\geqslant 1} x^{2-\alpha}e^{-nx}$ n'est pas uniformément convergente sur l'intervalle $[0;+\infty[$.
3. Montrer que si $\alpha < 1$, alors la série $\sum_{n\geqslant 1} x^{2-\alpha}e^{-nx}$ est uniformément convergente sur $[0;+\infty[$

7.2.3 Théorème sur la dérivation

Soit $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ une série de fonctions définies sur $D \subset \mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$.

On suppose que :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est dérivable sur D (c'est à dire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n' existe et est défini sur D)
2. Il existe $x_0 \in D$ tel que la série numérique $\sum_{n\geqslant 0} f_n(x_0)$ soit convergente
3. La série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n'$ converge uniformément sur D

Alors :

1. La série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ est uniformément convergente sur D vers une fonction S
2. La somme $S = \sum_{n\geqslant 0} f_n$ est dérivable et $S' = \sum_{n\geqslant 0} f_n'$

Démonstration

C'est l'application aux sommes partielles du théorème vu en L_1 :

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions dérivables sur un intervalle $[a;b]$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$.

On suppose que :

- ▷ Il existe $c \in [a;b]$ tel que la suite numérique $(f_n(c))_{n\in\mathbb{N}}$ converge
- ▷ La suite $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ des fonctions dérivées des f_n converge uniformément sur $[a;b]$ vers une fonction φ

Alors :

1. La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a;b]$ vers une fonction f
2. f est dérivable sur $[a;b]$
3. Pour tout $x \in [a;b]$, $f'(x) = \varphi(x) \iff f'(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n'(x)$, c'est à dire que nous avons :

$$\lim_{n\to+\infty} f_n' = \left(\lim_{n\to+\infty} f_n\right)'$$

La démonstration est donc laissée en exercice

7.2.4 Corollaire

Soit $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ une série de fonctions définies sur $D \subset \mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$.
On suppose que :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D
2. La série $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ est simplement convergente
3. La série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f'_n$ converge uniformément sur D

Alors :

1. La série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ est uniformément convergente sur D vers une fonction S
2. La somme $S = \sum_{n\geqslant 0} f_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et $S' = \sum_{n\geqslant 0} f'_n$

Démonstration

La démonstration est laissée en exercice.

Exemple 5 :

Retravaillons la série de fonctions de terme général $f_n(x) = \dfrac{x^n}{n}$.
Nous avons démontré que cette série convergeait simplement sur l'intervalle $[-1;+1[$ et uniformément sur tout intervalle $[-a;+a]$ où $0 < a < 1$ *(en fait, la série converge uniformément sur tout intervalle* $[a;b] \subset \,]-1;+1[$*)*
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue sur $[-a;+a]$, et donc $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{x^n}{n}$ est continue sur $[-a;+a]$
D'autre part, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $f'_n(x) = x^{n-1}$, et la série $\sum_{n\geqslant 1} x^{n-1} = \sum_{n\geqslant 0} x^n$ est elle aussi uniformément convergente sur $[-a;+a]$. Nous avons alors :

$$\left(\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n}\right)' = \sum_{n\geqslant 0} x^n = \frac{1}{1-x}$$

D'où, en passant à la primitive, $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{x^n}{n} = -\ln(1-x) + k$; or, pour $x = 0$, nous avons $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{0^n}{n} = -\ln(1-0) = 0$, d'où $k = 0$, et donc $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$.

En prolongeant par continuité en $x = -1$, nous obtenons $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^n}{n} = -\ln 2$.

7.2.5 Théorème

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle $[a,b]\subset\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$
On suppose que :

1. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, les fonctions sont continues sur l'intervalle $[a,b]$
2. La série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge uniformément vers une fonction S

Alors

Si nous définissons $F_n(x)=\int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t$

1. La série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} F_n$ converge uniformément vers une fonction Σ
2. Pour tout $x\in[a,b]$, la fonction Σ est définie par :

$$\Sigma(x)=\int_a^x S(t)\,\mathrm{d}t$$

C'est à dire que nous avons :

$$\sum_{n\geqslant 0}\int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^x\sum_{n\geqslant 0} f_n(t)\,\mathrm{d}t$$

Démonstration

Nous allons commencer cette démonstration par un lemme de rappel sur les suites de fonctions

Lemme

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle $[a,b]\subset\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$
On suppose que :

1. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, les fonctions sont continues sur l'intervalle $[a,b]$
2. La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction f

Alors

La suite de fonctions $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies pour tout $x\in[a,b]$ par $F_n(x)=\int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t$ converge uniformément vers la fonction F définie, pour tout $x\in[a,b]$ par $F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$

Une nouvelle fois, nous avons : $\lim_{n\to+\infty}\int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^x\lim_{n\to+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$

Démonstration

1. Comme pour chacun des $n\in\mathbb{N}$, la fonction f_n est continue, f, limite uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien une fonction continue et $F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est bien définie
2. Démontrons que la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers F.

   Pour tout $x\in[a,b]$, nous avons :

$$|F_n(x)-F(x)|=\left|\int_a^x (f_n(t)-f(t))\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\int_a^x|f_n(t)-f(t)|\,\mathrm{d}t$$

   Soit $\varepsilon>0$
   Comme la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f, il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que, si $n\geqslant N$, pour tout $t\in[a,b]$, nous avons $|f_n(t)-f(t)|\leqslant\dfrac{\varepsilon}{|b-a|}$.

   Donc, pour $n\geqslant N$, nous avons $\int_a^x|f_n(t)-f(t)|\,\mathrm{d}t\leqslant\dfrac{\varepsilon}{|b-a|}\times|b-a|=\varepsilon$
   Ainsi, pour tout $\varepsilon>0$, il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que, si $n\geqslant N$, pour tout $x\in[a,b]$, nous avons

$$|F_n(x)-F(x)|\leqslant\varepsilon$$

   La suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc uniformément vers F

Il suffit, maintenant, de considérer la suite des sommes partielles $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} f_k$.

- ▷ Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, les S_n sont continues comme somme finie de fonctions continues.
- ▷ La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers S

Donc la série de fonctions $\displaystyle\int_a^x S_n(t)\,\mathrm{d}t$ converge uniformément vers la fonction $\displaystyle\int_a^x S(t)\,\mathrm{d}t$.

Nous avons donc bien

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_a^x \sum_{k=0}^{n} f_k(t)\,\mathrm{d}t\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t\right) = \int_a^x \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} f_n(t)\right)\mathrm{d}t$$

Autrement dit $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^x \sum_{n\geqslant 0} f_n(t)\,\mathrm{d}t$

Remarque 8 :

C'est un exemple de permutation des signes $\sum$ et $\displaystyle\int$

Exemple 6 :

Soit $h > 0$
Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} ne^{-nx}$ est uniformément convergente sur $[h;+\infty[$.

Soit S sa somme. Pour $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $h < a < b$, calculer $\displaystyle\int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x$

Je trouve qu'il y a 2 façons de répondre à la question, et je vais tenter de la faire.

1. **<u>Première méthode</u>**
   Soit $f_n(x) = ne^{-nx}$; cette fonction est définie et continue sur l'intervalle $[h;+\infty[$.
   Pour tout $x \in [h;+\infty[$, nous avons $0 < e^{-nx} \leqslant e^{-nh}$, et donc, pour tout $x \in [h;+\infty[$, nous avons $< f_n(x) \leqslant ne^{-nh}$
   Comme $h > 0$, nous avons $0 < e^{-h} < 1$ et ne^{-nh} est le terme général d'une série numérique à termes positifs convergente.
   La série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} ne^{-nx}$ est donc normalement convergente sur $[h;+\infty[$, c'est à dire uniformément convergente sur $[h;+\infty[$.
   Nous pouvons donc écrire $\displaystyle\int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n\geqslant 1}\int_a^b ne^{-nx}\,\mathrm{d}x$. Or :

$$\int_a^b ne^{-nx}\,\mathrm{d}x = \left[-e^{-nx}\right]_a^b = e^{-na} - e^{-nb}$$

   Et donc

$$\begin{aligned}\int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x &= \sum_{n\geqslant 1}\left(e^{-na} - e^{-nb}\right)\\ &= \sum_{n\geqslant 1} e^{-na} - \sum_{n\geqslant 1} e^{-nb}\\ &= \sum_{n\geqslant 1}\left(e^{-a}\right)^n - \sum_{n\geqslant 1}\left(e^{-b}\right)^n\\ &= \frac{e^{-a}}{1-e^{-a}} - \frac{e^{-b}}{1-e^{-b}}\\ &= \frac{1}{e^a-1} - \frac{1}{e^b-1}\\ &= \frac{e^b-e^a}{(e^a-1)(e^b-1)}\end{aligned}$$

Et donc, $\displaystyle\int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x = \frac{e^b - e^a}{(e^a-1)(e^b-1)}$

2. **Seconde méthode**

Soit $F_n(x) = e^{-nx}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction F_n est continue et dérivable sur l'intervalle $[h;+\infty[$.

D'autre part, pour tout $x \in [h;+\infty[$, nous avons $|F_n(x)| \leqslant e^{-nh}$; ainsi la série numérique $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} F_n$ converge normalement et donc uniformément sur $[h;+\infty[$.

Nous avons $F_n'(x) = -f_n(x)$. Nous venons de démontrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} F_n' = \sum_{n\geqslant 1} f_n$ convergeait uniformément sur $[h;+\infty[$, nous avons :

$$\left(\sum_{n\geqslant 0} F_n\right)' = \sum_{n\geqslant 0} F_n' \iff \left(\sum_{n\geqslant 0} F_n\right)' = -\sum_{n\geqslant 1} f_n$$

De telle sorte que :

$$\int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \sum_{n\geqslant 1} f_n(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b \left(\sum_{n\geqslant 0} F_n\right)'(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n\geqslant 0} F_n(a) - \sum_{n\geqslant 0} F_n(b)$$

Or, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} F_n(x) = \sum_{n\geqslant 0} e^{-nx} = \frac{1}{1-e^{-x}} = \frac{e^x}{e^x-1}$, et donc

$$\int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x = \frac{e^a}{e^a-1} - \frac{e^b}{e^b-1} = \frac{e^b-e^a}{(e^a-1)(e^b-1)}$$

7.3 Exercices complémentaires

Exercice 9 :

Etudier les séries suivantes *(mode de convergence, continuité de la somme)*

1. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} e^{-n}\cos n^2 x$
2. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} (-1)^n \sin\frac{x}{n}$
3. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{\cos\frac{x}{2^n}}{10^n}$
4. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n+n^2x^2}$

Exercice 10 :

Soient α, a et b, 3 nombres réels tels que $\alpha > 0$ et $0 < a < b$. On considère la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{x}{n^\alpha(1+nx^2)}$

Montrer que cette série est uniformément convergente sur l'intervalle $[a;b]$

Exercice 11 :

Montrer que la somme de la série de fonctions de terme général $f_n(x) = (-1)^n \dfrac{e^{-nx^2}}{(n+1)^3}$ est continue sur $\mathbb{R}$

Exercice 12 :

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Etudier la continuité de la fonction définie sur $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ par $F(x) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 1} n^\alpha \sin^n x\cos x$

Exercice 13 :

On considère la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n(x)$ où $f_n(x) = (-1)^n \dfrac{x^2}{x^4+n}$

1. Etudier la convergence simple de la série sur $\mathbb{R}$
2. Montrer que cette série est uniformément convergente sur $\mathbb{R}$
3. Montrer que la somme de cette série est continue

Exercice 14 :

1. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{x}{(x^2+n^2)^2}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$
2. Montrer que cette série est continue sur $\mathbb{R}$
3. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{x^2+n^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

Exercice 15 :

Nous considérons la série $\sum_{n\geqslant 1} f_n(x)$ où $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n^3}$

1. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} f_n(x)$ converge et que sa somme $f(x) = \sum_{n\geqslant 1} f_n(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$
2. Démontrer que $\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{(2n-1)^4}$
3. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\cos(nx)}{n^2}$
4. Démontrer que $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n\geqslant 1} \frac{\cos(nx)}{n^2}\,\mathrm{d}x = \sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$

Exercice 16 :

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, nous définissons la fonction $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{x+n}$.

1. Démontrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} f_n(x)$ converge simplement sur $[0 : +\infty[$ vers une fonction S
2. Démontrer que $S'(x) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{(x+n)^2}$

Exercice 17 :

Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{e^x-1}\,\mathrm{d}x = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2+1}$

Exercice 18 :

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \dfrac{\alpha^n \cos(nx)}{n!}$

1. Etudier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{\alpha^n \cos(nx)}{n!}$

2. Nous appelons $C(x) = \sum_{n \geqslant 0} \frac{\alpha^n \cos(nx)}{n!}$ pour tout x appartenant au domaine de convergence. Donner une expression de C à l'aide de fonctions usuelles
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous appelons :
$$J_n = \int_{-\pi}^{+\pi} \sin(nx) C(x) \, \mathrm{d}x \text{ et } I_n = \int_{-\pi}^{+\pi} \cos(nx) C(x) \, \mathrm{d}x$$
   (a) Calculer J_n puis I_n
   (b) Déterminer $\lim_{n \to +\infty} J_n$ et $\lim_{n \to +\infty} I_n$
4. Lorsque cela existe, nous posons $S(x) = \sum_{n \geqslant 0} \frac{\alpha^n \cos^2(nx)}{n!}$
   Déterminer l'ensemble de définition de S et exprimer S à l'aide des fonctions usuelles.

Exercice 19 :

On considère la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que : la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et $\lim_{n \to +\infty} b_n = 0$

Montrer que la série de fonctions $\sum b_n \sin nx$ converge uniformément si et seulement si $\lim_{n \to +\infty} n b_n = 0$

Exercice 20 :

Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[$.

Etudier la convergence et la somme de la série de fonctions $\sum_{n \geqslant 0} \frac{1}{2^n} \tan\left(\frac{x}{2^n}\right)$

Indication : utiliser le fait que $\tan x = \frac{\cos x}{\sin x} - 2\frac{\cos 2x}{\sin 2x}$

7.4 Etude de quelques curiosités

L'objet de ce paragraphe est d'étudier des questions difficiles et néanmoins surprenantes. Il faut prendre ce paragraphe comme une succession d'exercices résolus

7.4.1 La fonction de Van Der Waerden

1. Soit $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ périodique et de période 1, et telle que :
$$\left(\forall x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right[\right) (\varphi(x) = |x|)$$
   (a) De la périodicité, nous tirons que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, nous avons $\varphi(x+n) = \varphi(x)$
   (b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $n_0 \in \mathbb{Z}$ tel que $x \in \left[n_0 - \frac{1}{2}; n_0 + \frac{1}{2}\right[$, et alors $x - n_0 \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right[$ et alors :
$$\varphi(x) = \varphi(x - n_0) = |x - n_0|$$
   (c) Qu'est donc ce n_0 ?
   Nous avons, dans tous les cas, $n_0 - \frac{1}{2} \leqslant x < n_0 + \frac{1}{2}$, c'est à dire $n_0 \leqslant x + \frac{1}{2} < n_0 + 1$, c'est à dire que $n_0 = \left[x + \frac{1}{2}\right]$ où $[\bullet]$ désigne la partie entière Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$ $\varphi(x) = \left|x - \left[x + \frac{1}{2}\right]\right|$
   Une autre écriture de cette fonction φ pourrait être, et naturellement : $\varphi(x) = \min\{|x - n| \text{ avec } n \in \mathbb{Z}\}$, c'est à dire que $\varphi(x)$ représente la distance du réel x à l'entier le plus voisin.
   D'autres ont aussi pu écrire $\varphi(x) = d(x, \mathbb{Z})$

(d) La fonction φ est paire.

En effet, soit $x \in \mathbb{R}$. Il existe $n_0 \in \mathbb{Z}$ tel que $x \in \left[n_0 - \frac{1}{2}; n_0 + \frac{1}{2}\right[$, et $\varphi(x) = |x - n_0|$.

Nous avons alors $-x \in \left]-n_0 - \frac{1}{2}; -n_0 + \frac{1}{2}\right]$, et donc

$$\varphi(-x) = |-x - (-n_0)| = |-x + n_0| = |x - n_0| = \varphi(x)$$

De plus, $\varphi\left(n_0 - \frac{1}{2}\right) = \varphi\left(n_0 + \frac{1}{2}\right) = \varphi\left(-n_0 - \frac{1}{2}\right) = \varphi\left(-n_0 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$ et $\varphi(n_0) = \varphi(-n_0) = 0$

(e) La fonction φ est une fonction affine par morceaux.

$\Longrightarrow$ Sur chaque intervalle $I_n = \left[\frac{n}{2}; \frac{n+1}{2}\right[$ avec $n \in \mathbb{Z}$, la pente de la droite est donnée par $(-1)^n$; φ est donc non dérivable dans les points $\frac{n}{2}$ avec $n \in \mathbb{Z}$

$\Longrightarrow$ Les seuls points de discontinuité possibles sont du type $-\frac{1}{2} + n_0$ avec $n_0 \in \mathbb{Z}$

$\star$ Si $x < -\frac{1}{2} + n_0$, alors $\varphi(x) = |x - (n_0 - 1)|$ et $\lim\limits_{\substack{x \to -\frac{1}{2} + n_0 \\ x < -\frac{1}{2} + n_0}} \varphi(x) = \frac{1}{2}$

$\star$ Maintenant, si $x \geqslant -\frac{1}{2} + n_0$, alors $\varphi(x) = |x - n_0|$ et $\lim\limits_{\substack{x \to -\frac{1}{2} + n_0 \\ x \geqslant -\frac{1}{2} + n_0}} \varphi(x) = \frac{1}{2}$

φ est donc continue sur $\mathbb{R}$, non dérivable dans les points $\frac{n}{2}$ avec $n \in \mathbb{Z}$

$\Longrightarrow$ Le minimum de φ est atteint en $n \in \mathbb{Z}$ où $\varphi(n) = 0$ et le maximum est atteint en $\frac{1}{2} + n_0$ avec $n_0 \in \mathbb{Z}$ où $\varphi\left(\frac{1}{2} + n_0\right) = \frac{1}{2}$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons $0 \leqslant \varphi(x) \leqslant \frac{1}{2}$

La figure 7.2 représente le graphe de φ

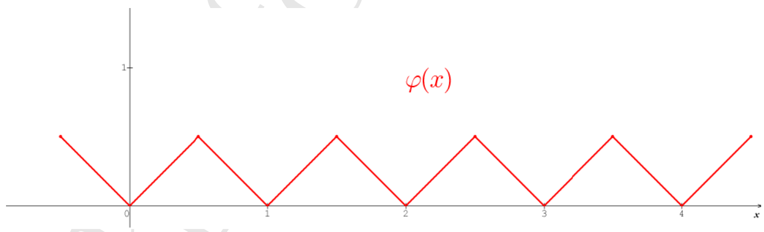

FIGURE 7.2 – Le graphe de φ

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et nous considérons la fonction $w_n(x) = \varphi(nx)$

(a) En reprenant ce qui a été écrit ci-dessus, w_n est paire, de période $\frac{1}{n}$ et continue sur $\mathbb{R}$

(b) w_n n'est pas dérivable en les points où $nx = \frac{p}{2}$ avec $p \in \mathbb{Z}$, c'est à dire en les points $x = \frac{p}{2n}$ avec $p \in \mathbb{Z}$

$\triangleright$ Si p est pair, c'est à dire si $p = 2k$, alors :

$$w_n\left(\frac{p}{2n}\right) = \varphi\left(n \times \frac{p}{2n}\right) = \varphi\left(\frac{p}{2}\right) = \varphi\left(\frac{2k}{2}\right) = \varphi(k) = 0$$

$\triangleright$ Si p est impair, c'est à dire si $p = 2k + 1$, alors :

$$w_n\left(\frac{p}{2n}\right) = \varphi\left(n \times \frac{p}{2n}\right) = \varphi\left(\frac{p}{2}\right) = \varphi\left(\frac{2k+1}{2}\right) = \varphi\left(k + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

(c) Soit $k \in \mathbb{Z}$ et considérons l'intervalle $\left[\frac{2k-1}{2n}, \frac{2k+1}{2n}\right[$ et dont le milieu est $\frac{k}{n}$. Si $x \in \left[\frac{2k-1}{2n}, \frac{2k+1}{2n}\right[$, alors $nx \in \left[-\frac{1}{2}+k, \frac{1}{2}+k\right[$

▷ Si $x \in \left[\frac{2k-1}{2n}, \frac{k}{n}\right[$, alors $nx \in \left[-\frac{1}{2}+k, k\right[$ et $w_n(x) = \varphi(nx) = |nx-k| = k - nx$. la pente de la fonction w_n sur $\left[\frac{2k-1}{2n}, \frac{k}{n}\right[$ est donc $n(-1)^{2k-1}$

▷ Si $x \in \left[\frac{k}{n}, \frac{2k+1}{2n}\right[$, alors $nx \in \left[k; \frac{1}{2}+k, \right[$ et $w_n(x) = \varphi(nx) = |nx-k| = nx - k$. la pente de la fonction w_n sur $\left[\frac{k}{n}; \frac{2k+1}{2n}\right[$ est donc $n(-1)^{2k}$

En synthèse, la fonction w_n est affine sur les intervalles $\left[\frac{s}{2n}, \frac{s+1}{2n}\right[$ avec $s \in \mathbb{Z}$ de pente $n(-1)^s$

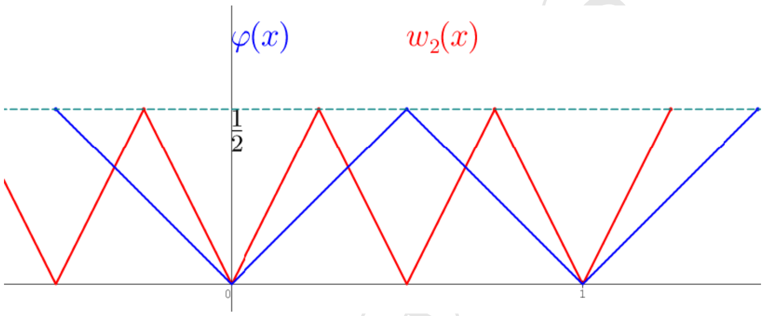

FIGURE 7.3 – Les graphes de φ et w_2

3. Nous allons, maintenant, un peu plus loin en considérant $w_n^1(x) = \varphi(2^n x)$

(a) La période de w_n^1 est $\frac{1}{2^n}$

(b) Les points anguleux (ou non dérivables sont du type $\left(\frac{k}{2^{n+1}}\right)$ avec $k \in \mathbb{Z}$, et elle est affine, de pente $2^n(-1)^k$ sur les intervalles $\left[\frac{k}{2^{n+1}}; \frac{k+1}{2^{n+1}}\right]$

(c) Soit $f(x) = \varphi(x) + \frac{1}{2} \times \varphi(2x)$

⟶ f est périodique et de période 1 ; nous pouvons donc ne l'étudier que sur l'intervalle $[0; 1]$

⟶ Sur l'intervalle $\left[0; \frac{1}{4}\right]$, nous avons $\varphi(x) = x$ et $\varphi(2x) = 2x$; d'où :

$$f(x) = \varphi(x) + \frac{1}{2} \times \varphi(2x) = x + \frac{1}{2} \times (2x) = 2x$$

⟶ Sur l'intervalle $\left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right]$, nous avons $\varphi(x) = x$ et $\varphi(2x) = -2x + 1$; d'où :

$$f(x) = \varphi(x) + \frac{1}{2} \times \varphi(2x) = x + \frac{1}{2} \times (-2x+1) = \frac{1}{2}$$

⟶ Sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right]$, nous avons $\varphi(x) = -x + 1$ et $\varphi(2x) = 2x - 1$; d'où :

$$f(x) = \varphi(x) + \frac{1}{2} \times \varphi(2x) = -x + 1 + \frac{1}{2} \times (2x-1) = \frac{1}{2}$$

$\longrightarrow$ Sur l'intervalle $\left[\frac{3}{4};1\right]$, nous avons $\varphi(x) = -x+1$ et $\varphi(2x) = -2x+2$; d'où :

$$f(x) = \varphi(x) + \frac{1}{2} \times \varphi(2x) = -x+1+\frac{1}{2} \times (-2x+2) = -2x+2$$

D'où le graphe en figure 7.4 :

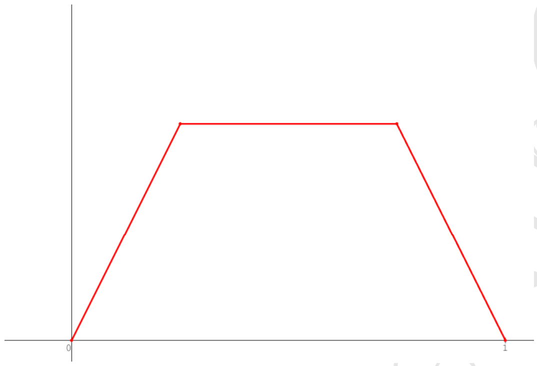

FIGURE 7.4 – Les graphes de f où $f(x) = \varphi(x) + \frac{1}{2} \times \varphi(2x)$

(d) Il n'est pas inutile de remarquer que $\displaystyle\int_0^1 \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \varphi(2^n x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}$

- ▷ Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}$ n'est pas difficile. En effet :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \varphi(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{1}{2}} \varphi(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}}^1 \varphi(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} x\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}}^1 -x+1\,\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{1}{2}} + \left[-\frac{x^2}{2}+x\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}\end{aligned}$$

- ▷ Démontrons, maintenant, que $\displaystyle\int_0^1 \varphi(2^n x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}$

  Faisons le changement de variables $u = 2^n x$; alors $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 2^n$, ce qui donne $\mathrm{d}x = 2^{-n}\,\mathrm{d}u$. Donc :

$$\int_0^1 \varphi(2^n x)\,\mathrm{d}x = 2^{-n} \int_0^{2^n} \varphi(u)\,\mathrm{d}u = 2^{-n}\left(\sum_{k=0}^{2^n-1} \int_k^{k+1} \varphi(u)\,\mathrm{d}u\right)$$

  On sait que φ est périodique et de période 1. Donc : $\displaystyle\int_k^{k+1} \varphi(u)\,\mathrm{d}u = \int_0^1 \varphi(u)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{4}$

  Nous en déduisons que :

$$\int_0^1 \varphi(2^n x)\,\mathrm{d}x = 2^{-n}\left(\sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{1}{4}\right) = 2^{-n} \times 2^n \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

4. On appelle fonction de Van Der Waerden, la fonction définie par :

$$f(x) = \sum_{n\geqslant 0} 2^{-n}\varphi(2^n x) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{\varphi(2^n x)}{2^n} = \sum_{n\geqslant 0} \frac{w_{2^n}(x)}{2^n}$$

C'est une fonction partout continue et nulle part dérivable

(a) **f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$**

- ▷ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $\dfrac{\varphi(2^n x)}{2^n}$ est continue sur $\mathbb{R}$
- ▷ D'autre part, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $0 \leqslant \dfrac{\varphi(2^n x)}{2^n} \leqslant \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2^n} = \dfrac{1}{2^{n+1}}$

  La série numérique $\sum\limits_{n \geqslant 0} \dfrac{1}{2^{n+1}}$ est une série convergente et donc la série de fonctions $\sum\limits_{n \geqslant 0} \dfrac{\varphi(2^n x)}{2^n}$ converge normalement et donc uniformément sur $\mathbb{R}$
- ▷ En utilisant le résultat sur convergence uniforme et continuité, nous pouvons déduire que f est continue sur $\mathbb{R}$

(b) **f est périodique et de période 1**

φ est une fonction continue et de période 1.

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(2^n(x+1)) = \varphi(2^n x + 2^n) = \varphi(2^n x)$, et donc :

$$f(x+1) = \sum_{n \geqslant 0} \frac{\varphi(2^n(x+1))}{2^n} = \sum_{n \geqslant 0} \frac{\varphi(2^n x)}{2^n} = f(x)$$

- ⋆ La période ne peut pas être plus petite puisque, pour $n = 0$, $\varphi(2^n x) = \varphi(x)$
- ⋆ On peut donc n'étudier cette fonction que sur un intervalle de longueur 1, et nous choisirons l'intervalle $[0; +1]$

(c) **Nous avons f intégrable et $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$**

Le théorème de convergence uniforme et de calcul intégral 7.2.5 nous permet d'écrire :

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \sum_{n \geqslant 0} 2^{-n}\varphi(2^n x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n \geqslant 0} 2^{-n} \int_0^1 \varphi(2^n x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n \geqslant 0} 2^{-n} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

(d) **f n'est dérivable en aucun point**

i. *Nous aurons besoin du lemme suivant, qui aurait pu être démontré en exercice, dans le chapitre sur la dérivation dans le cours de L_1*

Lemme

La fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction numérique dérivable en $x_0 \in \mathbb{R}$ et de dérivée $f'(x_0)$
Soient $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 2 suites numériques telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$x_n \leqslant x \leqslant y_n \qquad x_n < y_n \text{ et } \lim_{n \to +\infty} x_n = \lim_{n \to +\infty} y_n = x$$

Alors : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{f(x_n) - f(y_n)}{x_n - y_n} = f'(x_0)$

Démonstration

⇒ f est dérivable en x_0, il existe donc un voisinage $V \in \mathcal{V}(0)$ de 0 tel que, pour tout $h \in V$, nous avons :

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + h\varepsilon(h)$$

Où ε est une fonction définie au voisinage de 0 telle que $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$

⇒ Soient $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 2 suites numériques telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $x_n \leqslant x \leqslant y_n$, $x_n < y_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = \lim\limits_{n \to +\infty} y_n = x$

Appelons $\alpha_n = x_0 - x_n$; alors $\alpha_n \geqslant 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \alpha_n = 0$; il existe donc un $N_\alpha \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geqslant N_\alpha$ $\alpha_n \in V$

De même, si $\beta_n = y_n - x_0$; alors $\beta_n \geqslant 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \beta_n = 0$; il existe donc un $N_\beta \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geqslant N_\beta$ $\beta_n \in V$
En posant $N = \max\{N_\alpha; N_\beta\}$, si $n \geqslant N$, alors $\alpha_n \in V$ et $\beta_n \in V$, et à ce moment là :

$$f(x_0 - \alpha_n) = f(x_0) - \alpha_n f'(x_0) - \alpha_n \varepsilon(-\alpha_n)$$

et

$$f(x_0 + \beta_n) = f(x_0) + \beta_n f'(x_0) + \beta_n \varepsilon(\beta_n)$$

$\Rightarrow$ D'où, en soustrayant les 2 égalités, nous obtenons :

$$f(x_0 - \alpha_n) - f(x_0 + \beta_n) = (-\alpha_n - \beta_n) f'(x_0) - \alpha_n \varepsilon(-\alpha_n) - \beta_n \varepsilon(\beta_n)$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$f(x_0 + \beta_n) - f(x_0 - \alpha_n) = (\alpha_n + \beta_n) f'(x_0) + \alpha_n \varepsilon(-\alpha_n) + \beta_n \varepsilon(\beta_n)$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\frac{f(x_0 + \beta_n) - f(x_0 - \alpha_n)}{\alpha_n + \beta_n} - f'(x_0) = \frac{\alpha_n \varepsilon(-\alpha_n) + \beta_n \varepsilon(\beta_n)}{\alpha_n + \beta_n}$$

De là, nous tirons

$$\left| \frac{f(x_0 + \beta_n) - f(x_0 - \alpha_n)}{\alpha_n + \beta_n} - f'(x_0) \right| = \left| \frac{\alpha_n \varepsilon(-\alpha_n) + \beta_n \varepsilon(\beta_n)}{\alpha_n + \beta_n} \right| \leqslant \frac{\alpha_n |\varepsilon(-\alpha_n)|}{\alpha_n + \beta_n} + \frac{\beta_n |\varepsilon(\beta_n)|}{\alpha_n + \beta_n}$$

C'est à dire :

$$\left| \frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} - f'(x_0) \right| = \left| \frac{\alpha_n \varepsilon(-\alpha_n) + \beta_n \varepsilon(\beta_n)}{\alpha_n + \beta_n} \right| \leqslant \frac{\alpha_n |\varepsilon(-\alpha_n)|}{\alpha_n + \beta_n} + \frac{\beta_n |\varepsilon(\beta_n)|}{\alpha_n + \beta_n}$$

$\Rightarrow$ Comme $\alpha_n \geqslant 0$ et $\beta_n \geqslant 0$, nous avons $\dfrac{\alpha_n}{\alpha_n + \beta_n} \leqslant 1$ et $\dfrac{\beta_n}{\alpha_n + \beta_n} \leqslant 1$ et donc :

$$\frac{\alpha_n |\varepsilon(-\alpha_n)|}{\alpha_n + \beta_n} + \frac{\beta_n |\varepsilon(\beta_n)|}{\alpha_n + \beta_n} \leqslant |\varepsilon(-\alpha_n)| + |\varepsilon(\beta_n)|$$

C'est à dire, plus généralement :

$$\left| \frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} - f'(x_0) \right| \leqslant |\varepsilon(-\alpha_n)| + |\varepsilon(\beta_n)|$$

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} |\varepsilon(-\alpha_n)| = \lim\limits_{n \to +\infty} |\varepsilon(\beta_n)| = 0$, nous avons alors

$$\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} - f'(x_0) \right| = 0$$

Et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{f(x_n) - f(y_n)}{x_n - y_n} = f'(x_0)$

Ainsi, si nous réussissons à exhiber 2 suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $x_n \leqslant x \leqslant y_n$, $x_n < y_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = \lim\limits_{n \to +\infty} y_n = x$ telles que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{f(x_n) - f(y_n)}{x_n - y_n}$ n'existe pas, nous aurons gagné

ii. Soit $x \in \mathbb{R}$. On construit les suites $(x_p)_{p \in \mathbb{N}}$ et $(y_p)_{p \in \mathbb{N}}$ définies, pour tout $p \in \mathbb{N}$ par :

$$x_p = 2^{-p}[2^p x] \text{ et } y_p = 2^{-p}[2^p x] + 2^{-p}$$

Les suites $(x_p)_{p \in \mathbb{N}}$ et $(y_p)_{p \in \mathbb{N}}$ sont des approximations dyadiques de x et nous avons :

$$x_n \leqslant x \leqslant y_n \qquad x_n < y_n \text{ et } \lim_{n \to +\infty} x_n = \lim_{n \to +\infty} y_n = x$$

Nous allons démontrer que $\lim\limits_{p \to +\infty} \dfrac{f(y_p) - f(x_p)}{y_p - x_p}$ n'existe pas.

iii. Nous avons : $\dfrac{f(y_p)-f(x_p)}{y_p-x_p}=\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\dfrac{2^{-n}\left(w_{2^n}(y_p)-w_{2^n}(x_p)\right)}{y_p-x_p}$.

Les fonctions w_{2^n} sont affines par morceaux, et sur chacun des intervalles $\left[\dfrac{s}{2^{n+1}};\dfrac{s+1}{2^{n+1}}\right[$, où $s\in\mathbb{Z}$, les fonctions w_{2^n} sont des droites de pente $2^n(-1)^s$

Pour qu'un intervalle $[x_p;y_p]=\left[\dfrac{[2^px]}{2^p};\dfrac{[2^px]+1}{2^p}\right]$ soit inclus dans un intervalle du type $\left[\dfrac{s}{2^{n+1}};\dfrac{s+1}{2^{n+1}}\right[$, il faut que $\dfrac{1}{2^p}\leqslant\dfrac{1}{2^{n+1}}$, c'est à dire $p\geqslant n+1$. Nous avons affaire à des intervalles emboités. le plus grand est donc déterminé par $n=p-1$.

Le rapport $\dfrac{w_{2^n}(y_p)-w_{2^n}(x_p)}{y_p-x_p}$ représente le taux de variaton, c'est à dire, ici, le coefficient directeur de w_{2^n} entre x_p et y_p, c'est à dire :

$$\frac{w_{2^n}(y_p)-w_{2^n}(x_p)}{y_p-x_p}=2^n(-1)^{\left[x2^{n+1}\right]}$$

Si $n\geqslant p$, alors $\dfrac{w_{2^n}(y_p)-w_{2^n}(x_p)}{y_p-x_p}=\dfrac{\varphi(2^ny_p)-\varphi(2^nx_p)}{y_p-x_p}$

Alors, $2^ny_p=2^n\left(2^{-p}[2^px]+2^{-p}\right)=2^{n-p}\left([2^px]+1\right)$, et nous avons $2^ny_p\in\mathbb{Z}$; nous démontrerions de même que $2^nx_p\in\mathbb{Z}$ et donc $\varphi(2^ny_p)=\varphi(2^nx_p)=0$.

Nous tirons alors, que, pour $n\geqslant p$, nous avons :

$$\frac{w_{2^n}(y_p)-w_{2^n}(x_p)}{y_p-x_p}=\frac{\varphi(2^ny_p)-\varphi(2^nx_p)}{y_p-x_p}=0$$

iv. Donc :

$$\frac{f(y_p)-f(x_p)}{y_p-x_p}=\sum_{k=0}^{p-1}2^{-n}\left(2^n(-1)^{\left[x2^{k+1}\right]}\right)=\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^{\left[x2^{k+1}\right]}$$

La suite $\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^{\left[x2^{k+1}\right]}\right)_{p\in\mathbb{N}^*}$ est une suite divergente *(elle n'est pas de Cauchy -facile à démontrer-)* donc, $\displaystyle\lim_{p\to+\infty}\dfrac{f(y_p)-f(x_p)}{y_p-x_p}$ n'existe pas et f n'est pas dérivable en x

f n'est donc nulle part dérivable

(e) **f est une fonction Holdérienne sur $]0;+1[$**

Nous allons procéder par petit pas

i. Tout d'abord, la fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, et sur cet ensemble $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, nous avons $|\varphi'(x)|=1$.

D'après le théorème des accroissements finis, nous pouvons écrire, pour tout $x_1\in\mathbb{R}$ et tout $x_2\in\mathbb{R}$, $|\varphi(x_1)-\varphi(x_2)|\leqslant|x_1-x_2|$

ii. D'autre part, comme pour tout $x\in\mathbb{R}$, nous avons $0\leqslant\varphi(x)\leqslant\dfrac{1}{2}$, nous avons $|\varphi(x_1)-\varphi(x_2)|\leqslant\dfrac{1}{2}$ et donc, pour tout $\alpha\in\mathbb{R}$ tel que $0<\alpha<1$, nous avons :

$$|\varphi(x_1)-\varphi(x_2)|=|\varphi(x_1)-\varphi(x_2)|^{1-\alpha}\times|\varphi(x_1)-\varphi(x_2)|^{\alpha}\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^{1-\alpha}|x_1-x_2|^{\alpha}$$

Et donc $|\varphi(x_1)-\varphi(x_2)|\leqslant\left(\dfrac{1}{2}\right)^{1-\alpha}|x_1-x_2|^{\alpha}$

Par exemple, pour $x_1=0$ et $x_2=\dfrac{1}{2}$, nous avons :

$$\left|\varphi(0)-\varphi\left(\frac{1}{2}\right)\right|=\frac{1}{2}\text{ et }\left(\frac{1}{2}\right)^{1-\alpha}\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha}=\left(\frac{1}{2}\right)$$

Ce qui montre que cette inégalité est la meilleure

iii. Pour $x_1 \in \mathbb{R}$ et $x_2 \in \mathbb{R}$, nous avons :

$$|f(x_1) - f(x_2)| = \left| \sum_{n \geqslant 0} 2^{-n} \left(\varphi(2^n x_1) - \varphi(2^n x_2) \right) \right| \leqslant \sum_{n \geqslant 0} 2^{-n} \left| \varphi(2^n x_1) - \varphi(2^n x_2) \right|$$

En utilisant l'inégalité $|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{1-\alpha} |x_1 - x_2|^\alpha$, nous avons :

$$|\varphi(2^n x_1) - \varphi(2^n x_2)| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{1-\alpha} |2^n x_1 - 2^n x_2|^\alpha = 2^{\alpha-1} 2^{n\alpha} |x_1 - x_2|^\alpha$$

Et donc :

$$\begin{aligned} |f(x_1) - f(x_2)| \leqslant & \sum_{n \geqslant 0} 2^{-n} 2^{\alpha-1} 2^{n\alpha} |x_1 - x_2|^\alpha \\ & = 2^{\alpha-1} |x_1 - x_2|^\alpha \sum_{n \geqslant 0} 2^{n(\alpha-1)} = 2^{\alpha-1} |x_1 - x_2|^\alpha \sum_{n \geqslant 0} \left(2^{\alpha-1}\right)^n \\ & = 2^{\alpha-1} \times \frac{1}{1 - 2^{\alpha-1}} \times |x_1 - x_2|^\alpha \end{aligned}$$

Ainsi, $|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant \frac{2^{\alpha-1}}{1 - 2^{\alpha-1}} \times |x_1 - x_2|^\alpha$, et ceci, pour tout $\alpha \in]0;1[$.

On dit donc que f est $\underline{\frac{2^{\alpha-1}}{1 - 2^{\alpha-1}}\text{-Holdérienne d'exposant } \alpha}$, pour tout $\alpha \in]0;1[$

Remarque 9 :

1. Le développement précédent doit beaucoup à l'article de LG Vidiani parut dans Quadrature
2. L'exemple original de Van Der Waerden (1930) était $f(x) = \sum_{n \geqslant 0} 10^{-n} \varphi(10^n x)$
3. Il y a plusieurs façons de définir des fonctions de Van Der Waerden :
   ⇒ Nous partons de la même fonction $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ périodique et de période 1, et telle que :
   $$\left(\forall x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right[\right) (\varphi(x) = |x|)$$
   Et nous posons $f(x) = \sum_{n \geqslant 0} 4^{-n} \varphi(4^n x)$
   ⇒ Autre possibilité, nous partons de la fonction $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ périodique et de période 2, et telle que :
   $$(\forall x \in [-1;1[) (\varphi(x) = |x|)$$
   Et nous posons $f(x) = \sum_{n \geqslant 0} \left(\frac{3}{4}\right)^n \varphi(4^n x)$
4. La courbe représentative de la fonction de Van Der Waerden, s'appelle **courbe du blanc-manger**. En 7.5, vous avez 2 représentations de celle que nous avons étudiée

7.4.2 La fonction de Weierstrass

On appelle Fonction de Weierstrass, une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \quad x & \longmapsto & f(x) = \sum_{n \geqslant 0} \frac{\sin 2\pi N^n x}{c^n} \end{cases}$$

Où nous avons N entier pair et $N \geqslant 20$ et $1 < c < \frac{N}{1 + 6\pi}$
Alors, f est partout continue sur $\mathbb{R}$ et nulle part dérivable

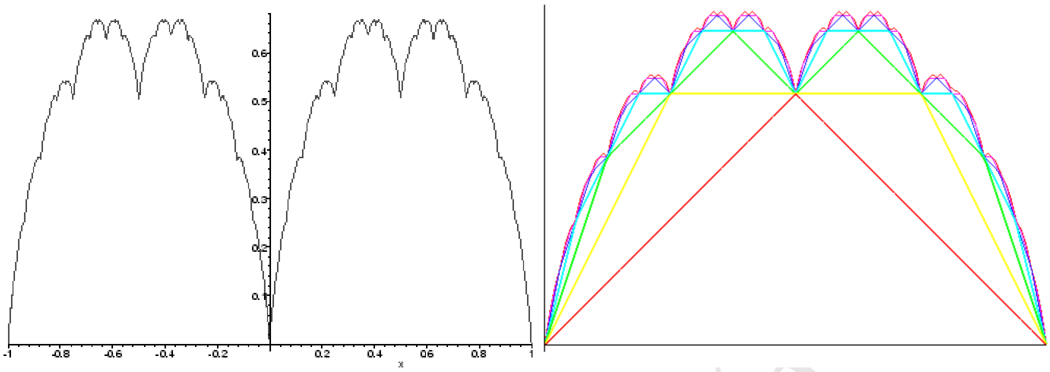

FIGURE 7.5 – La représentation de 2 courbes de Van Der Waerden

Démonstration

1. **f est continue sur $\mathbb{R}$**
   Soit $u_n(x) = \dfrac{\sin 2\pi N^n x}{c^n}$; u_n est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
   D'autre part, pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons $|u_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{c^n}$, et comme $c > 1$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{c^n}$ est convergente et la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n(x)$ converge normalement sur $\mathbb{R}$, et donc la somme est continue sur $\mathbb{R}$.
   $f(x) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{\sin 2\pi N^n x}{c^n}$ est donc continue sur $\mathbb{R}$
2. **f n'est nulle part dérivable sur $\mathbb{R}$**
   Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Nous allons démontrer que f n'est pas dérivable en x_0
   Nous définissons $k_n = \left[x_0 N^n + \dfrac{1}{4\pi}\right]$ où, comme d'habitude, $[\bullet]$ définit la fonction partie entière.
   Nous avons donc :
   $$k_n \leqslant x_0 N^n + \frac{1}{4\pi} < k_n + 1 \text{ et } k_n \in \mathbb{Z}$$
   $\Rightarrow$ Nous construisons 2 suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :
   $$x_n = \frac{4k_n - 1}{4N^n} \text{ et } y_n = \frac{4k_n + 5}{4N^n}$$
   Tout d'abord, nous avons $y_n - x_n = \dfrac{3}{2N^n}$ d'où nous tirons que $x_n < y_n$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} y_n - x_n = 0$
   De plus $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} x_n = x_0$.

En effet, nous avons :

$$k_n \leqslant x_0 N^n + \frac{1}{4\pi} < k_n + 1$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$4k_n \leqslant 4x_0 N^n + \frac{1}{\pi} < 4k_n + 4$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$4k_n - 1 \leqslant 4x_0 N^n + \frac{1}{\pi} - 1 < 4k_n + 3$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\frac{4k_n - 1}{4N^n} \leqslant x_0 + \frac{1-\pi}{4\pi N^n} < \frac{4k_n - 1}{4N^n} + \frac{4}{4N^n}$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$x_n \leqslant x_0 + \frac{1-\pi}{4\pi N^n} < x_n + \frac{1}{N^n}$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$0 \leqslant x_0 - x_n \leqslant \frac{1}{N^n}\left(1 + \frac{\pi - 1}{4\pi}\right)$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{N^n}\left(1 + \frac{\pi-1}{4\pi}\right) = 0$, nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x_0$
Nous aurions démontré, de la même manière, que $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = x_0$

⇒ Nous appelons $\tau_n = \dfrac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n}$.
Nous allons démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \tau_n$ n'existe pas.
Nous appelons $u_k(x) = \dfrac{\sin 2\pi N^k x}{c^k}$, de telle sorte que $f(x) = \sum\limits_{k\geqslant 0} u_k(x)$ et alors

$$f(y_n) - f(x_n) = \sum_{k\geqslant 0} (u_k(y_n) - u_k(x_n))$$

Nous allons étudier $\sin\left(2\pi N^k y_n\right)$ et $\sin\left(2\pi N^k x_n\right)$
Nous avons :

$$\sin\left(2\pi N^k y_n\right) = \sin\left(2\pi N^k\left(\frac{4k_n+5}{4N^n}\right)\right) = \sin\left(\pi N^{k-n}\left(2k_n + \frac{5}{2}\right)\right)$$

Et

$$\sin\left(2\pi N^k x_n\right) = \sin\left(2\pi N^k\left(\frac{4k_n-1}{4N^n}\right)\right) = \sin\left(\pi N^{k-n}\left(2k_n - \frac{1}{2}\right)\right)$$

- ⋆ Si $k > n$, alors N^{k-n} est un entier pair et l'expression $N^{k-n}\left(2k_n + \dfrac{5}{2}\right)$ est entière et donc $\sin\left(\pi N^{k-n}\left(2k_n + \dfrac{5}{2}\right)\right) = 0$ d'où on déduit facilement que si $k > n$, alors $u_k(y_n) = 0$, et de la même manière, nous démontrons que si $k > n$, alors $u_k(x_n) = 0$, ce qui fait que :

$$(k > n) \Longrightarrow ((u_k(y_n) - u_k(x_n)) = 0)$$

- ⋆ Si $k = n$ alors, d'après les calculs précédents :

$$\sin(2\pi N^n y_n) = \sin\left(\pi\left(2k_n + \frac{5}{2}\right)\right) = \sin\left(\pi\left(2k_n + 2 + \frac{1}{2}\right)\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2(k_n+1)\pi\right) = 1$$

et

$$\sin(2\pi N^n x_n) = \sin\left(\pi\left(2k_n - \frac{1}{2}\right)\right) = \sin\left(\frac{-\pi}{2} + 2k_n\pi\right) = \sin\left(\frac{-\pi}{2}\right) = -1$$

D'où $(u_n(y_n) - u_n(x_n)) = \dfrac{2}{c^n}$

⇒ De cette étude, nous tirons que :

$$\tau_n = \frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{u_k(y_n) - u_k(x_n)}{y_n - x_n} + \frac{2}{c^n (y_n - x_n)}$$

⇒ Pour tout $A \in \mathbb{R}$ et tout $B \in \mathbb{R}$, nous avons $|A+B| \geqslant |A| - |B|$, et donc nous avons :

$$\left| \frac{2}{c^n (y_n - x_n)} \right| - \left| \sum_{k=0}^{n-1} \frac{u_k(y_n) - u_k(x_n)}{y_n - x_n} \right| \leqslant |\tau_n|$$

⇒ Or, $\left| \frac{2}{c^n (y_n - x_n)} \right| = \frac{2}{c^n (y_n - x_n)} = \frac{2}{c^n} \times \frac{1}{y_n - x_n} = \frac{2}{c^n} \times \frac{2N^n}{3} = \frac{4}{3} \times \left(\frac{N}{c} \right)^n$

⇒ Et $\left| \sum_{k=0}^{n-1} \frac{u_k(y_n) - u_k(x_n)}{y_n - x_n} \right| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \left| \frac{u_k(y_n) - u_k(x_n)}{y_n - x_n} \right|$, et donc :

$$|\tau_n| \geqslant \frac{4}{3} \times \left(\frac{N}{c} \right)^n - \sum_{k=0}^{n-1} \left| \frac{u_k(y_n) - u_k(x_n)}{y_n - x_n} \right|$$

⇒ D'après le théorème des accroissements finis, pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leqslant k \leqslant n-1$, il existe $\lambda_{k,n} \in [x_n; y_n]$ tel que :

$$\frac{u_k(y_n) - u_k(x_n)}{y_n - x_n} = u_k'(\lambda_{k,n})$$

Et nous pouvons écrire $\sum_{k=0}^{n-1} \left| \frac{u_k(y_n) - u_k(x_n)}{y_n - x_n} \right| = \sum_{k=0}^{n-1} |u_k'(\lambda_{k,n})|$

En calculant la dérivée de u_k, nous avons $u_k'(x) = 2\pi \left(\frac{N}{c} \right)^k \cos\left(2\pi N^k x\right)$, et donc $|u_k'(x)| \leqslant 2\pi \left(\frac{N}{c} \right)^k$, ce qui fait que :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left| \frac{u_k(y_n) - u_k(x_n)}{y_n - x_n} \right| \leqslant 2\pi \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{N}{c} \right)^k = 2\pi \frac{\left(\frac{N}{c}\right)^n - 1}{\frac{N}{c} - 1}$$

Et donc, $-\sum_{k=0}^{n-1} \left| \frac{u_k(y_n) - u_k(x_n)}{y_n - x_n} \right| \geqslant -2\pi \frac{\left(\frac{N}{c}\right)^n - 1}{\frac{N}{c} - 1}$

⇒ Nous en déduisons que :

$$|\tau_n| \geqslant \frac{4}{3} \times \left(\frac{N}{c} \right)^n - 2\pi \frac{\left(\frac{N}{c}\right)^n - 1}{\frac{N}{c} - 1} = \frac{4}{3} \times \left(\frac{N}{c} \right)^n - \left(\frac{2\pi}{\frac{N}{c} - 1} \right) \left(\frac{N}{c} \right)^n + \frac{2\pi}{\frac{N}{c} - 1} = \left(\frac{N}{c} \right)^n \left(\frac{4}{3} - \frac{2\pi}{\frac{N}{c} - 1} \right) + \frac{2\pi}{\frac{N}{c} - 1}$$

⇒ De l'hypothèse $\frac{N}{c} > 1 + 6\pi > 1$, nous déduisons $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{N}{c} \right)^n = 0$ et $\frac{2\pi}{\frac{N}{c} - 1} > 0$

D'autre part, nous avons $\frac{N}{c} - 1 > 6\pi$ et donc $\frac{1}{\frac{N}{c} - 1} < \frac{1}{6\pi}$ d'où $\frac{2\pi}{\frac{N}{c} - 1} < \frac{2\pi}{6\pi} = \frac{1}{3}$ Ainsi $\frac{4}{3} - \frac{2\pi}{\frac{N}{c} - 1} > 1$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{N}{c} \right)^n \left(\frac{4}{3} - \frac{2\pi}{\frac{N}{c} - 1} \right) = +\infty$

En conclusion, $\lim\limits_{n \to +\infty} |\tau_n| = +\infty$

La fonction f n'est donc pas dérivable en $x_0 \in \mathbb{R}$

La fonction de Weierstrass n'est donc nulle part dérivable

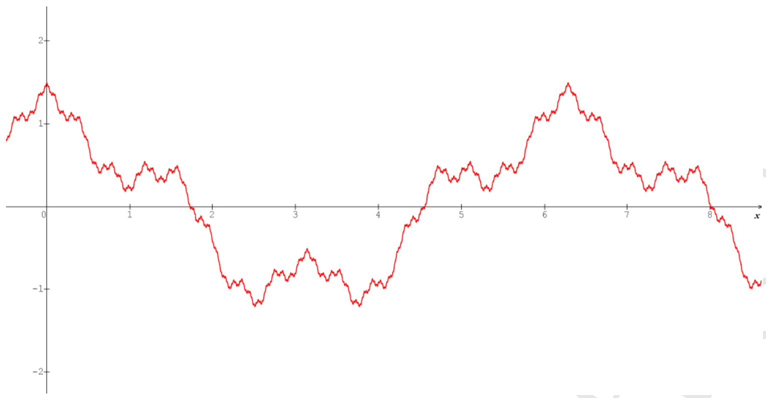

FIGURE 7.6 – La fonction de Weierstrass -du moins les premiers éléments de la somme-

Remarque 10 :

Ce n'est pas le seul mode de définition de la fonction de Weierstrass.
Par exemple, $f(x) = \sum\limits_{n \geqslant 0} \dfrac{1}{2^n} \cos(12^n \pi x)$. C'est la même chose, en moins théorique.
Ou encore, en plus théorique, avec des conditions qui reviennent à notre présentation
$f(x) = \sum\limits_{n \geqslant 0} \alpha^n \cos(\beta^n x)$ où $\alpha \in]0;1[$, et β un entier *impair* tel que $\alpha \times \beta > 1$.
Voilà des sujets de méditation !

7.4.3 La fonction ζ de Riemann

On appelle fonction ζ de Riemann, la fonction ζ définie sur $]+1;+\infty[$ par :

$$\begin{cases} \zeta :]+1;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \zeta(x) = \sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{1}{n^x} \end{cases}$$

Remarque 11 :

1. Cette fonction ζ est bien définie, puisque nous avons vu que la série numérique, dite série de Riemann, $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{1}{n^x}$ ne converge que si et seulement si $x > 1$
2. Allons du côté des nombres complexes.
   Pour tout $z \in \mathbb{C}$, nous avons $n^z = e^{(\mathrm{Re}(z) + i\,\mathrm{Im}(z)) \ln n} = n^{\mathrm{Re}(z)} e^{i \ln n\, \mathrm{Im}(z)}$, et donc $|n^z| = n^{\mathrm{Re}(z)}$.
   Par suite, la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{1}{n^z}$ ne converge que si $\mathrm{Re}(z) > 1$

7.4.4 Etude de la fonction ζ

1. On appelle $f(x) = \sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x}$. Nous avons, pour tout $x > 1$ $\zeta(x) = \dfrac{1}{1 - 2^{1-x}} f(x)$

   Démonstration

   (a) Tout d'abord, remarquons que la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ est une série alternée qui converge si et seulement si $x > 0$. Donc, f est définie sur $]0;+\infty[$

(b) Soit $x > 1$. Alors :

$$\zeta(x) - f(x) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^x} - \sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x} = \sum_{n\geqslant 1} \frac{\left(1-(-1)^{n-1}\right)}{n^x}$$

C'est ici qu'intervient la notion de parité :

⋆ Si n est pair, alors $(-1)^{n-1} = -1$ et $\left(1-(-1)^{n-1}\right) = 2$

⋆ Si n est impair, alors $(-1)^{n-1} = 1$ et $\left(1-(-1)^{n-1}\right) = 0$

D'où

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{\left(1-(-1)^{n-1}\right)}{n^x} = \sum_{n\geqslant 1} \frac{\left(1-(-1)^{2n-1}\right)}{(2n)^x} = \sum_{n\geqslant 1} \frac{2}{2^x n^x} = \sum_{n\geqslant 1} \frac{2^{1-x}}{n^x} = 2^{1-x} \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^x} = 2^{1-x}\zeta(x)$$

(c) Nous avons donc l'égalité, vraie pour $x > 1$: $\zeta(x) - f(x) = 2^{1-x}\zeta(x)$, c'est à dire

$$\zeta(x) = \frac{1}{1-2^{1-x}} f(x)$$

Ce que nous voulions

2. $\boxed{\text{La fonction } \zeta \text{ est continue sur l'intervalle }]1;+\infty[}$

Démonstration

Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $a > 1$.

Alors $\dfrac{1}{n^x} = e^{-x\ln n}$ est continue et décroissante sur $[a;+\infty[$, et donc, pour tout $x \in [a;+\infty[$, nous avons $\dfrac{1}{n^x} \leqslant \dfrac{1}{n^a}$.

La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^a}$ étant une série de Riemann convergente, puisque $a > 1$, la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^x}$ converge normalement sur l'intervalle $[a;+\infty[$. La somme $\zeta(x) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^x}$ est donc continue comme somme uniforme sur $[a;+\infty[$ de fonctions continues sur $[a;+\infty[$.

Cette propriété étant vraie pour tout $a > 1$, la fonction ζ est donc continue sur l'intervalle $]1;+\infty[$

3. $\boxed{\text{La fonction } f \text{ est continue sur }]0;+\infty[}$

Démonstration

L'égalité $f(x) = \left(1-2^{1-x}\right)\zeta(x)$ montre déjà que f est continue sur $]1;+\infty[$. Montrons que f est continue sur $]0;+\infty[$.

Soit $a > 0$; nous allons montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ converge uniformément sur l'intervalle $[a;+\infty[$

Nous allons démontrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\sup_{x\in[a;+\infty[} |R_n(x)|\right) = 0$. Qu'est donc $R_n(x)$? C'est très simple :

$$|R_n(x)| = \left| f(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k^x} \right| = \left| \sum_{k\geqslant n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k^x} \right|$$

La série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k^x}$ est une série alternée, et nous avons vu dans le chapitre sur les séries alternées que :

$$\left| f(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k^x} \right| \leqslant \frac{1}{(n+1)^x}$$

C'est à dire que $|R_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{(n+1)^x}$

Comme la fonction $\dfrac{1}{(n+1)^x}$ est une fonction décroissante sur l'intervalle $[a;+\infty[$, nous avons, pour tout $x \in [a;+\infty[$:

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{1}{(n+1)^x} \leqslant \frac{1}{(n+1)^a}$$

En particulier, nous avons : $\displaystyle\sup_{x\in[a;+\infty[} |R_n(x)| \leqslant \frac{1}{(n+1)^a}$

Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(n+1)^a} = 0$, nous en concluons que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\sup_{x\in[a;+\infty[} |R_n(x)|\right) = 0$

Ce qui montre que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ converge uniformément sur l'intervalle $[a;+\infty[$ et que la fonction f est continue sur l'intervalle $[a;+\infty[$

Ceci étant vrai pour tout $a > 0$, nous avons ainsi démontré que la fonction f est continue sur $]0;+\infty[$

4. La fonction ζ est décroissante sur l'intervalle $]1;+\infty[$

Démonstration

Pour $n \geqslant 1$, la fonction $\dfrac{1}{n^x} = n^{-x} = e^{-x\ln n}$ est une fonction de x décroissante sur l'intervalle $]1;+\infty[$. La fonction ζ, somme de fonctions décroissantes sur $]1;+\infty[$ est donc décroissante sur l'intervalle $]1;+\infty[$

5. La fonction ζ est convexe sur l'intervalle $]1;+\infty[$

Démonstration

- ⋆ On appelle $u_n(x) = \dfrac{1}{n^x} = n^{-x} = e^{-x\ln n}$.
  Cette fonction est indéfiniment dérivable sur $]1;+\infty[$.
  → Nous avons $u_n'(x) = -\ln x e^{-x\ln n} = \dfrac{-\ln x}{n^x}$
  → Nous avons donc $u_n''(x) = (-\ln x)^2 e^{-x\ln n} = \dfrac{(-\ln x)^2}{n^x}$. Cette dérivée seconde est positive.
  Donc, de la positivité de la dérivée seconde de $u_n(x)$, on déduit que la fonction $u_n(x)$ est une fonction convexe
- ⋆ Comme nous avons $\zeta(x) = \displaystyle\sum_{k\geqslant 1} u_n(x)$, ζ est une fonction convexe comme somme de fonctions convexes.

Nous avons donc, pour tout $x > 1$, tout $y > 1$ et tout $\lambda \in [0;1]$, $\zeta(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda\zeta(x) + (1-\lambda)\zeta(y)$

En particulier si $\lambda = \dfrac{1}{2}$:

$$\zeta\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{\zeta(x)+\zeta(y)}{2} \Longleftrightarrow \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{\sqrt{n^{x+y}}} \leqslant \frac{1}{2}\left(\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^x} + \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^y}\right)$$

6. Nous avons $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \zeta(x) = 1$

Démonstration

(a) Comme nous étudions la limite de ζ en $+\infty$, nous nous plaçons dans le domaine $[+2;+\infty[$ *(cela pourrait être tout autre intervalle du type* $[\lambda;+\infty[$ *où* $\lambda > 1$*)*

(b) Posons, comme tout à l'heure, nous posons $u_n(x) = \dfrac{1}{n^x}$ et $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x) \dfrac{1}{k^x}$ la suite de fonctions $(S_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément, sur l'intervalle $[+2;+\infty[$, vers la fonction $\zeta(x)$

(c) Remarquons que :
$\rightarrow$ Pour tout $x \geqslant 2$, $u_1(x) = 1$
$\rightarrow$ Et que pour tous les entiers k tels que $k \geqslant 2$, $\lim_{x\to+\infty} u_k(x) = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{n^x} = 0$

De telle sorte que $\lim_{x\to+\infty} S_n(x) = \lim_{x\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} u_k(x) = 1$

(d) D'après le théorème d'inversion des limites lié à la convergence uniforme des séries de fonctions, nous avons :

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\lim_{x\to+\infty} S_n(x)\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[\lim_{n\to+\infty} S_n(x)\right]$$

C'est à dire : $\lim_{x\to+\infty} \zeta(x) = 1$

Ce que nous voulions

7. En $+\infty$, nous avons $\zeta(x) \underset{+\infty}{\simeq} 1 + 2^{-x}$

Démonstration

Voilà une question qui n'est pas facile, et surtout, déroutante

(a) Tout d'abord, $\zeta(x) - 1 = \sum_{n\geqslant 2} \dfrac{1}{n^x}$ et donc $2^x(\zeta(x)-1) = \sum_{n\geqslant 2} \dfrac{2^x}{n^x} = \sum_{n\geqslant 2} \left(\dfrac{2}{n}\right)^x$

(b) Comme nous étudions le comportement de ζ en $+\infty$, nous nous plaçons dans le domaine $[+2;+\infty[$

(c) Appelons $v_n(x) = \left(\dfrac{2}{n}\right)^x$. Pour tout $n \geqslant 2$, la fonction v_n est décroissante sur l'intervalle $[+2;+\infty[$, et nous avons, pour tout $n \geqslant 2$ et tout $x \geqslant 2$, $v_n(x) \leqslant v_n(2)$, c'est à dire :

$$v_n(x) \leqslant v_n(2) \Longleftrightarrow 0 < \left(\frac{2}{n}\right)^x \leqslant \left(\frac{2}{n}\right)^2 = \frac{4}{n^2}$$

Ce qui montre que la série de fonctions de terme général $v_n(x) = \left(\dfrac{2}{n}\right)^x$ converge normalement sur l'intervalle $[+2;+\infty[$

(d) Nous reprenons la méthode utilisée ci-dessus ; soit $S_n^1(x) = \sum_{k=2}^{n} v_k(x)$; d'après ce que nous venons de voir, la suite de fonctions $(S_n^1)_{n\geqslant 2}$ converge uniformément vers la fonction $\Phi(x) = \sum_{n\geqslant 2}\left(\dfrac{2}{n}\right)^x$

(e) Remarquons que :
$\rightarrow$ Pour tout $x \geqslant 2$, $v_2(x) = 1$
$\rightarrow$ Et que pour tous les entiers k tels que $k \geqslant 3$, $\lim_{x\to+\infty} v_k(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\dfrac{2}{n}\right)^x = 0$

De telle sorte que $\lim_{x\to+\infty} S_n^1(x) = \lim_{x\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} v_k(x) = 1$

(f) D'après le théorème d'inversion des limites lié à la convergence uniforme des séries de fonctions, nous avons :

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\lim_{x\to+\infty} S_n^1(x)\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[\lim_{n\to+\infty} S_n^1(x)\right]$$

C'est à dire : $\lim_{x\to+\infty}\Phi(x) = 1$

Ce qui montre que $\lim_{x\to+\infty}(2^x(\zeta(x)-1)) = 1$ et qu'il est possible d'écrire

$$2^x(\zeta(x)-1) = 1+\varepsilon(x) \longleftrightarrow \zeta(x)-1 = 2^{-x}+2^{-x}\varepsilon(x) \longleftrightarrow \zeta(x) = 1+2^{-x}+2^{-x}\varepsilon(x)$$

où $\varepsilon(x)$ est telle que $\lim_{x\to+\infty}\varepsilon(x) = 0$

Il est aussi possible d'écrire $\zeta(x) = 1+2^{-x}+o(2^{-x})$

8. Nous avons $\lim_{\substack{x\to1\\x>1}}\zeta(x) = +\infty$

Démonstration

(a) Pour $x>1$, nous définissons sur l'intervalle $[1;+\infty[$ la fonction u définie par $u(t) = \frac{1}{t^x} = t^{-x}$. Cette fonction est décroissante sur $[1;+\infty[$. Ainsi, pour tout $n\in\mathbb{N}$ tel que $n\geqslant1$, nous avons :

$$\frac{1}{(n+1)^x} \leqslant \int_n^{n+1}\frac{1}{t^x}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{n^x}$$

(b) En passant aux sommations, nous avons, pour $N\in\mathbb{N}$ et $N_geqslant1$:

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{(n+1)^x} \leqslant \sum_{n=1}^{N}\int_n^{n+1}\frac{1}{t^x}\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^x}$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\sum_{n=2}^{N+1}\frac{1}{n^x} \leqslant I_1^{N+1}\frac{1}{t^x}\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^x}$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\sum_{n=1}^{N+1}\frac{1}{n^x}-1 \leqslant \frac{1}{1-x}\left(\frac{1}{(N+1)^{x-1}}-1\right) \leqslant \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^x}$$

Regardons les limites lorsque N tend vers l'infini :

- $\star$ $\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N+1}\frac{1}{n^x}-1 = \zeta(x)-1$
- $\star$ $\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{1-x}\left(\frac{1}{(N+1)^{x-1}}-1\right) = \frac{1}{x-1}$
- $\star$ $\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^x} = \zeta(x)$

Les limites respectant les inégalités, nous obtenons, pour $x>1$:

$$\zeta(x)-1 \leqslant \frac{1}{x-1} \leqslant \zeta(x)$$

(c) Comme $\lim_{\substack{x\to1\\x>1}}\frac{1}{x-1} = +\infty$, de l'inégalité $\frac{1}{x-1}\leqslant\zeta(x)$ que nous avons prouvée ci-dessus, nous tirons que $\lim_{\substack{x\to1\\x>1}}\zeta(x) = +\infty$

9. En $x_0 = +1$, nous avons $\zeta(x) \underset{x_0=+1}{\simeq} \frac{1}{x-1}$

Démonstration

De l'inégalité $\zeta(x) - 1 \leqslant \dfrac{1}{x-1} \leqslant \zeta(x)$, nous tirons, sans difficulté :

$$\frac{1}{x-1} \leqslant \zeta(x) \leqslant 1 + \frac{1}{x-1}$$

En multipliant l'inégalité par $x-1$, avec $x > 1$, nous obtenons :

$$1 \leqslant (x-1)\,\zeta(x) \leqslant x$$

Et donc, nous obtenons $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} (x-1)\,\zeta(x) = 1$, et donc $\zeta(x) \underset{x_0=+1}{\simeq} \dfrac{1}{x-1}$

10. Toujours de l'inégalité précédente, et du fait que pour tout $x > 1$, nous avons $1 < \zeta(x)$, nous avons la double inégalité :

$$1 < \zeta(x) \leqslant 1 + \frac{1}{x-1}$$

Nous tirons, et de manière plus simple que $\lim\limits_{x\to+\infty} \zeta(x) = 1$

11. La fonction ζ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle $]1;+\infty[$

De plus, pour tout $x > 1$ et tout $k \in \mathbb{N}$, nous avons $\zeta^{(k)}(x) = (-1)^k \sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(\ln n)^k}{n^x}$

Démonstration

Pour démontrer que ζ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle $]1;+\infty[$, nous allons montrer qu'elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle $[a;+\infty[$ pour tout $a > 1$

Soit donc $a > 1$.

(a) On appelle toujours $u_n(x) = \dfrac{1}{n^x} = e^{-x\ln n}$. u_n est une fonction indéfiniment dérivable, et pour tout $k \in \mathbb{N}$, nous avons :

$$u_n^{(k)}(x) = (-1)^k (\ln n)^k e^{-x\ln n} = \frac{(-1)^k (\ln n)^k}{n^x}$$

(b) Comme la fonction $u_n(x) = \dfrac{1}{n^x}$ est une fonction décroissante sur l'intervalle $[a;+\infty[$, pour tout $x \geqslant a$, nous avons $\dfrac{1}{n^x} \leqslant \dfrac{1}{n^a}$ et donc :

$$\left|u_n^{(k)}(x)\right| = \frac{(\ln n)^k}{n^x} \leqslant \frac{(\ln n)^k}{n^a}$$

(c) Par les théorèmes de comparaisons, nous avons, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $h > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(\ln n)^k}{n^h} = 0$. or :

$$\frac{(\ln n)^k}{n^a} \times n^{\frac{a+1}{2}} = \frac{(\ln n)^k}{n^{\frac{a-1}{2}}}$$

En posant $h = \dfrac{a-1}{2}$, nous avons $h > 0$, et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(\ln n)^k}{n^a} \times n^{\frac{a+1}{2}} = 0$

(d) Il existe donc un entier $M \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant M$, alors :

$$\frac{(\ln n)^k}{n^a} \times n^{\frac{a+1}{2}} \leqslant 1 \iff \frac{(\ln n)^k}{n^a} \leqslant \frac{1}{n^{\frac{a+1}{2}}}$$

Comme $a > 1$, nous avons $\dfrac{a+1}{2} > 1$ et la série numérique de terme général $\dfrac{1}{n^{\frac{a+1}{2}}}$ est donc convergente.

(e) Nous venons donc de montrer qu'à partir d'un certain rang, $\left|u_n^{(k)}(x)\right|$ était majoré, sur l'intervalle $[a;+\infty[$ par le terme général d'une série numérique convergente.
Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la série de fonction $\sum_{n\geqslant 1} u_n^{(k)}(x)$ converge normalement, donc uniformément, sur l'intervalle $[a;+\infty[$

Ainsi, la fonction ζ est de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ sur l'intervalle $]1;+\infty[$ et, pour tout $x > 1$ et tout $k \in \mathbb{N}$, nous avons $\zeta^{(k)}(x) = (-1)^k \sum_{n\geqslant 1} \frac{(\ln n)^k}{n^x}$

Remarque 12 :

1. Cette étude doit énormément au développement de Jean-Louis Rouget sur MATHS-FRANCE, au moins pour le plan de l'étude
2. La fonction ζ intervient en arithmétique dans l'étude des nombres premiers
3. On pourrait aussi étudier cette fonction ζ dans le champ complexe

7.5 Exercices corrigés

7.5.1 Exercices du cours

Exercice 1 :

Etudier les convergences des séries de fonctions dont les termes généraux sont :

1. $\sum_{n\geqslant 0} x^{2n}$

   Soit $x \in \mathbb{R}$, intéressons nous à la somme partielle $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^{2n} = \dfrac{1-x^{2n+2}}{1-x^2}$ si $x^2 \neq 1$

   Ainsi :

   $\rightarrow$ Si $x^2 < 1$, $\lim_{n\to+\infty} S_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} x^{2n} = \dfrac{1}{1-x^2}$

   $\rightarrow$ Si $x^2 \geqslant 1$, $\lim_{n\to+\infty} S_n(x) = +\infty$

   Le domaine de convergence de $\sum_{n\geqslant 0} x^{2n}$ est donc $|x| < 1$

2. $\sum_{n\geqslant 0} \dfrac{x^n}{1+x^n}$

   Nous allons regarder de manière assez précautionneuse cette série. Posons $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1+x^n}$

   $\rightarrow$ Si $x = 0$, alors $f_n(0) = 0$ et la série $\sum_{n\geqslant 0} f_n(0) = 0$; la série est simplement convergente en 0

   $\rightarrow$ Si $x = 1$, alors $f_n(1) = \dfrac{1}{2}$ et la série $\sum_{n\geqslant 0} f_n(1) = +\infty$; la série est donc divergente en 1

   $\rightarrow$ Si $x \geqslant 1$, alors $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{x^n}{1+x^n} = 1$. Le terme général ne tendant pas vers 0, la série $\sum_{n\geqslant 0} f_n(x)$ diverge

   $\rightarrow$ Si $|x| < 1$, alors $\left|\dfrac{x^n}{1+x^n}\right| \leqslant |x|^n$. Comme $\sum_{n\geqslant 0} |x|^n$ est une série géométrique convergente, la série $\sum_{n\geqslant 0} \dfrac{x^n}{1+x^n}$ est donc simplement convergente sur l'intervalle $]-1;+1[$

3. $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{x}{n^3+x^3}$

   En $+\infty$, nous avons $\dfrac{x}{n^3+x^3} \underset{+\infty}{\approx} \dfrac{x}{n^3}$; comme la série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{x}{n^3}$ est une série de Riemann convergente, la série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{x}{n^3+x^3}$ converge simplement

4. $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{x^2}{n+x^4}$

   En $+\infty$, nous avons $\dfrac{x^2}{n+x^4} \underset{+\infty}{\approx} \dfrac{x^2}{n}$; comme la série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{x^2}{n}$ est la série harmonique divergente, la série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{x^2}{n+x^4}$ diverge (sauf en $x = 0$ où $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{x^2}{n+x^4} = 0$)

Exercice 2 :

Démontrer que la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}} \sin^2(x)\cos^n(x)$ *ne converge pas uniformément sur l'intervalle* $\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$

Si cette série converge uniformément, elle converge uniformément vers la fonction $S(x) = \dfrac{\sin^2 x}{1-\cos x}$

En posant $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin^2(x)\cos^k(x)$, nous avons :

$$|S_n(x) - S(x)| = |R_n(x)| = \left|\sum_{k\geqslant n+1} \sin^2(x)\cos^k(x)\right| = \left|\sum_{k\geqslant 0} \sin^2(x)\cos^{k+n+1}(x)\right|$$

Comme $x \in \left]0; \dfrac{\pi}{2}\right[$, nous avons $0 < \sin x < 1$ et $0 < \cos x < 1$ et donc

$$\left|\sum_{k\geqslant 0} \sin^2(x)\cos^{k+n+1}(x)\right| = \sum_{k\geqslant 0} \sin^2(x)\cos^{k+n+1}(x)$$

D'autre part,

$$\sum_{k\geqslant 0} \sin^2(x)\cos^{k+n+1}(x) = \cos^{n+1}(x)\sin^2(x)\sum_{k\geqslant 0}\cos^k(x) = \frac{\cos^{n+1}(x)\sin^2(x)}{1-\cos x}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $\lim\limits_{x\to 0} \cos^{n+1}(x) = 1$

D'autre part, en faisant un développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0, nous avons :

- $\star$ $\sin^2 x = x^2 + x^2\varepsilon(x)$
- $\star$ $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$

De telle sorte que, au voisinage de 0 :

$$\frac{\sin^2(x)}{1-\cos x} = \frac{x^2 + x^2\varepsilon(x)}{\frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)} = \frac{1+\varepsilon(x)}{\frac{1}{2}+\varepsilon(x)}$$

Et donc, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2(x)}{1-\cos x} = 2$

Nous en concluons, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos^{n+1}(x)\sin^2(x)}{1-\cos x} = 2$ et que donc

$$\sup_{x\in]0;\frac{\pi}{2}[} |S_n(x) - S(x)| \geqslant 2$$

Nous ne pouvons donc pas avoir $\lim\limits_{n\to+\infty} \sup\limits_{x\in]0;\frac{\pi}{2}[} |S_n(x) - S(x)| = 0$

La série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \sin^2(x)\cos^n(x)$ ne converge donc pas uniformément sur l'intervalle $\left]0; \dfrac{\pi}{2}\right[$

Exercice 3 :

Déterminer les intervalles de convergence uniformes pour la série

1. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2x^2}$

   → Pour $x \neq 0$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2x^2}$ converge simplement vers la fonction $S(x) = \dfrac{\pi^2}{6x^2}$

   → Cette série ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}^*$, puisque $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^*} \dfrac{1}{n^2x^2} = +\infty$. On utilise là la contraposée de 7.1.7

→ Par contre, pour $a > 0$, la série converge uniformément sur la réunion des intervalles $]-\infty; -a] \cup [+a; +\infty[$.
En effet, si $|x| \geqslant a$, alors $x^2 \geqslant a^2$ et $\dfrac{1}{x^2} \leqslant \dfrac{1}{a^2}$. Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$ tels que $|x| \geqslant a$:

$$|S_n(x) - S(x)| = \left| \sum_{k \geqslant n+1} \frac{1}{k^2 x^2} \right| = \sum_{k \geqslant n+1} \frac{1}{k^2 x^2} \leqslant \frac{1}{a^2} \sum_{k \geqslant n+1} \frac{1}{k^2}$$

La série $\displaystyle\sum_{k \geqslant n+1} \frac{1}{k^2}$ est le reste d'une série de Riemann convergente et donc $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sum_{k \geqslant n+1} \frac{1}{k^2} = 0$ et donc $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{a^2} \sum_{k \geqslant n+1} \frac{1}{k^2} = 0$.
Nous en déduisons, que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ tels que $|x| \geqslant a$, $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} |S_n(x) - S(x)| = 0$, ce qui termine de démontrer la convergence uniforme sur les intevalles $]-\infty; -a] \cup [+a; +\infty[$

2. $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2 + x^2}$

→ Pour $x \in \mathbb{R}$, fixé, nous avons $0 \leqslant \dfrac{1}{n^2 + x^2} \leqslant \dfrac{1}{n^2}$. La série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ est une série numérique de Riemann convergente. Donc la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2 + x^2}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$

→ Cette série converge aussi uniformément sur $\mathbb{R}$. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons $\dfrac{1}{n^2 + x^2} \leqslant \dfrac{1}{n^2}$, d'où :

$$|S_n(x) - S(x)| = \left| \sum_{k \geqslant n+1} \frac{1}{k^2 + x^2} \right| = \sum_{k \geqslant n+1} \frac{1}{k^2 + x^2} \leqslant \sum_{k \geqslant n+1} \frac{1}{k^2}$$

Et nous concluons comme prédédemment : la série $\displaystyle\sum_{k \geqslant n+1} \frac{1}{k^2}$ est le reste d'une série de Riemann convergente et donc $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sum_{k \geqslant n+1} \frac{1}{k^2} = 0$.
Nous en déduisons, que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} |S_n(x) - S(x)| = 0$, ce qui termine de démontrer la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$

→ En fait, de l'inégalité $0 \leqslant \dfrac{1}{n^2 + x^2} \leqslant \dfrac{1}{n^2}$, nous pouvions conclure que la série **convergeait normalement**, donc uniformément, donc simplement.

Exercice 4 :

Etudier la convergence simple, absolue, uniforme et normale de la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{x^n}{n}$

Nous posons $f_n(x) = \dfrac{x^n}{n}$

$\Longrightarrow$ Pour quelles valeurs de $x \in \mathbb{R}$, la série $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{x^n}{n}$ converge-t-elle ?
Pour le trouver, on peut faire le critère de D'Alembert :

$$\left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \frac{n}{n+1} |x|$$

Comme $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{n}{n+1} |x| = |x|$. La série $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{x^n}{n}$ converge donc simplement sur l'intervalle $]-1; +1[$

$\Longrightarrow$ Pour $x = -1$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{x^n}{n}$ devient $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n}{n}$ qui est une série convergente.
La série converge donc simplement sur $[-1; +1[$

$\Longrightarrow$ Nous avons $\|f_n\|_\infty = \sup_{x\in[-1;+1[} \left|\frac{x^n}{n}\right| = \frac{1}{n}$ et comme la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \|f_n\|_\infty = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$ est divergente, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{x^n}{n}$ ne converge pas normalement sur $[-1; +1[$

$\Longrightarrow$ Elle converge, par contre, normalement sur tout intervalle de la forme $[-a; +a]$ où $0 < a < 1$.
En effet, sur $[-a; +a]$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons $\|f_n\|_\infty = \sup_{x\in[-a;+a]} \left|\frac{x^n}{n}\right| = \frac{a^n}{n}$. Comme la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{a^n}{n}$ est une série à termes positifs et convergente, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \|f_n\|_\infty$ est elle aussi convergente.

$\Longrightarrow$ Convergeant normalement sur tout intervalle $[-a; +a]$ tel que $0 < a < 1$, elle y converge aussi uniformément

Exercice 5 :

Montrer que la série de terme général $f_n(x) = (-1)^n \left(\frac{x^2+n}{n^2}\right)$ pour $n \geqslant 1$ est uniformément convergente sur tout intervalle $[a; b] \subset \mathbb{R}$ mais n'est absolument convergente pour aucune valeur $x \in \mathbb{R}$

$\longrightarrow$ **La série $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ n'est absolument convergente pour aucun $x \in \mathbb{R}$**

Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$|f_n(x)| = \left|(-1)^n \left(\frac{x^2+n}{n^2}\right)\right| = \frac{x^2+n}{n^2} \geqslant \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$$

Or, la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ est la série harmonique divergente, et donc la série $\sum_{n\geqslant 1} |f_n(x)|$ est divergente.

Nous en concluons que la série $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ n'est pas absolument convergente

$\longrightarrow$ **La série $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ est simplement convergente**

Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\sum_{n\geqslant 1} f_n(x) = \sum_{n\geqslant 1} (-1)^n \left(\frac{x^2+n}{n^2}\right) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n x^2}{n^2} + \sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n} = x^2 \sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^2} + \sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$$

Les séries $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$ et $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$ sont convergentes, et nous avons même $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{-\pi^2}{12}$ et $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2$, de telle sorte que la série $\sum_{n\geqslant 1} f_n(x)$ converge simplement vers $-\left(\frac{\pi^2}{12}x^2 + \ln 2\right)$

$\longrightarrow$ **La série $\sum_{n\geqslant 1} f_n(x)$ est uniformément convergente sur tout intervalle $[a; b] \subset \mathbb{R}$**

Nous appelons $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$.

Nous devons démontrer que, pour tout $x \in [a; b]$, $\lim_{n\to+\infty} |S_n(x) - S(x)| = 0$. Or :

$$|S_n(x) - S(x)| = \left|\sum_{k=1}^{n} f_k(x) - \sum_{k\geqslant 1} f_k(x)\right| = \left|\sum_{k\geqslant n+1} f_k(x)\right| = \left|\sum_{k\geqslant n+1} (-1)^k \left(\frac{x^2+k}{k^2}\right)\right|$$

La série $\sum_{k\geqslant 1} (-1)^k \left(\frac{x^2+k}{k^2}\right)$ est une série alternée et nous savons que nous faisons une erreur majorée par $|f_{k+1}(x)|$ lorsque nous remplaçons la somme $S(x)$ par $S_n(x)$ la somme d'ordre n. Nous avons donc :

$$|S_n(x) - S(x)| \leqslant \left|(-1)^{n+1}\left(\frac{x^2+n}{n^2}\right)\right| = \frac{x^2+n}{n^2}$$

Appelons $M = \max\{|a|;|b|\}$. Alors $x \in [a;b] \Longleftrightarrow |x| \leqslant M$, et donc, pour tout $x \in [a;b]$, nous avons :

$$|S_n(x) - S(x)| \leqslant \frac{x^2+n}{n^2} \leqslant \frac{M^2+n}{n^2}$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{M^2+n}{n^2} = 0$, nous avons, pour tout $x \in [a;b]$, $\lim\limits_{n\to+\infty} |S_n(x) - S(x)| = 0$.
La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n(x)$ est donc uniformément convergente sur tout intervalle $[a;b] \subset \mathbb{R}$

Exercice 6 :

Montrer que si la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} |a_n|$ converge, alors la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n e^{inx}$ est uniformément convergente sur $\mathbb{R}$

Ce n'est pas très difficile, puisque, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\left|a_n e^{inx}\right| = |a_n|$, ce qui montre que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n e^{inx}$ est normalement et donc uniformément convergente sur $\mathbb{R}$.
Remarque : nous avons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \in \mathbb{C}$

Exercice 7 :

Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} \dfrac{e^{-nx}\sin nx}{\ln n}$ est normalement convergente sur l'intervalle $[a;+\infty[$ où $a > 0$

Pas trop compliqué !
Nous avons : $\left|\dfrac{e^{-nx}\sin nx}{\ln n}\right| \leqslant \left|\dfrac{e^{-nx}}{\ln n}\right| = \dfrac{e^{-nx}}{\ln n}$.
Pour tout $x \in [a;+\infty[$, nous avons $e^{-nx} \leqslant e^{-na}$, et donc, pour tout $x \in [a;+\infty[$, nous avons

$$\left|\frac{e^{-nx}\sin nx}{\ln n}\right| \leqslant \frac{e^{-na}}{\ln n}$$

Or, la série de terme général $\dfrac{e^{-na}}{\ln n} = \dfrac{(e^{-a})^n}{\ln n}$ qui est du type $\dfrac{x^n}{\ln n}$ avec $0 < x < 1$; nous savons que les séries numériques $\sum\limits_{n\geqslant 2} \dfrac{x^n}{\ln n}$ sont convergentes. Nous en déduisons que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 2} \dfrac{e^{-nx}\sin nx}{\ln n}$ est normalement convergente sur l'intervalle $[a;+\infty[$ où $a > 0$; elle y est donc aussi normalement convergente.

Exercice 8 :

Soit α un réel tel que $\alpha < 2$. On considère la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} x^{2-\alpha}e^{-nx}$ définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$

1. *Démontrer que cette série est simplement convergente sur $[0;+\infty[$*

   Appelons, pour simplifier, $f_n(x) = x^{2-\alpha}e^{-nx}$. Alors :

   ⋆ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons $f_n(0) = 0$. La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} x^{2-\alpha}e^{-nx}$ converge donc en $x = 0$, et si $S(x) = \sum\limits_{n\geqslant 1} x^{2-\alpha}e^{-nx}$, nous avons $S(0) = 0$

   ⋆ Supposons $x > 0$; alors $e^{-x} < 1$ et donc :

$$\sum_{n\geqslant 1} x^{2-\alpha}e^{-nx} = x^{2-\alpha}\sum_{n\geqslant 1} e^{-nx} = x^{2-\alpha}\sum_{n\geqslant 1} \left(e^{-x}\right)^n = \frac{x^{2-\alpha}e^{-x}}{1-e^{-x}} = \frac{x^{2-\alpha}}{e^x - 1}$$

$\star$ La série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} x^{2-\alpha}e^{-nx}$ converge donc simplement, sur $[0;+\infty[$ vers la fonction S définie par :

$$\begin{cases} S(x) = \dfrac{x^{2-\alpha}}{e^x - 1} \text{ si } x > 0 \\ S(0) = 0 \end{cases}$$

2. *Démontrer que, si $1 \leqslant \alpha < 2$ alors la série $\sum_{n\geqslant 1} x^{2-\alpha}e^{-nx}$ n'est pas uniformément convergente sur l'intervalle $[0;+\infty[$.*

   Pour le démontrer, nous allons étudier la continuité de S. Cette démarche est justifiée par le fait que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les fonctions $x^{2-\alpha}e^{-nx}$ sont continues sur $[0;+\infty[$. S'il y a convergence uniforme, alors S est elle aussi continue.
   Le problème de continuité se pose en $x = 0$. Il nous faut donc étudier $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} S(x)$. Nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{x^{2-\alpha}}{e^x - 1} &= \frac{\left(x^{2-\alpha}\right)\times x}{x(e^x-1)} \\ &= x^{2-\alpha} \times \frac{x}{x(e^x-1)} \\ &= \frac{x^{2-\alpha}}{x} \times \frac{x}{(e^x-1)} \\ &= x^{1-\alpha} \times \frac{x}{(e^x-1)} \end{aligned}$$

   En utilisant les limites remarquables (ou les développements limités), nous avons

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{e^x-1} = 1$$

   Et :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^{1-\alpha} = \begin{cases} +\infty \text{ si } 1 < \alpha < 2 \\ 0 \text{ si } \alpha < 1 \\ 1 \text{ si } \alpha = 1 \end{cases}$$

   Nous en déduisons donc :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} S(x) = \begin{cases} +\infty \text{ si } 1 < \alpha < 2 \\ 0 \text{ si } \alpha < 1 \\ 1 \text{ si } \alpha = 1 \end{cases}$$

   Visiblement, la fonction S n'est pas continue pour $1 \leqslant \alpha < 2$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 1} x^{2-\alpha}e^{-nx}$ n'est pas uniformément convergente sur l'intervalle $[0;+\infty[$ lorsque $1 \leqslant \alpha < 2$

3. *Montrer que si $\alpha < 1$, alors elle est uniformément convergente sur $[0;+\infty[$*

   Pour montrer l'uniforme convergence de la série, nous allons démontrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} x^{2-\alpha}e^{-nx}$ converge normalement sur l'intervalle $[0;+\infty[$.
   Pour cela, il faut majorer $\left|x^{2-\alpha}e^{-nx}\right|$ par le terme général d'une série numérique convergente.
   Déjà, $\left|x^{2-\alpha}e^{-nx}\right| = x^{2-\alpha}e^{-nx}$. Nous avons posé $f_n(x) = x^{2-\alpha}e^{-nx}$; calculons la dérivée de f_n.
   Nous avons :

$$f_n'(x) = (2-\alpha)x^{1-\alpha}e^{-nx} - nx^{2-\alpha}e^{-nx} = e^{-nx}x^{1-\alpha}((2-\alpha)-nx)$$

   Pour $x \geqslant 0$, nous avons $e^{-nx}x^{1-\alpha} \geqslant 0$. Le signe de f_n' ne dépend donc que de celui de $(2-\alpha)-nx$.
   Ainsi, si $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{2-\alpha}{n}$, alors $f_n' \geqslant 0$ et donc f_n est croissante. Si $x \geqslant \dfrac{2-\alpha}{n}$, alors $f_n' \leqslant 0$ et donc f_n est décroissante. f_n admet donc un maximum $M_n = f_n\left(\dfrac{2-\alpha}{n}\right)$ en $x_0 = \dfrac{2-\alpha}{n}$.

Or, par calcul, $M_n = \left[(2-\alpha)\,e^{-1}\right]^{2-\alpha} \times \dfrac{1}{n^{2-\alpha}}$. La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^{2-\alpha}}$ est une série de Riemann, convergente si et seulement si $2-\alpha > 1$, c'est à dire si $\alpha < 1$.
Ainsi, $\left|x^{2-\alpha}e^{-nx}\right| \leqslant \left[(2-\alpha)\,e^{-1}\right]^{2-\alpha} \times \dfrac{1}{n^{2-\alpha}}$, et si $\alpha < 1$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} x^{2-\alpha}e^{-nx}$ est normalement convergente sur $[0;+\infty[$

7.5.2 Exercices complémentaires

Exercice 9 :

Etudier les séries suivantes

1. $\sum\limits_{n\geqslant 0} e^{-n}\cos n^2x$

   ▷ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons $\left|e^{-n}\cos n^2x\right| \leqslant e^{-n}$. Or, e^{-n} est le terme général d'une série numérique convergente. La série $\sum\limits_{n\geqslant 0} e^{-n}\cos n^2x$ est donc normalement convergente, donc uniformément convergente sur $\mathbb{R}$

   ▷ D'autre part, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les fonctions $e^{-n}\cos n^2x$ sont continues sur $\mathbb{R}$; de la convergence uniforme de la série, nous déduisons que la somme $\sum\limits_{n\geqslant 0} e^{-n}\cos n^2x$ est continue sur $\mathbb{R}$

   ▷ La fonction $e^{-n}\cos n^2x$ est dérivable sir $\mathbb{R}$ et de dérivée $-n^2e^{-n}\sin n^2x$. Comme tout à l'heure, pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons $\left|-n^2e^{-n}\sin n^2x\right| \leqslant n^2e^{-n}$. Or, n^2e^{-n} est le terme général d'une série numérique convergente. La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} -n^2e^{-n}\sin n^2x$ est donc normalement convergente, donc uniformément convergente sur $\mathbb{R}$. En conclusion, nous avons

$$\left(\sum_{n\geqslant 0} e^{-n}\cos n^2x\right)' = \sum_{n\geqslant 1} -n^2e^{-n}\sin n^2x$$

2. $\sum\limits_{n\geqslant 1} (-1)^n \sin \dfrac{x}{n}$

   $\Longrightarrow$ Convergence simple

   ▷ D'une part, du fait que la fonction $\sin x$ soit impaire, l'étude de la série peut se réduire à $[0;+\infty[$

   ▷ Soit $x \geqslant 0$; il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N$, alors $0 \leqslant \dfrac{x}{n} \leqslant \dfrac{\pi}{2}$; ainsi, pour $n \geqslant N$, nous avons $0 \leqslant \dfrac{x}{n+1} \leqslant \dfrac{x}{n} \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ et comme la fonction sin est croissante sue l'intervalle $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$, nous avons $\sin\dfrac{x}{n+1} \leqslant \sin\dfrac{x}{n}$; ce qui montre que la suite $\left(\sin\dfrac{x}{n}\right)_{n\geqslant N}$ est décroissante

   ▷ D'autre part, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin\dfrac{x}{n} = 0$; d'après le critère des séries alternées, la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} (-1)^n \sin\dfrac{x}{n}$ converge simplement sur $[0;+\infty[$, et par parité (ou imparité), sur $\mathbb{R}$

   $\Longrightarrow$ Convergence absolue

   Pour $n \geqslant N$, nous avons $\left|(-1)^n \sin\dfrac{x}{n}\right| = \sin\dfrac{x}{n}$, et lorsque n tend vers $+\infty$, nous avons $\sin\dfrac{x}{n} \underset{n\to+\infty}{\approx} \dfrac{x}{n}$. Or, $\dfrac{x}{n}$ est le terme général d'une série divergente. La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} (-1)^n \sin\dfrac{x}{n}$ ne converge donc pas absoluement.

   $\Longrightarrow$ Convergence uniforme

   Posons $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^k \sin\dfrac{x}{k}$ et $S(x) = \sum\limits_{n\geqslant 1} (-1)^n \sin\dfrac{x}{n}$.

D'après les résultats donnés lors de l'étude des séries alternées, si nous remplaçons la somme d'ordre n par la somme de la série, l'erreur commise est de l'ordre de u_{n+1}. Donc, pour $n \geqslant N$:

$$|S_n(x) - S(x)| \leqslant \sin \frac{x}{n+1}$$

On sait que si $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$, nous avons $0 \leqslant \sin x \leqslant x$. Donc :

$$|S_n(x) - S(x)| \leqslant \sin \frac{x}{n+1} \leqslant \frac{x}{n+1}$$

Soient $0 \leqslant a < b$ et $x \in [a; b]$; alors $\frac{x}{n+1} \leqslant \frac{b}{n+1}$, et donc, pour tout $x \in [a; b]$,

$$|S_n(x) - S(x)| \leqslant \frac{b}{n+1}$$

Et nous avons donc, pour tout $x \in [a; b]$, $\lim\limits_{n \to +\infty} |S_n(x) - S(x)| = 0$ ce qui montre que la série converge uniformément sur tout intervalle $[a; b] \subset \mathbb{R}$

3. $\sum\limits_{n \geqslant 0} \frac{\cos \frac{x}{2^n}}{10^n}$

C'est une série qui pose peu de problème :

$\Longrightarrow$ Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $\left| \frac{\cos \frac{x}{2^n}}{10^n} \right| \leqslant \frac{1}{10^n}$.
La série converge normalement sur $\mathbb{R}$ et donc uniformément sur $\mathbb{R}$.

$\Longrightarrow$ Les fonctions $\frac{\cos \frac{x}{2^n}}{10^n}$ sont continues sur $\mathbb{R}$, et donc la somme $\sum\limits_{n \geqslant 0} \frac{\cos \frac{x}{2^n}}{10^n}$ est elle aussi continue sur $\mathbb{R}$

$\Longrightarrow$ Les fonctions $\frac{\cos \frac{x}{2^n}}{10^n}$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$, de dérivée $\left(\frac{\cos \frac{x}{2^n}}{10^n} \right)' = -\frac{1}{2^n} \times \frac{\sin \frac{x}{2^n}}{10^n}$.
De la la même manière que précédemment *(utilisation de la convergence normale)*, on démontre que la série des dérivées converge normalement donc la somme $\sum\limits_{n \geqslant 0} \frac{\cos \frac{x}{2^n}}{10^n}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et de dérivée $\sum\limits_{n \geqslant 0} \frac{-\sin \frac{x}{2^n}}{20^n}$

4. $\sum\limits_{n \geqslant 1} \frac{1}{n + n^2 x^2}$

Appelons $f_n(x) = \frac{1}{n + n^2 x^2}$.

Nous pouvons remarquer que $f_n(0) = \frac{1}{n}$ et que la série numérique $\sum\limits_{n \geqslant 1} \frac{1}{n}$ est divergente ; l'étude se fera donc pour $x \in \mathbb{R}^*$.

En remarquant aussi que $f_n(x) = f_n(-x)$, l'étude se fera donc sur $[a; +\infty[$ où $a > 0$

$\Longrightarrow$ Si $x \in [a; +\infty[$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $n + n^2 x^2 \geqslant n + n^2 a^2$ et donc $0 \leqslant \frac{1}{n + n^2 x^2} \leqslant \frac{1}{n + n^2 a^2}$, ce qui montre que la convergence de la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \frac{1}{n + n^2 x^2}$ est normale, donc uniforme sur $[a; +\infty[$

$\Longrightarrow$ Sur le domaine $[a; +\infty[$, la fonction $f_n(x) = \frac{1}{n + n^2 x^2}$ est continue, et donc la fonction $S(x) = \sum\limits_{n \geqslant 1} \frac{1}{n + n^2 x^2}$ est donc continue sur $[a; +\infty[$

Exercice 10 :

Soient α, a et b, 3 nombres réels tels que $\alpha > 0$ et $0 < a < b$. On considère la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{x}{n^{\alpha}\left(1+nx^2\right)}$ Montrer que cette série est uniformément convergente sur l'intervalle $[a;b]$

- Dans un premier temps, nous allons démontrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$ tel que $n\geqslant 1$, et tout $x>0$, nous avons
$$\frac{x}{n^{\alpha}\left(1+nx^2\right)}\leqslant\frac{1}{n^{\alpha+1}x}$$
Il suffit, pour le démontrer, de faire la différence $\dfrac{x}{n^{\alpha}\left(1+nx^2\right)}-\dfrac{1}{n^{\alpha+1}x}$. Nous avons, en effet,
$$\frac{x}{n^{\alpha}\left(1+nx^2\right)}-\frac{1}{n^{\alpha+1}x}=\frac{1}{n^{\alpha}}\left(\frac{x}{1+nx^2}-\frac{1}{nx}\right)$$
Il faut, maintenant, étudier le signe de $\dfrac{x}{1+nx^2}-\dfrac{1}{nx}$.
Réduisons au même dénominateur :
$$\frac{x}{1+nx^2}-\frac{1}{nx}=\frac{nx^2-1-nx^2}{nx\left(1+nx^2\right)}=\frac{(1-n)\,x^2-1}{nx\left(1+nx^2\right)}$$
Comme $n\geqslant 1$ et $x>0$, nous avons $\dfrac{(1-n)\,x^2-1}{nx\left(1+nx^2\right)}\leqslant 0$ et donc $\dfrac{x}{n^{\alpha}\left(1+nx^2\right)}-\dfrac{1}{n^{\alpha+1}x}\leqslant 0$, c'est à dire :
$$\frac{x}{n^{\alpha}\left(1+nx^2\right)}\leqslant\frac{1}{n^{\alpha+1}x}$$
- Ce qui veut dire que, pour tout $x\in[a;b]$, nous avons :
$$0<\frac{x}{n^{\alpha}\left(1+nx^2\right)}\leqslant\frac{1}{n^{\alpha+1}x}\leqslant\frac{1}{n^{\alpha+1}a}$$
La série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n^{\alpha+1}a}$ est une série de Riemann convergente, et donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{x}{n^{\alpha}\left(1+nx^2\right)}$ converge normalement, c'est à dire uniformément sur l'intervalle $[a;b]$
- D'autre part, la fonction $u_n(x)=\dfrac{x}{n^{\alpha}\left(1+nx^2\right)}$ est continue sur l'intervalle $[a;b]$ et de la convergence uniforme de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{x}{n^{\alpha}\left(1+nx^2\right)}$ sur l'intervalle $[a;b]$, on peut déduire que la fonction $S(x)=\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{x}{n^{\alpha}\left(1+nx^2\right)}$ est, elle aussi, continue sur l'intervalle $[a;b]$

Exercice 11 :

Montrer que la somme de la série de fonctions de terme général $f_n(x)=(-1)^n\dfrac{e^{-nx^2}}{(n+1)^3}$ est continue sur $\mathbb{R}$

Nous avons, très simplement, $\left|(-1)^n\dfrac{e^{-nx^2}}{(n+1)^3}\right|\leqslant\dfrac{1}{(n+1)^3}$.

Ce qui montre que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}f_n(x)=\sum\limits_{n\geqslant 0}(-1)^n\dfrac{e^{-nx^2}}{(n+1)^3}$ converge normalement, et donc uniformément sur $\mathbb{R}$

De même, pour tout $n\in\mathbb{N}$, f_n est continue sur $\mathbb{R}$.

De la convergence uniforme, nous tirons que $S(x)=\sum\limits_{n\geqslant 0}(-1)^n\dfrac{e^{-nx^2}}{(n+1)^3}$ est continue sur $\mathbb{R}$

Exercice 12 :

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Etudier la continuité de la fonction définie sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ par $F(x) = \sum_{n\geqslant 1} n^\alpha \sin^n x \cos x$

Nous allons étudier la convergence normale de la série.
Pour tout $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, nous avons : $|n^\alpha \sin^n x \cos x| \leqslant n^\alpha$. La série numérique $\sum_{n\geqslant 1} n^\alpha$ est une série de Riemann ; cette série est convergente si et seulement si $\alpha < -1$.
Ainsi, si $\alpha < -1$, il y a donc convergence uniforme sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. La fonction $n^\alpha \sin^n x \cos x$ est continue sur $\mathbb{R}$, et donc si $\alpha < -1$, $F(x) = \sum_{n\geqslant 1} n^\alpha \sin^n x \cos x$ est une fonction continue sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Exercice 13 :

On considère la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n(x)$ où $f_n(x) = (-1)^n \frac{x^2}{x^4+n}$

1. *Etudier la convergence simple de la série sur $\mathbb{R}$*

   Soit $x \in \mathbb{R}$.

   Alors, la série $\sum_{n\geqslant 1} (-1)^n \frac{x^2}{x^4+n}$ est une série numérique alternée.

   ▷ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, et tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous adons :

   $$\frac{x^2}{x^4+n} \geqslant 0 \text{ et } \frac{x^2}{x^4+(n+1)} \leqslant \frac{x^2}{x^4+n}$$

   ▷ D'après le critère des séries alternées, la série $\sum_{n\geqslant 1} (-1)^n \frac{x^2}{x^4+n}$ est donc convergente

   Nous en déduisons que la série $\sum_{n\geqslant 1} f_n(x)$ est simplement convergente sur $\mathbb{R}$

   Elle n'est, par contre, pas absolument convergente

   En effet, nous avons $\left|(-1)^n \frac{x^2}{x^4+n}\right| = \frac{x^2}{x^4+n}$, et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\frac{x^2}{x^4+n} \underset{n\to+\infty}{\approx} \frac{x^2}{n}$. La série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^2}{n}$ est une série de Riemann divergente, et donc la série numérique $\sum_{n\geqslant 1} \left|(-1)^n \frac{x^2}{x^4+n}\right|$ n'est pas convergente.

   Ainsi, la série $\sum_{n\geqslant 1} f_n(x)$ n'est pas absolument convergente.

2. *Montrer que cette série est uniformément convergente sur $\mathbb{R}$*

   Appelons $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^n \frac{x^2}{x^4+k}$ et $S(x) = \sum_{n\geqslant 1} (-1)^n \frac{x^2}{x^4+n}$.

   Pour montrer que la série converge uniformément sur $\mathbb{R}$, il faut démontrer que

   $$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |S_n(x) - S(x)| = 0$$

   D'après la théorie des séries alternées, nous avons : $|S_n(x) - S(x)| \leqslant \frac{x^2}{x^4+n+1}$

   Etudions $g(x) = \frac{x^2}{x^4+n+1}$; la dérivée est donc, après calculs $g'(x) = \frac{4x\left(\sqrt{\frac{n+1}{2}}+x^2\right)\left(\sqrt{\frac{n+1}{2}}-x^2\right)}{(x^4+n+1)^2}$

   Le signe de cette dérivée ne dépend que de celui de $4x\left(\sqrt{\frac{n+1}{2}}+x^2\right)\left(\sqrt{\frac{n+1}{2}}-x^2\right)$.

En utilisant la parité, on voit que g admet comme maximum M_n où

$$M_n = \frac{\sqrt{\frac{n+1}{2}}}{\frac{n+1}{2}+n+1} = \frac{\sqrt{2}}{3} \times \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

Nous avons donc $|S_n(x) - S(x)| \leqslant \dfrac{x^2}{x^4+n+1} \leqslant M_n$

Nous voyons donc tout de suite que $\lim\limits_{n\to+\infty} M_n = 0$, c'est à dire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |S_n(x) - S(x)| = 0$.

La série converge donc uniformément sur $\mathbb{R}$

3. *Montrer que la somme de cette série est continue*

   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_n(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$. la série convergeant uniformément sur $\mathbb{R}$, la somme $S(x) = \sum\limits_{n\geqslant 1} (-1)^n \dfrac{x^2}{x^4+n}$ est donc continue sur $\mathbb{R}$

Exercice 14 :

1. *Montrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{x}{(x^2+n^2)^2}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$*

   Nous allons démontrer que cette série est normalement convergente sur $\mathbb{R}$.

   Pour ce faire, il faudra majorer $\left|\dfrac{x}{(x^2+n^2)^2}\right|$ par le terme général d'une série numérique à termes positifs convergente.

   Du fait de l'imparité de $\dfrac{x}{(x^2+n^2)^2}$, nous ne considérons que $x \geqslant 0$

   Etudions $f(x) = \dfrac{x}{(x^2+n^2)^2}$.

   Tous calculs faits, nous avons $f'(x) = \dfrac{n^2-3x^2}{(n^2+x^2)^3}$. $f\left(\dfrac{n}{\sqrt{3}}\right)$ est une borne supérieure de f.

   Nous avons donc $\left|\dfrac{x}{(x^2+n^2)^2}\right| \leqslant f\left(\dfrac{n}{\sqrt{3}}\right) = \dfrac{3\sqrt{3}}{16} \times \dfrac{1}{n^3}$.

   La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{3\sqrt{3}}{16} \times \dfrac{1}{n^3}$ est une série de Riemann convergente.

   Ainsi, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{x}{(x^2+n^2)^2}$ converge normalement et donc uniformément sur $\mathbb{R}$

2. *Montrer que cette série est continue sur $\mathbb{R}$*

   Comme d'habitude, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, chaque fonction $f(x) = \dfrac{x}{(x^2+n^2)^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$; de la convergence uniforme, nous tirons que la somme de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{x}{(x^2+n^2)^2}$ est continue.

3. *Montrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{x^2+n^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$*

   ▷ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons $\left|\dfrac{1}{x^2+n^2}\right| = \dfrac{1}{x^2+n^2} \leqslant \dfrac{1}{n^2}$. La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2}$ est une série numérique convergente, et donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{x^2+n^2}$ converge normalement, et donc uniformément sur $\mathbb{R}$

▷ Pour $n \in \mathbb{N}^*$, chaque fonction $\dfrac{1}{x^2+n^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc la somme de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{x^2+n^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$

▷ Nous avons $\left(\dfrac{1}{x^2+n^2}\right)' = \dfrac{-2x}{(x^2+n^2)^2}$. Nous avons démontré que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{-2x}{(x^2+n^2)^2}$ convergeait unifomément sur $\mathbb{R}$. Nous pouvons donc conclure que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{x^2+n^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ *(elle est même de classe $\mathcal{C}^1$)* et que nous avons :

$$\left(\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{x^2+n^2}\right)' = \sum_{n\geqslant 1} \left(\frac{1}{x^2+n^2}\right)' = -2\sum_{n\geqslant 1} \frac{x}{(x^2+n^2)^2}$$

Exercice 15 :

Nous considérons la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n(x)$ où $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n^3}$

1. *Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n(x)$ converge et que sa somme $f(x) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$*

Bon, ben, c'est toujours pareil !!

→ Premièrement, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n^3}$ est continue sur $\mathbb{R}$

→ D'autre part, pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons $\left|\dfrac{\sin(nx)}{n^3}\right| \leqslant \dfrac{1}{n^3}$. La série numérique $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^3}$ est une série de Riemann convergente.
Donc, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n(x)$ est normalement convergente, et donc uniformément convergente.

→ Toutes les fonctions f_n étant continues sur $\mathbb{R}$, de la convergence uniforme de la série, nous déduisons que la somme $f(x) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$

2. *Démontrer que $\displaystyle\int_0^\pi f(x)\,\mathrm{d}x = 2\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{(2n-1)^4}$*

▷ Nous savons que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les fonctions $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n^3}$ sont continues sur $\mathbb{R}$

▷ La série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n(x)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$

▷ Donc, d'après 7.2.5, nous pouvons écrire :

$$\int_0^\pi \sum_{n\geqslant 1} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n\geqslant 1} \int_0^\pi f_n(x)\,\mathrm{d}x$$

Il nous faut donc calculer $\displaystyle\int_0^\pi f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi \frac{\sin(nx)}{n^3}\,\mathrm{d}x$

Nous avons :

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \frac{\sin(nx)}{n^3}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{n^3}\int_0^\pi \sin(nx)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{n^3}\left[\frac{-\cos(nx)}{n}\right]_0^\pi \\ &= \frac{-1}{n^4}\left((-1)^n - 1\right) = \frac{1}{n^4}\left(1-(-1)^n\right)\end{aligned}$$

Ainsi, si n est pair, alors $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin(nx)}{n^3}\,\mathrm{d}x = 0$ et si n est impair, alors $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin(nx)}{n^3}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{n^4}$; d'où :

$$\int_0^\pi \sum_{n\geqslant 1} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n\geqslant 1} \int_0^\pi f_n(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n\geqslant 0} \frac{2}{(2n+1)^4} = \sum_{n\geqslant 1} \frac{2}{(2n-1)^4}$$

3. *Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{\cos(nx)}{n^2}$*

   ▷ De la majoration, vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\left|\frac{\cos(nx)}{n^2}\right| \leqslant \frac{1}{n^2}$, nous concluons que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\cos(nx)}{n^2}$ converge normalement, donc uniformément sur $\mathbb{R}$

   ▷ D'autre part, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $\frac{\cos(nx)}{n^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, et de la convergence uniforme, nous tirons que la fonction somme $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\cos(nx)}{n^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$

   ▷ D'autre part pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_n'(x) = \left(\frac{\sin(nx)}{n^3}\right)' = \frac{\cos(nx)}{n^2}$

   De la convergence uniforme de toutes ces séries, nous tirons :

$$f'(x) = \left(\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin(nx)}{n^3}\right)' = \sum_{n\geqslant 1} \left(\frac{\sin(nx)}{n^3}\right)' = \sum_{n\geqslant 1} \frac{\cos(nx)}{n^2}$$

4. *Démontrer que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n\geqslant 1} \frac{\cos(nx)}{n^2}\,\mathrm{d}x = \sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$*

   Nous avons déjà montré que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les fonctions $\frac{\cos(nx)}{n^2}$ étaient continues et que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\cos(nx)}{n^2}$ convergeait uniformément. Nous avons donc :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n\geqslant 1} \frac{\cos(nx)}{n^2}\,\mathrm{d}x = \sum_{n\geqslant 1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(nx)}{n^2}\,\mathrm{d}x$$

   Il faut donc calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(nx)}{n^2}\,\mathrm{d}x$

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(nx)}{n^2}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{n^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(nx)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{n^2} \left[\frac{\sin(nx)}{n}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{n^3} \sin\frac{n\pi}{2} \end{aligned}$$

   On peut remarquer que si n est pair, alors $\sin\frac{n\pi}{2} = 0$ et que si $n = 2k+1$, alors $\sin\frac{(2k+1)\pi}{2} = (-1)^k$.

   Ainsi, si n est pair $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(nx)}{n^2}\,\mathrm{d}x = 0$ et si $n = 2k+1$, alors $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos((2k+1)x)}{(2k+1)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}$

   Et alors $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n\geqslant 1} \frac{\cos(nx)}{n^2}\,\mathrm{d}x = \sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$

Exercice 16 :

Cet exercice est l'occasion de mettre en pratique les théorèmes sur la dérivation

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, nous définissons la fonction $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{x+n}$.

1. *Démontrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} f_n(x)$ converge simplement sur $[0:+\infty[$ vers une fonction S*

   La série $\sum_{n\geqslant 1} f_n(x)$ est une série alternée.

   Pour $x \geqslant 0$ fixé, la suite $\left(\dfrac{1}{x+n}\right)_{n\geqslant 1}$ est une suite positive et décroissante telle que $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{x+n} = 0$.

   Donc, d'après le critère des séries alternées, la série $\sum_{n\geqslant 1} f_n(x)$ converge simplement sur $[0:+\infty[$.

   Si S est la limite, nous avons même $S(0) = \sum_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^n}{n} = -\ln 2$

   (a) **Cette série converge-t-elle normalement sur $[0:+\infty[$?**

   $\longrightarrow$ La fonction $|f_n(x)| = \dfrac{1}{x+n}$ est une fonction décroissante sur $[0:+\infty[$ et nous avons :

   $$\sup_{x\geqslant 0} |f_n(x)| = \|f_n\|_\infty = \frac{1}{n}$$

   La série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n}$ est divergente et il n'y a donc pas de convergence normale sur $[0:+\infty[$

   $\longrightarrow$ Mieux, il n'y a convergence normale sur aucun des intervalles $[a;b] \subset \mathbb{R}$

   En effet, d'après la même analyse, $\sup_{x\in[a;b]} |f_n(x)| = \dfrac{1}{n+a}$. La série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n+a}$ est divergente et il n'y a donc pas de convergence normale sur l'intervalle $[a;b] \subset \mathbb{R}$

   (b) **Cette série converge-t-elle uniformément sur $[0:+\infty[$?**

   Comme d'habitude, nous posons $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ et $S(x) = \sum_{n\geqslant 1} f_n(x)$.

   Il faut que nous étudions $|S_n(x) - S(x)|$. D'après le critère des séries alternées, nous avons :

   $$|S_n(x) - S(x)| \leqslant \frac{1}{x+n+1} \leqslant \frac{1}{n+1}$$

   Ainsi, $\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\geqslant 0} |S_n(x) - S(x)| = 0$; ce qui termine de montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} f_n(x)$ converge uniformément sur $[0:+\infty[$ vers la fonction S

2. *Démontrer que $S'(x) = \sum_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^{n+1}}{(x+n)^2}$*

   ▷ Nous avons $f_n'(x) = \dfrac{(-1)^{n+1}}{(x+n)^2}$; f_n est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0:+\infty[$

   ▷ D'autre part, la série $\sum_{n\geqslant 1} f_n(x)$ converge simplement, et même uniformément, sur $[0:+\infty[$ vers la fonction S

   ▷ Il faut maintenant montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} f_n'(x)$ converge uniformément sur $[0:+\infty[$.

   Pour cela, il est facile de montrer qu'elle converge normalement sur $[0:+\infty[$; en effet :

   $$|f_n'(x)| = \left|\frac{(-1)^{n+1}}{(x+n)^2}\right| = \frac{1}{(x+n)^2} \leqslant \frac{1}{n^2}$$

   Comme la série numérique $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2}$ est convergente, nous en déduisons que la série $\sum_{n\geqslant 1} f_n'(x)$ converge normalement et donc uniformément sur $[0:+\infty[$

Nous avons donc : $\left(\sum_{n\geqslant 1} f_n(x)\right)' = \sum_{n\geqslant 1} f_n'(x)$, c'est à dire, traduit autrement :

$$S'(x) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{(x+n)^2}$$

Exercice 17 :

Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{e^x - 1}\,\mathrm{d}x = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2+1}$

$\Longrightarrow$ Premièrement, est-ce que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{e^x-1}\,\mathrm{d}x$ existe ?

⋆ Regardons d'abord en 0, nous avons :

$$\frac{\sin x}{e^x-1} = \frac{\sin x}{x} \times \frac{x}{e^x-1}$$

Comme $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{e^x-1} = 1$, il est possible de prolonger $\dfrac{\sin x}{e^x-1}$ par continuité en 0

⋆ Regardons maintenant en $+\infty$; nous avons, pour $x \geqslant 0$:

$$0 \leqslant \left|\frac{\sin x}{e^x-1}\right| \leqslant \frac{1}{e^x-1} = \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} \leqslant e^{-x}$$

Or, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\,\mathrm{d}x$ existe et nous en concluons que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{e^x-1}\,\mathrm{d}x$ est absolument convergente, donc convergente.

$\Longrightarrow$ Comme il y a quelques questions à se poser en 0 et $+\infty$; soit donc $\varepsilon > 0$ et $x \geqslant \varepsilon$.

$\Longrightarrow$ Maintenant, il est intéressant de voir que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} e^{-kx} = \sum_{k=0}^{n} \left(e^{-x}\right)^k = \frac{1-e^{-(n+1)x}}{1-e^{-x}}$.

Si $x > \varepsilon$, alors, $e^{-x} < 1$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} e^{-kx} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-e^{-(n+1)x}}{1-e^{-x}} = \frac{1}{1-e^{-x}}$

Donc, si $x > \varepsilon$, alors :

$$\sum_{k=0}^{n} \sin x e^{-(k+1)x} = e^{-x}\sin x \sum_{k=0}^{n} \left(e^{-x}\right)^k = e^{-x}\sin x \times \frac{1-e^{-(n+1)x}}{1-e^{-x}}$$

De telle sorte que si $x > \varepsilon$,

$$\sum_{n\geqslant 0} \sin x e^{-(n+1)x} = e^{-x} \frac{\sin x}{1-e^{-x}} = \frac{\sin x}{e^x\left(1-e^{-x}\right)} = \frac{\sin x}{e^x-1}$$

La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \sin x e^{-(n+1)x}$ converge donc simplement vers la fonction $\dfrac{\sin x}{e^x-1}$

$\Longrightarrow$ La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \sin x e^{-(n+1)x}$ converge-t-elle uniformément vers la fonction $\dfrac{\sin x}{e^x-1}$ sur l'intervalle $[\varepsilon; +\infty[$?

Nous allons, en fait, montrer qu'elle y converge normalement ; en effet, pour tout $x > \varepsilon$:

$$\left|\sin x e^{-(n+1)x}\right| \leqslant e^{-(n+1)x} \leqslant e^{-(n+1)\varepsilon} = \left(e^{-\varepsilon}\right)^{n+1}$$

La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \left(e^{-\varepsilon}\right)^{n+1}$ est une série géométrique convergente, et la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \sin x e^{-(n+1)x}$ converge normalement, donc uniformément vers la fonction $\dfrac{\sin x}{e^x-1}$ sur l'intervalle $[\varepsilon; +\infty[$

D'autre part, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n(x) = \sin x e^{-(n+1)x}$ est continue sur l'intervalle $[\varepsilon; +\infty[$, et nous pouvons écrire, pour tout $X \in [\varepsilon; +\infty[$:

$$\int_\varepsilon^X \left(\sum_{n \geqslant 0} \sin x e^{-(n+1)x} \right) \mathrm{d}x = \sum_{n \geqslant 0} \int_\varepsilon^X \sin x e^{-(n+1)x} \, \mathrm{d}x$$

$\Longrightarrow$ Il faut, maintenant, calculer $\displaystyle\int_\varepsilon^X \sin x e^{-(n+1)x} \, \mathrm{d}x$

Nous avons $\sin x e^{-(n+1)x} = \operatorname{Im}\left(e^{ix} e^{-(n+1)x}\right)$, et donc $\displaystyle\int_\varepsilon^X \sin x e^{-(n+1)x} \, \mathrm{d}x = \operatorname{Im}\left(\int_\varepsilon^X e^{ix-(n+1)x} \right) \mathrm{d}x$

$$\begin{aligned} \int_\varepsilon^X e^{ix-(n+1)x} \, \mathrm{d}x &= \int_\varepsilon^X e^{x(i-(n+1))} \, \mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{e^{x(i-(n+1))}}{i-(n+1)} \right]_\varepsilon^X \\ &= \left[\frac{-e^{-(n+1)x}}{(n+1)^2+1} \left(((n+1)+i)(\cos x + i \sin x) \right) \right]_\varepsilon^X \end{aligned}$$

Et donc $\displaystyle\int_\varepsilon^X \sin x e^{-(n+1)x} \, \mathrm{d}x = \frac{e^{-(n+1)\varepsilon}}{(n+1)^2+1} \left((n+1)\sin\varepsilon + \cos\varepsilon \right) - \left(\frac{e^{-(n+1)X}}{(n+1)^2+1} \left((n+1)\sin X + \cos X \right) \right)$

$\Longrightarrow$ Nous avons, maintenant :

$$\sum_{n \geqslant 0} \int_\varepsilon^X \sin x e^{-(n+1)x} \, \mathrm{d}x = \sum_{n \geqslant 0} \frac{e^{-(n+1)\varepsilon}}{(n+1)^2+1} \left((n+1)\sin\varepsilon + \cos\varepsilon \right) - \sum_{n \geqslant 0} \frac{e^{-(n+1)X}}{(n+1)^2+1} \left((n+1)\sin X + \cos X \right)$$

$\longrightarrow$ Etudions la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \frac{-e^{-(n+1)X}}{(n+1)^2+1} \left((n+1)\sin X + \cos X \right)$. Pour tout $X \geqslant a$ où $a > 0$, nous avons :

$$\left| \frac{-e^{-(n+1)X}}{(n+1)^2+1} \left((n+1)\sin X + \cos X \right) \right| \leqslant \frac{e^{-(n+1)a}}{(n+1)^2+1} \left((n+1) + 1 \right) = \frac{n+2}{(n+1)^2+1} \times e^{-(n+1)a}$$

lorsque n tend vers $+\infty$, nous avons $\displaystyle\frac{n+2}{(n+1)^2+1} \times e^{-(n+1)a} \underset{n \to +\infty}{\approx} \frac{e^{-na}}{n}$ qui est le terme général d'une série convergente. La série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \frac{-e^{-(n+1)X}}{(n+1)^2+1} \left((n+1)\sin X + \cos X \right)$ converge normalement, donc uniformément sur tout intervalle $[a; +\infty[$.

Nous avons $\displaystyle\lim_{X \to +\infty} \frac{-e^{-(n+1)X}}{(n+1)^2+1} \left((n+1)\sin X + \cos X \right) = 0$, et donc, d'après le théorème d'inversion des limites, 7.2.1, nous avons :

$$\lim_{X \to +\infty} \left(\sum_{n \geqslant 0} \frac{-e^{-(n+1)X}}{(n+1)^2+1} \left((n+1)\sin X + \cos X \right) \right) = \sum_{n \geqslant 0} \left(\lim_{X \to +\infty} \frac{-e^{-(n+1)X}}{(n+1)^2+1} \left((n+1)\sin X + \cos X \right) \right) = 0$$

$\longrightarrow$ Pour étudier la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \frac{e^{-(n+1)\varepsilon}}{(n+1)^2+1} \left((n+1)\sin\varepsilon + \cos\varepsilon \right)$, nous allons choisir ε tel que $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ et nous allons découper la série en 2 :

- $\star$ D'une part, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{e^{-(n+1)\varepsilon}(n+1)\sin\varepsilon}{(n+1)^2+1}$
- $\star$ Et d'autre part, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{e^{-(n+1)\varepsilon}\cos\varepsilon}{(n+1)^2+1}$

$\longrightarrow$ Etudions maintenant $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{e^{-(n+1)\varepsilon}\cos\varepsilon}{(n+1)^2+1}$

Tout d'abord, nous avons $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{e^{-(n+1)\varepsilon}\cos\varepsilon}{(n+1)^2+1}=\cos\varepsilon\sum_{n\geqslant 0}\frac{e^{-(n+1)\varepsilon}}{(n+1)^2+1}$, et :

$$\left|\frac{e^{-(n+1)\varepsilon}}{(n+1)^2+1}\right|=\frac{e^{-(n+1)\varepsilon}}{(n+1)^2+1}\leqslant\frac{1}{(n+1)^2+1}$$

La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{(n+1)^2+1}$ étant convergente, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{e^{-(n+1)\varepsilon}}{(n+1)^2+1}$ est normalement convergente donc uniformément convergente sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

En conclusion :

- $\star$ Comme $\dfrac{e^{-(n+1)\varepsilon}}{(n+1)^2+1}$ est une fonction de ε continue sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, de la convergence uniforme, nous concluons que la fonction $g(\varepsilon)=\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{e^{-(n+1)\varepsilon}}{(n+1)^2+1}$ est continue sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$
- $\star$ D'autre part, $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{-(n+1)\varepsilon}}{(n+1)^2+1}=\frac{1}{(n+1)^2+1}$, et donc, de la convergence uniforme, et d'après 7.2.1, nous avons

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}}\sum_{n\geqslant 0}\frac{e^{-(n+1)\varepsilon}}{(n+1)^2+1}=\sum_{n\geqslant 0}\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}}\frac{e^{-(n+1)\varepsilon}}{(n+1)^2+1}=\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{(n+1)^2+1}$$

  C'est à dire $\displaystyle\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}}g(\varepsilon)=\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{(n+1)^2+1}$
- $\star$ Ainsi, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{e^{-(n+1)\varepsilon}\cos\varepsilon}{(n+1)^2+1}=\cos\varepsilon\, g(\varepsilon)$ est telle que $\displaystyle\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}}\sum_{n\geqslant 0}\frac{e^{-(n+1)\varepsilon}\cos\varepsilon}{(n+1)^2+1}=\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{(n+1)^2+1}$

$\longrightarrow$ Etudions maintenant la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{e^{-(n+1)\varepsilon}(n+1)\sin\varepsilon}{(n+1)^2+1}$, et l'étude n'est pas des plus simples ! !

Nous allons décomposer ce qui est à l'intérieur du signe somme. L'objet de notre étude sera de majorer l'expression $e^{-(n+1)\varepsilon}\sin\varepsilon$ indépendamment de ε

- $\star$ Nous nous mettons donc à l'étude de $h(x)=e^{-(n+1)x}\sin x$ dont la fonction dérivée est donnée par

$$h'(x)=e^{-(n+1)x}\cos x-(n+1)e^{-(n+1)x}\sin x=e^{-(n+1)x}\cos x\,(1-(n+1)\tan x)$$

  Cette dérivée s'annule pour $x_n=\arctan\left(\dfrac{1}{n+1}\right)$.

  La fonction tan étant croissante sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$, h' est donc positive sur $[0;x_n]$, puis négative pour $x\geqslant x_n$. Ainsi, pour tout $x\geqslant 0$, nous avons $h(x)\leqslant h(x_n)$ où

$$h(x_n)=\sin\left(\arctan\left(\tfrac{1}{n+1}\right)\right)e^{-(n+1)\arctan\left(\frac{1}{n+1}\right)}$$

- $\star$ Donc, nous avons :

$$\left|\frac{e^{-(n+1)\varepsilon}(n+1)\sin\varepsilon}{(n+1)^2+1}\right|\leqslant\frac{(n+1)\sin\left(\arctan\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)e^{-(n+1)\arctan\left(\frac{1}{n+1}\right)}}{(n+1)^2+1}$$

$\star$ Maintenant, il faut connaître le comportement de la suite numérique

$$\frac{(n+1)\sin\left(\arctan\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)e^{-(n+1)\arctan\left(\frac{1}{n+1}\right)}}{(n+1)^2+1}$$

Nous commençons par faire un développement limité de $\sin\left(\arctan\left(\dfrac{1}{n+1}\right)\right)$ lorsque n est voisin de $+\infty$

$\hookrightarrow$ Commençons par le faire au voisinage de 0 :

$$\sin x = x + x\varepsilon(x) \text{ et } \arctan x = x + x\varepsilon(x) \text{ et donc } \sin(\arctan x) = x + x\varepsilon(x)$$

$\hookrightarrow$ Ce qui veut dire qu'au voisinage de $+\infty$, nous avons :

$$\sin\left(\arctan\left(\frac{1}{n+1}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\approx} \frac{1}{n+1}$$

D'autre part,

$$e^{-(n+1)\arctan\left(\frac{1}{n+1}\right)} = e^{-(n+1)\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+1}\varepsilon\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)} = e^{-1+\varepsilon\left(\frac{1}{n+1}\right)}$$

Nous avons donc $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-(n+1)\arctan\left(\frac{1}{n+1}\right)} = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{-1+\varepsilon\left(\frac{1}{n+1}\right)} = \dfrac{1}{e}$

Nous en déduisons donc :

$$\frac{(n+1)\sin\left(\arctan\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)e^{-(n+1)\arctan\left(\frac{1}{n+1}\right)}}{(n+1)^2+1} \underset{n\to+\infty}{\approx} \frac{1}{e\left((n+1)^2+1\right)}$$

La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{e\left((n+1)^2+1\right)}$ étant convergente, il en est de même de la série

$$\sum_{n\geqslant 0}\frac{(n+1)\sin\left(\arctan\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)e^{-(n+1)\arctan\left(\frac{1}{n+1}\right)}}{(n+1)^2+1}$$

Ce qui mène à la conclusion que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{e^{-(n+1)\varepsilon}(n+1)\sin\varepsilon}{(n+1)^2+1}$ converge normalement, et donc uniformément.

$\Longrightarrow$ Pour tout $n\in\mathbb{N}$, nous avons $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{e^{-(n+1)\varepsilon}(n+1)\sin\varepsilon}{(n+1)^2+1} = 0$, et donc de la convergence uniforme et du théorème de d'inversion des limites 7.2.1, nous avons

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{n\geqslant 0}\frac{e^{-(n+1)\varepsilon}(n+1)\sin\varepsilon}{(n+1)^2+1} = \sum_{n\geqslant 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{e^{-(n+1)\varepsilon}(n+1)\sin\varepsilon}{(n+1)^2+1} = 0$$

$\Longrightarrow$ En conclusion : $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{n\geqslant 0}\frac{e^{-(n+1)\varepsilon}}{(n+1)^2+1}\left((n+1)\sin\varepsilon+\cos\varepsilon\right) = \sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{(n+1)^2+1}$

$\Longrightarrow$ **En conclusion, et pour terminer**

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{e^x-1}\,\mathrm{d}x &= \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ X\to+\infty}} \int_\varepsilon^X \frac{\sin x}{e^x-1}\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ X\to+\infty}} \left(\int_\varepsilon^X \left(\sum_{n\geqslant 0} \sin x e^{-(n+1)x} \right) \mathrm{d}x \right) \\
&= \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ X\to+\infty}} \left(\sum_{n\geqslant 0} \int_\varepsilon^X \sin x e^{-(n+1)x}\,\mathrm{d}x \right) \\
&= \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ X\to+\infty}} \left(\sum_{n\geqslant 0} \frac{e^{-(n+1)\varepsilon}}{(n+1)^2+1} \left((n+1)\sin\varepsilon+\cos\varepsilon\right) - \sum_{n\geqslant 0} \frac{e^{-(n+1)X}}{(n+1)^2+1} \left((n+1)\sin X+\cos X\right) \right) \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} \left(\sum_{n\geqslant 0} \frac{e^{-(n+1)\varepsilon}}{(n+1)^2+1} \left((n+1)\sin\varepsilon+\cos\varepsilon\right) \right) \\
&\qquad - \lim_{X\to+\infty} \left(\sum_{n\geqslant 0} \frac{e^{-(n+1)X}}{(n+1)^2+1} \left((n+1)\sin X+\cos X\right) \right) \\
&= \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{(n+1)^2+1} = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2+1}
\end{aligned}$$

Et donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{e^x-1}\,\mathrm{d}x = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2+1}$

Q.E.D.

OUF ! !

Exercice 18 :

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \dfrac{\alpha^n \cos(nx)}{n!}$

1. *Etudier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{\alpha^n \cos(nx)}{n!}$*

   ▷ Nous allons montrer que la série est normalement donc uniformément convergente sur $\mathbb{R}$ en entier :
   $$\left| \frac{\alpha^n \cos(nx)}{n!} \right| \leqslant \frac{|\alpha|^n}{n!}$$
   La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{|\alpha|^n}{n!}$ est une série à termes positifs convergente (*nous avons* $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{|\alpha|^n}{n!} = e^{|\alpha|}$), donc la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{\alpha^n \cos(nx)}{n!}$ est normalement convergente

   ▷ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n(x) = \dfrac{\alpha^n \cos(nx)}{n!}$ est continue sur $\mathbb{R}$. De la convergence uniforme de la série, nous déduisons que la fonction $C(x) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{\alpha^n \cos(nx)}{n!}$ est continue sur $\mathbb{R}$

2. *Nous appelons $C(x) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{\alpha^n \cos(nx)}{n!}$ pour tout x appartenant au domaine de convergence. Donner une expression de C à l'aide de fonctions usuelles*

   Nous avons $f_n(x) = \dfrac{\alpha^n \cos(nx)}{n!} = \mathrm{Re}\left(\dfrac{\alpha^n e^{inx}}{n!}\right) = \mathrm{Re}\left(\dfrac{\left(\alpha e^{ix}\right)^n}{n!}\right)$

Et donc $C(x) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{\alpha^n \cos(nx)}{n!} = \mathrm{Re}\left(\sum_{n\geqslant 0} \frac{(\alpha e^{ix})^n}{n!}\right) = \mathrm{Re}\left(\exp\left(\alpha e^{ix}\right)\right)$.

Or, $\exp\left(\alpha e^{ix}\right) = e^{\alpha(\cos x + i\sin x)} = e^{\alpha\cos x} \times e^{i\alpha\sin x} = e^{\alpha\cos x}\left(\cos(\alpha\sin x) + i\sin(\alpha\sin x)\right)$. D'où, nous tirons :

$$\boxed{C(x) = e^{\alpha\cos x}\cos(\alpha\sin x)}$$

3. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous appelons :*

$$J_n = \int_{-\pi}^{+\pi} \sin(nx)\, C(x)\, \mathrm{d}x \text{ et } I_n = \int_{-\pi}^{+\pi} \cos(nx)\, C(x)\, \mathrm{d}x$$

(a) *Calculer J_n puis I_n*

▷ La fonction $C(x) = e^{\alpha\cos x}\cos(\alpha\sin x)$ est clairement paire, et donc la fonction $\sin(nx)\, C(x)$ est donc impaire, d'où, nous pouvons conclure que $J_n = \int_{-\pi}^{+\pi} \sin(nx)\, C(x)\, \mathrm{d}x = 0$

▷ Maintenant, $\cos(nx)\, C(x) = \sum_{p\geqslant 0} \frac{\alpha^p \cos(px)\cos(nx)}{p!}$

Considérons $V_p(x) = \frac{\alpha^p \cos(px)\cos(nx)}{p!}$. Démontrons que la série $\sum_{p\geqslant 0} V_p(x)$, converge normalement sur $\mathbb{R}$

$$|V_p(x)| = \left|\frac{\alpha^p \cos(px)\cos(nx)}{p!}\right| \leqslant \frac{|\alpha|^p}{p!}$$

Comme tout à l'heure, la série numérique $\sum_{p\geqslant 0} \frac{|\alpha|^p}{p!}$ est convergente, et la série de fonctions $\sum_{p\geqslant 0} \frac{\alpha^p \cos(px)\cos(nx)}{p!}$ est normalement, donc uniformément convergente sur $\mathbb{R}$

▷ D'autre part, pour tout $p \in \mathbb{N}$, la fonction V_p est continue sur $\mathbb{R}$, et nous pouvons donc écrire :

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos(nx)\, C(x)\, \mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{+\pi} \sum_{p\geqslant 0} \frac{\alpha^p \cos(px)\cos(nx)}{p!}\, \mathrm{d}x = \sum_{p\geqslant 0} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\alpha^p \cos(px)\cos(nx)}{p!}\, \mathrm{d}x$$

▷ Il nous faut donc calculer $\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\alpha^p \cos(px)\cos(nx)}{p!}\, \mathrm{d}x$

Pour commencer, $\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\alpha^p \cos(px)\cos(nx)}{p!}\, \mathrm{d}x = \frac{\alpha^p}{p!} \int_{-\pi}^{+\pi} \cos(px)\cos(nx)\, \mathrm{d}x$.

Le nœud de la question est donc le calcul de $\int_{-\pi}^{+\pi} \cos(px)\cos(nx)\, \mathrm{d}x$

⋆ Ah !! les formules trigonométriques !! Pour commencer, nous avons :

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\right]$$

Et donc

$$\cos(px)\cos(nx) = \frac{1}{2}\left[\cos(p-n)x + \cos(p+n)x\right]$$

D'où $\int_{-\pi}^{+\pi} \cos(px)\cos(nx)\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[\int_{-\pi}^{+\pi} \cos(p-n)x\, \mathrm{d}x + \int_{-\pi}^{+\pi} \cos(p+n)x\, \mathrm{d}x\right]$

⋆ Nous avons, si $n \neq p$:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos(p-n)x\, \mathrm{d}x = \left[\frac{\sin(p-n)x}{p-n}\right]_{-\pi}^{+\pi} = 0$$

Si $n = p$:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos(p-n)\,x\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{+\pi} \mathrm{d}x = 2\pi$$

⋆ De même si $n + p \neq 0$, c'est à dire $(n \neq 0)$ ou $(p \neq 0)$:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos(p+n)\,x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{\sin(p+n)\,x}{p+n}\right]_{-\pi}^{+\pi} = 0$$

Et si $n + p = 0$, c'est à dire $(n = 0)$ et $(p = 0)$:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos(p+n)\,x\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{+\pi} \mathrm{d}x = 2\pi$$

⋆ En résumé :

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos(px)\cos(nx)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[\int_{-\pi}^{+\pi} \cos(p-n)\,x\,\mathrm{d}x + \int_{-\pi}^{+\pi} \cos(p+n)\,x\,\mathrm{d}x\right] = \begin{cases} 0 \text{ si } n \neq p \\ \pi \text{ si } n = p \\ 2\pi \text{ si } n = 0 \end{cases}$$

▷ Et donc, en remontant :

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\alpha^p \cos(px)\cos(nx)}{p!}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 \text{ si } n \neq p \\ \dfrac{\alpha^n \pi}{n!} \text{ si } n = p \\ 2\pi \text{ si } n = 0 \end{cases}$$

▷ D'où :

$$I_n = \int_{-\pi}^{+\pi} \cos(nx)\,C(x)\ \mathrm{d}x = \sum_{p\geqslant 0}\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\alpha^p \cos(px)\cos(nx)}{p!}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{\alpha^n \pi}{n!} \text{ si } n \geqslant 1 \\ 2\pi \text{ si } n = 0 \end{cases}$$

(b) *Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$*

$\Longrightarrow$ ....Facile ! ! il est clair que $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n = 0$, puisque, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $J_n = 0$! !

$\Longrightarrow$ Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, nous avons α^n qui est négligeable devant $n!$ *(c'est à dire $\alpha^n \in o(n!)$)* et donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\alpha^n}{n!} = 0$, c'est à dire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$

$\Longrightarrow$ Il aurait été possible d'étudier la série numérique $\sum\limits_{n\geqslant 0} I_n$, étude qui ne pose pas de difficultés :

$$\begin{aligned}\sum_{n\geqslant 0} I_n &= I_0 + \sum_{n\geqslant 1} I_n \\ &= 2\pi + \sum_{n\geqslant 1}\frac{\alpha^n \pi}{n!} \\ &= 2\pi + \pi\sum_{n\geqslant 0}\frac{\alpha^n}{n!} - \pi \\ &= \pi + \pi e^{\alpha}\end{aligned}$$

En conclusion, $\sum\limits_{n\geqslant 0} I_n = \pi(1 + e^{\alpha})$

4. *Lorsque cela existe, nous posons $S(x) = \sum\limits_{n\geqslant 0}\dfrac{\alpha^n \cos^2(nx)}{n!}$ Déterminer l'ensemble de définition de S et exprimer S à l'aide des fonctions usuelles.*

$\Longrightarrow$ Tout d'abord, avec les mêmes arguments que précédemment, puisque $\left|\dfrac{\alpha^n \cos^2(nx)}{n!}\right| \leqslant \dfrac{|\alpha|^n}{n!}$ la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}\dfrac{\alpha^n \cos^2(nx)}{n!}$ est normalement convergente.

$\Longrightarrow$ D'autre part, en utilisant les formules trigonométriques :

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 \Longleftrightarrow \cos^2 x = \frac{1}{2}\left(1 + \cos 2x\right)$$

C'est à dire que $\dfrac{\alpha^n \cos^2(nx)}{n!} = \dfrac{\alpha^n}{2n!}\left(1 + \cos 2nx\right)$ D'où :

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n\geqslant 0} \frac{\alpha^n \cos^2(nx)}{n!} \\ &= \sum_{n\geqslant 0} \frac{\alpha^n}{2n!}\left(1 + \cos 2nx\right) \\ &= \sum_{n\geqslant 0} \frac{\alpha^n}{2n!} + \sum_{n\geqslant 0} \frac{\alpha^n}{2n!} \cos 2nx \\ &= \frac{1}{2} e^\alpha + \frac{1}{2} C(2x) \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ Et si on tient à exprimer S avec les fonctions de base :

$$S(x) = \frac{e^\alpha + e^{\alpha \cos 2x} \cos(\alpha \sin 2x)}{2}$$

Exercice 19 :

On considère la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que : la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$

Montrer que la série de fonctions $\sum b_n \sin nx$ converge uniformément si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty} nb_n = 0$

1. **On suppose que la série $\sum b_n \sin nx$ converge uniformément**

   Nous allons démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} nb_n = 0$.

   Comme la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$, on peut remarquer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $b_n \geqslant 0$

   On considère la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $x_n = \dfrac{\pi}{2n}$ et on appelle $S_n = \sum\limits_{\frac{n}{2}\leqslant p\leqslant n} b_p \sin px_n$, c'est à dire $S_n = \sum\limits_{\frac{n}{2}\leqslant p\leqslant n} b_n \sin \dfrac{p\pi}{2n}$

   Ainsi,

   - $\star$ Si n est pair, c'est à dire $n = 2k$, alors $S_n = \sum\limits_{p=k}^{2k} b_p \sin px_n$
   - $\star$ Si n est impair, c'est à dire $n = 2k+1$, alors $\dfrac{n}{2} = k + \dfrac{1}{2}$ et donc $S_n = \sum\limits_{p=k+1}^{2k+1} b_p \sin px_n$

   On remarque que, donc, quelle que soit la parité de n, S_n a le même nombre d'éléments $k+1$

   Ainsi, pour $\dfrac{n}{2} \leqslant p \leqslant n$, nous avons

$$\frac{n}{2} x_n \leqslant px_n \leqslant nx_n \Longleftrightarrow \frac{n}{2} \times \frac{\pi}{2n} \leqslant px_n \leqslant n \times \frac{\pi}{2n} \Longleftrightarrow \frac{\pi}{4} \leqslant px_n \leqslant \frac{\pi}{2}$$

   De la croissance de la fonction sin sur l'intervalle $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$, nous tirons :

$$\sin\frac{\pi}{4} \leqslant \sin px_n \leqslant \sin\frac{\pi}{2} \Longleftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant \sin px_n \leqslant 1$$

En passant à la sommation, nous avons alors

$$\sum_{\frac{n}{2}\leqslant p\leqslant n} b_n \sin px_n \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}\sum_{\frac{n}{2}\leqslant p\leqslant n} b_p \Longleftrightarrow S_n \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}\sum_{\frac{n}{2}\leqslant p\leqslant n} b_p$$

De la décroissance de la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on déduit que, pour tout $\frac{n}{2} \leqslant p \leqslant n$, nous avons $b_p \geqslant b_n$, et donc

$$S_n \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}\sum_{\frac{n}{2}\leqslant p\leqslant n} b_p \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}\sum_{\frac{n}{2}\leqslant p\leqslant n} b_n \geqslant \frac{nb_n\sqrt{2}}{4} \geqslant 0$$

La série $\sum b_n \sin nx$ convergeant uniformément, cette série est de Cauchy, et donc, en particulier,

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{\frac{n}{2}\leqslant p\leqslant n} b_p \sin px_n = \lim_{n\to+\infty} S_n = 0$$

De l'inégalité $S_n \geqslant \dfrac{nb_n\sqrt{2}}{4} \geqslant 0$, nous déduisons $\lim\limits_{n\to+\infty} nb_n = 0$

Ce que nous voulions

2. **Maintenant, supposons** $\lim\limits_{n\to+\infty} nb_n = 0$

   Nous allons donc démontrer la réciproque.

   (a) Pour commencer nous allons poser les fondations

   $\Rightarrow$ Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} nb_n = 0$, pour $\varepsilon > 0$, il existe $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant m_\varepsilon$ alors $nb_n \leqslant \varepsilon$

   $\Rightarrow$ Soit $x \in]0;\pi]$ et $N = \left[\dfrac{\pi}{x}\right]$ où $[\bullet]$ désigne la partie entière.

   Nous avons, d'une part, puisque $x \in]0;\pi]$, $\dfrac{1}{x} \in \left[\dfrac{1}{\pi};+\infty\right[$ et $\dfrac{\pi}{x} \in [+1;+\infty[$.

   D'autre part $\left[\dfrac{\pi}{x}\right] \leqslant \dfrac{\pi}{x} < \left[\dfrac{\pi}{x}\right] + 1$ et donc

$$x\left[\frac{\pi}{x}\right] \leqslant x \times \frac{\pi}{x} < x\left[\frac{x}{\pi}\right] + x \Longleftrightarrow xN \leqslant \pi < xN + x \Longleftrightarrow 0 \leqslant \pi - xN < x$$

   $\Rightarrow$ On appelle $M = m_\varepsilon + N$ et soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $p \geqslant M$

   $\Rightarrow$ On considère $\sum\limits_{k=m_\varepsilon}^{p} b_k \sin kx$ Nous avons donc :

$$\sum_{k=m_\varepsilon}^{p} b_k \sin kx = \sum_{k=m_\varepsilon}^{M-1} b_k \sin kx + \sum_{k=M}^{p} b_k \sin kx$$

   $\Rightarrow$ Nous appelons $A = \sum\limits_{k=m_\varepsilon}^{M-1} b_k \sin kx$ et $B = \sum\limits_{k=M}^{p} b_k \sin kx$

   (b) Une étude de A

   Nous avons :

$$|A| = \left|\sum_{k=m_\varepsilon}^{M-1} b_k \sin kx\right| \leqslant \sum_{k=m_\varepsilon}^{M-1} |b_k|\,|\sin kx| = \sum_{k=m_\varepsilon}^{M-1} b_k\,|\sin kx|$$

   Nous utilisons, maintenant, l'inégalité, démontrée ailleurs, $|\sin x| \leqslant |x|$ qui nous donne donc $|\sin kx| \leqslant k\,|x|$, et comme $x \in]0;\pi]$, nous avons $|\sin kx| \leqslant kx$. Ainsi :

$$|A| \leqslant \sum_{k=m_\varepsilon}^{M-1} b_k\,|\sin kx| \leqslant \sum_{k=m_\varepsilon}^{M-1} b_k \times kx = x\sum_{k=m_\varepsilon}^{M-1} kb_k$$

Comme $k \geqslant m_\varepsilon$, nous avons $0 \leqslant kb_k \leqslant \varepsilon$ et donc :

$$|A| \leqslant x \sum_{k=m_\varepsilon}^{M-1} \varepsilon = x\,(M-1-m_\varepsilon+1)\,\varepsilon = x\,(m_\varepsilon+N-m_\varepsilon)\,\varepsilon = \varepsilon N x \leqslant \pi\varepsilon$$

(c) <u>Une étude de B</u>

$\Rightarrow$ Nous allons utiliser la transformation d'Abel vue en 6.5.2 pour transformer B

Nous appelons $\sigma_k(x) = \displaystyle\sum_{j=0}^{k} \sin jx$ [1]. Alors :

$$B = \sum_{k=M}^{p} b_k \sin kx = \sum_{k=M}^{p} (b_k - b_{k+1})\,\sigma_k(x) + \sigma_p(x)\,b_p - \sigma_{M-1}(x)\,b_M$$

$\Rightarrow$ Prouvons que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, nous avons $|\sigma_k(x)| \leqslant \dfrac{\pi}{x}$

En utilisant la formule trigonométrique $\sin a \sin b = \dfrac{1}{2}\left[\cos(a-b) - \cos(a+b)\right]$, nous obtenons :

$$\sin\frac{x}{2}\sin jx = \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{x}{2}-jx\right) - \cos\left(\frac{x}{2}+jx\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\cos\frac{x}{2}(2j-1) - \cos\frac{x}{2}(2j+1)\right]$$

En passant à la sommation, nous avons :

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{k} \sin jx \sin\frac{x}{2} &= \sin\frac{x}{2}\sum_{j=1}^{k}\sin jx \\
&= \sin\frac{x}{2}\sigma_k(x) \\
&= \sum_{j=1}^{k}\frac{1}{2}\left[\cos\frac{x}{2}(2j-1) - \cos\frac{x}{2}(2j+1)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\sum_{j=1}^{k}\cos\frac{x}{2}(2j-1) - \sum_{j=1}^{k}\cos\frac{x}{2}(2j+1)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\sum_{j=1}^{k}\cos\frac{x}{2}(2j-1) - \sum_{j=2}^{k+1}\cos\frac{x}{2}(2j-1)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}(2k+1)\right]
\end{aligned}$$

Ainsi, $\sin\dfrac{x}{2}\sigma_k(x) = \dfrac{1}{2}\left[\cos\dfrac{x}{2} - \cos\dfrac{x}{2}(2k+1)\right]$ et donc :

$$\left|\sin\frac{x}{2}\sigma_k(x)\right| = \frac{1}{2}\left|\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}(2k+1)\right| \leqslant \frac{1}{2}\left(\left|\cos\frac{x}{2}\right| + \left|\cos\frac{x}{2}(2k+1)\right|\right) \leqslant 1$$

Ainsi, $\left|\sin\dfrac{x}{2}\right| |\sigma_k(x)| \leqslant 1$

Comme $x \in \left]0;\pi\right]$, nous avons $\dfrac{x}{2} \in \left]0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ et donc $\sin\dfrac{x}{2} > 0$ d'où :

$$\left|\sin\frac{x}{2}\right| |\sigma_k(x)| \leqslant 1 \Longleftrightarrow \sin\frac{x}{2}|\sigma_k(x)| \leqslant 1 \Longleftrightarrow |\sigma_k(x)| \leqslant \frac{1}{\sin\frac{x}{2}}$$

Nous utilisons, maintenant, une inégalité classique vraie pour tout $u \in \left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ qui est :

$$\frac{2}{\pi}u \leqslant \sin u \leqslant u$$

1. Il faut remarquer que, pour $j=0$, nous avons $\sin jx = 0$ et que nous aurions pu très bien écrire $\sigma_k(x) = \displaystyle\sum_{j=1}^{k}\sin jx$ sans rien changer ; j'ai voulu coller au résultat 6.5.2

En appliquant cette inégalité à $u = \dfrac{x}{2}$, nous avons $\dfrac{2}{\pi} \times \dfrac{x}{2} \leqslant \sin \dfrac{x}{2} \Longleftrightarrow \dfrac{x}{\pi} \leqslant \sin \dfrac{x}{2}$

De là, nous tirons $\dfrac{1}{\sin \frac{x}{2}} \leqslant \dfrac{1}{\frac{x}{\pi}} = \dfrac{\pi}{x}$

Nous avons donc démontré que, si $x \in \left]0; \pi\right]$, alors, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, nous avons

$$|\sigma_k(x)| \leqslant \frac{\pi}{x}$$

$\Rightarrow$ Ainsi :

$$\begin{aligned}
|B| = & \left| \sum_{k=M}^{p} (b_k - b_{k+1}) \sigma_k(x) + \sigma_p(x) b_p - \sigma_{M-1}(x) b_M \right| \\
\leqslant & \left| \sum_{k=M}^{p} (b_k - b_{k+1}) \sigma_k(x) \right| + |\sigma_p(x) b_p| + |\sigma_{M-1}(x) b_M| \\
\leqslant & \sum_{k=M}^{p} |b_k - b_{k+1}| \, |\sigma_k(x)| + |\sigma_p(x) b_p| + |\sigma_{M-1}(x) b_M| \\
\leqslant & \frac{\pi}{x} \left(\sum_{k=M}^{p} |b_k - b_{k+1}| + |b_p| + |b_M| \right) \\
\leqslant & \frac{\pi}{x} \left(\sum_{k=M}^{p} (b_k - b_{k+1}) + b_p + b_M \right) \text{ car } (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est une suite décroissante et } b_k \geqslant 0 \\
\leqslant & \frac{\pi}{x} (b_M - b_{p+1} + b_p + b_M) \leqslant \frac{\pi}{x} (2b_M + b_p) \\
\leqslant & \frac{3b_M \pi}{x} \text{ car } (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est une suite décroissante}
\end{aligned}$$

Et donc $|B| \leqslant \dfrac{3b_M\pi}{x} < 3b_M (N+1)$ puisque $\dfrac{\pi}{x} < \left[\dfrac{\pi}{x}\right] + 1 \Longleftrightarrow \dfrac{\pi}{x} < N+1$

Et donc $|B| \leqslant 3b_M (N+1) \leqslant 3b_M (N + m_\varepsilon) = 3Mb_M \leqslant 3\varepsilon$ puisque $M = N + m_\varepsilon \geqslant m_\varepsilon$

(d) Finalement, nous avons montré que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$, tel que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, si $p \geqslant m_\varepsilon$, alors, pour tout $x \in \left]0; \pi\right]$, alors, $\left| \displaystyle\sum_{k=m_\varepsilon}^{p} b_k \sin kx \right| \leqslant (\pi + 3)\varepsilon$

Ce qui montre que la série est uniformément convergente sur l'intervalle $\left]0; \pi\right]$

$\rightarrow$ L'inégalité $\left| \displaystyle\sum_{k=m_\varepsilon}^{p} b_k \sin kx \right| \leqslant (\pi + 3)\varepsilon$ est aussi vérifiée si $x = 0$

$\rightarrow$ Pour $x \in [-\pi; 0]$, alors $-x \in [0; \pi]$ et l'inégalité, pour $p \geqslant m_\varepsilon$, $\left| \displaystyle\sum_{k=m_\varepsilon}^{p} b_k \sin k(-x) \right| \leqslant (\pi + 3)\varepsilon$ est toujours vraie.

Or, $\sin k(-x) = \sin -kx = -\sin kx$, et donc, pour $p \geqslant m_\varepsilon$:

$$\left| \sum_{k=m_\varepsilon}^{p} b_k \sin k(-x) \right| \leqslant (\pi + 3)\varepsilon \Longleftrightarrow \left| - \sum_{k=m_\varepsilon}^{p} b_k \sin kx \right| \leqslant (\pi + 3)\varepsilon \Longleftrightarrow \left| \sum_{k=m_\varepsilon}^{p} b_k \sin kx \right| \leqslant (\pi + 3)\varepsilon$$

On vient donc de montrer que la série est uniformément convergente sur l'intervalle $[-\pi; \pi]$

$\rightarrow$ Si $x \in \mathbb{R}$, en utilisant la périodicité de $\sin x$, nous avons la même inégalité :

En effet, il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $(2n+1)\pi \leqslant x \leqslant (2n+3)\pi$, et, en fait, nous avons $n = \left[\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x}{\pi} - 1\right)\right]$ où $[\bullet]$ désigne la partie entière.

Alors $-\pi \leqslant x - 2(n+1)\pi \leqslant \pi$ et l'inégalité, pour $p \geqslant m_\varepsilon$, $\left| \displaystyle\sum_{k=m_\varepsilon}^{p} b_k \sin k(x - 2(n+1)\pi) \right| \leqslant (\pi + 3)\varepsilon$ est toujours vraie.

De $\sin k\left(x-2\left(n+1\right)\pi\right)=\sin\left(kx-2k\left(n+1\right)\pi\right)=\sin kx$, nous avons aussi, pour $p\geqslant m_\varepsilon$, $\left|\displaystyle\sum_{k=m_\varepsilon}^{p} b_k\sin kx\right|\leqslant\left(\pi+3\right)\varepsilon$ qui est toujours vraie.

La série de fonctions $\sum b_n\sin nx$ converge donc uniformément sur $\mathbb{R}$.

Exercice 20 :

Soit $x\in\mathbb{R}$ tel que $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$. Etudier la convergence et la somme de la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{2^n}\tan\left(\frac{x}{2^n}\right)$

1. Etude de la convergence

   Lorsque x est voisin de 0, nous avons $\tan x\underset{x\to 0}{\approx}x$ et donc, lorsque n tend vers $+\infty$ $\tan\left(\frac{x}{2^n}\right)\underset{n\to+\infty}{\approx}\frac{x}{2^n}$ et donc $\frac{1}{2^n}\tan\left(\frac{x}{2^n}\right)\underset{n\to+\infty}{\approx}\frac{x}{2^n}\times\frac{1}{2^n}=\frac{x}{2^{2n}}$

   La série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{x}{2^{2n}}$ est une série convergente et donc la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{2^n}\tan\left(\frac{x}{2^n}\right)$ est convergente

2. Etude de la somme de la série

   Nous utilisons donc le fait que $\tan x=\frac{\cos x}{\sin x}-2\frac{\cos 2x}{\sin 2x}=\cot x-2\cot 2x$.

   ▷ Ainsi, nous avons $\tan\left(\frac{x}{2^n}\right)=\cot\left(\frac{x}{2^n}\right)-2\cot\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right)$ et

   $$\frac{1}{2^n}\tan\left(\frac{x}{2^n}\right)=\frac{1}{2^n}\cot\left(\frac{x}{2^n}\right)-\frac{1}{2^{n-1}}\cot\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right)$$

   ▷ Appelons $u_n\left(x\right)=\frac{1}{2^n}\cot\left(\frac{x}{2^n}\right)$ et alors $\frac{1}{2^n}\tan\left(\frac{x}{2^n}\right)=u_n\left(x\right)-u_{n-1}\left(x\right)$.

   Appelons aussi $S_n\left(x\right)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}\tan\left(\frac{x}{2^k}\right)=\tan x+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}\tan\left(\frac{x}{2^k}\right)$

   $$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}u_k\left(x\right)-u_{k-1}\left(x\right)&=\sum_{k=1}^{n}u_k\left(x\right)-\sum_{k=1}^{n}u_{k-1}\left(x\right)\\&=\sum_{k=1}^{n}u_k\left(x\right)-\sum_{k=0}^{n-1}u_k\left(x\right)=u_n\left(x\right)-u_0\left(x\right)=\frac{1}{2^n}\cot\left(\frac{x}{2^n}\right)-\cot x\end{aligned}$$

   Ainsi $S_n\left(x\right)=\tan x-\cot x+\frac{1}{2^n}\cot\left(\frac{x}{2^n}\right)$

   ▷ Pour connaitre $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}S_n\left(x\right)$, il faut connaître $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n}\cot\left(\frac{x}{2^n}\right)$

   Le développement asymptotique de $\cot x$ en 0 est donné par $\cot x=\frac{1}{x}-\frac{x}{6}+x\varepsilon\left(x\right)$ et lorsque n tend vers $+\infty$, nous avons

   $$\cot\left(\frac{x}{2^n}\right)=\frac{2^n}{x}-\frac{x}{6\times 2^n}+\frac{x}{2^n}\varepsilon\left(\frac{x}{2^n}\right)\text{ et donc }\frac{1}{2^n}\cot\left(\frac{x}{2^n}\right)=\frac{1}{x}-\frac{x}{6\times 4^n}+\frac{x}{4^n}\varepsilon\left(\frac{x}{2^n}\right)$$

   Or, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n}\cot\left(\frac{x}{2^n}\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{6\times 4^n}+\frac{x}{4^n}\varepsilon\left(\frac{x}{2^n}\right)\right)=\frac{1}{x}$

   Nous concluons que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}S_n\left(x\right)=\tan x-\cot x+\frac{1}{x}$ et donc $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{2^n}\tan\left(\frac{x}{2^n}\right)=\tan x-\cot x+\frac{1}{x}$

Quelques précisions : Nous avons utilisé le fait que $\tan x=\frac{\cos x}{\sin x}-2\frac{\cos 2x}{\sin 2x}$.

Nous allons démontrer cette relation.

En utilisant les relations avec les arcs doubles $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ et $\sin 2x = 2\sin x\cos x$, nous avons :

$$\begin{aligned}\frac{\cos x}{\sin x} - 2\frac{\cos 2x}{\sin 2x} &= \frac{\cos x}{\sin x} - 2\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{2\sin x\cos x} = \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x\cos x} \\ &= \frac{\cos^2 x}{\sin x\cos x} - \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x\cos x} = \frac{\cos^2 x - \cos^2 x + \sin^2 x}{\sin x\cos x} \\ &= \frac{\sin^2 x}{\sin x\cos x} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x\end{aligned}$$

Chapitre 8

Les séries entières

Introduction

1. L'objet de ce chapitre est de considérer des séries de fonctions de terme général $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, à priori simple, dans lesquelles, les termes généraux seraient des monômes $f_n(z) = a_n z^n$, et les sommes partielles $S_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ des polynômes.
2. Nous étudierons ces suites de fonctions dans le domaine complexe ou dans le domaine réel, c'est à dire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} f_n : \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & a_n z^n \end{array} \right. \quad \text{avec } a_n \in \mathbb{C} \text{ ou bien } \left\{ \begin{array}{rcl} f_n : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & a_n x^n \end{array} \right. \quad \text{avec } a_n \in \mathbb{C}$$

   Bien entendu, ce qui sera vrai dans $\mathbb{C}$, ensemble des nombres complexes, le sera aussi dans $\mathbb{R}$, ensemble des nombres réels et lorsque ce sera nécessaire, nous ferons une étude spécifique sur $\mathbb{R}$
3. Les outils habituels vus dans les séries numériques *(règle de D'Alembert, de Cauchy)* seront toujours utilisés, mais une étude très précise permettra de mieux connaître le mode de convergence de ces séries, et les fonctions définies par ces séries.
4. Les résultats établis dans le chapitre 7 sur les séries de fonctions seront aussi utilisés

8.1 Etude générale

8.1.1 Définition

- ⋆ Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes.
  Nous pouvons donc lui associer une série $\sum_{\in\mathbb{N}} u_n(z)$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, où, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n(z) = a_n z^n$
- ⋆ On appelle <u>série entière</u> la série de fonctions

$$\sum u_n(z) = \left((u_n(z))_{n\in\mathbb{N}}, \sum_{n=0}^{N} u_n(z) \right)$$

de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ où $(\forall n \in \mathbb{N})\,(\forall z \in \mathbb{C})\,(u_n(z) = a_n z^n)$

Remarque 1 :

1. Pour une série entière, nous chercherons d'abord, à déterminer <u>le domaine de convergence</u>, c'est à dire le sous ensemble de $\mathbb{R}$ ou de $\mathbb{C}$ sur lequel la série est convergente. Dans un second temps, nous étudierons les propriétés de la somme de cette série

2. En fait, nous considérerons ces séries entières comme des séries numériques, dans lequel z sera un nombre comme un autre, non fixé.

Exemple 1 :

1. La série $\displaystyle\sum_{\in\mathbb{N}} \frac{z^n}{n!}$ est convergente pour tout nombre complexe $z \in \mathbb{C}$

   En effet, si nous posons $u_n(z) = \dfrac{z^n}{n!}$, la règle de d'Alembert nous donne :

   $$\left|\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right| = \frac{|z|}{n+1}$$

   Et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{|z|}{n+1} = 0$, pour tout $z \in \mathbb{C}$
2. La série entière $\displaystyle\sum_{\in\mathbb{N}} n!z^n$ ne converge que pour $z = 0$
3. La série entière $\displaystyle\sum_{\in\mathbb{N}} z^n$ appelée aussi série géométrique est convergente pour tout nombre complexe $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$; elle est divergente pour tout nombre complexe tel que $|z| \geqslant 1$ puisqu'à ce moment, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} z^n \neq 0$
4. Continuons sur un exemple de série entière à variable réelle $x \in \mathbb{R}$, la série géométrique $\sum x^n = \left((x^n)_{n\in\mathbb{N}}, \displaystyle\sum_{n=0}^{N} x^n\right)$ qui est convergente pour $|x| < 1$ et de somme $\sum x^n = \dfrac{1}{1-x}$. La figure 8.1 montre la progression de cette convergence

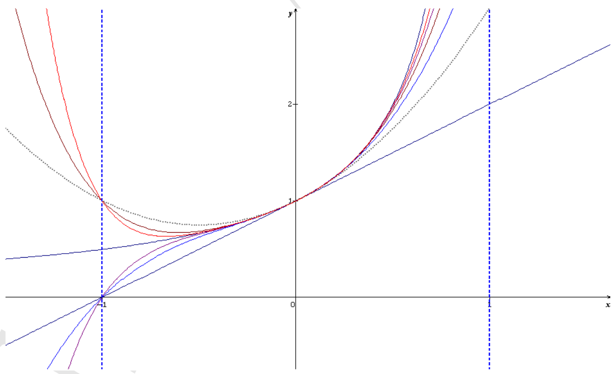

Figure 8.1 – La représentation des différents polynômes qui convergent vers $\dfrac{1}{1-x}$ si $|x| < 1$

8.1.2 Lemme d'Abel

Soit $r_0 > 0$
On suppose qu'il existe $M > 0$ tel que $(\forall n \in \mathbb{N})\ (|a_n|\, r_0^n \leqslant M)$
Alors, pour tout $r \in \left]0, r_0\right[$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge normalement pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \leqslant r$

Démonstration

Soit $r \in \left]0, r_0\right[$ et $|z| \leqslant r$.

Alors, de $|a_n|\, r_0^n \leqslant M \iff |a_n| \leqslant \dfrac{M}{r_0^n}$, nous tirons :

$$|a_n z^n| = |a_n|\,|z^n| = |a_n|\,|z|^n \leqslant |a_n|\, r^n \leqslant \frac{M}{r_0^n} r^n = M\left(\frac{r}{r_0}\right)^n$$

La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} M\left(\frac{r}{r_0}\right)^n$ est une série numérique, géométrique, convergente puisque $0 < \dfrac{r}{r_0} < 1$, et donc, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge normalement pour tout z tel que $|z| \leqslant r$

Remarque 2 :

1. Soit une série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$; on cherche, d'abord, la convergence absolue de cette série, c'est à dire la convergence de la série des modules :

$$\sum_{n\geqslant 0} |a_n z^n| = \sum_{n\geqslant 0} |a_n|\, r^n \text{ où } |z| = r \text{ avec } r \geqslant 0$$

$\Rightarrow$ S'il existe $r_0 \geqslant 0$ tel que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} |a_n|\, r_0^n$ converge, alors, pour tout r tel que $0 \leqslant r \leqslant r_0$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} |a_n|\, r^n$ est convergente

En effet, comme $0 \leqslant r \leqslant r_0 \Longrightarrow 0 \leqslant |a_n|\, r^n \leqslant |a_n|\, r_0^n$, d'après les théorèmes sur les séries numériques, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} |a_n|\, r^n$ est convergente et pour tout $z \in \mathbb{C}$ tels que $0 \leqslant |z| \leqslant r_0$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ est absolument convergente.

$\Rightarrow$ De la même manière, s'il existe $r_1 \geqslant 0$ tel que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} |a_n|\, r_1^n$ diverge, alors, pour tout r tel que $r \geqslant r_1$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} |a_n|\, r^n$ est divergente

En effet, comme $r \geqslant r_1 \Longrightarrow |a_n|\, r^n \geqslant |a_n|\, r_0^n$, d'après les théorèmes de minoration sur les séries numériques, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} |a_n|\, r^n$ est divergente et pour tout $z \in \mathbb{C}$ tels que $|z| \geqslant r_1$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ est absolument divergente.

2. Soit $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière.

Pour tout $r > 0$, on lui associe la série numérique à termes positifs $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} |a_n|\, r^n$ et l'ensemble A défini par

$$A = \left\{ r \geqslant 0 \text{ tels que } \sum_{n\geqslant 0} |a_n|\, r^n \text{ converge} \right\}$$

Quelques remarques sur A :

(a) $A \neq \emptyset$, car $0 \in A$

(b) A est un intervalle, éventuellement égal à $\mathbb{R}^+$ ou à $\{0\}$, car si $r_0 \in A$, alors, pour tout $r \in]0; r_0]$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} |a_n|\, r^n$ converge et $r \in A$

8.1.3 Définition

On appelle rayon de convergence de la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$, le nombre ρ tel que

$$\rho = \sup \left\{ r \geqslant 0 \text{ tels que } \sum_{n\geqslant 0} |a_n| r^n \text{ converge} \right\} = \sup A$$

L'ensemble $\{z \in \mathbb{C} \text{ tels que } |z| < \rho\}$ est appelé disque de convergence.

Remarque 3 :

1. Si $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ est une série entière telle que $a_n \in \mathbb{C}$ et $x \in \mathbb{R}$, on parlera plutôt d'intervalle de convergence
2. En reprenant la définition de rayon de convergence, nous montrons facilement que les séries $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} |a_n| z^n$ ont même rayon de convergence.

8.1.4 Proposition

On considère la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ de rayon de convergence ρ

1. Soit $r \in [0, \rho[$, alors, la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge normalement dans le domaine $\{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } |z| \leqslant r\}$
2. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tels que $|z| < \rho$, la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge absolument.
3. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tels que $|z| > \rho$, la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ est divergente.
4. On n'affirme rien pour $|z| = \rho$

Démonstration

Si le rayon de convergence $\rho = 0$, la proposition est triviale.
Supposons donc $\rho > 0$

1. Soit $r \in [0, \rho[$.
   Alors, il existe $r_0 > 0$, tel que $r < r_0 < \rho$; et, on a donc $r_0 \in A$, et donc $\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n| r_0^n$ converge, et donc il existe un nombre $M > 0$, fixe, tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n| r_0^n < M$.
   Et nous appliquons le lemme d'Abel pour obtenir la coonvergence normale de $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ lorsque $0 < |z| \leqslant r$
2. Le second point est exactement la conséquence de la définition de rayon de convergence.
3. Démontrons le troisième point.
   Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > \rho$ et supposons que la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ soit absolument convergente.
   Il existe $r > 0$ tel que $\rho < r < |z|$.
   La série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ étant absolument convergente, il existe $M > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n z^n| \leqslant M$
   Et donc :
   $$|a_n| r^n = |a_n z^n| r^n \times \frac{1}{|z^n|} \leqslant M \times \frac{r^n}{|z^n|} = M \left(\frac{r}{|z|}\right)^n$$

Comme $0 < \dfrac{r}{|z|} < 1$, la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} M \left(\frac{r}{|z|}\right)^n$ est convergente et donc, de même la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} |a_n|\, r^n$ est convergente.
Ce qui contredit la définition de $\rho = \sup A$
Ainsi, si $z \in \mathbb{C}$ est tel que $|z| > \rho$, alors la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} a_n z^n$ est divergente.

Remarque 4 :

Voici 3 séries entières qui admettent même rayon de convergence $\rho = 1$, mais qui n'ont pas le même comportement sur le cercle de convergence.
C'est ce qui fait dire que l'appellation « cercle de convergence » est dangereuse, car il n'y a pas forcément de convergence sur le « cercle de convergence »

1. La série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} z^n$ admet pour rayon de convergence $\rho = 1$, mais diverge grossièment sur le « cercle de convergence » car le terme général ne tend pas vers 0
2. La série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{z^n}{n}$ admet aussi pour rayon de convergence $\rho = 1$, mais son comportement sur le cercle unité est étrange. Nous avons démontré page 291 que la série numérique $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{e^{inx}}{n}$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}$ sauf en $x = 2k\pi$ (avec $k \in \mathbb{Z}$). Ainsi la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{z^n}{n}$ converge aussi sur le cercle unité qui est le « cercle de convergence » sauf en $z = 1$
3. La série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{z^n}{n^2}$ admet aussi pour rayon de convergence $\rho = 1$, mais converge sur tout point du « cercle de convergence » car, sur ce « cercle de convergence » $\left|\dfrac{z^n}{n^2}\right| = \dfrac{1}{n^2}$ et la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ converge.

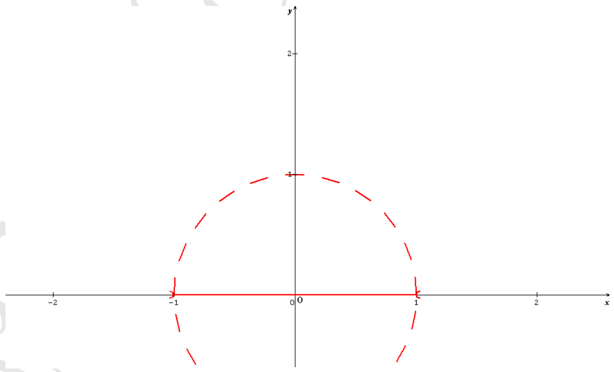

FIGURE 8.2 – La représentation du cercle de convergence

4. **La notion du rayon de convergence est extrêmement importante**
   Pour s'en convaincre, il suffit de le vérifier sur la série géométrique :
   $\Rightarrow$ Nous savons que si $|x| < 1$, nous avons $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} x^n = \frac{1}{1-x}$; par exemple, si $x = \dfrac{1}{2}$, alors :

$$\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$$

   <u>Remarque :</u>Nous avons déjà $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{16} = 1,9375 \simeq 2$

$\Rightarrow$ Par contre, si nous sortons de l'intervalle $]-1;+1[$, nous n'avons plus l'égalité $\sum_{n\geqslant 0} x^n = \dfrac{1}{1-x}$. Il suffit de faire $x=+2$:

$\star$ $\dfrac{1}{1-2} = -1$

$\star$ $\sum_{n\geqslant 0} 2^n = 1+2+4+8+\cdots+2^n+\cdots$

D'une part, nous avons une expression négative, et de l'autre, une expression positive *(qui tend, même vers $+\infty$)*

Il faut donc toujours être à l'intérieur du domaine de convergence. Les problèmes « aux bords » soulèvent des difficultés que nous tenterons d'étudie

Exercice 1 :

Déterminer les domaines de convergence des séries entières suivantes :

1. $\sum_{n\geqslant 0} \dfrac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$
2. $\sum_{n\geqslant 0} \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$
3. $\sum_{n\geqslant 0} n^n z^n$
4. $\sum_{n\geqslant 0} \dfrac{1}{n^n} z^n$

8.2 Recherche du rayon de convergence

8.2.1 Théorème

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ 2 séries entières de rayons de convergence respectifs ρ_A et ρ_B

1. Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $|a_n| \leqslant |b_n|$, alors $\rho_A \geqslant \rho_B$
2. Si $a_n \in O(b_n)$; alors $\rho_A \geqslant \rho_B$
3. Si $a_n \underset{+\infty}{\sim} b_n$, alors $\rho_A = \rho_B$

Démonstration

Avant de commencer redéfinissons la notion de rayon de convergence :

$$\rho = \sup \left\{ r \geqslant 0 \text{ tels que } \sum_{n\geqslant 0} |a_n| r^n \text{ converge} \right\}$$

1. Supposons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous ayions $|a_n| \leqslant |b_n|$.

   On appelle $I_A = \left\{ r \geqslant 0 \text{ tels que } \sum_{n\geqslant 0} |a_n| r^n \text{ converge} \right\}$ et $I_B = \left\{ r \geqslant 0 \text{ tels que } \sum_{n\geqslant 0} |b_n| r^n \text{ converge} \right\}$.

   Nous allons montrer que $I_B \subset I_A$

   Soit $r \in I_B$, alors, de $|a_n| \leqslant |b_n|$, nous tirons $|a_n| r^n \leqslant |b_n| r^n$

   Comme la série numérique $\sum_{n\geqslant 0} |b_n| r^n$ converge, il en est de même de la série $\sum_{n\geqslant 0} |a_n| r^n$ et donc $r \in I_A$

   En conclusion $I_B \subset I_A$ et de $I_B \subset I_A$, nous déduisons $\sup I_B \leqslant \sup I_A$, c'est à dire $\rho_B \leqslant \rho_A \iff \rho_A \geqslant \rho_B$

2. Supposons que $a_n \in O(b_n)$.

   Que veut dire $a_n \in O(b_n)$? Cela veut dire qu'il existe $M > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $|a_n| \leqslant M |b_n|$.

   En reprenant les définitions de I_A et de I_B, montrons, à nouveau, que $I_B \subset I_A$ dans une démonstration très semblable.

Soit $r \in I_B$, alors, de $|a_n| \leqslant M|b_n|$, nous tirons $|a_n| r^n \leqslant M|b_n| r^n$

Comme la série numérique $\sum_{n\geqslant 0} M|b_n| r^n = M \sum_{n\geqslant 0} |b_n| r^n$ converge, il en est de même de la série $\sum_{n\geqslant 0} |a_n| r^n$ et donc $r \in I_A$

En conclusion $I_B \subset I_A$ et de $I_B \subset I_A$, nous déduisons $\sup I_B \leqslant \sup I_A$, c'est à dire $\rho_B \leqslant \rho_A \iff \rho_A \geqslant \rho_B$

3. Supposons $a_n \underset{+\infty}{\sim} b_n$.

Nous avons démontré précédemment, en L_1, que si $a_n \underset{+\infty}{\sim} b_n$, alors $a_n \in O(b_n)$ et $b_n \in O(a_n)$.

- ⋆ De $a_n \in O(b_n)$ nous avons $\rho_A \geqslant \rho_B$
- ⋆ De $b_n \in O(a_n)$ nous avons $\rho_B \geqslant \rho_A$

Et donc, $\rho_B = \rho_A$

Exemple 2 :

Recherchons le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{n+\ln n}{n^2} z^n$

Nous avons, au voisinage de $+\infty$, $\dfrac{n+\ln n}{n^2} \underset{+\infty}{\simeq} \dfrac{1}{n}$.

Le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{z^n}{n}$ est 1 et donc, d'après 8.2.1 le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{n+\ln n}{n^2} z^n$ est aussi de 1

8.2.2 Corollaire

Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière telle qu'il existe deux réels strictement positifs $m > 0$ et $M > 0$ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $m \leqslant |a_n| \leqslant M$, alors le rayon de convergence de cette série est 1

Démonstration

Nous allons comparer la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ à la série entière $\sum_{n\geqslant 0} z^n$ laquelle admet 1 comme rayon de convergence.

Supposons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous ayions $m \leqslant |a_n| \leqslant M$

- ⋆ La série $\sum_{n\geqslant 0} M z^n$ a pour rayon de convergence 1, et, comme $|a_n| \leqslant M$, d'après le théorème 8.2.1 ci-dessus, $\rho_A \geqslant 1$
- ⋆ La série $\sum_{n\geqslant 0} m z^n$ a pour rayon de convergence 1, et, comme tout autant $m \leqslant |a_n|$, d'après le théorème 8.2.1 ci-dessus, $\rho_A \leqslant 1$

Et donc $\rho_A = 1$

Exemple 3 :

1. *Quel est le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geqslant 0} e^{\sin n} z^n$*

   C'est une application directe de 8.2.2.

   En effet, nous avons $\dfrac{1}{e} \leqslant e^{\sin n} \leqslant e$ et donc le rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 0} e^{\sin n} z^n$ est donc 1

2. *Quel est le rayon de convergence de la série* $\sum_{n\geqslant 1}(iz)^n$

   C'est toujours une application directe de 8.2.2.
   Nous avons $\sum_{n\geqslant 1}(iz)^n = \sum_{n\geqslant 1} i^n z^n$ avec donc $a_n = i^n$. Comme $|a_n| = |i^n| = 1$ la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et donc, le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1}(iz)^n$ est 1.

   La somme de cette série est $\sum_{n\geqslant 1}(iz)^n = \dfrac{1}{1-iz}$

Exercice 2 :

Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence ρ.

Montrer que, pour tout entier $p \geqslant 2$ le rayon de convergence ρ_A de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^{pn}$ est $\rho_A = +\infty$ si $\rho = +\infty$ ou $\rho_A = \sqrt[p]{\rho}$ si ρ est fini. *(on dit que la série* $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^{pn}$ *est lacunaire).*

Exercice 3 :

Déterminer le rayon de convergence ρ de la série entière $\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n z^{2n}$ et étudier la série pour $|z| = \rho$.

Quelle est la somme de cette série ?

Exercice 4 :

Montrer que si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres complexes telle qu'il existe un nombre complexe $z_0 \in \mathbb{C}^*$ tel que la suite $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée, alors la série entière $\sum_{n\geqslant 0}\dfrac{a_n}{n!}z^n$ a un rayon de convergence infini.

Exercice 5 :

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe bornée.

1. Que peut-on dire des rayons de convergence des séries $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geqslant 0}\dfrac{a_n}{n!}z^n$?

   On note respectivement $f(z)$ et $g(z)$ les sommes de ces séries entières.
2. Montrer que pour tout réel $x \in]0;1[$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} g(t)\, e^{\frac{-t}{x}}\, \mathrm{d}t$ est convergente.
3. Montrer que $\int_0^{+\infty} g(t)\, e^{\frac{-t}{x}}\, \mathrm{d}t = xf(x)$ pour tout réel $x \in]0;1[$

8.2.3 Théorème *(utilisation de la règle de D'Alembert)*

Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière. Alors, son rayon de convergence ρ est donné par

$$\rho = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \iff \frac{1}{\rho} = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

Avec la convention : $\dfrac{1}{0} = +\infty$ et $\dfrac{1}{+\infty} = 0$

Démonstration

Nous utilisons la règle de D'Alembert pour les séries numériques
Nous faisons donc le rapport

$$\left|\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right| = \left|\frac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| |z|$$

Si $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| |z| = l\,|z|$, et la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge si $l \times |z| < 1$ ce qui est équivalent à $|z| < \frac{1}{l}$
D'où le résultat

Exemple 4 :

Exemples de calculs de Rayon de convergence par la règle de D'Alembert

1. La série $\sum\limits_{n\geqslant 0} n!z^n$ a un rayon de convergence nul

   Ce n'est pas difficile de le démontrer : $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = n+1$, et donc, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = +\infty$ et donc, $\rho = 0$
2. A contrario, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{n!}$ admet un rayon de convergence infini
3. Quel est le rayon de convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n 2^n}{n(n+1)} z^n$?

   Nous allons commencer par faire le rapport $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(-1)^{n+1} 2^{n+1}}{(n+1)(n+2)} \times \frac{n(n+1)}{(-1)^n 2^n}\right| = \frac{2n}{n+1}$$

   De $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2n}{n+1} = 2$, nous déduisons que le rayon de convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n 2^n}{n(n+1)} z^n$ est $\frac{1}{2}$

Remarque 5 :

Attention !
La réciproque du théorème 8.2.3 précédent est fausse, c'est-à-dire que si ρ est le rayon de convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ rien ne permet d'affirmer que la suite $\left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ soit convergente.

Considérons, par exemple, la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ où $a_n = \frac{(-1)^n + 1}{2}$.

Nous avons $a_{2n} = 1$ et $a_{2n+1} = 0$ et donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ est en fait la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} z^{2n}$ dont le rayon de convergence est 1 *(cf exercices 2 et 3)* et qui a pour somme $\frac{1}{1-z^2}$ pour $|z| < 1$.

Par contre, la suite $\left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas définie puisque $a_n = 0$ si n est impair et $a_n = 1$ si n est pair

Exercice 6 :

On considère la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ où $a_n = ((-1)^n + 2)^n$. Etudier le rayon de convergence de cette série. Que dire de la suite $\left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)_{n\in\mathbb{N}}$?

Exercice 7 :

Quel est le rayon de convergence des séries suivantes ?

1. $\sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{\sqrt{n}}$
2. $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln n}{\sqrt{n}+2} z^n$
3. $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n+1}{(-3)^n} z^n$
4. $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(2n)!}{(n!)^2} z^n$

8.2.4 Proposition

Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière telle que $\lim_{n\to+\infty} a_n = l$ avec $l \neq 0$. Alors le rayon de convergence de cette série vaut 1

Démonstration

Nous allons démontrer cette proposition de deux manières différentes.

⇒ Tout d'abord, si la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite, elle est bornée. Donc, d'après le corollaire 8.2.2, le rayon de convergence de la série est 1

⇒ Ou bien, nous utilisons la règle de D'Alembert décrite en 8.2.3 :

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\lim_{n\to+\infty} |a_{n+1}|}{\lim_{n\to+\infty} |a_n|} = \frac{|l|}{|l|} = 1$$

Le rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ est donc bien 1

Exemple 5 :

Quel est le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1} \left(2+\frac{1}{n}\right)^{\frac{-1}{n}} z^n$ *?*

Posons $a_n = \left(2+\frac{1}{n}\right)^{\frac{-1}{n}}$.

Par le jeu des exponentielles et des logarithmes, nous avons $a_n = e^{-\frac{\ln\left(2+\frac{1}{n}\right)}{n}}$

Or, $\lim_{n\to+\infty} \ln\left(2+\frac{1}{n}\right) = \ln 2$ et donc $\lim_{n\to+\infty} -\frac{\ln\left(2+\frac{1}{n}\right)}{n} = 0$.

Ce qui veut dire que $\lim_{n\to+\infty} a_n = 1$.

Nous en déduisons donc que le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1} \left(2+\frac{1}{n}\right)^{\frac{-1}{n}} z^n$ est 1

8.2.5 Proposition

Si $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ est une série entière telle que a_n soit une fonction rationnelle non nulle de n, c'est à dire $a_n = \dfrac{P(n)}{Q(n)}$ où $P \in \mathbb{C}[X]$ et $Q \in \mathbb{C}[X]$ sont des polynômes.
Alors le rayon de convergence de cette série vaut 1

Démonstration

La démonstration de cette proposition a tout de l'exercice résolu.
Nous avons donc $a_n = \dfrac{P(n)}{Q(n)}$; posons $p = \deg P$ et $q = \deg Q$.

Ainsi, en $+\infty$, nous avons $P(n) \underset{+\infty}{\simeq} a_p n^p$ et $Q(n) \underset{+\infty}{\simeq} b_q n^q$, et donc $a_n \underset{+\infty}{\simeq} \dfrac{a_p n^p}{b_q n^q}$

D'après le théorème 8.2.1, le rayon de $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ est le même que celui de $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{a_p n^p}{b_q n^q} z^n$

Utilisons alors la règle de D'Alembert pour trouver le rayon de convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{a_p n^p}{b_q n^q} z^n$

$$\frac{a_p (n+1)^p}{b_q (n+1)^q} \times \frac{b_q n^q}{a_p n^p} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^p \times \left(\frac{n}{n+1}\right)^q$$

Nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^p = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^q = 1$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_p (n+1)^p}{b_q (n+1)^q} \times \dfrac{b_q n^q}{a_p n^p} = 1$

Le rayon de convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{a_p n^p}{b_q n^q} z^n$ est donc $\rho = 1$ et par le théorème 8.2.1 celui de $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ est aussi 1

Exemple 6 :

Un exemple classique *(et simple !!)* est celui de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{n}{n+1} z^n$ dont le rayon de convergence est donc 1

8.2.6 Théorème *(utilisation de la règle de Cauchy)*

Soit $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière
Alors, son rayon de convergence ρ est donné par

$$\rho = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(|a_n|)^{\frac{1}{n}}} \iff \frac{1}{\rho} = \lim_{n\to+\infty} (|a_n|)^{\frac{1}{n}}$$

Avec la convention : $\dfrac{1}{0} = +\infty$ et $\dfrac{1}{+\infty} = 0$

Démonstration

On réutilise le critère de Cauchy vu pour les séries numériques
On cherche le domaine où la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge absolument.

Soit $z \in \mathbb{C}$
Alors $|a_n z^n| = |a_n| \times |z|^n$ et $(|a_n| \times |z|^n)^{\frac{1}{n}} = |a_n|^{\frac{1}{n}} \times |z|$
Si $\lim\limits_{n\to+\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = l$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} \times |z| = l \times |z|$

Ainsi, si $l\,|z| \leqslant 1 \iff |z| \leqslant \dfrac{1}{l}$, la série converge absolument.
La série entière admet donc comme rayon de convergence $\dfrac{1}{l}$

Exercice 8 :

Donner le rayon de convergence des séries suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{n^n}$
2. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \sqrt[n]{n} z^n$
3. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \left(2+\frac{1}{n}\right)^n z^n$
4. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \left(\frac{an+b}{n+d}\right)^n z^n$ avec $a>0$

8.3 Opérations sur les séries entières

8.3.1 Somme de 2 séries entières

Soient $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} b_n z^n$ 2 séries entières de rayons de convergence respectif ρ_A et ρ_B
Soit ρ le rayon de convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} (a_n+b_n)\,z^n$, alors :

$$\rho \geqslant \inf(\rho_A, \rho_B)$$

Dans tous les cas, nous avons pour $|z| < \inf(\rho_A, \rho_B)$:

$$\sum_{n\geqslant 0} (a_n+b_n)\,z^n = \sum_{n\geqslant 0} a_n z^n + \sum_{n\geqslant 0} b_n z^n$$

Démonstration

$\Rightarrow$ On appelle donc ρ le rayon de convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} (a_n+b_n)\,z^n$

Les séries entières $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} b_n z^n$ jouant des rôles symétriques, nous allons suppososer $\rho_A \leqslant \rho_B$ de telle sorte que $\rho_A = \inf(\rho_A, \rho_B)$.
Comme dans la section d'introduction 8.1, nous notons :

$$I_A = \left\{ r \geqslant 0 \text{ tels que } \sum_{n\geqslant 0} |a_n|\,r^n \text{ converge} \right\}$$

Et

$$I_{A+B} = \left\{ r \geqslant 0 \text{ tels que } \sum_{n\geqslant 0} |a_n+b_n|\,r^n \text{ converge} \right\}$$

Nous allons montrer que $I_A \subset I_{A+B}$
Soit $r \in I_A$; alors $r < \rho_A$ et $r < \rho_B$
Nous avons

$$|a_n+b_n|\,r^n \leqslant (|a_n|+|b_n|)\,r^n = |a_n|\,r^n + |b_n|\,r^n$$

Comme $r < \rho_A$ et $r < \rho_B$, alors les séries $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} |a_n|\,r^n$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} |b_n|\,r^n$ convergent, et donc la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} |a_n+b_n|\,r^n$ converge aussi par les théorèmes de majoration des séries numériques.
Nous avons donc $r \in I_{A+B}$ et donc $I_A \subset I_{A+B}$
Ce qui veut dire que $\sup I_A \leqslant \sup I_{A+B}$ et donc $\rho \geqslant \rho_A$

$\Rightarrow$ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $\sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k) z^n = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k + \sum_{k=0}^{n} b_k z^k$

Comme $|z| < \inf(\rho_A, \rho_B)$, les séries $\sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k) z^n$, $\sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ et $\sum_{k=0}^{n} b_k z^k$ convergent absolument, et par passage à la limite, nous avons $\sum_{n\geqslant 0} (a_n + b_n) z^n = \sum_{n\geqslant 0} a_n z^n + \sum_{n\geqslant 0} b_n z^n$

Exemple 7 :

On considère la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ où $a_n = ((-1)^n + 2)^n$.

Nous avons $a_{2n} = 3^n$ et $a_{2n+1} = 1$ et nous pouvons considérer la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ comme somme de 2 séries :

- ⋆ La série $\sum_{n\geqslant 0} b_n z^n$ avec $b_{2n} = 3^{2n}$ et $b_{2n+1} = 0$
- ⋆ La série $\sum_{n\geqslant 0} c_n z^n$ avec $c_{2n} = 0$ et $c_{2n+1} = 1$

Nous avons donc $\sum_{n\geqslant 0} b_n z^n = \sum_{n\geqslant 0} 3^{2n} z^{2n} = \sum_{n\geqslant 0} (3z)^{2n}$ de rayon de convergence $\rho_B = \frac{1}{3}$.

De même $\sum_{n\geqslant 0} c_n z^n = \sum_{n\geqslant 0} z^{2n+1}$ de rayon de convergence $\rho_A = 1$.

Donc ρ, le rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ est $\rho \geqslant \inf\{\rho_A, \rho_B\}$, c'est à dire $\rho \geqslant \frac{1}{3}$.

Dans un précédent exercice, nous avons montré que $\rho = \frac{1}{3}$

La somme de cete série est donc :

$$\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n = \sum_{n\geqslant 0} \left((3z)^2\right)^n + \sum_{n\geqslant 0} z^{2n+1} = \sum_{n\geqslant 0} (9z^2)^n + z \sum_{n\geqslant 0} (z^2)^n = \frac{1}{1-9z^2} + \frac{z}{1-z^2}$$

8.3.2 Proposition

Soient $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence ρ_A. Alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geqslant 0} \lambda a_n z^n$ est ρ_A

Démonstration

Si nous appelons

$$I_A = \left\{ r \geqslant 0 \text{ tels que } \sum_{n\geqslant 0} |a_n| r^n \text{ converge} \right\}$$

et

$$I_{\lambda A} = \left\{ r \geqslant 0 \text{ tels que } \sum_{n\geqslant 0} |\lambda a_n| r^n \text{ converge} \right\}$$

Des identités $|\lambda a_n| = |\lambda| |a_n|$, nous déduisons que $\sum_{n\geqslant 0} |\lambda a_n| r^n = |\lambda| \sum_{n\geqslant 0} |a_n| r^n$ et donc que, clairement, $I_A = I_{\lambda A}$ et donc, les 2 séries entières $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} \lambda a_n z^n$ ont même rayon de convergence.

Produit de séries

Soit $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence ρ_A

Soit $\sum\limits_{n\geqslant 0} b_n z^n$ une série entière de rayon de convergence ρ_B

On considère la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} c_n z^n$ une série entière où $c_n = \sum\limits_{i+j=n} a_i b_j = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$

c_n est le terme d'ordre n du produit de séries $\left(\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n\right)\left(\sum\limits_{n\geqslant 0} b_n z^n\right)$ *(Revoir 6.1.7)*

8.3.3 Produit de 2 séries entières

Soient $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} b_n z^n$ 2 séries entières de rayons de convergence respectif ρ_A et ρ_B

Soit ρ le rayon de convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} c_n z^n$, alors :

$$\rho \geqslant \inf(\rho_A, \rho_B)$$

Dans tous les cas, nous avons pour $|z| < \inf(\rho_A, \rho_B)$:

$$\sum_{n\geqslant 0} c_n z^n = \left(\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n\right)\left(\sum_{n\geqslant 0} b_n z^n\right)$$

Démonstration

$\Rightarrow$ Comme tout à l'heure, les séries entières $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} b_n z^n$ jouant des rôles symétriques, nous allons suppososer $\rho_A \leqslant \rho_B$ de telle sorte que $\rho_A = \inf(\rho_A, \rho_B)$.
Comme dans la section d'introduction 8.1, nous notons :

$$I_A = \left\{ r \geqslant 0 \text{ tels que } \sum_{n\geqslant 0} |a_n| r^n \text{ converge} \right\}$$

Et

$$I_{AB} = \left\{ r \geqslant 0 \text{ tels que } \sum_{n\geqslant 0} |c_n| r^n \text{ converge} \right\}$$

Nous allons montrer que $I_A \subset I_{AB}$
Soit $r \in I_A$; alors $r < \rho_A$ et $r < \rho_B$; nous allons montrer que $r \in I_{AB}$

$$\begin{aligned} |c_n| r^n &= \left|\sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}\right| r^n \\ &\leqslant \left(\sum_{i=0}^{n} |a_i| |b_{n-i}|\right) r^n = \sum_{i=0}^{n} |a_i| r^i |b_{n-i}| r^{n-i} = \left(\sum_{i=0}^{n} |a_i| r^i\right)\left(\sum_{i=0}^{n} |b_{n-i}| r^{n-i}\right) \end{aligned}$$

Les suites numériques $\left(\sum\limits_{i=0}^{n} |a_i| r^i\right)$ et $\left(\sum\limits_{i=0}^{n} |b_{n-i}| r^{n-i}\right)$ sont convergentes et majorent le terme général $|c_n| r^n$; donc la série numérique $\sum\limits_{n\geqslant 0} |c_n| r^n$ converge, c'est à dire que $r \in I_{AB}$ et donc $I_A \subset I_{AB}$
D'où $\sup I_A \leqslant \sup I_{AB}$, c'est à dire $\rho_A \leqslant \rho \Longleftrightarrow \rho \geqslant \rho_A$

⇒ Ainsi, pour $\rho \geqslant \inf(\rho_A, \rho_B)$, et $|z| \leqslant \rho$, nous avons, comme en 6.2.5 dans les séries numériques,

$$\sum_{n\geqslant 0} c_n z^n = \left(\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n\right)\left(\sum_{n\geqslant 0} b_n z^n\right)$$

Exemple 8 :

1. Soit $S(z) = \sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence ρ.
   Considérons $T(z) = 1 - z$; c'est un polynôme de degré 1 qui peut aussi être considéré comme une série entière $T(z) = \sum\limits_{n\geqslant 0} b_n z^n$ avec $b_0 = 1$, $b_1 = -1$ et, pour $n \geqslant 2$, $b_n = 0$
2. Intéressons nous à la série $S \star T(z) = \sum\limits_{n\geqslant 0} c_n z^n$ où $c_n = \sum\limits_{i=0}^{n} b_i a_{n-i}$.
   Dans notre cas, nous avons $c_0 = b_0 a_0 = a_0$ et, pour $n \geqslant 1$,
   $$c_n = \sum_{i=0}^{n} b_i a_{n-i} = b_0 a_n + b_1 a_{n-1} = a_n - a_{n-1}$$
   Et donc $S \star T(z) = a_0 + \sum\limits_{n\geqslant 1} (a_n - a_{n-1}) z^n$
3. Ainsi, pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \leqslant \rho$:
   → $S \star T(z) = a_0 + \sum\limits_{n\geqslant 1} (a_n - a_{n-1}) z^n = a_0 + \sum\limits_{n\geqslant 1} a_n z^n - \sum\limits_{n\geqslant 1} a_{n-1} z^n$
   → Or, $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n z^n = \sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n - a_0 = S(z) - a_0$
   → Et $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_{n-1} z^n = z \sum\limits_{n\geqslant 1} a_{n-1} z^{n-1} = z \sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n = zS(z)$
   D'où $S \star T(z) = a_0 + S(z) - a_0 - zS(z) = (1 - z) S(z)$
   Il n'y a rien de surprenant, puisque c'est l'expression du produit de 2 séries.
4. A supposer que $S(z) = \sum\limits_{n\geqslant 0} z^n$; cette série entière a pour rayon de convergence $\rho = 1$ et, cette fois ci : $c_0 = 1$ et pour $n \geqslant 1$, $c_n = 0$ et donc $S \star T(z) = 1$

Exercice 9 :

Soit $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence ρ et telle que $a_0 \neq 0$ *(Ce qui veut dire que si $|z| < \rho$ et $f(z) = \sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$, $f(0) = a_0 \neq 0$ et que f ne s'annule pas en 0)*.Démontrer qu'il existe une série $\sum\limits_{n\geqslant 0} b_n z^n$ telle que $\left(\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n\right)\left(\sum\limits_{n\geqslant 0} b_n z^n\right) = 1$

8.3.4 Définition et Théorème

Soients $S(z) = \sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$.

1. On appelle <u>Série dérivée de S</u> la série S' définie par : $S'(z) = \sum\limits_{n\geqslant 0} n a_n z^{n-1}$
2. S et S' ont même rayon de convergence.

Démonstration

Nous appelons R le rayon de convergence de S et R' celui de S' Comme d'habitude, nous posons

$$I = \left\{ r \geqslant 0 \text{ tels que } \sum_{n \geqslant 0} |a_n| r^n \text{ converge} \right\}$$

et

$$I' = \left\{ r \geqslant 0 \text{ tels que } \sum_{n \geqslant 0} n |a_n| r^{n-1} \text{ converge} \right\}$$

Nous allons montrer que $I = I'$

1. <u>On montre que $I' \subset I$</u>

   Soit alors $r > 0$ tel que $r \in I'$; alors, la série $\sum_{n \geqslant 0} n |a_n| r^{n-1}$ converge.

   Montrons que $r \in I$

   Nous avons, pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 1$:

   $$|a_n| r^n \leqslant n |a_n| r^n = r \left(n |a_n| r^{n-1} \right)$$

   Comme la série numérique $\sum_{n \geqslant 0} n |a_n| r^{n-1}$ converge, la série $\sum_{n \geqslant 0} r \left(n |a_n| r^{n-1} \right) = r \sum_{n \geqslant 0} \left(n |a_n| r^{n-1} \right)$ converge, elle aussi, et, par les théorèmes de majoration, la série $\sum_{n \geqslant 0} |a_n| r^n$ converge et donc $r \in I$.

   Nous avons donc $I' \subset I$ et donc $\sup I' \leqslant \sup I$, c'est à dire $R' \leqslant R$

2. <u>On démontre que $I \subset I'$</u>

   Soit $r \in I$ tel que $0 \leqslant r < R$. Alors, la série $\sum_{n \geqslant 0} |a_n| r^n$ converge.

   Prenons $r_1 \geqslant 0$ tel que $r < r_1 < R$; nous avons aussi $\sum_{n \geqslant 0} |a_n| r_1^n$ qui converge

   Comme la série numérique $\sum_{n \geqslant 0} |a_n| r_1^n$ converge, nous avons $\lim_{n \to +\infty} |a_n| r_1^n = 0$

   La suite $\left(|a_n| r_1^n \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc bornée. Il existe donc $M > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous ayions $0 \leqslant |a_n| r_1^n < M$, c'est à dire, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $|a_n| < \dfrac{M}{r_1^n}$

   Alors

   $$n |a_n| r^{n-1} = n |a_n| r^{n-1} \times \frac{r_1^{n-1}}{r_1^{n-1}} = n |a_n| r_1^{n-1} \times \left(\frac{r}{r_1} \right)^{n-1} \leqslant n \times \frac{M}{r_1^n} \times r_1^{n-1} \times \left(\frac{r}{r_1} \right)^{n-1} = n \times \frac{M}{r_1} \times \left(\frac{r}{r_1} \right)^{n-1}$$

   Or, la série $\sum_{n \geqslant 0} n \times \left(\dfrac{r}{r_1} \right)^{n-1}$ converge, car, d'après le critère de D'Alembert,

   $$\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{(n+1) \times \left(\frac{r}{r_1} \right)^n}{n \times \left(\frac{r}{r_1} \right)^{n-1}} \right| = \lim_{n \to +\infty} \frac{n+1}{n} \times \left(\frac{r_1}{r_2} \right) = \frac{r_1}{r_2} < 1$$

   Ce qui montre que la série $\sum_{n \geqslant 0} n |a_n| r^{n-1}$ converge et donc $r \in I'$

   Nous avons donc $I \subset I'$ et donc $\sup I \leqslant \sup I'$, c'est à dire $R \leqslant R'$

Et donc, pour conclure, $R = R'$

Remarque 6 :

Il y a une question que nous devrons nous poser, ce sont les relations entre S et S'.

8.3.5 Corollaire

Soient $S(z) = \sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et $S_1(z) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$ 2 séries entières
Alors, S et S_1 ont même rayon de convergence.

Démonstration

Nous allons donner 2 démonstrations de ce résultat. La seconde démonstration est très « voisine » de celle de 8.3.4 tout en étant différente ! ! En fait, le pilier de cette démonstration est bien le théorème 8.3.4. Le modèle de la seconde démonstration pourrait aussi être une démonstration de 8.3.4

1. **Première démonstration**
   Tout d'abord, il est clair que que la série S apparaît comme la série dérivée de S_1.
   D'après le théorème 8.3.4, les 2 séries ont même rayon de convergence
2. **Seconde démonstration**
   On appelle R le rayon de convergence de S et R_1 celui de S_1.
   (a) On suppose $R_1 < R$
   Soit alors $r > 0$ tel que $R_1 < r < R$.
   Alors, la série $\sum_{n\geqslant 0} |a_n| r^n$ converge, de même que la série

$$r\left(\sum_{n\geqslant 0} |a_n| r^n\right) = \sum_{n\geqslant 0} |a_n| r^{n+1}$$

   Or, pour tout $n \geqslant 1$, nous avons $\frac{|a_n|}{n+1} r^{n+1} \leqslant |a_n| r^{n+1}$, ce qui, par les théorèmes de majoration des séries numériques, montre que la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{|a_n|}{n+1} r^{n+1}$ converge pour $r > R_1$
   Ce qui est en contradiction avec l'hypothèse où R_1 est le rayon de convergence de S_1 *(R_1 est la borne supérieure des $r \geqslant 0$ tels que $\sum_{n\geqslant 0} \frac{|a_n|}{n+1} r^{n+1}$ converge)*. Donc, nous avons $R \leqslant R_1$
   (b) On suppose maintenant que $R < R_1$
   Soient r_1 et r_2 tels que $R < r_1 < r_2 < R_1$
   Alors, $\sum_{n\geqslant 0} \frac{|a_n|}{n+1} r_2^{n+1}$ converge, et, d'après les théorèmes sur les séries,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_n|}{n+1} r_2^{n+1} = 0$$

   Donc, il existe $M > 0$, tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous ayions $\frac{|a_n|}{n+1} r_2^{n+1} \leqslant M$, ou, ce qui est équivalent, tel que

$$|a_n| \leqslant (n+1)\frac{M}{r_2^{n+1}}$$

   D'où,

$$|a_n| r_1^n = |a_n| r_1^n \times \frac{r_2^n}{r_2^n} = |a_n| r_2^n \times \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^n \leqslant (n+1)\frac{M}{r_2} \times \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^n$$

Or, la série $\sum_{n\geqslant 0}(n+1)\times\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^n$ converge, car, d'après le critère de D'Alembert,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n+2}{n+1}\times\left(\frac{r_1}{r_2}\right)=\frac{r_1}{r_2}<1$$

Ce qui montre que la série $\sum_{n\geqslant 0}|a_n|\,r_1^n$ converge pour $R<r_1$

Ce qui est en contradiction avec l'hypothèse où R est le rayon de convergence de S.

Donc, nous avons $R_1\leqslant R$

D'où $R=R_1$

8.3.6 Corollaire

Plus généralement, pour tout $\alpha\in\mathbb{R}$, les séries entières $S(z)=\sum_{n\geqslant 0}a_nz^n$ et $S_\alpha(z)=\sum_{n\geqslant 0}n^\alpha a_nz^n$ ont même rayon de convergence

La démonstration de ce résultat est exactement la même ; elle peut être travaillée dans un second temps et vue comme un exercice résolu

Démonstration

On appelle R le rayon de convergence de S et $R_\alpha$celui de S_α

1. On suppose $R<R_\alpha$

   Soient r_1 et r_2 tels que $R<r_1<r_2<R_\alpha$;

   Alors, la série $\sum_{n\geqslant 0}n^\alpha|a_n|\,r_2^n$ converge, et donc, $\lim_{n\to+\infty}n^\alpha|a_n|\,r_2^n=0$.

   Il existe donc $M>0$, tel que pour tout $n\in\mathbb{N}$, nous avons $n^\alpha|a_n|\,r_2^n\leqslant M$, ou, ce qui est équivalent, $|a_n|\leqslant\dfrac{M}{n^\alpha r_2^n}$.

   Nous en déduisons donc :

$$|a_n|\,r_1^n=|a_n|\,r_1^n\times\frac{r_2^n}{r_2^n}=|a_n|\,r_2^n\times\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^n\leqslant\frac{M}{n^\alpha}\times\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^n$$

   Or, la série $\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{n^\alpha}\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^n$ converge, car, d'après le critère de D'Alembert,

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^\alpha\times\left(\frac{r_1}{r_2}\right)=\frac{r_1}{r_2}<1$$

   Donc la série $\sum_{n\geqslant 0}|a_n|\,r_1^n$ converge pour $R<r_1$

   Ce qui est en contradiction avec l'hypothèse où R est le rayon de convergence de S. Donc, nous avons $R_\alpha\leqslant R$

2. On suppose $R_\alpha<R$

   Soient r_1 et r_2 tels que $R_\alpha<r_1<r_2<R$

   Alors, $\sum_{n\geqslant 0}|a_n|\,r_2^n$ converge, et $\lim_{n\to+\infty}|a_n|\,r_2^n=0$.

   Il existe donc $M>0$, tel que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $|a_n|\,r_2^n\leqslant M$, ou, ce qui est équivalent, $|a_n|\leqslant\dfrac{M}{r_2^n}$

   D'où,

$$n^\alpha|a_n|\,r_1^n=n^\alpha|a_n|\,r_1^n\times\frac{r_2^n}{r_2^n}=n^\alpha|a_n|\,r_2^n\times\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^n\leqslant n^\alpha M\times\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^n$$

   Et on termine donc comme le point ci-dessus pour conclure que $R\leqslant R_\alpha$

Donc, de $R_\alpha\leqslant R$ et $R\leqslant R_\alpha$, on conclue que $R=R_\alpha$

8.3.7 Proposition

Soit $S(z)=\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière. Alors $S(z)=\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et toutes ses séries dérivées $S^{(p)}(z)$ où

$$S^{(p)}(z)=\sum_{n\geqslant p} n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1)\,a_n z^{n-p}=\sum_{n\geqslant p} \mathrm{A}_n^p a_n z^{n-p}$$

ont toutes le même rayon de convergence.

Démonstration

La démonstration n'est pas difficile.

- ▷ Elle est vraie pour $p=1$, puisque, d'après 8.3.4 la série $S'(z)=\sum_{n\geqslant 0} n a_n z^{n-1}$ a même rayon de convergence que $S(z)=\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$
- ▷ Supposons, qu'à l'ordre p, la série $S^{(p)}(z)=\sum_{n\geqslant p} \mathrm{A}_n^p a_n z^{n-p}$ a même rayon de convergence que S
- ▷ Alors la série dérivée de $S^{(p)}$ a, d'après 8.3.4 le même rayon de convergence que $S^{(p)}$, donc que S. Or,

$$\sum_{n\geqslant p}(n-p)\,\mathrm{A}_n^p a_n z^{n-p-1}=\sum_{n\geqslant p+1}(n-p)\frac{n!}{(n-p)!}a_n z^{n-p-1}$$
$$=\sum_{n\geqslant p+1}\frac{n!}{(n-p-1)!}a_n z^{n-p-1}=\sum_{n\geqslant p+1}\mathrm{A}_n^{p+1} z^{n-(p+1)}$$

Et donc, $\left(S^{(p)}\right)'(z)=S^{(p+1)}(z)=\sum_{n\geqslant p+1}\mathrm{A}_n^{p+1} z^{n-(p+1)}$ a donc même rayon de convergence que S et la proposition est démontrée

Exemple 9 :

Exemple très simple : la série géométrique $\sum_{n\geqslant 0} z^n$ et toutes ses séries dérivées $\sum_{n\geqslant p} n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1)\,z^{n-p}$ avec $p\geqslant 1$ ont toutes le même rayon de convergence 1.

La série primitive $\sum_{n\geqslant 0}\frac{z^{n+1}}{n+1}$ a également son rayon de convergence égal à 1.

8.3.8 Corollaire

Soit $S(z)=\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière. Alors, pour tout $n\in\mathbb{N}$ $a_n=\frac{S^{(n)}(0)}{n!}$

Démonstration

Nous avons vu que $S^{(n)}(z)=\sum_{k\geqslant n}\mathrm{A}_k^n a_k z^{k-n}=\mathrm{A}_k^n a_n+\sum_{k\geqslant n+1}\mathrm{A}_k^n a_k z^{k-n}=n!a_n+\sum_{k\geqslant n+1}\mathrm{A}_k^n a_k z^{k-n}$.

En particulier, $S^{(n)}(0)=n!a_n \iff a_n=\frac{S^{(n)}(0)}{n!}$.

Ce que nous voulions

8.4 Fonctions développables en séries entières

Introduction

Si $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ est une série entière de domaine de convergence $D \subset \mathbb{C}$, on définit une fonction sur D en posant :

$$\begin{cases} f : D & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \quad z & \longmapsto & f(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n \end{cases}$$

Et on rappelle que, dans le cas où le rayon de convergence ρ de cette série entière est non nul, D contient le disque ouvert $D(0;\rho)$ de centre O et de rayon ρ

On se pose maintenant le problème de la réciproque, c'est à dire :

Etant donnée une fonction f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, existe-t-il une série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ qui ait pour somme f ?

Plusieurs questions peuvent alors se poser :

1. Avons nous, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ *(problème de convergence de la série)*
2. De quelle forme sont les a_n, et avons nous unicité des a_n ?

8.4.1 Définition

1. Cas complexe
   On dit qu'une fonction f définie sur un disque ouvert $D(O;\rho) \subset \mathbb{C}$ de centre O et de rayon $\rho > 0$ est développable en série entière au voisinage de O s'il existe une série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ et un réel $r \in]0,\rho]$ tels que, pour tout $z \in D(0;r)$, nous avons $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$
2. Cas réel
   Soit $E \subset \mathbb{R}$, et $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$; on dit que f est développable en série entière au voisinage de 0, s'il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels, et $\alpha > 0$ tels que :
   (a) $]-\alpha,+\alpha[\subset E$
   (b) Pour tout $x \in]-\alpha,+\alpha[$, nous avons $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$

8.4.2 Théorème

Soit f une fonction définie sur un domaine $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$, développable en série entière sur un disque ouvert $D(O,\rho)$, avec $\rho > 0$ tel que $D(O,\rho) \subset \mathcal{U}$, alors, f est continue sur ce disque $D(O,\rho)$.

Démonstration

Nous allons proposer 2 démonstrations à ce théorème : une première, plutôt algébrique, qui montre, en plus, qu'une série entière est lipschitzienne, et une seconde qui utilise les résultats sur les séries de fonctions

1. **Première démonstration**
   Soit $z_0 \in D(O,\rho)$.
   Alors, pour tout $z \in D(O,\rho)$, nous avons $f(z) - f(z_0) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n - \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z_0^n = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n (z^n - z_0^n)$.
   Or, une factorisation donne $z^n - z_0^n = (z - z_0)\left(\sum_{k=0}^{n-1} z^k z_0^{n-1-k}\right) = (z - z_0) P_{n,z_0}(z)$ et donc

$$f(z) - f(z_0) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n (z^n - z_0^n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n (z - z_0) P_{n,z_0}(z) = (z - z_0) \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n P_{n,z_0}(z)$$

Et donc
$$|f(z) - f(z_0)| \leqslant |z - z_0| \sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n P_{n,z_0}(z)|$$

La série $\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n P_{n,z_0}(z)|$ est-elle convergente ?

Nous avons $|z| < \rho$ et $|z_0| < \rho$.

Soit donc $t \in \mathbb{R}$ tel que $0 < t < \rho$ et $|z| < t$ et $|z_0| < t$.

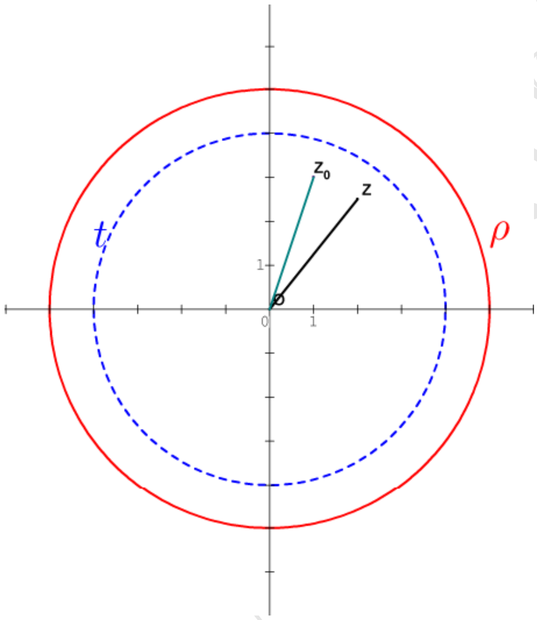

FIGURE 8.3 – $0 < t < \rho$ et $|z| < t$ et $|z_0| < t$

Alors :
$$\begin{aligned}
|a_n P_{n,z_0}(z)| &= \left| a_n \sum_{k=0}^{n-1} z^k z_0^{n-1-k} \right| \\
&= \left| \sum_{k=0}^{n-1} a_n z^k z_0^{n-1-k} \right| \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \left| a_n z^k z_0^{n-1-k} \right| = \sum_{k=0}^{n-1} |a_n| \left| z^k \right| \left| z_0^{n-1-k} \right| \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} |a_n| t^k t^{n-1-k} = |a_n| \sum_{k=0}^{n-1} t^{n-1} = n |a_n| t^{n-1}
\end{aligned}$$

Comme $t < \rho$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n| t^n$ converge et, d'après 8.3.4, la série dérivée $\sum_{n\in\mathbb{N}} n |a_n| t^{n-1}$ converge aussi avec le même rayon de convergence.

Ainsi, le terme $|a_n P_{n,z_0}(z)|$ est-il majoré par celui d'une série numérique convergente, et nous en déduisons que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n P_{n,z_0}(z)|$ est convergente.

Si nous appelos $L = \sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n P_{n,z_0}(z)|$, nous avons
$$|f(z) - f(z_0)| \leqslant |z - z_0| \times L$$

Ce qui termine de montrer que f est L-lipschitzienne et donc continue en $z_0 \in D(O, \rho)$

2. **Seconde démonstration**

$\Rightarrow$ Nous énonçons tout d'abord le fait que si $r > 0$ tel que $0 < r < \rho$ alors la série $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ est normalement convergente sur le disque $D(O, r)$, c'est à dire si $|z| < r$

En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $|a_n z^n| \leqslant |a_n| r^n$, et comme $0 < r < \rho$, la série numérique $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} |a_n| r^n$ est convergente. Ainsi, si $|z| < r$, alors la série $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ est normalement convergente

$\Rightarrow$ Soit $z_0 \in D(O, \rho)$, c'est à dire z_0 tel que $0 \leqslant |z_0| < \rho$.
Il existe alors $r > 0$ tel que $0 \leqslant |z_0| < r < \rho$ et donc la série converge normalement sur le disque $D(O, r)$; la somme $f(z) = \sum\limits_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ est donc continue continue sur le disque $D(O, r)$ et, en particulier en $z_0 \in D(O, r)$

Ceci étant vrai pour tout $z_0 \in D(O, \rho)$, la fonction $f(z) = \sum\limits_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ est donc continue continue sur le disque $D(O, \rho)$

Remarque 7 :

Le théromème 8.4.2 est toujours valide si $a_n \in \mathbb{C}$ et $x \in \mathbb{R}$ et la série entière $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$ convergente dans un intervalle $]-\rho; \rho[$

8.4.3 Proposition : Principe des zéros isolés

Soit $f(z) = \sum\limits_{n \geqslant 0} a_n z^n$ une série entière, de rayon de convergence $\rho > 0$.
On suppose les coefficients $\{a_n ; n \in \mathbb{N}\}$ non tous nuls *(C'est à dire qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $a_{n_0} \neq 0$)*
Alors, il existe $0 < r_0 < \rho$ tel que $0 < |x| < r_0 \Rightarrow f(z) \neq 0$

Démonstration

1. Soit k le plus petit entier tel que $a_k \neq 0$, c'est à dire que
$$f(z) = \sum_{n \geqslant k} a_n z^n = a_k z^k + \sum_{n \geqslant k+1} a_n z^n$$
2. Nous écrivons alors :
$$f(z) = \sum_{n \geqslant 0} a_{n+k} z^{n+k} = z^k \sum_{n \geqslant 0} a_{n+k} z^n = z^k g(z)$$
Où $g(z) = a_k + \sum\limits_{n \geqslant 1} a_{n+k} z^n$.
3. Or $\sum\limits_{n \geqslant 1} a_{n+k} z^n$ est une série entière qui admet le même rayon de convergence que $\sum\limits_{n \geqslant 0} a_n z^n$ et qui converge pour $|z| < \rho$, et $g(0) = a_k$, donc $g(0) \neq 0$. g est donc, elle aussi, continue sur $D(O, \rho)$
4. Comme $g(0) = a_k \neq 0$ et g étant continue, en particulier en $z_0 = 0$, il existe $0 < r_0 < \rho$ tel que si $|z| < r_0$ alors
$$|g(z) - g(0)| \leqslant \frac{|a_k|}{2} \Longleftrightarrow |g(z) - a_k| \leqslant \frac{|a_k|}{2}$$
5. Comme, d'après l'inégalité triangulaire,nous avons $|g(0)| - |g(z)| \leqslant |g(z) - g(0)| \leqslant \dfrac{|a_k|}{2}$, nous avons $|g(z)| \geqslant |g(0)| - \dfrac{|a_k|}{2} = \dfrac{|a_k|}{2}$
Ainsi, si $0 < |z| < r_0$ alors $g(z) \neq 0$
6. Comme $f(z) = z^k g(z)$, on en déduit que si $0 < |z| < r_0$ *(remarquer que nous avons $z \neq 0$)*, alors $z^k g(z) \neq 0$, c'est à dire $f(z) \neq 0$

Remarque 8 :

1. C'est le principe des zéros isolés, car, si $f(z) \neq 0$, c'est à dire si $a_0 \neq 0$, et donc $k = 0$, la proposition signifie qu'il existe un domaine autour de 0, tel que la fonction est sûrement non nulle autour de zéro.
2. De même, si $f(z) = 0$ c'est à dire que $k > 0$, la proposition signifie qu'il existe un domaine autour de 0, tel que la fonction est sûrement non nulle autour de 0, 0 devenant la seule valeur annulant f dans ce domaine

8.4.4 Corollaire

Soit $f(z) = \sum_{n \geqslant 0} a_n z^n$ une série entière, de rayon de convergence $\rho > 0$.
Soit $(z_p)_{p \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes distincts tels que $|z_p| < \rho$, tendant vers zéro, et tels que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, nous ayions $f(z_p) = 0$
Alors, tous les coefficients a_n sont nuls, et donc f est identiquement nulle.

Démonstration

Soient $f(z) = \sum_{n \geqslant 0} a_n z^n$ une série entière, de rayon de convergence $\rho > 0$ et $(z_p)_{p \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes distincts tels que $|z_p| < \rho$, tendant vers zéro, et tels que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, nous ayions $f(z_p) = 0$
Si la suite $(z_p)_{p \in \mathbb{N}}$ tend vers zéro, alors, pour tout $0 < r < \rho$, il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que si $n > N$ alors $|z_p| < r$, et $f(z_p) = 0$.
Ce qui est en contradiction avec le principe des zéros isolés vu en 8.4.3
Et donc pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \rho$, $f(z) = 0$ et donc tous les coefficients a_n sont nuls.

8.4.5 Corollaire

Soit $f(z) = \sum_{n \geqslant 0} a_n z^n$ une série entière, de rayon de convergence $\rho > 0$.
Soit $g(z) = \sum_{n \geqslant 0} b_n z^n$ une série entière, de rayon de convergence $\rho_1 > 0$
On appelle $R = \inf(\rho; \rho_1)$.
Soit $(z_p)_{p \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes distincts, tendant vers zéro, tels que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $|z_p| < R$ et $f(z_p) = g(z_p)$
Alors, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que$|z| < R$, $f(z) = g(z)$

Démonstration

Il suffit d'appliquer le corollaire précédent 8.4.4 à la fonction $\varphi = f - g$

Remarque 9 :

Une autre conséquence, c'est qu'une fonction ne peut être la somme que d'une seule série entière dans un intervalle ouvert de centre 0.

8.4.6 Unicité du développement en série entière

Soit f une fonction définie sur un domaine $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$, développable en série entière sur un disque ouvert $D(O, \rho)$, avec $\rho > 0$ tel que $D(O, \rho) \subset \mathcal{U}$
Alors, le développement de f en série entière est unique sur ce disque $D(O, \rho)$

Démonstration

Supposons qu'il existe deux suites complexes $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et un réel $r>0$ tels que

$$f(z)=\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n=\sum_{n\geqslant 0} b_n z^n$$

et ce, pour tout $z\in D(0;r)$. Démontrons que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $a_n=b_n$.
Nous allons démontrer cette propriété par récurrence.

⇒ C'est vrai pour $n=0$.
En effet, en $z=0$, nous avons $f(0)=a_0=b_0$

⇒ Supposons que pour tout $k\in\mathbb{N}$ tel que $0\leqslant k\leqslant n$, nous ayions $a_n=b_n$

⇒ Ensuite, nous avons, pour tout $z\in D(0;r)$:

$$f(z)=\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n=\sum_{n\geqslant 0} b_n z^n \iff f(z)=\sum_{k=0}^{n} a_k z^k+\sum_{k\geqslant n+1} a_k z^k=\sum_{k=0}^{n} b_k z^k+\sum_{k\geqslant n+1} b_k z^k$$

De l'hypothèse de récurrence, nous tirons

$$\begin{aligned}\sum_{k\geqslant n+1} a_k z^k=\sum_{k\geqslant n+1} b_k z^k &\iff z^{n+1}\sum_{k\geqslant n+1} a_k z^{n+1-k}=z^{n+1}\sum_{k\geqslant n+1} b_k z^{n+1-k}\\ &\iff z^{n+1}\sum_{k\geqslant 0} a_{k+n+1} z^k=z^{n+1}\sum_{k\geqslant 0} b_{n+1+k} z^k\end{aligned}$$

Et donc, pour tout $z\in D(0;r)$, avec $z\neq 0$, nous avons

$$z^{n+1}\sum_{k\geqslant 0} a_{k+n+1} z^k=z^{n+1}\sum_{k\geqslant 0} b_{n+1+k} z^k \iff \sum_{k\geqslant 0} a_{k+n+1} z^k=\sum_{k\geqslant 0} b_{n+1+k} z^k$$

Appelons $g(z)=a_{n+1}+\sum_{k\geqslant 1} a_{k+n+1} z^k=b_{n+1}+\sum_{k\geqslant 1} b_{n+1+k} z^k$. D'après 8.4.2, g est continue en 0 et donc :

$$a_{n+1}=\lim_{x\to 0} g(z)=g(0)=b_{n+1}$$

Donc, pour tout $n\in\mathbb{N}$, nous avons $a_n=b_n$

Remarque 10 :

Nous avons démontré que si $f(z)=\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$, alors nous avons $a_n=\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$, ce qui ajoute à l'unicité du développement.

8.4.7 Corollaire

Soit f une fonction définie sur un domaine $\mathcal{U}\subset\mathbb{C}$, développable en série entière sur un disque ouvert $D(O,\rho)$, avec $\rho>0$ tel que $D(O,\rho)\subset\mathcal{U}$
Nous supposons $f(z)=\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$

1. Si f est paire, c'est à dire si pour tout $z\in D(O,\rho)$, $f(z)=f(-z)$, alors, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $a_{2n+1}=0$, c'est à dire $f(z)=\sum_{n\geqslant 0} a_{2n} z^{2n}$
2. Si f est impaire, c'est à dire si pour tout $z\in D(O,\rho)$, $f(-z)=-f(z)$, alors, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $a_{2n}=0$, c'est à dire $f(z)=\sum_{n\geqslant 0} a_{2n+1} z^{2n+1}$

Démonstration

Soit $z \in D(O,\rho)$. Alors : $f(z) = \sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et $f(-z) = \sum\limits_{n\geqslant 0} a_n (-z)^n = \sum\limits_{n\geqslant 0} (-1)^n a_n z^n$

De $f(-z) = f(z)$, nous déduisons $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n = \sum\limits_{n\geqslant 0} (-1)^n a_n z^n \iff \sum\limits_{n\geqslant 0} (1-(-1)^n) a_n z^n = 0$

De l'unicité du développement en série entière, nous tirons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $(1-(-1)^n) a_n = 0$

- $\Rightarrow$ Si n est pair, alors $0 \times a_{2n} = 0$ et donc $a_{2n} \in \mathbb{C}$
- $\Rightarrow$ Si n est impair, alors $2 \times a_{2n+1} = 0$ et donc $a_{2n+1} = 0$

D'où, f s'écrit $f(z) = \sum\limits_{n\geqslant 0} a_{2n} z^{2n}$

La démonstration est la même si f est impaire

8.5 Séries entières à variable réelle

Dans ce paragraphe, on se limite aux séries entières et fonctions de la variable réelle, les coefficients des séries entières considérées pouvant être complexes.

Dans le cas où une série entière réelle $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ *de rayon de convergence fini* $R > 0$ *converge pour* $x = R$ *on étudie le prolongement par continuité en* $x_0 = R$ *de* $f(x) = \sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$

8.5.1 Théorème

Soit $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ une série entière réelle *(c'est à dire telle que* $x \in \mathbb{R}$ *même si* $a_n \in \mathbb{C}$*)* de rayon de convergence fini $R > 0$

On suppose que la série numérique $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n R^n$ est convergente.

Pour $x \in]-R;+R[$, nous notons $f(x) = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$; Alors :

$$\lim_{\substack{x\to R \\ x<R}} f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n R^n$$

f peut donc être prolongée par continuité en $x_0 = R$ en posant $f(R) = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n R^n$

Démonstration

1. Pour tout $x \in]-R;+R[$, nous notons $f(x) = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$. Comme la série numérique $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n R^n$ est convergente, on pose $L = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n R^n$.

   Nous devons donc montrer que $\lim\limits_{\substack{x\to R \\ x<R}} f(x) = L$

2. Pour $x \in]0;R]$, nous posons $S_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$.

   - $\star$ Pour $0 < x < R$, c'est à dire $x \in]0;R]$ et $x \neq R$, nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(x) = f(x)$
   - $\star$ $S_n(x)$ étant une somme finie, $S_n(R)$ existe et, par hypothèse, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(R) = L$
   - $\star$ D'autre part, $a_n R^n = S_n(R) - S_{n-1}(R)$

3. Pour $x \in]0; R]$, nous avons :

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k R^k \frac{x^k}{R^k} = \sum_{k=0}^{n} a_k R^k \left(\frac{x}{R}\right)^k$$

De l'identité $a_k R^k = S_k(R) - S_{k-1}(R)$, nous tirons :

$$\begin{aligned}
S_n(x) = &\ a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k R^k \left(\frac{x}{R}\right)^k = a_0 + \sum_{k=1}^{n} \left(S_k(R) - S_{k-1}(R)\right)\left(\frac{x}{R}\right)^k \\
= &\ a_0 + \sum_{k=1}^{n} S_k(R)\left(\frac{x}{R}\right)^k - \sum_{k=1}^{n} S_{k-1}(R)\left(\frac{x}{R}\right)^k = a_0 + \sum_{k=1}^{n} S_k(R)\left(\frac{x}{R}\right)^k - \sum_{k=0}^{n-1} S_k(R)\left(\frac{x}{R}\right)^{k+1} \\
= &\ a_0 + \sum_{k=1}^{n-1} S_k(R)\left(\frac{x}{R}\right)^k + S_n(R)\left(\frac{x}{R}\right)^n - S_0(R)\left(\frac{x}{R}\right) - \left(\frac{x}{R}\right)\sum_{k=1}^{n-1} S_k(R)\left(\frac{x}{R}\right)^k \\
= &\ a_0 - S_0(R)\left(\frac{x}{R}\right) + \sum_{k=1}^{n-1} S_k(R)\left(1 - \frac{x}{R}\right)\left(\frac{x}{R}\right)^k + S_n(R)\left(\frac{x}{R}\right)^n \\
= &\ a_0 - S_0(R)\left(\frac{x}{R}\right) + \left(1 - \frac{x}{R}\right)\sum_{k=1}^{n-1} S_k(R)\left(\frac{x}{R}\right)^k + S_n(R)\left(\frac{x}{R}\right)^n
\end{aligned}$$

Nous avons donc $S_n(x) = a_0 - S_0(R)\left(\frac{x}{R}\right) + \left(1 - \frac{x}{R}\right)\sum_{k=1}^{n-1} S_k(R)\left(\frac{x}{R}\right)^k + S_n(R)\left(\frac{x}{R}\right)^n$

4. Nous avons $S_0(R) = \sum_{k=0}^{0} a_0 R^0 = a_0$, et donc $a_0 - S_0(R)\left(\frac{x}{R}\right) = S_0(R)\left(1 - \frac{x}{R}\right)$, de telle sorte que

$$\begin{aligned}
S_n(x) = &\ a_0 - S_0(R)\left(\frac{x}{R}\right) + \left(1 - \frac{x}{R}\right)\sum_{k=1}^{n-1} S_k(R)\left(\frac{x}{R}\right)^k + S_n(R)\left(\frac{x}{R}\right)^n \\
= &\ S_0(R)\left(1 - \frac{x}{R}\right) + \left(1 - \frac{x}{R}\right)\sum_{k=1}^{n-1} S_k(R)\left(\frac{x}{R}\right)^k + S_n(R)\left(\frac{x}{R}\right)^n \\
= &\ \left(1 - \frac{x}{R}\right)\sum_{k=0}^{n-1} S_k(R)\left(\frac{x}{R}\right)^k + S_n(R)\left(\frac{x}{R}\right)^n
\end{aligned}$$

Nous avons donc

$$S_n(x) = \left(1 - \frac{x}{R}\right)\sum_{k=0}^{n-1} S_k(R)\left(\frac{x}{R}\right)^k + S_n(R)\left(\frac{x}{R}\right)^n \iff \left(1 - \frac{x}{R}\right)\sum_{k=0}^{n-1} S_k(R)\left(\frac{x}{R}\right)^k = S_n(x) - S_n(R)\left(\frac{x}{R}\right)^n$$

5. Pour $x \in]0; R[$, nous avons $\frac{x}{R} < 1$ et donc $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{x}{R}\right)^n = 0$.

D'autre part, $\lim_{n \to +\infty} S_n(R) = L$, et donc $\lim_{n \to +\infty} S_n(R)\left(\frac{x}{R}\right)^n = 0$

Comme $|x| < R$, nous avons $\lim_{n \to +\infty} S_n(x) = f(x)$.

Ainsi, $\lim_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{x}{R}\right)\sum_{k=0}^{n-1} S_k(R)\left(\frac{x}{R}\right)^k$ existe, et nous avons :

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{x}{R}\right)\sum_{k=0}^{n-1} S_k(R)\left(\frac{x}{R}\right)^k = f(x)$$

Que nous pouvons écrire $\left(1 - \frac{x}{R}\right)\sum_{k \in \mathbb{N}} S_k(R)\left(\frac{x}{R}\right)^k = f(x)$

6. **Soit** $\varepsilon > 0$

(a) Pour montrer que $\lim\limits_{\substack{x \to R \\ x < R}} f(x) = L$, nous allons évaluer $|f(x) - L|$, et, sans perdre de généralité, supposer que $x \in]0; R[$

(b) Tout d'abord, $|f(x) - L| = \left| \left(1 - \dfrac{x}{R}\right) \sum\limits_{n \geqslant 0} S_n(R) \left(\dfrac{x}{R}\right)^n - L \right|$ et en remarquant 2 choses :

- ▷ La première, c'est que $L = \left(1 - \dfrac{x}{R}\right) \times \dfrac{1}{\left(1 - \dfrac{x}{R}\right)}$, et comme $0 < \dfrac{x}{R} < 1$, nous avons $\dfrac{1}{1 - \dfrac{x}{R}} = \sum\limits_{n \geqslant 0} \left(\dfrac{x}{R}\right)^n$, de telle sorte que $L = \left(1 - \dfrac{x}{R}\right) \times L \times \sum\limits_{n \geqslant 0} \left(\dfrac{x}{R}\right)^n$
- ▷ La seconde, c'est d'écrire $L = \left(1 - \dfrac{x}{R}\right) \sum\limits_{n \geqslant 0} L \times \left(\dfrac{x}{R}\right)^n$

Et donc,

$$\begin{aligned} |f(x) - L| &= \left| \left(1 - \frac{x}{R}\right) \sum_{n \geqslant 0} S_n(R) \left(\frac{x}{R}\right)^n - \left(1 - \frac{x}{R}\right) \sum_{n \geqslant 0} L \times \left(\frac{x}{R}\right)^n \right| \\ &= \left(1 - \frac{x}{R}\right) \left| \sum_{n \geqslant 0} (S_n(R) - L) \left(\frac{x}{R}\right)^n \right| \\ &\leqslant \left(1 - \frac{x}{R}\right) \sum_{n \geqslant 0} |S_n(R) - L| \left(\frac{x}{R}\right)^n \end{aligned}$$

(c) Nous avons, par hypothèses, $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n(R) = L$.

Il existe donc $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N_0$, alors $|S_n(R) - L| < \varepsilon$ et donc, nous pouvons écrire

$$\sum_{n \geqslant N_0 + 1} |S_n(R) - L| \left(\frac{x}{R}\right)^n \leqslant \varepsilon \sum_{n \geqslant N_0 + 1} \left(\frac{x}{R}\right)^n$$

En allant plus loin, nous avons $\sum\limits_{n \geqslant N_0 + 1} \left(\dfrac{x}{R}\right)^n \leqslant \sum\limits_{n \geqslant 0} \left(\dfrac{x}{R}\right)^n = \dfrac{1}{\left(1 - \dfrac{x}{R}\right)}$, de telle sorte que

$$\sum_{n \geqslant N_0 + 1} |S_n(R) - L| \left(\frac{x}{R}\right)^n \leqslant \varepsilon \times \frac{1}{\left(1 - \dfrac{x}{R}\right)}$$

(d) Maintenant, regardons $\sum\limits_{n=0}^{N_0} |S_n(R) - L| \left(\dfrac{x}{R}\right)^n$

- ▷ Pour commencer, comme $x \in]0; R]$, nous avons $0 < \dfrac{x}{R} \leqslant 1$, et donc

$$\sum_{n=0}^{N_0} |S_n(R) - L| \left(\frac{x}{R}\right)^n \leqslant \sum_{n=0}^{N_0} |S_n(R) - L|$$

- ▷ L'expression $\sum\limits_{n=0}^{N_0} |S_n(R) - L|$ est bornée. Soit $M > 0$ cette borne. Nous écrivons alors $M = A \times R$ et donc noous avons :

$$\sum_{n=0}^{N_0} |S_n(R) - L| \leqslant A \times R$$

(e) En synthèse :

$$\begin{aligned}
|f(x)-L| &\leqslant \left(1-\frac{x}{R}\right)\sum_{n\geqslant 0}|S_n(R)-L|\left(\frac{x}{R}\right)^n \\
&\leqslant \left(1-\frac{x}{R}\right)\left[\sum_{n=0}^{N_0}|S_n(R)-L|\left(\frac{x}{R}\right)^n+\sum_{n\geqslant N_0+1}|S_n(R)-L|\left(\frac{x}{R}\right)^n\right] \\
&\leqslant \left(1-\frac{x}{R}\right)\left[A\times R+\varepsilon\times\frac{1}{\left(1-\frac{x}{R}\right)}\right] \\
&\leqslant \left(1-\frac{x}{R}\right)\times A\times R+\varepsilon \\
&\leqslant A(R-x)+\varepsilon
\end{aligned}$$

Ainsi, si $R-x\leqslant\dfrac{\varepsilon}{A}$, alors $|f(x)-L|\leqslant\dfrac{\varepsilon}{A}\times A+\varepsilon=2\varepsilon$
Ce qui termine de montrer que $\lim\limits_{\substack{x\to R\\ x<R}} f(x)=L$

f peut donc être prolongée par continuité en $x_0=R$ en posant $f(R)=L=\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}a_nR^n$

Remarque 11 :

Cette démonstration *(longue)* est une démonstration à la « Abel ». Nous retrouverons ce type de démonstration dans le paragraphe 8.8 sur les théorèmes taubériens.

8.5.2 Théorème

Soit f une fonction de la variable réelle développable en série entière sur un intervalle $]-R;+R[$ avec $R>0$
Nous supposons que, pour tout $x\in\,]-R;+R[$, nous avons $f(x)=\sum\limits_{n\geqslant 0}a_nx^n$ où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres complexes.
Alors, la fonction f est alors continûment dérivable sur $]-R;+R[$ et pour tout $x\in\,]-R;+R[$, nous avons

$$f'(x)=\sum_{n\geqslant 1}na_nx^{n-1}$$

Démonstration

1. Soit $S(x)=\sum\limits_{n\geqslant 0}a_nx^n$ et $S'(x)=\sum\limits_{n\geqslant 1}na_nx^{n-1}$ 2 séries entières.
   On suppose que S a pour rayon de convergence $R>0$ et donc de domaine de convergence $]-R;+R[$. Nous avons démontré en 8.3.4 que les séries S et S' ont même rayon de convergence. Donc la série $S'(x)=\sum\limits_{n\geqslant 1}na_nx^{n-1}$ converge aussi dans l'intervalle $]-R;+R[$
2. Nous appelons donc, pour tout $x\in\,]-R;+R[$ $f(x)=\sum\limits_{n\geqslant 0}a_nx^n$, et nous allons démontrer 2 choses :
   (a) f est dérivable sur $]-R;+R[$
   (b) Pour tout $x\in\,]-R;+R[$, nous avons $f'(x)=\sum\limits_{n\geqslant 1}na_nx^{n-1}$

   Pour démontrer tout ceci, nous allons démontrer que, pour tout $x_0\in\,]-R;+R[$

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}-S'(x_0)\right)=0$$

3. Si R est le rayon de convergence de S, soit $r>0$ tel que $0<r<R$ et nous choisissons $x_0\in\,]-r;+r[$ c'est à dire tel que $|x_0|<r$ et $h\in\mathbb{R}^*$ tel que $|x_0+h|<r$.
   Pour cela, nous choisissons $h\in\mathbb{R}^*$ tel que $0<|h|<r-|x_0|$
   En effet, $|x_0+h|\leqslant|x_0|+|h|<|x_0|+r-|x_0|=r$
   Alors, $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}-S'(x_0)=\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}u_n(x_0,h)$.
   Nous allons préciser $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}u_n(x_0,h)$ pour démontrer que $\displaystyle\lim_{h\to0}\sum_{n\in\mathbb{N}}u_n(x_0,h)=0$
   (a) Etude de $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}-S'(x_0)$
   $\rightarrow$ Nous avons $f(x_0+h)-f(x_0)=\displaystyle\sum_{n\geqslant0}a_n(x_0+h)^n-\sum_{n\geqslant0}a_nx_0^n=\sum_{n\geqslant0}a_n\left[(x_0+h)^n-x_0^n\right]$, et donc
   $$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\sum_{n\geqslant0}\frac{a_n}{h}\left[(x_0+h)^n-x_0^n\right]$$
   $\rightarrow$ D'où $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}-S'(x_0)=\displaystyle\sum_{n\geqslant0}\left(\frac{a_n}{h}\left[(x_0+h)^n-x_0^n\right]-na_nx_0^{n-1}\right)$
   (b) Posons $u_n(x_0,h)=\dfrac{a_n}{h}\left[(x_0+h)^n-x_0^n\right]-na_nx_0^{n-1}$
   (c) Etudions tout d'abord $\left[(x_0+h)^n-x_0^n\right]$
   $\rightarrow$ Nous avons $(x_0+h)^n-x_0^n=x_0^n\left[\left(\dfrac{x_0+h}{x_0}\right)^n-1\right]$
   $\rightarrow$ De l'identité $A^n-1=(A-1)\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}A^k\right)$, nous tirons :
   $$\left(\frac{x_0+h}{x_0}\right)^n-1=\left(\frac{x_0+h}{x_0}-1\right)\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{x_0+h}{x_0}\right)^k=\left(\frac{x_0+h}{x_0}-1\right)\sum_{k=0}^{n-1}(x_0+h)^kx_0^{-k}$$
   $\rightarrow$ Nous avons donc :
   $$\begin{aligned}u_n(x_0,h)&=\frac{a_n}{h}\left[(x_0+h)^n-x_0^n\right]-na_nx_0^{n-1}\\&=\frac{a_nx_0^n}{h}\left[\left(\frac{x_0+h}{x_0}\right)^n-1\right]-na_nx_0^{n-1}\\&=\frac{a_nx_0^n}{h}\left(\frac{x_0+h}{x_0}-1\right)\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{x_0+h}{x_0}\right)^k-na_nx_0^{n-1}\\&=\frac{a_nx_0^n}{h}\left(\frac{x_0+h-x_0}{x_0}\right)\sum_{k=0}^{n-1}(x_0+h)^kx_0^{-k}-na_nx_0^{n-1}\\&=a_nx_0^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}(x_0+h)^kx_0^{-k}-na_nx_0^{n-1}\\&=a_n\sum_{k=0}^{n-1}(x_0+h)^kx_0^{n-1-k}-na_nx_0^{n-1}\end{aligned}$$
   Nous avons donc $u_n(x_0,h)=a_n\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(x_0+h)^kx_0^{n-1-k}-na_nx_0^{n-1}$
   (d) De l'égalité $u_n(x_0,h)=a_n\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(x_0+h)^kx_0^{n-1-k}-na_nx_0^{n-1}$, nous déduisons
   $$|u_n(x_0,h)|\leqslant|a_n|\sum_{k=0}^{n-1}|(x_0+h)|^k|x_0|^{n-1-k}+n|a_n|\left|x_0^{n-1}\right|$$

Comme nous avons choisi $|x_0| < r$ et $|x_0 + h| < r$, nous avons :

$$\begin{aligned} |u_n(x_0,h)| &\leqslant |a_n| \sum_{k=0}^{n-1} r^k r^{n-1-k} + n|a_n| r^{n-1} \\ &\leqslant |a_n| \left(nr^{n-1}\right) + n|a_n| r^{n-1} \\ &\leqslant 2n|a_n| r^{n-1} \end{aligned}$$

4. **Soit** $\varepsilon > 0$
   (a) Comme $0 < r < R$, la série $\sum_{n\geqslant 1} 2n|a_n| r^{n-1}$ converge.

   Il existe donc $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{n\geqslant N_0+1} 2n|a_n| r^{n-1} < \frac{\varepsilon}{2}$.

   Ceci veut donc dire que $\sum_{n\geqslant N_0+1} |u_n(x_0,h)| \leqslant \sum_{n\geqslant N_0+1} 2n|a_n| r^{n-1} < \frac{\varepsilon}{2}$

   (b) Nous appelons $\varphi(h) = \sum_{n=0}^{N_0} u_n(x_0,h)$.

   En écrivant $\varphi(h) = \sum_{n=0}^{N_0} u_n(x_0,h) = \sum_{n=0}^{N_0} a_n \left(\sum_{k=0}^{n-1} (x_0+h)^k x_0^{n-1-k} - na_n x_0^{n-1} \right)$, on voit que φ est un polynôme en h et donc est continu et en particulier est continu en $h = 0$.
   Calculons $\varphi(0)$.
   Tout d'abord

$$\begin{aligned} u_n(x_0,0) &= a_n \sum_{k=0}^{n-1} (x_0+0)^k x_0^{n-1-k} - na_n x_0^{n-1} \\ &= a_n \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1} - na_n x_0^{n-1} \\ &= na_n x_0^{n-1} - na_n x_0^{n-1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

   Et donc $\varphi(0) = 0$

   (c) Il existe donc $\eta_\varepsilon > 0$ tels que si $|h| < \eta_\varepsilon$ alors $|\varphi(h)| = \left| \sum_{n=0}^{N_0} u_n(x_0,h) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$

5. Finalement, nous déduisons que, si $|h| < \eta_\varepsilon$, alors

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - S'(x_0) \right| &= \left| \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n(x_0,h) \right| \\ &\leqslant \left| \sum_{n=0}^{N_0} u_n(x_0,h) \right| + \left| \sum_{n\geqslant N_0+1\mathbb{N}} u_n(x_0,h) \right| \\ &\leqslant \left| \sum_{n=0}^{N_0} u_n(x_0,h) \right| + \sum_{n\geqslant N_0+1} 2n|a_n| r^{n-1} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

6. De là, nous déduisons donc que $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = S'(x_0)$.
   Et donc, la fonction f est continûment dérivable sur $]-R;+R[$ et pour tout $x \in]-R;+R[$, nous avons $f'(x) = \sum_{n\geqslant 1} na_n x^{n-1}$

Remarque 12 :

1. Cette démonstration pourrait se faire aussi dans l'ensemble $\mathbb{C}$. Nous la reverrons lorsque nous travaillerons les fonctions complexes.
2. On peut démontrer que la convergence de $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ vers $S'(x_0)$ se fait uniformément par rapport à x_0, lorsque $|x_0| \leqslant r$ lorsque $r < R$

8.5.3 Corollaire

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ une série entière réelle de rayon de convergence fini $R > 0$

Pour $x \in]-R;+R[$, nous notons $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres complexes.

Alors, la fonction f est indéfiniment dérivable sur $]-R;+R[$ avec, pour tout entier $p \geqslant 1$ et tout réel $x \in]-R;+R[$, nous avons :

$$f^{(p)}(x) = \sum_{n\geqslant p} n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1)\,a_n x^{n-p} = \sum_{n\geqslant p}(x)\frac{n!}{(n-p)!}a_n x^{n-p} = \sum_{n\geqslant p} \mathrm{A}_n^p a_n x^{n-p}$$

Démonstration

1. D'après 8.3.4 et le résultat précédent, la série dérivée $f'(x) = \sum_{n\geqslant 1} n a_n x^{n-1}$ a même rayon de convergence que $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$
2. Par récurrence, on démontre que $f^{(p)}(x)$ a même rayon de convergence que f
3. Et de manière classique, pour $p \geqslant 1$, nous avons $f^{(p)}(x) = \sum_{n\geqslant p} n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1)\,a_n x^{n-p}$

Remarque 13 :

En évaluant $f^{(p)}(x)$ en $x = 0$, nous obtenons $a_p = \dfrac{f^{(p)}(0)}{p!}$

8.5.4 Corollaire

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ une série entière réelle de rayon de convergence fini $R > 0$

Pour $x \in]-R;+R[$, nous notons $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres complexes.

Alors, La primitive de f nulle en 0 est la fonction F définie, pour tout $x \in]-R;+R[$ par :

$$F(x) = \sum_{n\geqslant 0} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Démonstration

Evidente ; à faire seul

Exemple 10 :

▷ A partir du développement $\dfrac{1}{1-x} = \sum\limits_{n\geqslant 0} x^n$ vrai pour $|x| < 1$, nous déduisons par dérivation et intégration, les développements :

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n\geqslant 1} nx^{n-1} \text{ et } \ln(1-x) = -\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

chacune de ces séries étant de rayon de convergence égal à 1.

▷ Pour $x = \dfrac{1}{2}$, nous obtenons

$$\ln\left(1-\frac{1}{2}\right) = -\sum_{n\geqslant 0} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{n+1} \Longleftrightarrow \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{(n+1)\,2^{n+1}}$$

Exercice 10 :

En utilisant la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}$, calculer $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{(-1)^n}{n+1}$

Exercice 11 :

En utilisant la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$, calculer $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$

Exercice 12 :

On considère la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} (n+1)\,x^n$

1. Trouver le rayon de convergence de la série
2. Trouver la série primitive de $\sum\limits_{n\geqslant 0} (n+1)\,x^n$ et en donner la somme
3. En déduire la somme de $\sum\limits_{n\geqslant 0} (n+1)\,x^n$
4. Trouver la somme de la série $1 + \dfrac{2}{2} + \dfrac{3}{4} + \dfrac{4}{8} + \dfrac{5}{16} + \dfrac{6}{32} + \cdots$

Remarque 14 :

1. Si une fonction f, de classe C^∞ autour de 0 et développable en série entière autour de 0, alors, ce développement est nécessairement donné par $f(x) = \sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$
2. Mais, si f est de classe C^∞, sa série de Taylor converge-t-elle ?
   Il n'en est rien en général : il existe des fonctions indéfiniment dérivables en 0 telles que la série de Taylor ne converge pas.
   Par exemple :

$$\begin{cases} g(x) &= e^{\frac{-1}{x^2}} \text{ si } x \neq 0 \\ g(0) &= 0 \end{cases}$$

   On démontre que g est indéfiniment dérivable et que $(\forall n \in \mathbb{N}) \left(g^{(n)}(x) = \dfrac{Q_n(x)}{x^{3n}} e^{\frac{-1}{x^2}}\right)$ pour $x \neq 0$, et donc $g^{(n)}(0) = 0$.

Si on appelle $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n(x) = 0$, alors que la fonction n'est pas nulle ; il n'existe donc aucune série entière convergeant vers g .

3. Les polynômes $P_n(x)$ sont appelés polynômes de Taylor.

8.5.5 Théorème

Soit f une fonction de classe C^∞ sur un voisinage ouvert I de 0 et à valeurs dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$.
S'il existe un réel $r > 0$ tel que $]-r;+r[\subset I$ et tel que pour tout $x \in]-r;+r[$ on peut trouver un réel $M > 0$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left|f^{(n)}(x)\right| \leqslant M$

Alors, f est développable en série entière sur $]-r;+r[$ et pour tout $x \in]-r;+r[$, $f(x) = \sum_{n \geqslant 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$

Le rayon de convergence de cette série entière est supérieur ou égal à r

Démonstration

1. L'objet de ce théorème est de démontrer que les polynômes de Taylor $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ convergent uniformément vers f
2. Pour démontrer que les polynômes de Taylor convergent vers f, il faut montrer que le reste de Taylor converge vers zéro, uniformément.
   La formule de Taylor-Mac Laurin nous donne
   $$f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1}$$
   où $\theta \in]0;+1[$; on a donc :
   $$f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1}$$
   C'est à dire, en passant aux valeurs absolues
   $$|f(x) - P_n(x)| = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \left|f^{(n+1)}(\theta x)\right|$$
   Si la dérivée $(n+1)$-*ième* est bornée par $M > 0$ sur $]-r;r[$, nous avons :
   $$|f(x) - P_n(x)| \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} M$$
   Comme $\lim_{n \to +\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} M = 0$, le polynôme de Taylor tend uniformément vers f.

Remarque 15 :

1. Les fonctions indéfiniment dérivables dont le polynôme de Taylor converge vers f ne forment qu'une infime partie des fonctions de classe C^∞
2. Dans la pratique, il est bien rare de devoir calculer la formule de Taylor pour développer une fonction en série entière.

Exemple 11 :

Des exemples simples de développement de fonctions en série entière

1. La fonction $f(x) = \cos x$.

   Les dérivées successives de f sont toutes du type $f^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\dfrac{\pi}{2}\right)$

   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons $\left|f^{(n)}(x)\right| \leqslant 1$ et donc, d'après 8.5.5 f est développable en série entière. Et nous avons même :
$$\cos x = \sum_{n\geqslant 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$
   Or, $f^{(n)}(0) = \cos\left(n\dfrac{\pi}{2}\right)$.

   $\to$ Si n est pair, alors $n = 2p$ et $f^{(2p)}(0) = \cos\left(2p \times \dfrac{\pi}{2}\right) = \cos p\pi = (-1)^p$

   $\to$ Si n est impair, alors $n = 2p+1$ et $f^{(2p+1)}(0) = \cos\left((2p+1)\dfrac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} + p\pi\right) = 0$

   Ainsi, seuls les termes d'ordre pair sont pris en compte et nous avons :
$$\cos x = \sum_{p\geqslant 0} \frac{(-1)^p}{(2p)!} x^{2p}$$
   Le rayon de convergence de cette série est clairement $R = +\infty$

2. La fonction $g(x) = \sin x$.

   La résolution suit exactement le fil du point ci-dessus.

   Les dérivées successives de g sont toutes du type $g^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\dfrac{\pi}{2}\right)$

   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons $\left|g^{(n)}(x)\right| \leqslant 1$ et donc, d'après 8.5.5 g est développable en série entière. Et nous avons même :
$$\sin x = \sum_{n\geqslant 0} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} x^n$$
   Or, $g^{(n)}(0) = \sin\left(n\dfrac{\pi}{2}\right)$.

   $\to$ Si n est pair, alors $n = 2p$ et $g^{(2p)}(0) = \sin\left(2p \times \dfrac{\pi}{2}\right) = \sin p\pi = 0$

   $\to$ Si n est impair, alors $n = 2p+1$ et $g^{(2p+1)}(0) = \sin\left((2p+1)\dfrac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} + p\pi\right) = (-1)^p$

   Ainsi, seuls les termes d'ordre impair sont pris en compte et nous avons :
$$\sin x = \sum_{p\geqslant 0} \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} x^{2p+1}$$
   Le rayon de convergence de cette série est clairement $R = +\infty$

3. La fonction $h(x) = \cosh x$.

   Les dérivées successives de h sont $h^{(n)}(x) = \cosh x$ si n est pair et $h^{(n)}(x) = \sinh x$ si n est impair.
   Pour tout $R > 0$ si $|x| \leqslant R$, alors $\left|h^{(n)}(x)\right| \leqslant M = \sup\{\cosh R; \sinh R\}$ et donc, d'après 8.5.5 h est développable en série entière sur $]-R; R[$. Et nous avons même :
$$\cosh x = \sum_{n\geqslant 0} \frac{h^{(n)}(0)}{n!} x^n$$
   $\to$ Si n est pair, alors $n = 2p$ et $h^{(2p)}(0) = \cosh 0 = 1$
   $\to$ Si n est impair, alors $n = 2p+1$ et $h^{(2p+1)}(0) = \sinh(0) = 0$
   Donc, nous avons, pour tout $x \in]-R; R[$, nous avons
$$\cosh x = \sum_{n\geqslant 0} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$
   Le rayon de convergence de cette série est $R = +\infty$

4. La fonction $i(x) = \sinh x$.

Les dérivées successives de i sont $i^{(n)}(x) = \cosh x$ si n est impair et $i^{(n)}(x) = \sinh x$ si n est pair. Pour tout $R > 0$ si $|x| \leqslant R$, alors $\left|i^{(n)}(x)\right| \leqslant M = \sup\{\cosh R; \sinh R\}$ et donc, d'après 8.5.5 i est développable en série entière sur $]-R; R[$. Et nous avons même :

$$\sinh x = \sum_{n\geqslant 0} \frac{i^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

→ Si n est pair, alors $n = 2p$ et $i^{(2p)}(0) = \sinh 0 = 0$
→ Si n est impair, alors $n = 2p+1$ et $i^{(2p+1)}(0) = \cosh(0) = 1$
Donc, nous avons, pour tout $x \in]-R; R[$, nous avons

$$\sinh x = \sum_{n\geqslant 0} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Le rayon de convergence de cette série est $R = +\infty$

5. Et, évidemment, la fonction exponentielle $E(x) = e^x$

Les dérivées successives de E sont $E^{(n)}(x) = e^x$.
Pour tout $R > 0$ si $|x| \leqslant R$, alors $\left|E^{(n)}(x)\right| \leqslant M = e^R$ et donc, d'après 8.5.5 E est développable en série entière sur $]-R; R[$. Et nous avons même :

$$e^x = \sum_{n\geqslant 0} \frac{E^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{n!}$$

Donc, nous avons, pour tout $x \in]-R; R[$, nous avons

$$e^x = \sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{n!}$$

Le rayon de convergence de cette série est $R = +\infty$

6. La fonction $f_\alpha(x) = (1+x)^\alpha$ pour $x > -1$.

Les dérivées successives de f_α sont données, pour $x > -1$, par : $f_\alpha^{(n)}(x) = \left(\prod_{k=0}^{n-1} (\alpha - k)\right)(1+x)^{\alpha-n}$, de telle sorte que, très simplement, $f_\alpha^{(n)}(0) = \prod_{k=0}^{n-1} (\alpha - k)$

En utilisant la formule de Taylor avec reste intégral, nous avons :

$$f_\alpha(x) = f_\alpha(0) + x f'_\alpha(0) + \cdots + \frac{x^{(n-1)} f_\alpha^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} + \int_0^x \frac{(x-t)^{(n-1)} f_\alpha^{(n)}(t)}{(n-1)!} \, \mathrm{d}t$$

C'est à dire :

$$f_\alpha(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k f_\alpha^{(k)}(0)}{k!} + \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (\alpha - k)}{(n-1)!} \int_0^x (x-t)^{(n-1)} (1+t)^{\alpha-n} \, \mathrm{d}t$$

En appelant $R_n(x)$:

$$R_n(x) = f_\alpha(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k f_\alpha^{(k)}(0)}{k!} = \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (\alpha - k)}{(n-1)!} \int_0^x (x-t)^{(n-1)} (1+t)^{\alpha-n} \, \mathrm{d}t$$

Il faut montrer que $\lim_{n\to+\infty} R_n(x) = 0$

$\Rightarrow$ Tout d'abord, en faisant le changement de variable $t = x\theta$, c'est à dire $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\theta} = x$, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\int_0^x (x-t)^{n-1}(1+t)^{\alpha-n}\ \mathrm{d}t &= \int_0^1 (x-x\theta)^{n-1}(1+x\theta)^{\alpha-n}\ \mathrm{d}\theta \\
&= x^{n-1}\int_0^1 (1-\theta)^{n-1}(1+x\theta)^{\alpha-n}\ \mathrm{d}\theta \\
&= x^{n-1}\int_0^1 \left(\frac{1-\theta}{1+x\theta}\right)^{n-1}(1+x\theta)^{\alpha-1}\ \mathrm{d}\theta
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Pour $\theta \in [0;1]$, nous avons $0 \leqslant \dfrac{1-\theta}{1+x\theta} \leqslant 1$

En effet, nous avons $x > -1$ et donc, $\theta x > -\theta$; d'où $1 + x\theta > 1 - \theta \geqslant 0$.

D'où $0 \leqslant \dfrac{1-\theta}{1+x\theta}$ puisque $1-\theta \geqslant 0$ et $1 + x\theta > 0$.

Et parce que $1 + x\theta > 1 - \theta$, $\dfrac{1-\theta}{1+x\theta} \leqslant 1$

Ce que nous voulions

$\Rightarrow$ Et donc :

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{|x|^{n-1}\prod_{k=0}^{n-1}|\alpha-k|}{(n-1)!}\int_0^1 (1+x\theta)^{\alpha-1}\ \mathrm{d}\theta$$

$\star$ Il est possible de calculer $\displaystyle\int_0^1 (1+x\theta)^{\alpha-1}\ \mathrm{d}\theta$. Nous avons, en effet :

$$\int_0^1 (1+x\theta)^{\alpha-1}\ \mathrm{d}\theta = \left[\frac{1}{x}\frac{(1+x\theta)^\alpha}{\alpha}\right]_0^1 = \frac{(1+x)^\alpha - 1}{\alpha x} = M(x)$$

$\star$ D'autre part, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{\prod_{k=0}^{n}|\alpha-k|}{(n-1)!}|x|^n$ est convergente pour $|x| < 1$ et donc, si $|x| < 1$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{|x|^{n-1}\prod_{k=0}^{n-1}|\alpha-k|}{(n-1)!}M(x) = 0$$

En conclusion,

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n\geqslant 0}\frac{f_\alpha^{(n)}(0)}{k!}x^n = 1 + \sum_{n\geqslant 1}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$$

avec pour rayon de convergence $\rho = 1$

(a) Pour $\alpha = -1$, nous obtenons le développemment de $\dfrac{1}{1+x}$:

$$\frac{1}{1+x} = 1 + \sum_{n\geqslant 1}\frac{-1\times(-1-1)\cdots(-1-n+1)}{n!}x^n = 1 + \sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n n!}{n!}x^n = \sum_{n\geqslant 0}(-1)^n x^n$$

(b) Pour $\alpha = \dfrac{1}{2}$, nous obtenons le développemment de $\sqrt{1+x}$

$$\sqrt{1+x} = \sum_{n\geqslant 0}(-1)^{n+1}\frac{(2n)!}{(2n-1)\,2^{2n}\,(n!)^2}x^n$$

Avec pour rayon de convergence 1

(c) Pour $\alpha = -\frac{1}{2}$, nous obtenons le développement de $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = \sum_{n\geqslant 0} (-1)^n \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}} x^n$$

Avec pour rayon de convergence 1

Exercice 13 :

Développer en série entière, au voisinage du 0, la fonction $f(x) = \arcsin x$ en précisant le rayon de convergence.

Exercice 14 :

Développer en série entière, au voisinage du 0, les fonctions suivantes

1. $\sin(x^2)$
2. $\cos 3x$
3. $\ln(1+x^2)$
4. $\cos x e^x$
5. $\cos(x+1)$
6. $\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

Exercice 15 :

Développer en série entière, au voisinage du 0, les fonctions suivantes :

1. $f(x) = \frac{1}{(x-1)(x-2)}$
2. $g(x) = \ln(x^2 - 5x + 6)$
3. $h(x) = \int_0^x \cos t^2 \, \mathrm{d}t$

8.6 Théorèmes de Bernstein

On a vu avec l'exemple de la fonction f définie par $f(0) = 0$ et $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ pour $x \neq 0$ qu'une fonction indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ n'est pas nécessairement développable en série entière et n'est pas somme sa série de Taylor.
Le théorème de Bernstein qui suit nous dit qu'avec l'hypothèse supplémentaire de positivité des dérivées d'ordres pairs de la fonction f on est assuré du développement en série entière.
Il faut voir ce paragraphe comme un exercice résolu

8.6.1 Lemme

Soit $a > 0$ et $f :]-a;+a[\longrightarrow \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^{+\infty}$, paire et telle que pour tout $x \in]-a;+a[$ et tout $k \in \mathbb{N}$, $f^{(2k)}(x) \geqslant 0$
Alors, f est développable en série entière sur l'intervalle $]-a;+a[$

Démonstration

1. On appelle $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$; c'est un classique polynôme de Taylor associé à f
2. Comme f est une fonction paire, les dérivées d'ordre impair sont impaires et, en particulier, nous avons, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^{(2k+1)}(0) = 0$ et donc
$$P_{2n}(x) = \sum_{k=0}^{2n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{2n} \frac{f^{(2k)}(0)}{k!} x^{2k}$$
3. En écrivant $f(x) = P_n(x) + R_n(x) \Longleftrightarrow R_n(x) = f(x) - P_n(x)$, $R_n(x)$ apparaît comme un reste ou encore l'erreur commise lorsqu'on remplace $f(x)$ par $P_n(x)$.
Pour montrer que f est développable en série entière sur l'intervalle $]-a;+a[$, il faudra montrer que $\lim_{n\to+\infty} R_n(x) = 0$.

4. Rappelons la formule de Taylor avec reste intégral :
Pour tout $x \in]-a;+a[$ et tout $y \in]-a;+a[$
$$f(x) = f(y) + (x-y) f'(y) + \cdots + \frac{(x-y)^n f^{(n)}(y)}{n\,!} + \int_y^x \frac{(x-t)^n f^{(n+1)}(t)}{n\,!}\, dt$$
En faisant $y = 0$ dans notre cas :
$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \cdots + \frac{x^n f^{(n)}(0)}{n\,!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n f^{(n+1)}(t)}{n\,!}\, dt$$
C'est à dire, en fait $f(x) = P_n(x) + \displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^n f^{(n+1)}(t)}{n\,!}\, dt$
5. Nous poserons donc $R_n(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^n f^{(n+1)}(t)}{n\,!}\, \mathrm{d}t$
6. Ecrivons autrement $R_n(x)$ en faisant le changement de variables $u = \dfrac{t}{x}$ et donc $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{x} \Longleftrightarrow \mathrm{d}t = x\,\mathrm{d}u$.
Nous avons alors :
$$\begin{aligned} R_n(x) &= \int_0^x \frac{(x-t)^n f^{(n+1)}(t)}{n!}\, \mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \frac{(x-ux)^n f^{(n+1)}(ux)}{n!} x \,\mathrm{d}u \\ &= \frac{x^{n+1}}{n\,!} \int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}(ux)\, \mathrm{d}u \end{aligned}$$
7. Nous allons utiliser le fait que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^{(2k+1)}(0) = 0$ et donc écrire, tout naturellement :
$$f(x) = P_{2n}(x) + R_{2n}(x)$$
8. Comme, pour tout $x \in]-a;+a[$ et tout $k \in \mathbb{N}$, $f^{(2k)}(x) \geqslant 0$, nous avons, en particulier, $f^{(2k)}(0) \geqslant 0$ et donc, pour tout $x \in]-a;+a[$, nous avons $P_{2n}(x) \geqslant 0$ puisqu'aussi, pour tout $x \in]-a;+a[$, $x^{2n} \geqslant 0$
Remarquons aussi que, comme $f(x) = P_{2n}(x) + R_{2n}(x)$ et que $P_{2n}(x) \geqslant 0$, nous avons
$$R_{2n}(x) \leqslant f(x)$$
9. f et P_{2n} étant paires, de la relation $R_{2n}(x) = f(x) - P_{2n}(x)$, on déduit aussi que R_{2n} est aussi une fonction paire.
Nous allons donc étudier $R_{2n}(x)$ pour $x \in [0;+a[$
10. Comme, pour tout $x \in [0;+a[$, nous avons $f^{(2n)}(x) \geqslant 0$ la fonction $f^{(2n+1)}(x)$ est une fonction croissante sur $[0;+a[$, et en particulier, $f^{(2n+1)}(x) \geqslant f^{(2n+1)}(0) = 0$
11. Ainsi, pour $r \in [0;+a[$, tout $x \in [0;r[$ et tout $u \in [0,1]$ de $ux \leqslant ur$, nous tirons $0 \leqslant f^{(2n+1)}(ux) \leqslant f^{(2n+1)}(ur)$ et donc :
$$\begin{aligned} 0 \leqslant R_{2n}(x) &= \frac{x^{2n+1}}{(2n)\,!} \int_0^1 (1-u)^{2n} f^{(2n+1)}(ux)\, \mathrm{d}u \\ &\leqslant \frac{x^{2n+1}}{(2n)\,!} \int_0^1 (1-u)^{2n} f^{(2n+1)}(ur)\, \mathrm{d}u = \frac{x^{2n+1}}{(2n)\,!} R_{2n}(r) \\ &\leqslant \frac{x^{2n+1}}{(2n)\,!} f(r) \end{aligned}$$
12. Pour tout $x \in [0;+a[$, nous avons $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n)\,!} f(r) = 0$ et donc, de $0 \leqslant R_{2n}(x) \leqslant \dfrac{x^{2n+1}}{(2n)\,!} f(r)$, on déduit que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} R_{2n}(x) = 0$.

13. Par parité, pour tout $x \in \left]-a;0\right]$, nous avons aussi $\lim\limits_{n\to+\infty} R_{2n}(x) = 0$ et donc, pour tout $x \in \left]-a+a\right[$, nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty} R_{2n}(x) = 0$
   Ensuite, de $P_{2n}(x) = P_{2n+1}(x)$, c'est à dire $R_{2n}(x) = R_{2n+1}(x)$, nous déduisons aussi que pour tout $x \in \left]-a+a\right[$, nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty} R_{2n+1}(x) = 0$.
   C'est à dire que, pour tout $x \in \left]-a+a\right[$, nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n(x) = 0$.
14. Nous en déduisons donc que $\lim\limits_{n\to+\infty} (f(x) - P_n(x)) = 0$. f est donc développable en série entière sur l'intervalle $\left]-a;+a\right[$

Remarque 16 :

Dans le lemme, nous nous intéressions à une fonction paire. Maintenant, qu'en est-il d'une fonction quelconque ? C'est l'objet du théorème suivant

8.6.2 Premier théorème de Bernstein

Soit $a > 0$ et $f : \left]-a;+a\right[\longrightarrow \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que pour tout $x \in \left]-a;+a\right[$ et tout $k \in \mathbb{N}$, $f^{(2k)}(x) \geqslant 0$
Alors, f est développable en série entière sur l'intervalle $\left]-a;+a\right[$

Démonstration

Bien entendu que nous allons utiliser le lemme 8.6.1

1. On commence par construire une fonction $g : \left]-a+a\right[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in \left]-a+a\right[$ par $g(x) = f(x) + f(-x)$
   ⇒ Il est clair que g est paire

   En effet, pour tout $x \in \left]-a+a\right[$, $g(-x) = f(-x) + f(x) = g(x)$

   ⇒ D'autre part, g est de classe de classe $\mathcal{C}^\infty$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$g^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) + (-1)^n f^{(n)}(-x)$$
   (Se démontre très facilement par récurrence)
   Et donc, en particulier, nous avons
   $$g^{(2n)}(x) = f^{(2n)}(x) + f^{(2n)}(-x)$$
   ⇒ Comme, pour tout $x \in \left]-a;+a\right[$ et tout $k \in \mathbb{N}$, $f^{(k)}(x) \geqslant 0$, nous avons aussi
   - ⋆ Pour tout $x \in \left]-a;+a\right[$, $g^{(2n)}(x) \geqslant 0$
   - ⋆ Et, de l'identité $g^{(2n)}(x) = f^{(2n)}(x) + f^{(2n)}(-x)$, nous avons, pour tout $x \in \left]-a;+a\right[$ $f^{(2n)}(x) \leqslant g^{(2n)}(x)$ et $f^{(2n)}(-x) \leqslant g^{(2n)}(x)$
2. Nous utilisons les notations de 8.6.1 en posant :
   $$R_{n,f}(x) = \frac{x^{n+1}}{n\,!}\int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}(ux)\,du \text{ et donc } R_{n,g}(x) = \frac{x^{n+1}}{n\,!}\int_0^1 (1-u)^n g^{(n+1)}(ux)\,du$$
   Nous avons donc :
   $$R_{2n-1,f}(x) = \frac{x^{2n}}{(2n-1)\,!}\int_0^1 (1-u)^{2n-1} f^{(2n)}(ux)\,du$$
   Et
   $$R_{2n-1,g}(x) = \frac{x^{2n}}{(2n-1)\,!}\int_0^1 (1-u)^{2n-1} g^{(2n)}(ux)\,du$$
3. Pour tout $x \in \left]-a;+a\right[$ et tout $u \in [0;+1]$, nous avons $ux \in \left]-a;+a\right[$ et donc
   $$0 \leqslant f^{(2n)}(ux) \leqslant g^{(2n)}(ux)$$

4. Maintenant :
$$\begin{aligned} 0 \leqslant |R_{2n-1,f}(x)| &= \frac{x^{2n}}{(2n-1)\,!}\int_0^1 (1-u)^{2n-1} f^{(2n)}(ux)\,\mathrm{d}u \\ &\leqslant \frac{x^{2n}}{(2n-1)\,!}\int_0^1 (1-u)^{2n-1} g^{(2n)}(ux)\,\mathrm{d}u = R_{2n-1,g}(x) \end{aligned}$$
5. D'après le lemme 8.6.1, pour tout $x \in \left]-a;+a\right[$ nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty} R_{2n-1,g}(x) = 0$ et donc, pour tout $x \in \left]-a;+a\right[$ $\lim\limits_{n\to+\infty} R_{2n-1,f}(x) = 0$
6. Il faut, maintenant, montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} R_{2n,f}(x) = 0$
   $\Rightarrow$ Nous avons :
   $$f(x) = P_{2n}(x) + R_{2n,f}(x) = P_{2n-1}(x) + R_{2n-1,f}(x)$$
   C'est à dire
   $$R_{2n,f}(x) = P_{2n-1}(x) - P_{2n}(x) + R_{2n-1,f}(x)$$
   $$\Longleftrightarrow$$
   $$R_{2n,f}(x) = -\frac{f^{(2n)}(0)}{(2n)!}x^{2n} + R_{2n-1,f}(x)$$
   $\Rightarrow$ Nous avons établi que $g^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) + (-1)^n f^{(n)}(-x)$ et donc, qu'en particulier,
   $$g^{(2n)}(0) = 2f^{(2n)}(0)$$
   Nous avons alors $R_{2n,f}(x) = -\dfrac{g^{(2n)}(0)}{2\times(2n)!}x^{2n} + R_{2n-1,f}(x)$

   $\Rightarrow$ D'après le lemme 8.6.1 nous avons, pour $x \in \left]-a;+a\right[$, $g(x) = \sum\limits_{k\geqslant 0}\dfrac{g^{(k)}(0)}{k!}x^k$ et donc
   $$\lim_{k\to+\infty}\frac{g^{(k)}(0)}{k!}x^k = 0$$
   En particulier, pour tout $x \in \left]-a;+a\right[$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{g^{(2n)}(0)}{2\times(2n)!}x^{2n} = 0$

   $\Rightarrow$ Nous avons donc $\lim\limits_{n\to+\infty} R_{2n,f}(x) = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{g^{(2n)}(0)}{2\times(2n)!}x^{2n} + \lim\limits_{n\to+\infty} R_{2n-1,f}(x) = 0$

   Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} R_{2n-1,f}(x) = 0$, que $\lim\limits_{n\to+\infty} R_{2n,f}(x) = 0$, nous avons aussi $\lim\limits_{n\to+\infty} R_{n,f}(x) = 0$ pour tout $x \in \left]-a;+a\right[$

Ce que nous voulions

Remarque 17 :

Nous présentons, ci-après une présentation beaucoup plus simple que celle de 8.6.2. En effet, dans 8.6.3, nous supposerons que toutes les dérivées successives de f sont positives, ce qui inclus le cas où seules les dérivées d'ordre pair sont positives. Quelque part, donc, 8.6.3 est un cas particulier de 8.6.2

8.6.3 Second théorème de Bernstein

Soit $a > 0$ et $f : \left]-a;+a\right[\longrightarrow \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que pour tout $x \in \left]-a;+a\right[$ et tout $k \in \mathbb{N}$, $f^{(k)}(x) \geqslant 0$
Alors, f est développable en série entière sur l'intervalle $\left]-a;+a\right[$

Démonstration

Bien entendu nous allons utiliser les notations introduites en 8.6.1 et en 8.6.2.

1. Nous allons tout d'abord démontrer sur l'intervalle $[0;a[$
   Soient donc $x \in [0;a[$.
   Il existe $r \in]0;a[$, c'est à dire $0 < r < a$ tel que $0 < x < r < a$, c'est à dire tel que $x \in]0;r[$
   $\Rightarrow$ Nous posons, comme précédemment $R_n(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^n f^{(n+1)}(t)}{n\,!}\,\mathrm{d}t$.
   En remarquant que $\left(\dfrac{r-t}{r-t}\right)^n = \dfrac{(r-t)^n}{(r-t)^n} = 1$, nous pouvons écire :
   $$\begin{aligned} R_n(x) &= \int_0^x \frac{(x-t)^n f^{(n+1)}(t)}{n\,!}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^x \frac{(x-t)^n f^{(n+1)}(t)}{n\,!} \times \frac{(r-t)^n}{(r-t)^n}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^x \frac{(r-t)^n}{n!} \times f^{(n+1)}(t) \times \left(\frac{x-t}{r-t}\right)^n \mathrm{d}t \end{aligned}$$
   $\Rightarrow$ Considérons, maintenant, la fonction $\varphi : [0;x] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :
   $$\left\{ \begin{array}{rcl} \varphi : [0;x] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \varphi(t) = \dfrac{x-t}{r-t} \end{array} \right.$$
   La dérivée de cette fonction est $\varphi'(t) = \dfrac{x-r}{(r-t)^2}$. Comme $x \in]0;r[$, c'est à dire $0 < x < r$, nous avons, pour tout $t \in [0;x]$, $\varphi'(t) \leqslant 0$, c'est à dire que la fonction φ est décroissante.
   Ainsi, pour tout $t \in [0;x]$, nous avons :
   $$\varphi(0) \geqslant \varphi(t) \geqslant \varphi(x) \Longleftrightarrow \frac{x}{r} \geqslant \varphi(t) \geqslant 0$$
   C'est à dire, pour tout $t \in [0;x]$:
   $$0 \leqslant \left(\frac{x-t}{r-t}\right)^n \leqslant \left(\frac{x}{r}\right)^n$$
   $\Rightarrow$ Ainsi, pour $r \in]0;a[$ et $x \in]0;r[$, nous avons :
   $$0 \leqslant R_n(x) \leqslant \left(\frac{x}{r}\right)^n \int_0^x \frac{(r-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t = \left(\frac{x}{r}\right)^n R_n(r)$$
   Puisque $f^{(k)}(x) \geqslant 0$ et $x \in [0;a[$, nous avons $P_n(r) \geqslant 0$ et de l'égalité $f(r) = P_n(r) + R_n(r)$, nous déduisons que $R_n(r) \leqslant f(r)$
   $\Rightarrow$ Et donc, de $0 \leqslant R_n(x) \leqslant \left(\dfrac{x}{r}\right)^n R_n(r)$, nous déduisons que si $x \in [0;a[$, alors $0 \leqslant R_n(x) \leqslant \left(\dfrac{x}{r}\right)^n f(r)$.
   $\Rightarrow$ Comme $0 < x < r$, nous avons $0 < \dfrac{x}{r} < 1$ et donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{x}{r}\right)^n f(r) = 0$.
   Ainsi, si $x \in]0;a[$, alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} R_n(x) = 0$
2. Soit maintenant $x \in]-a;0]$.
   Nous avons toujours $R_n(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n\,!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$
   $\Rightarrow$ En faisant le changement de variables $t = -u$, nous obtenons :
   $$R_n(x) = -\int_0^{-x} \frac{(x+u)^n}{n\,!} f^{(n+1)}(-u)\,\mathrm{d}u$$

En posant, à nouveau, $x' = -x$, nous avons $x' \in [0;a[$ et nous avons :

$$\begin{aligned} R_n(x) &= -\int_0^{x'} \frac{(-x'+u)^n}{n\,!} f^{(n+1)}(-u)\ \mathrm{d}u \\ &= -\int_0^{x'} \frac{(-1)^n (x'-u)^n}{n\,!} f^{(n+1)}(-u)\ \mathrm{d}u \\ &= (-1)^{n+1} \int_0^{x'} \frac{(x'-u)^n}{n\,!} f^{(n+1)}(-u)\ \mathrm{d}u \end{aligned}$$

⇒ Par hypothèses, nous avons, tout $k \in \mathbb{N}$, $f^{(k)}(x) \geqslant 0$. En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et tout $x \in]-a;+a[$ nous avons $f^{(n+2)}(x) \geqslant 0$.
Or, $f^{(n+2)}$ est la fonction dérivée de $f^{(n+1)}$, ce qui veut dire que la fonction $f^{(n+1)}$ est croissante sur l'intervalle $]-a;+a[$.
Nous avons donc pour tout $u \in [0;a[$:

$$0 \leqslant f^{(n+1)}(-u) \leqslant f^{(n+1)}(u)$$

Et donc,

$$\begin{aligned} |R_n(x)| &= \left|(-1)^{n+1} \int_0^{x'} \frac{(x'-u)^n}{n\,!} f^{(n+1)}(-u)\ \mathrm{d}u\right| \\ &= \int_0^{x'} \frac{(x'-u)^n}{n\,!} f^{(n+1)}(-u)\ \mathrm{d}u \\ &\leqslant \int_0^{x'} \frac{(x'-u)^n}{n\,!} f^{(n+1)}(u)\ \mathrm{d}u = R_n(x') \end{aligned}$$

⇒ Dans le point précédent, nous avons montré que $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n(x') = 0$, et nous concluons, ici, que $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n(x) = 0$

Donc, pour tout $x \in]-a;+a[$, nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n(x) = 0$ et f est développable en série entière sur l'intervalle $]-a;+a[$

Remarque 18 :

1. Nous venons de montrer que f est somme de sa série de Taylor.
2. En second lieu, $R_n(0) = \displaystyle\int_0^0 \frac{(x-t)^n}{n\,!} f^{(n+1)}(t)\ \mathrm{d}t = 0$

8.7 Equations fonctionnelles et séries entières

Nous allons tenter de résoudre (c'est à dire trouver des solutions) des équations fonctionnelles ; les principales équations que nous aurons à traiter sont les équations différentielles.
Nous allons donc tenter de déterminer des solutions d'une équation différentielle linéaire à coefficients non constants développables en série entière.
Plus généralement, l'objet de ce paragraphe est de déterminer des fonctions développables en séries entières qui vérifient des relations fonctionnelles
Cette méthode est illustrée par les exercices qui suivent.

8.7.1 Premier exemple

Quelles sont les séries entières vérifiant l'équation différentielle $(1+x)\,y' - my = 0$?

Résolution

Soit $y(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ une telle série, alors, $y'(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} n a_n x^{n-1}$, et, en remplaçant dans la relation, nous obtenons :

$$(1+x)\, y'(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} n a_n x^{n-1} + \sum_{n\in\mathbb{N}} n a_n x^n$$

D'où,

$$\begin{aligned}(1+x)\, y' - my &= \sum_{n\in\mathbb{N}} n a_n x^{n-1} + \sum_{n\in\mathbb{N}} n a_n x^n - m \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n \\ &= \sum_{n\geqslant 0} (n+1)\, a_{n+1} x^n + \sum_{n\geqslant 1} n a_n x^n - m \sum_{n\geqslant 0} a_n x^n \\ &= (a_1 - m a_0) + \sum_{n\geqslant 1} \left[(n+1)\, a_{n+1} + (n-m)\, a_n\right] x^n\end{aligned}$$

D'où nous obtenons les relations :

$$\begin{cases} (a_1 - m a_0) = 0 \\ (n+1)\, a_{n+1} + (n-m)\, a_n = 0 \end{cases}$$

Ou, ce qui est équivalent,

$$\begin{cases} a_1 = m a_0 \\ a_{n+1} = \dfrac{(m-n)}{(n+1)} a_n \end{cases}$$

Ce qui nous conduit à écrire :

$$\begin{cases} a_1 = m a_0 \\ a_2 = \dfrac{m-1}{2} a_1 \\ \vdots \quad \vdots \\ a_p = \dfrac{m-p+1}{p} a_{p-1} \\ \vdots \quad \vdots \\ a_n = \dfrac{(m-n+1)}{n} a_{n-1} = \dfrac{(m-(n-1))}{n} a_{n-1} \end{cases}$$

D'où, en multipliant termes à termes, on obtient :

$$a_n = \frac{m\,(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!} a_0$$

Le rayon de convergence de la série est ρ

De l'identité $a_{n+1} = \dfrac{(m-n)}{n+1} a_n$, nous avons : $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\dfrac{(m-n)}{n+1}\right|$

D'où nous tirons que $\lim_{n\to+\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$ et le rayon de convergence de la série est $\rho = 1$

Soit g la somme de cette série ; pour $|x| < 1$, nous avons

$$g(x) = \sum_{n\geqslant 0} a_0 \frac{m\,(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!} x^n = a_0 \sum_{n\geqslant 0} \frac{m\,(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!} x^n$$

Il est possible de bien connaître g : g se calcule très bien en résolvant l'équation différentielle, et on trouve $g(x) = C\,(1+x)^m$ avec $m \in \mathbb{R}$ et $x > -1$

D'où *(Voir page 462)* :

$$\boxed{(1+x)^m = \sum_{n\geqslant 0} \frac{m\,(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!} x^n}$$

Remarque 19 :

1. On note aussi $\begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix} = \dfrac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}$ même dans le cas où $m \in \mathbb{R}$
2. C'est aussi une autre façon de trouver le développement en série entière de $(1+x)^{\alpha}$

8.7.2 Second exemple

Déterminer les solutions développables en série entière de l'équation $f(x) + f(x^2) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

Résolution

On écrit $f(x) = \sum\limits_{n \geqslant 0} a_n x^n$ pour $|x| < \rho$ où ρ sera le rayon de convergence de la série considérée

Alors, $f(x^2) = \sum\limits_{n \geqslant 0} a_n (x^2)^n = \sum\limits_{n \geqslant 0} a_n x^{2n}$ et donc :

$$f(x) + f(x^2) = \sum_{n \geqslant 0} (a_n + a_{2n}) x^{2n} + a_{2n+1} x^{2n+1}$$

En détaillant, nous avons :

$f(x) + f(x^2) = 2a_0 + a_1 x + (a_2 + a_1) x^2 + a_3 x^3 + (a_2 + a_4) x^4 + \dots + (a_n + a_{2n}) x^{2n} + a_{2n+1} x^{2n+1} + \cdots$

De $f(x) + f(x^2) = x$, nous tirons :

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \\ a_2 = -a_1 = -1 \\ a_3 = 0 \quad a_4 = -a_2 = a_1 = 1 \\ a_5 = 0 \quad a_6 = -a_3 = 0 \\ a_7 = 0 \quad a_8 = -a_4 = a_2 = -a_1 = -1 \end{cases}$$

Et donc, nous en déduisons que $a_{2^n} = (-1)^n$, et si $k \neq 2^n$, alors $a_k = 0$.
Donc $f(x) = x + \sum\limits_{n \geqslant 1} (-1)^n x^{2^n}$

Montrons que cette fonction vérifie l'équation fonctionnelle

$$\begin{aligned} f(x^2) &= x^2 + \sum_{n \geqslant 1} (-1)^n (x^2)^{2^n} \\ &= x^2 + \sum_{n \geqslant 1} (-1)^n (x)^{2 \times 2^n} \\ &= x^2 + \sum_{n \geqslant 1} (-1)^n (x)^{2^{n+1}} \\ &= x^2 + \sum_{n \geqslant 2} (-1)^{n-1} (x)^{2^n} \\ &= x^2 - \sum_{n \geqslant 2} (-1)^n (x)^{2^n} \end{aligned}$$

Et donc

$$\begin{aligned} f(x^2) + f(x) &= x^2 - \sum_{n \geqslant 2} (-1)^n (x)^{2^n} + x + \sum_{n \geqslant 1} (-1)^n x^{2^n} \\ &= x^2 - \sum_{n \geqslant 2} (-1)^n (x)^{2^n} + \left(x - x^2 + \sum_{n \geqslant 2} (-1)^n x^{2^n} \right) \\ &= x \end{aligned}$$

Nous avons donc bien $f(x) + f(x^2) = x$

8.7.3 Troisième exemple

Déterminer une solution développable en série entière de l'équation différentielle :

$$2x(1+x)y''+(5x+3)y'+y=0$$

Résolution

Soit $y(x)=\sum_{n\geqslant 0}a_nx^n$ une telle solution de rayon de convergence ρ. Alors :

- $\star$ $y'(x)=\sum_{n\geqslant 0}na_nx^{n-1}=\sum_{n\geqslant 1}na_nx^{n-1}=\sum_{n\geqslant 0}(n+1)a_{n+1}x^n$

  Et de là, nous tirons : $xy'(x)=\sum_{n\geqslant 0}na_nx^n$
- $\star$ $y''(x)=\sum_{n\geqslant 0}n(n-1)a_nx^{n-2}=\sum_{n\geqslant 0}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n$

  De même,
  - $\star$ $x^2y''(x)=\sum_{n\geqslant 0}n(n-1)a_nx^n$
  - $\star$ Et $xy''(x)=\sum_{n\geqslant 0}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^{n+1}$

Ainsi,

$$\begin{aligned}2x(1+x)y''+(5x+3)y'+y=0 &\iff 2xy''+2x^2y''+5xy'+3y'+y=0\\ &\iff 2\sum_{n\geqslant 0}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^{n+1}+2\sum_{n\geqslant 0}n(n-1)a_nx^n+\\ &\qquad 5\sum_{n\geqslant 0}na_nx^n+3\sum_{n\geqslant 0}(n+1)a_{n+1}x^n+\sum_{n\geqslant 0}a_nx^n=0\end{aligned}$$

Ce qui nous donne :

$$2\sum_{n\geqslant 1}n(n+1)a_{n+1}x^n+2\sum_{n\geqslant 0}n(n-1)a_nx^n+5\sum_{n\geqslant 0}na_nx^n+3\sum_{n\geqslant 0}(n+1)a_{n+1}x^n+\sum_{n\geqslant 0}a_nx^n=0$$

Et, en synthèse, nous avons :

$$(3a_1+a_0)+\sum_{n\geqslant 1}\left(2n(n+1)a_{n+1}+2n(n-1)a_n+5na_n+3(n+1)a_{n+1}+a_n\right)x^n=0$$

$$\iff$$

$$(3a_1+a_0)+\sum_{n\geqslant 1}\left((n+1)(2n+3)a_{n+1}+(2n+1)(n+1)a_n\right)x^n=0$$

De l'unicité du développement en série entière, nous obtenons :

$$\left\{\begin{array}{rl}3a_1+a_0= & 0\\ (n+1)(2n+3)a_{n+1}+(2n+1)(n+1)a_n= & 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rl}3a_1+a_0= & 0\\ (2n+3)a_{n+1}+(2n+1))a_n= & 0\end{array}\right.$$

D'où, nous avons donc :

$$\left\{\begin{array}{rl}a_1= & -\dfrac{1}{3}a_0\\ \vdots & \vdots\\ a_k= & -\dfrac{2k-1}{2k+1}a_{k-1}\\ \vdots & \vdots\\ a_{n-1}= & -\dfrac{2n-3}{2n-1}a_{n-2}\\ a_n= & -\dfrac{2n-1}{2n+1}a_{n-1}\end{array}\right.$$

En multipliant termes à termes, nous obtenons :

$$a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n = \frac{-1}{3}a_0 \times \frac{-3}{5}a_1 \times \frac{-5}{7}a_2 \times \frac{-(2k-1)}{2k+1}a_{k-1} \times \frac{-(2k+1)}{2k+3}a_{k-1} \times \cdots \times \frac{-(2n-3)}{2n-1}a_{n-2} \times \frac{-(2n-1)}{2n+1}a_{n-1}$$

Et, en simplifiant, nous obtenons $a_n = \dfrac{(-1)^n}{2n+1}a_0$

Ainsi, $y(x) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}a_0 x^n = a_0 \sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}x^n$ et le rayon de convergence est $\rho = 1$.

Remarquons que comme $\arctan u = \displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}u^{2n+1}$, que, de plus, $x^n = \left(\sqrt{x}\right)^{2n} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}\right)^{2n+1}$ et nous pouvons donc écrire :

$$y(x) = a_0 \sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}x^n = \frac{a_0}{\sqrt{x}} \sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}\left(\sqrt{x}\right)^{2n+1} = \frac{a_0 \arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

Exercice 16 :

Déterminer, en précisant leur rayon de convergence, les solutions développables en série entière de l'équation différentielle $xy'' + (x-2)\,y' - 2y = 0$

Exercice 17 :

Montrer que la fonction f définie sur $]-1;+1[$ par $f(x) = \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$ est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre. En déduire le développement en série entière de cette fonction.

Exercice 18 :

Résoudre l'équation différentielle $xy''(x) + xy'(x) + y(x) = 1$

Exercice 19 :

Former le développement en série entière en 0 de la fonction $f(x) = \dfrac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}$

8.8 Théorèmes Taubériens

8.8.1 Le théorème d'Abel angulaire

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes et $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence 1

On suppose que la série numérique $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ est convergente et qu'elle a pour somme S.

Pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, nous notons $f(z) = \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$

Pour θ_0 tel que $0 < \theta_0 < \dfrac{\pi}{2}$, nous notons :

$$\Delta_{\theta_0} = \left\{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } |z| < 1 \text{ et qu'il existe } \rho \in [0;1[\text{ et } \theta \in [-\theta_0;\theta_0[\text{ tel que } z = 1 - \rho e^{i\theta}\right\}$$

Alors :

$$\lim_{\substack{z \longrightarrow 1 \\ z\in\Delta_{\theta_0}}} f(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n = S$$

f peut donc être prolongée par continuité en $z = 1$ en posant $f(1) = S = \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$

Démonstration

1. **Utilisation de la transformée d'Abel**

   Nous avons déjà utilisé ce type de transformée lors de l'étude des séries numériques alternées.

   (a) Par hypothèse, la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ est convergente et si nous considérons ce que nous appelons les restes de la série : $R_n = \sum_{k\geqslant n+1} a_k$, de la convergence de la série, nous déduisons que $\lim_{n\to+\infty} R_n = 0$

   (b) Utilisons la transformée d'Abel :

   ⋆ Remarquons que : $a_n = R_{n-1} - R_n = \left(a_n + \sum_{k\geqslant n+1} a_k\right) - \sum_{k\geqslant n+1} a_k$

   ⋆ Posons, par commodités $R_{-1} = 0$

   (c) Soient, maintenant, $n \in \mathbb{N}$ et $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$. Alors :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} a_k z^k - \sum_{k=0}^{n} a_k &= \sum_{k=0}^{n} a_k \left(z^k - 1\right)\\ &= \sum_{k=0}^{n} \left(R_{k-1} - R_k\right)\left(z^k - 1\right)\\ &= \sum_{k=0}^{n} R_{k-1}\left(z^k - 1\right) - \sum_{k=0}^{n} R_k\left(z^k - 1\right)\end{aligned}$$

   (d) Penchons nous sur $\sum_{k=0}^{n} R_{k-1}\left(z^k - 1\right)$

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} R_{k-1}\left(z^k - 1\right) &= R_{-1}\left(z^0 - 1\right) + \sum_{k=1}^{n} R_{k-1}\left(z^k - 1\right)\\ &= \sum_{k=1}^{n} R_{k-1}\left(z^k - 1\right) = \sum_{k=0}^{n-1} R_k\left(z^{k+1} - 1\right)\end{aligned}$$

   Et donc :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} a_k z^k - \sum_{k=0}^{n} a_k &= \sum_{k=0}^{n-1} R_k\left(z^{k+1} - 1\right) - \sum_{k=0}^{n} R_k\left(z^k - 1\right)\\ &= \sum_{k=0}^{n} R_k\left[\left(z^{k+1} - 1\right) - \left(z^k - 1\right)\right] - R_n\left(z^n - 1\right)\\ &= \sum_{k=0}^{n} R_k\left(z^{k+1} - z^k\right) - R_n\left(z^n - 1\right)\\ &= (z-1)\sum_{k=0}^{n} R_k z^k - R_n\left(z^n - 1\right)\end{aligned}$$

   (e) Démontrons que nous avons $f(z) - S = (z-1)\sum_{n\geqslant 0} R_n z^n$

   ⇒ Nous avons déjà vu que, comme la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ est convergente, $\lim_{n\to+\infty} R_n = 0$. De plus, comme $|z| < 1$, $\lim_{n\to+\infty}\left(z^n - 1\right) = -1$ et donc $\lim_{n\to+\infty} R_n\left(z^n - 1\right) = 0$

   ⇒ Comme $|z| < 1$, $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k z^k = f(z)$ et $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k = S$ et donc,

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k z^k - \sum_{k=0}^{n} a_k\right) = f(z) - S$$

Ainsi, par passage à la limite :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k z^k - \sum_{k=0}^{n} a_k\right) = \lim_{n\to+\infty}\left((z-1)\sum_{k=0}^{n} R_k z^k\right) - \lim_{n\to+\infty} R_n\left(z^n-1\right)$$

$$\iff$$

$$f(z) - S = (z-1)\sum_{n\geqslant 0} R_n z^n$$

2. Utilisons, maintenant, l'identité $f(z) - S = (z-1)\sum_{n\geqslant 0} R_n z^n$.

   $\Rightarrow$ Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Alors :

$$\begin{aligned} f(z) - S = &\ (z-1)\sum_{n\geqslant 0} R_n z^n = (z-1)\left[\sum_{n=0}^{N} R_n z^n + \sum_{n\geqslant N+1} R_n z^n\right] \\ = &\ (z-1)\sum_{n=0}^{N} R_n z^n + (z-1)\sum_{n\geqslant N+1} R_n z^n \end{aligned}$$

   $\Rightarrow$ En passant à la valeur absolue et en utilisant l'inégalité triangulaire, nous avons :

$$|f(z) - S| \leqslant |z-1|\sum_{n=0}^{N} |R_n|\,|z^n| + |z-1|\sum_{n\geqslant N+1} |R_n|\,|z|^n$$

3. Soit $\varepsilon > 0$

   Comme $\lim_{n\to+\infty} R_n = 0$, il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, si $n \geqslant N_\varepsilon$, alors $|R_n| \leqslant \varepsilon$.

   Et donc, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$:

$$\begin{aligned} |f(z) - S| \leqslant &\ |z-1|\sum_{n=0}^{N_\varepsilon} |R_n|\,|z^n| + |z-1|\sum_{n\geqslant N_\varepsilon+1} |R_n|\,|z|^n \\ \leqslant &\ |z-1|\sum_{n=0}^{N_\varepsilon} |R_n| + |z-1|\sum_{n\geqslant N_\varepsilon+1} \varepsilon\,|z|^n \\ \leqslant &\ |z-1|\sum_{n=0}^{N_\varepsilon} |R_n| + \varepsilon\,|z-1|\sum_{n\geqslant N_\varepsilon+1} |z|^n \end{aligned}$$

   $\Rightarrow$ Regardons, maintenant, de plus près $\sum_{n\geqslant N_\varepsilon+1} |z|^n$; en fait, c'est facile :

$$\sum_{n\geqslant N_\varepsilon+1} |z|^n = \sum_{n\geqslant 0} |z|^{n+N_\varepsilon+1} = |z|^{N_\varepsilon+1}\sum_{n\geqslant 0} |z|^n = \frac{|z|^{N_\varepsilon+1}}{1-|z|}$$

   Et comme $|z| < 1$, nous avons :

$$\sum_{n\geqslant N_\varepsilon+1} |z|^n = \frac{|z|^{N_\varepsilon+1}}{1-|z|} \leqslant \frac{1}{1-|z|}$$

   $\Rightarrow$ Ainsi, en synthèse :

$$|f(z) - S| \leqslant |z-1|\sum_{n=0}^{N_\varepsilon} |R_n| + \varepsilon\frac{|z-1|}{1-|z|}$$

4. Occupons nous de l'expression $\dfrac{|z-1|}{1-|z|}$

   Pour commencer, visualisons par la figure 8.4 ce qu'est Δ_{θ_0}

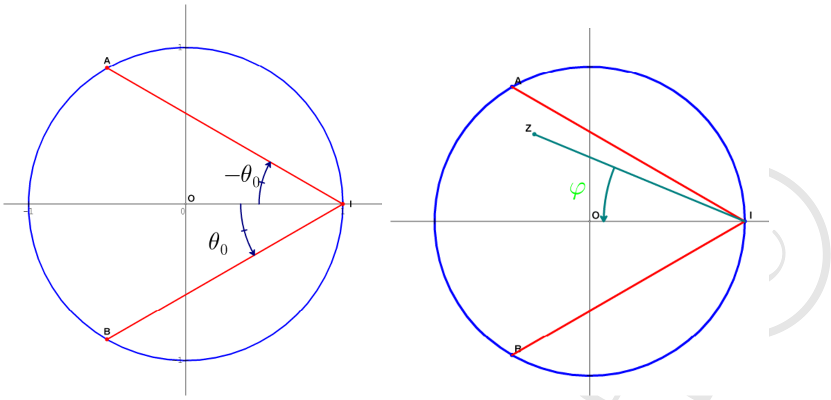

FIGURE 8.4 – Une visualisation de Δ_{θ_0} et de $z \in \Delta_{\theta_0}$

$\Rightarrow$ Soit $z \in \Delta_{\theta_0}$.
Il existe alors $\rho > 0$ et $\varphi \in [-\theta_0 ; \theta_0]$ tel que $z = 1 - \rho e^{i\varphi}$, c'est à dire $z = (1 - \rho\cos\varphi) + i\rho\sin\varphi$, de telle sorte que $|z|^2 = (1 - \rho\cos\varphi)^2 + \rho^2\sin^2\varphi = 1 - 2\rho\cos\varphi + \rho^2$

$\Rightarrow$ Comme $\varphi \in [-\theta_0 ; \theta_0]$ et que $0 < \theta_0 < \dfrac{\pi}{2}$, alors nous avons $0 < \cos\theta_0 \leqslant \cos\varphi < 1$, et alors :

$$1 - |z|^2 = 1 - \left(1 - 2\rho\cos\varphi + \rho^2\right) = 2\rho\cos\varphi - \rho^2 \geqslant 2\rho\cos\theta_0 - \rho^2$$

C'est à dire $\dfrac{1}{1 - |z|^2} \leqslant \dfrac{1}{2\rho\cos\theta_0 - \rho^2}$

$\Rightarrow$ Comme nous voulons faire tendre z vers 1, c'est à dire faire tendre $|z - 1| = \rho$ vers 0, on peut supposer $\rho \leqslant \cos\theta_0$, c'est à dire $|z - 1| \leqslant \cos\theta_0$.
Supposons donc $\rho \leqslant \cos\theta_0 \iff |z - 1| \leqslant \cos\theta_0$. Alors :

$$\begin{aligned}
\frac{|z-1|}{1-|z|} &= \frac{|z-1|}{1-|z|^2}(1+|z|) \\
&\leqslant \frac{\rho}{2\rho\cos\theta_0 - \rho^2}(1+|z|) = \frac{1}{2\cos\theta_0 - \rho}(1+|z|) \\
&\leqslant \frac{2}{2\cos\theta_0 - \rho} \text{ puisque } |z| < 1
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Nous avons supposé $\rho \leqslant \cos\theta_0 \iff -\rho \geqslant -\cos\theta_0$ et donc $2\cos\theta_0 - \rho \geqslant 2\cos\theta_0 - \cos\theta_0 = \cos\theta_0$, d'où nous tirons $\dfrac{1}{2\cos\theta_0 - \rho} \leqslant \dfrac{1}{\cos\theta_0}$ et donc :

$$\frac{|z-1|}{1-|z|} \leqslant \frac{2}{2\cos\theta_0 - \rho} \leqslant \frac{2}{\cos\theta_0}$$

5. Regardons, maintenant, l'expression $|z - 1| \displaystyle\sum_{n=0}^{N_\varepsilon} |R_n| = \rho \sum_{n=0}^{N_\varepsilon} |R_n|$.

   En supposant $\rho \leqslant \left(\dfrac{\varepsilon}{\displaystyle\sum_{n=0}^{N_\varepsilon} |R_n|}\right)$, nous avons $\rho \displaystyle\sum_{n=0}^{N_\varepsilon} |R_n| \leqslant \sum_{n=0}^{N_\varepsilon} |R_n| \times \left(\dfrac{\varepsilon}{\displaystyle\sum_{n=0}^{N_\varepsilon} |R_n|}\right) = \varepsilon$

6. Et donc, pour conclure, si $\rho \leqslant \inf\left(\left\{\left(\dfrac{\varepsilon}{\displaystyle\sum_{n=0}^{N_\varepsilon} |R_n|}\right) ; \cos\theta_0\right\}\right)$, nous avons :

$$|f(z) - S| \leqslant \varepsilon + \frac{2\varepsilon}{\cos\theta_0} = \varepsilon\left(1 + \frac{2}{\cos\theta_0}\right)$$

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, ceci termine de montrer que $\lim\limits_{\substack{z \longrightarrow 1 \\ z \in \Delta_{\theta_0}}} f(z) = \sum\limits_{n \in \mathbb{N}} a_n = S$

Ce que nous voulions.

Remarque 20 :

1. Le théorème d'Abel angulaire 8.8.1 généralise le théorème d'Abel dans le domaine réel vu en 8.5.1
2. Existe-t-il une réciproque ? ?... presque parce que, pour obtenir cette réciproque, il faut ajouter des hypothèses. Nous allons le voir avec un **théorème taubérien faible**

8.8.2 Théorème taubérien faible

Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes, $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence 1 et de somme $f(z) = \sum\limits_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$

On suppose que :

1. Il existe $L \in \mathbb{C}$ tel que $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x \in]-1;+1[}} f(x) = L$
2. $a_n \in o\left(\dfrac{1}{n}\right) \Longleftrightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} n a_n = 0$

Alors, la série $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} a_n$ converge et $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} a_n = L$

Démonstration

1. Il faut remarquer que, même si la série entière $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière complexe, nous ne nous intéressons qu'à la seule limite de f lorsque x est réel et $x \in]-1;+1[$
2. On appelle $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$ et puisque nous nous intéressons à la limite lorsque x tend vers 1, on peut supposer $0 < x < 1$. Bien entendu, il nous faudra étudier l'expression $|S_n - L|$
3. Tout d'abord, regardons $|S_n - f(x)|$
   $\Rightarrow$ Commenons par ré-écrire $|S_n - f(x)|$ et en tenter une première majoration

$$\begin{aligned}
|S_n - f(x)| &= \left| \sum_{k=0}^{n} a_k - \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k x^k \right| \\
&= \left| \sum_{k=0}^{n} a_k - \sum_{k=0}^{n} a_k x^k - \sum_{k \geqslant n+1} a_k x^k \right| \\
&\leqslant \left| \sum_{k=0}^{n} a_k - \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \right| + \left| \sum_{k \geqslant n+1} a_k x^k \right|
\end{aligned}$$

   $\Rightarrow$ Nous avons $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k - \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k \left(1 - x^k\right)$ et donc

$$\left| \sum_{k=0}^{n} a_k - \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \right| \leqslant \sum_{k=0}^{n} |a_k| \left(1 - x^k\right)$$

   En utilisant les identités habituelles, nous avons $\left(1 - x^k\right) = (1 - x)\left(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{k-1}\right)$ et donc, comme $0 < x < 1$, nous avons $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{k-1} \leqslant k$, et donc

$$\left(1 - x^k\right) \leqslant k(1 - x)$$

Ainsi,

$$\sum_{k=0}^{n} |a_k| \left(1 - x^k\right) \leqslant \sum_{k=0}^{n} k\,|a_k|\,(1-x)$$

⇒ Lorsque $k \geqslant n+1$, nous avons $\dfrac{k}{n} \geqslant 1$ et donc :

$$\left|\sum_{k\geqslant n+1} a_k x^k\right| \leqslant \sum_{k\geqslant n+1} |a_k|\,x^k \leqslant \sum_{k\geqslant n+1} \frac{k}{n}\,|a_k|\,x^k$$

4. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} na_n = 0$, la suite $(na_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
   ⇒ Il existe donc $M \geqslant 0$ tel que, pour tout $n\in\mathbb{N}$ nous ayions $|na_n| = n\,|a_n| \leqslant M$. Donc :

$$\sum_{k=0}^{n} |a_k| \left(1 - x^k\right) \leqslant \sum_{k=0}^{n} k\,|a_k|\,(1-x) \leqslant (1-x)\sum_{k=0}^{n} M = M\,(n+1)\,(1-x)$$

   ⇒ La suite étant bornée, $M_n = \sup\limits_{k\geqslant n+1} k\,|a_k|$ existe aussi et donc :

$$\sum_{k\geqslant n+1} \frac{k}{n}\,|a_k|\,x^k \leqslant \frac{M_n}{n} \sum_{k\geqslant n+1} x^k$$

   Or, $\displaystyle\sum_{k\geqslant n+1} x^k = \sum_{k\geqslant 0} x^{n+1+k} = x^{n+1}\sum_{k\geqslant 0} x^k = \frac{x^{n+1}}{1-x}$.
   Comme $0 < x < 1$, nous avons $0 < x^{n+1} < 1$ et donc $\displaystyle\sum_{k\geqslant n+1} x^k \leqslant \frac{1}{1-x}$. Ainsi :

$$\sum_{k\geqslant n+1} \frac{k}{n}\,|a_k|\,x^k \leqslant \frac{M_n}{n} \sum_{k\geqslant n+1} x^k \leqslant \frac{M_n}{n} \times \frac{1}{1-x}$$

   ⇒ Et, en synthèse, nous avons :

$$|S_n - f(x)| \leqslant M\,(n+1)\,(1-x) + \frac{M_n}{n} \times \frac{1}{1-x}$$

   ⇒ Dernière remarque, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} na_n = 0$, nous avons aussi $\lim\limits_{n\to+\infty} M_n = 0$.
   Pour le démontrer, il suffit d'utiliser la définition.
   Pour $A > 0$, il existe $P \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, si $n \geqslant P$, alors $n\,|a_n| \leqslant A$.
   En particulier, si $n \geqslant P$ $\sup\limits_{k\geqslant n+1} k\,|a_k| \leqslant A$, c'est à dire $M_n \leqslant A$
   Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} M_n = 0$

5. Soit $\varepsilon > 0$
   ⇒ Soit $x_n = 1 - \dfrac{\varepsilon}{n+1}$.
   - ⋆ Alors, comme $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x\in]-1;+1[}} f(x) = L$, nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty} f\left(1 - \dfrac{\varepsilon}{n+1}\right) = L$.
   - ⋆ De plus, nous avons, pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$|S_n - L| \leqslant |S_n - f(x_n)| + |f(x_n) - L|$$

   ⇒ Ainsi :

$$\begin{aligned} |S_n - f(x_n)| = \left|S_n - f\left(1 - \frac{\varepsilon}{n+1}\right)\right| &\leqslant M\,(n+1)\left(1 - \left(1 - \frac{\varepsilon}{n+1}\right)\right) + \frac{M_n}{n} \times \left(\frac{n+1}{\varepsilon}\right) \\ &\leqslant M\varepsilon + \frac{M_n}{\varepsilon}\left(\frac{n+1}{n}\right) \end{aligned}$$

Comme nous avons $\lim\limits_{n \to +\infty} M_n = 0$, nous avons aussi $\lim\limits_{n \to +\infty} M_n \left(\dfrac{n+1}{n}\right) = 0$; il existe donc $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que, si $n \in \mathbb{N}$ et $n \geqslant N_0$, alors $0 < M_n \left(\dfrac{n+1}{n}\right) \leqslant \varepsilon^2$.
Et donc, si $n \geqslant N_0$, alors :

$$|S_n - f(x_n)| = \left| S_n - f\left(1 - \frac{\varepsilon}{n+1}\right) \right| \leqslant M\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon} = (M+1)\,\varepsilon$$

⇒ Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} f\left(1 - \dfrac{\varepsilon}{n+1}\right) = L$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $n \geqslant N_1$, alors $|f(x_n) - L| \leqslant \varepsilon$

⇒ Ainsi, si $N \geqslant \sup(\{N_0, N_1\})$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant N$, alors :

$$|S_n - L| \leqslant |S_n - f(x_n)| + |f(x_n) - L| \leqslant (M+1)\,\varepsilon + \varepsilon = (M+2)\,\varepsilon$$

Nous venons ainsi de montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = L$, c'est à dire que la série numérique $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} a_n$ converge et que $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} a_n = L$

Remarque 21 :

Ce théorème de Tauber est le premier d'une très longue lignée que l'ontrouve dans différentes parties de l'analyse mathématique. L'intérêt de ce théorème est de s'intéresser à ce qui se passe aux bords du domaine de convergence.

8.8.3 Lemme

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme à coefficients réels

On considère la série $S(x) = \sum\limits_{n \geqslant 0} x^n P(x^n)$. Alors $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} (1-x)\,S(x) = \displaystyle\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t$

Démonstration

1. Nous allons commencer par démontrer que ce lemme est vrai pour tout monôme $e_k(X) = X^k$. Comme souvent, nous confondrons le polynôme e_k et la fonction polynôme associée, définie pour $x \in [0;1[$ par $e_k(x) = x^k$

⇒ Tout d'abord, nous avons, pour tout $n \in \mathbb{N}$ $e_k(x^n) = (x^n)^k = x^{nk}$ et donc

$$x^n e_k(x^n) = x^n (x^n)^k = x^{n(k+1)} = \left(x^{k+1}\right)^n$$

De telle sorte que, pour $x \in [0;1[$, $\sum\limits_{n \geqslant 0} x^n e_k(x^n) = \sum\limits_{n \geqslant 0} \left(x^{k+1}\right)^n = \dfrac{1}{1 - x^{k+1}}$

⇒ Ainsi, si $x \in [0;1[$, $S(x) = \dfrac{1}{1-x^{k+1}}$ et donc $(1-x)\,S(x) = \dfrac{1-x}{1-x^{k+1}}$

⇒ Les identités habituelles nous donnent $1 - x^{k+1} = (1-x)\left(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^k\right)$ et donc

$$(1-x)\,S(x) = \frac{1-x}{1-x^{k+1}} = \frac{1-x}{(1-x)\left(1+x+x^2+x^3+\cdots+x^k\right)} = \frac{1}{1+x+x^2+x^3+\cdots+x^k}$$

De telle sorte que $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} (1-x)\,S(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \dfrac{1}{1+x+x^2+x^3+\cdots+x^k} = \dfrac{1}{k+1}$

⇒ Maintenant :

$$\int_0^1 e_k(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 t^k\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{k+1}}{k+1}\right]_0^1 = \frac{1}{k+1}$$

Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}$, nous avons $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} (1-x) \sum_{n \geqslant 0} x^n e_k(x^n) = \int_0^1 e_k(t)\, \mathrm{d}t$

2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et nous notons p le degré de P, c'est à dire que $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \lambda_k e_k$ avec, $\lambda_k \in \mathbb{R}$.

   Ainsi, en utilisant permutation des limites et des sommes, nous avons :

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} (1-x) \sum_{n \geqslant 0} \sum_{k=0}^{p} \lambda_k x^n e_k(x^n) &= \sum_{k=0}^{p} \lambda_k \left(\lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} (1-x) \sum_{n \geqslant 0} x^n e_k(x^n) \right) \\
&= \sum_{k=0}^{p} \lambda_k \int_0^1 e_k(t)\, \mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \sum_{k=0}^{p} \lambda_k e_k(t)\, \mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 P(t)\, \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Ce que nous voulions

8.8.4 Théorème de Hardy-Littlewood *(ou théorème taubérien fort)*

Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes, $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $\rho \geqslant 1$ et de somme $f(z) = \displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$

On suppose que :

1. Il existe $L \in \mathbb{C}$ tel que $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 1 \\ x \in]-1;+1[}} f(x) = L$
2. $a_n \in O\left(\dfrac{1}{n}\right) \iff \left|\dfrac{a_n}{\frac{1}{n}}\right| \leqslant C \iff |a_n| \leqslant \dfrac{C}{n}$

Alors, la série $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ converge et $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n = L$

Remarque 22 :

Quelques remarques avant de démontrer le théorème

1. **Pour quoi « théorème taubérien fort » ?**

   Dans le théorème 8.8.2, nous avions $a_n \in o\left(\dfrac{1}{n}\right)$, alors qu'ici, nous avons $a_n \in O\left(\dfrac{1}{n}\right)$ et comme $o\left(\dfrac{1}{n}\right) \subset O\left(\dfrac{1}{n}\right)$, nous affaiblissons les hypothèses en les élargissant.

2. **Concernant le rayon de convergence**

   Nous avons montré en 8.2.1 que si $a_n \in O(b_n)$; alors $\rho_A \geqslant \rho_B$. Ici nous avons $b_n = \dfrac{1}{n}$ et comme la série entière $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{z^n}{n}$ a pour rayon de convergence 1, on déduit facilement que le rayon de convergence de la série $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ est donc $\rho \geqslant 1$

Démonstration

Nous allons démontrer le théorème 8.8.4 dans le seul cas où $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 1 \\ x \in]-1;+1[}} f(x) = 0$

En effet, supposons le théorème démontré dans ce cas, et soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ avec une série entière telle que $a_n \in O\left(\frac{1}{n}\right)$, de rayon de convergence $\rho \geqslant 1$ et de somme $g(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$.

Nous supposons que $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x\in]-1;+1[}} g(x) = L$ où $L \in \mathbb{C}$.

Soit $\varphi(x) = g(x) - L$.

Nous avons $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x\in]-1;+1[}} \varphi(x) = 0$ et en posant $b_0 = a_0 - L$ et, pour $n \geqslant 1$, $b_n = a_n$, nous avons, pour $|x| < 1$, $\varphi(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n x^n$.

Alors, si le théorème est démontré pour $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x\in]-1;+1[}} f(x) = 0$ alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n = 0$, c'est à dire

$$a_0 - L + \sum_{n\geqslant 1} b_n = a_0 - L + \sum_{n\geqslant 1} a_n = 0 \iff \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n = L$$

Ce que nous voulions.

Nous allons donc supposer, désormais que $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x\in]-1;+1[}} f(x) = 0$, c'est à dire que nous supposons $L = 0$

1. On appelle $\mathcal{T}$ l'ensemble des applications $\theta : [0;1] \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que, pour tout $x \in [0;1[$, la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n \theta(x^n)$ converge et telle que, de plus, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x\in]-1;+1[}} \left(\sum_{n\geqslant 0} a_n \theta(x^n)\right) = 0$

   ⇒ Soit, maintenant, $g : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} g : [0;1] & \longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ \qquad x & \longmapsto \quad g(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } 0 \leqslant x < \frac{1}{2} \\ 1 \text{ si } \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1 \end{cases} \end{cases}$$

   En fait, $g = 1_{\left[\frac{1}{2};+1\right[}$ qui est la fonction indicatrice de $\left[\frac{1}{2};+1\right[$

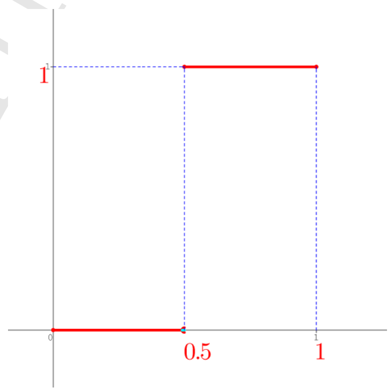

FIGURE 8.5 – Une représentation graphique de la fonction g, indicatrice de $\left[\frac{1}{2};+1\right[$

   ⇒ Si $0 \leqslant x < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} x^n = 0$, et il existe donc $N(x) \in \mathbb{N}$, tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $n > N(x)$, alors $x^n < \frac{1}{2}$ et, alors $g(x^n) = 0$

⇒ Il est facile de calculer ce nombre $N(x)$. En effet, en utilisant les logarithmes, nous avons :

$$x^n < \frac{1}{2} \Longleftrightarrow n \ln x < -\ln 2 \Longleftrightarrow n > \frac{-\ln 2}{\ln x}$$

En posant $N(x) = \left[\frac{-\ln 2}{\ln x}\right]$ *(où $[\bullet]$ désigne la partie entière)*, si $n > N(x)$, alors $x^n < \frac{1}{2}$

⇒ Nous pouvons remarquer que $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x<1}} N(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\x<1}} \left[\frac{-\ln 2}{\ln x}\right] = +\infty$

⇒ Ainsi, pour tout $x \in [0;1[$, nous avons $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n g(x^n) = \sum\limits_{n=0}^{N(x)} a_n$, et nous avons :

$$\lim_{\substack{x\to 1\\x<1}} \left(\sum_{n\geqslant 0} a_n g(x^n)\right) = \lim_{\substack{x\to 1\\x<1}} \sum_{n=0}^{N(x)} a_n = \sum_{n\geqslant 0} a_n$$

Et si nous réussissons à démontrer que $g \in \mathcal{T}$, nous aurons alors $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n = 0$ et nous aurons démontré le théorème.

2. Toutes les fonctions polynomiales $\Phi \in \mathbb{R}[X]$ qui s'annulent en $x = 0$ sont des éléments de $\mathcal{T}$

⇒ Une telle fonction s'écrit $\Phi(x) = \sum\limits_{k=1}^{p} \lambda_k x^k$

⇒ Nous allons vérifier que les monômes $e_k(x) = x^k$, pour $k \geqslant 1$ sont des éléments de $\mathcal{T}$
Nous avons :

$$\sum_{n\geqslant 0} a_n e_k(x^n) = \sum_{n\geqslant 0} a_n (x^n)^k = \sum_{n\geqslant 0} a_n \left(x^k\right)^n = f\left(x^k\right)$$

Comme $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x<1}} x^k = 1$, nous avons $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x<1}} f\left(x^k\right) = 0$, et donc $e_k \in \mathcal{T}$

⇒ Soit $\Phi \in \mathbb{R}[X]$ telle que $\Phi(0) = 0$; donc $\Phi(x) = \sum\limits_{k=1}^{p} \lambda_k x^k$; nous avons, alors, $\Phi = \sum\limits_{k=1}^{p} \lambda_k e_k$ et donc

$$a_n \Phi(x^n) = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k a_n e_k(x^n)$$

D'où

$$\sum_{n\geqslant 0} a_n \Phi(x^n) = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \left(\sum_{n\geqslant 0} a_n e_k(x^n)\right) = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k f\left(x^k\right)$$

⇒ Comme $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x<1}} f\left(x^k\right) = 0$, nous avons $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x<1}} \sum\limits_{k=1}^{p} \lambda_k f\left(x^k\right) = 0$, c'est à dire $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x<1}} \sum\limits_{n\geqslant 0} a_n \Phi(x^n) = 0$ et donc $\Phi \in \mathcal{T}$

3. Nous allons, maintenant, approcher la fonction $g = 1_{\left[\frac{1}{2};+1\right[}$ définie en 1 par des fonctions polynômiales Φ telles que $\Phi(0) = 0$ et $\Phi(1) = 1$. Nous venons de montrer qu'une telle fonction Φ est un élément de $\mathcal{T}$

▷ Pour approcher cette fonction g, nous écrivons g sous la forme :

$$g(x) = x + x(1-x)h(x)$$

Nous avons donc $h(x) = \dfrac{g(x) - x}{x(1-x)}$ pour $x \in]0;+1[$ et $h(0) = -1$ et $h(1) = 1$

▷ En utilisant la définition de la fonction $g = 1_{\left[\frac{1}{2};+1\right[}$, nous avons :

⋆ Si $0 < x < \dfrac{1}{2}$, nous avons $h(x) = \dfrac{1}{x-1}$ et en prolongeant par continuité, nous avons $h(0) = -1$.

Nous pouvons donc écrire $h(x) = \dfrac{1}{x-1}$ si $0 \leqslant x < \dfrac{1}{2}$

⋆ Et en suivant un raisonnement semblable, nous avons $h(x) = \dfrac{1}{x}$ si $\dfrac{1}{2} < x \leqslant 1$

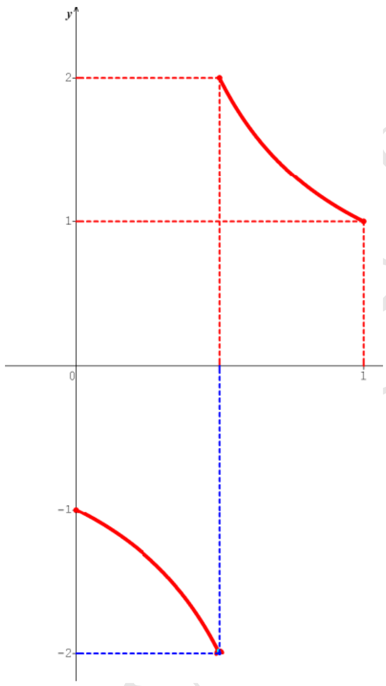

FIGURE 8.6 – Une représentation graphique de la fonction h

▷ Soit $\varepsilon > 0$

⋆ Nous allons créer 2 fonctions s_1 et s_2, continues, telles que :

◇ $s_1 \leqslant h \leqslant s_2$

◇ $\displaystyle\int_0^1 |s_1(t) - s_2(t)| \, \mathrm{d}t = \int_0^1 (s_2(t) - s_1(t)) \, \mathrm{d}t \leqslant \varepsilon$

⋆ Il n'est pas difficile de crée 2 telles fonctions :

◇ Pour s_2, soit $\alpha > 0$ et nous construisons :

→ $s_2(t) = h(t)$ sur $\left[0; \dfrac{1}{2} - \alpha\right[\cup \left[\dfrac{1}{2}; +1\right]$

→ $s_2(t)$ est affine sur l'intervalle $\left[\dfrac{1}{2} - \alpha; \dfrac{1}{2}\right]$.

Avec

$$s_2\left(\frac{1}{2} - \alpha\right) = h\left(\frac{1}{2} - \alpha\right) = \frac{1}{\frac{1}{2} - \alpha - 1} = \frac{-2}{2\alpha + 1}$$

Et

$$s_2\left(\frac{1}{2}\right) = h\left(\frac{1}{2}\right) = 2$$

→ D'où nous avons, sur l'intervalle $\left[\dfrac{1}{2} - \alpha; \dfrac{1}{2}\right]$

$$s_2(t) = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{2}{2\alpha + 1} + 2\right)\left(t - \frac{1}{2}\right) + 2$$

◇ Pour s_1, soit $\beta > 0$ et nous construisons :

$\rightarrow$ $s_1(t) = h(t)$ sur $\left[0; \dfrac{1}{2}\right[\cup \left[\dfrac{1}{2}+\beta; +1\right]$

$\rightarrow$ $s_1(t)$ est affine sur l'intervalle $\left[\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}+\beta\right]$.

Avec

$$s_1\left(\frac{1}{2}\right) = \lim_{\substack{t\to\frac{1}{2}\\ t<\frac{1}{2}}} h(t) = -2$$

Et

$$s_1\left(\frac{1}{2}+\beta\right) = h\left(\frac{1}{2}+\beta\right) = \frac{2}{2\beta+1}$$

$\rightarrow$ D'où nous avons, sur l'intervalle $\left[\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}+\beta\right]$

$$s_1(t) = \frac{1}{\beta}\left(\frac{2}{2\beta+1}+2\right)\left(t-\frac{1}{2}\right)-2$$

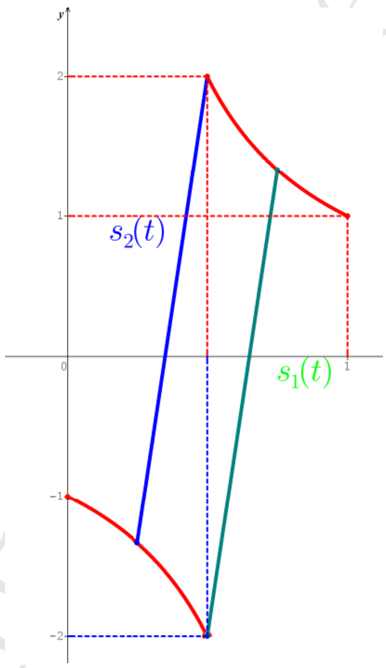

FIGURE 8.7 – Encadrement de la fonction h par les fonctions s_1 et s_2

◇ Nous choisissons maintenant α et β pour que $\displaystyle\int_0^1 (s_2(t) - s_1(t))\,\mathrm{d}t \leqslant \varepsilon$.

Nous avons :

$$\begin{aligned}\int_0^1 (s_2(t)-s_1(t))\,\mathrm{d}t =& \int_0^{\frac{1}{2}-\alpha} (s_2(t)-s_1(t))\,\mathrm{d}t + \int_{\frac{1}{2}-\alpha}^{\frac{1}{2}} (s_2(t)-s_1(t))\,\mathrm{d}t + \\ & \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\beta} (s_2(t)-s_1(t))\,\mathrm{d}t + \int_{\frac{1}{2}+\beta}^{1} (s_2(t)-s_1(t))\,\mathrm{d}t \\ =& \int_{\frac{1}{2}-\alpha}^{\frac{1}{2}} (s_2(t)-s_1(t))\,\mathrm{d}t + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\beta} (s_2(t)-s_1(t))\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

$\rightarrow$ Calculons $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}-\alpha}^{\frac{1}{2}} (s_2(t)-s_1(t))\,\mathrm{d}t$.

Nous avons :

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{1}{2}-\alpha}^{\frac{1}{2}} (s_2(t)-s_1(t))\,\mathrm{d}t = & \int_{\frac{1}{2}-\alpha}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\alpha}\left(\frac{2}{2\alpha+1}+2\right)\left(t-\frac{1}{2}\right)+2-\frac{1}{t-1}\,\mathrm{d}t \\
= & \left[\frac{1}{2\alpha}\left(\frac{2}{2\alpha+1}+2\right)\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+2t-\ln|t-1|\right]_{\frac{1}{2}-\alpha}^{\frac{1}{2}} \\
= & (1+\ln 2)-\left(\alpha\left(\frac{1}{2\alpha+1}+1\right)+1-2\alpha-\ln\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)\right) \\
= & (1+\ln 2)-\left(\alpha\left(\frac{1}{2\alpha+1}+1\right)+1-2\alpha-\ln(1+2\alpha)+\ln 2\right) \\
= & (1+\ln 2)-\alpha\left(\frac{1}{2\alpha+1}+1\right)-1+2\alpha+\ln(1+2\alpha)-\ln 2 \\
= & \ln(1+2\alpha)-\alpha\left(\frac{1}{2\alpha+1}-1\right)=\ln(1+2\alpha)+\frac{2\alpha^2}{2\alpha+1}
\end{aligned}$$

→ Calculons maintenant $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\beta} (s_2(t)-s_1(t))\,\mathrm{d}t$

Nous avons donc :

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\beta} (s_2(t)-s_1(t))\,\mathrm{d}t = & \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\beta} \frac{1}{t}-\left(\frac{1}{\beta}\left(\frac{2}{2\beta+1}+2\right)\left(t-\frac{1}{2}\right)-2\right)\,\mathrm{d}t \\
= & \left[\ln t-\frac{1}{2\beta}\left(\frac{2}{2\beta+1}+2\right)\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+2t\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\beta} \\
= & \left(\ln\left(\frac{1}{2}+\beta\right)-\beta\left(\frac{1}{2\beta+1}+1\right)+2\beta+1\right)-(-\ln 2+1) \\
= & \ln(1+2\beta)-\ln 2-\beta\left(\frac{1}{2\beta+1}+1\right)+2\beta+1+\ln 2-1 \\
= & \ln(1+2\beta)-\beta\left(\frac{1}{2\beta+1}-1\right)=\ln(1+2\beta)+\frac{2\beta^2}{2\beta+1}
\end{aligned}$$

D'où $\displaystyle\int_0^1 (s_2(t)-s_1(t))\,\mathrm{d}t=\ln(1+2\alpha)+\frac{2\alpha^2}{2\alpha+1}+\ln(1+2\beta)+\frac{2\beta^2}{2\beta+1}$

Il suffit, maintenant, de trouver $\alpha>0$ et $\beta>0$ tels que $\ln(1+2\alpha)+\dfrac{2\alpha^2}{2\alpha+1}+\ln(1+2\beta)+\dfrac{2\beta^2}{2\beta+1}<\varepsilon$ [1]

Nous avons donc $\displaystyle\int_0^1 (s_2(t)-s_1(t))\,\mathrm{d}t<\varepsilon$

◇ Comme s_1 et s_2 sont continues sur l'intervalle $[0;1]$, d'après le théorème de Weierstrass [2], il existe un polynôme $Q_1\in\mathbb{R}[X]$ tel que :

$$(\forall x\in[0;1])\,(|s_1(x)-Q_1(x)|<\varepsilon)\iff\|s_1-Q_1\|_\infty<\varepsilon$$

De même, il existe $Q_2\in\mathbb{R}[X]$ tel que, pour tout $x\in[0;1]$, nous avons $|s_2(x)-Q_2(x)|<\varepsilon$

◇ L'inégalité $|s_1(x)-Q_1(x)|<\varepsilon$ vraie pour tout $x\in[0;1]$ peut aussi s'écrire :

$$-\varepsilon<s_1(x)-Q_1(x)<\varepsilon\iff Q_1(x)-\varepsilon<s_1(x)<Q_1(x)+\varepsilon$$

Tout comme

$$-\varepsilon<s_2(x)-Q_2(x)<\varepsilon\iff Q_2(x)-\varepsilon<s_2(x)<Q_2(x)+\varepsilon$$

1. Il suffit de voir que, pour tout $x>0$, nous avons $\ln(1+2x)+\dfrac{2x^2}{2x+1}<4x$ et donc, si nous choisissons $\alpha<\dfrac{\varepsilon}{8}$ et $\beta<\dfrac{\varepsilon}{8}$, nous avons bien $\displaystyle\int_0^1 (s_2(t)-s_1(t))\,\mathrm{d}t\leqslant\varepsilon$

2. Le théorème de Weierstrass dit que les polynômes sont denses dans l'ensemble des fonctions continues sur $[0;1]$

◇ Posons $R_1(x) = Q_1(x) - \varepsilon$ et $R_2(x) = Q_2(x) + \varepsilon$.
R_1 tout comme R_2 est aussi un polynôme. Des inégalités précédentes, nous pouvons écrire :

$$R_1(x) < s_1(x) < h(x) < s_2(x) < R_2(x)$$

C'est à dire

$$R_1(x) < h(x) < R_2(x)$$

◇ On pose $P_1(x) = x + x(1-x) R_1(x)$ et $P_2(x) = x + x(1-x) R_2(x)$.
P_1 et P_2 sont 2 polynômes tels que $P_1(0) = P_2(0) = 0$ et $P_1(1) = P_2(1) = 1$ et donc $P_1 \in \mathcal{T}$ et $P_2 \in \mathcal{T}$

◇ Pour $x \in [0;1]$, comme $x(1-x) \geqslant 0$, nous avons :

$$x(1-x) R_1(x) < x(1-x) h(x) < x(1-x) R_2(x)$$

Puis :

$$x + x(1-x) R_1(x) < x + x(1-x) h(x) < x + x(1-x) R_2(x)$$

Autrement dit $P_1(x) < g(x) < P_2(x)$

Nous avons bien encadré $g = 1_{\left[\frac{1}{2};+1\right[}$ par des polynômes P_1 et P_2 de $\mathcal{T}$

4. Nous allons montrer, par des encadrements, que $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \sum\limits_{n=0}^{N(x)} a_n = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n g(x^n) = 0$

▷ Soit $Q(x) = R_2(x) - R_1(x)$; nous avons $Q \in \mathbb{R}[X]$

⋆ En réutilisant la définition de R_1 ou de R_2, nous avons $R_1(x) = \dfrac{P_1(x) - x}{x(1-x)}$ et $R_2(x) = \dfrac{P_2(x) - x}{x(1-x)}$, et donc :

$$Q(x) = R_2(x) - R_1(x) = \frac{P_2(x) - x}{x(1-x)} - \frac{P_1(x) - x}{x(1-x)} = \frac{P_2(x) - P_1(x)}{x(1-x)}$$
$$\iff$$
$$P_2(x) - P_1(x) = x(1-x) Q(x)$$

⋆ De l'inégalité $R_2(x) > R_1(x)$ lorsque $x \in [0;1]$, nous déduisons que $Q(x) > 0$ si $x \in [0;1]$

⋆ D'autre part :

$$Q(x) = R_2(x) - R_1(x) = Q_2(x) + \varepsilon - (Q_1(x) - \varepsilon) = Q_2(x) - Q_1(x) + 2\varepsilon$$

Comme $Q_2(x) < s_2(x) + \varepsilon$ et $-Q_1(x) < -s_1(x) + \varepsilon$, nous avons alors :

$$Q(x) = Q_2(x) - Q_1(x) + 2\varepsilon < s_2(x) - s_1(x) + 4\varepsilon$$

Nous avons alors :

$$0 \leqslant \int_0^1 Q(t)\, \mathrm{d}t = \int_0^1 Q_2(x) - Q_1(x) + 2\varepsilon\, \mathrm{d}t < \int_0^1 s_2(x) - s_1(x)\, \mathrm{d}t + 4\varepsilon < 5\varepsilon$$

▷ Quelques rappels :

⋆ Nous avons vu que pour tout $x \in [0;1[$, nous avons $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n g(x^n) = \sum\limits_{n=0}^{N(x)} a_n$ où $N(x)$ est un nombre parfaitement calculé, dépendant de x. La série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n g(x^n)$ converge donc ; c'est même une somme finie.

⋆ De même, puisque $P_1 \in \mathcal{T}$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n P_1(x^n)$ converge et nous avons $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \sum\limits_{n\geqslant 0} a_n P_1(x^n) = 0$

▷ Nous allons, maintenant, utiliser l'hypothèse $a_n \in O\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Il existe donc $M > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leqslant \dfrac{M}{n}$.

⋆ Pour $x \in [0;1[$, nous avons :

$$\left|\sum_{n\geqslant 0} a_n g\left(x^n\right) - \sum_{n\geqslant 0} a_n P_1\left(x^n\right)\right| \leqslant \sum_{n\geqslant 0} \left|a_n g\left(x^n\right) - a_n P_1\left(x^n\right)\right| = \sum_{n\geqslant 0} |a_n| \left(g\left(x^n\right) - P_1\left(x^n\right)\right)$$

⋆ De l'encadrement, vrai pour tout $x \in [0;1[$, $P_1(x) \leqslant g(x) \leqslant P_2(x)$, nous déduisons $0 \leqslant g(x) - P_1(x) \leqslant P_2(x) - P_1(x)$

⋆ Et nous avons donc :

$$\left|\sum_{n\geqslant 0} a_n g\left(x^n\right) - \sum_{n\geqslant 0} a_n P_1\left(x^n\right)\right| \leqslant \sum_{n\geqslant 0} |a_n| \left(P_2\left(x^n\right) - P_1\left(x^n\right)\right) \leqslant M \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n}\left(P_2\left(x^n\right) - P_1\left(x^n\right)\right)$$

⋆ Or, $P_2\left(x^n\right) - P_1\left(x^n\right) = x^n\left(1 - x^n\right) Q\left(x^n\right)$ et donc

$$\left|\sum_{n\geqslant 0} a_n g\left(x^n\right) - \sum_{n\geqslant 0} a_n P_1\left(x^n\right)\right| \leqslant M \sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n\left(1 - x^n\right)}{n} Q\left(x^n\right)$$

⋆ En réutilisant l'inégalité, vraie pour $x \in [0;1[$, $(1 - x^n) \leqslant n(1 - x)$ déjà démontrée dans le théorème taubérien faible 8.8.2, nous avons :

$$\left|\sum_{n\geqslant 0} a_n g\left(x^n\right) - \sum_{n\geqslant 0} a_n P_1\left(x^n\right)\right| \leqslant M(1 - x) \sum_{n\geqslant 0} x^n Q\left(x^n\right)$$

⋆ De l'ingalité triangulaire classique $|x| \leqslant |x - y| + |y|$, nous déduisons :

$$\begin{aligned} \left|\sum_{n\geqslant 0} a_n g\left(x^n\right)\right| &\leqslant \left|\sum_{n\geqslant 0} a_n g\left(x^n\right) - \sum_{n\geqslant 0} a_n P_1\left(x^n\right)\right| + \left|\sum_{n\geqslant 0} a_n P_1\left(x^n\right)\right| \\ &\leqslant M(1 - x) \sum_{n\geqslant 0} x^n Q\left(x^n\right) + \left|\sum_{n\geqslant 0} a_n P_1\left(x^n\right)\right| \end{aligned}$$

▷ D'après le lemme 8.8.3 $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} (1 - x) \sum_{n\geqslant 0} x^n Q\left(x^n\right) = \int_0^1 Q(t)\, \mathrm{d}t$.

Il existe donc $\mu \in [0;1[$, tel que si $\mu < x < 1$, alors

$$\left|(1 - x) \sum_{n\geqslant 0} x^n Q\left(x^n\right) - \int_0^1 Q(t)\, \mathrm{d}t\right| \leqslant \varepsilon$$

De la même manière, en réutilisant, pour $\mu < x < 1$, l'inégalité triangulaire vue ci-dessus

$$\left|(1 - x) \sum_{n\geqslant 0} x^n Q\left(x^n\right)\right| \leqslant \left|(1 - x) \sum_{n\geqslant 0} x^n Q\left(x^n\right) - \int_0^1 Q(t)\, \mathrm{d}t\right| + \int_0^1 Q(t)\, \mathrm{d}t \leqslant \varepsilon + 5\varepsilon = 6\varepsilon$$

▷ De même, comme $P_1 \in \mathcal{T}$, nous avons $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \sum_{n\geqslant 0} a_n P_1\left(x^n\right) = 0$.

Il existe donc $\lambda \in [0;1[$ tel que si $\lambda < x < 1$, alors $\left|\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n P_1\left(x^n\right)\right| \leqslant \varepsilon$

▷ Donc, en posant $\Lambda = \max\{\lambda, \mu\}$, pour $\Lambda < x < 1$, nous avons :

$$\left|\sum_{n\geqslant 0} a_n g(x^n)\right| \leqslant M(1-x)\sum_{n\geqslant 0} x^n Q(x^n) + \left|\sum_{n\geqslant 0} a_n P_1(x^n)\right| \leqslant 6M\varepsilon + \varepsilon$$

Nous venons donc de montrer que $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \sum\limits_{n\geqslant 0} a_n g(x^n) = 0$.

Ainsi $g = 1_{[\frac{1}{2};+1[} \in \mathcal{T}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n = 0$

Ce que nous voulions : le théorème est démontré

Exemple 12 :

Nous prenons un exemple tout ce qu'il y a de plus classique :

La série entière $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n} x^n$ est une série convergente de rayon de convergence égal à 1. Ici, bien entendu, $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ et donc $a_n \in O\left(\frac{1}{n}\right)$.

Si $|x| < 1$, nous avons $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n} x^n = -\ln(1+x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} -\ln(1+x) = -\ln 2$.

Donc, d'après le théorème taubérien fort 8.8.4, nous avons $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2$

Remarque 23 :

Revenons sur quelques éléments de la démonstration

1. L'ensemble des polynômes Φ tels que $\Phi(0) = 0$ est $X\mathbb{R}[X]$
2. **Explications supplémentaires**
   - Nous avons vu que, pour tout $x \in [0;1[$, $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n g(x^n) = \sum\limits_{n=0}^{N(x)} a_n$ où nous avons $N(x) = \left[\frac{-\ln 2}{\ln x}\right]$
   - Que veut dire $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \sum\limits_{n=0}^{N(x)} a_n = 0$?

     Ceci veut dire que, pour $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha \in [0;1[$ tel que si $\alpha < x < 1$, alors $\left|\sum\limits_{n=0}^{N(x)} a_n\right| < \varepsilon$
   - On considère l'application $\varphi : [0;1[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in]0;1[$ par $\varphi(x) = \frac{-\ln 2}{\ln x}$

     → Tout d'aboord, la dérivée φ' est donnée par $\varphi'(x) = \frac{\ln 2}{x(\ln x)^2}$. φ est donc croissante sur $]0;1[$

     → Clairement, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \varphi(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \varphi(x) = 0$; il est donc possible de prolonger φ par continuité en 0 en posant $\varphi(0) = 0$

     → φ réalise donc une bijection croissante de $[0;1[$ dans $\mathbb{R}^+$

     → La fonction $N : [0;1[\longrightarrow \mathbb{N}$ définie par :

$$\begin{cases} N : [0;1[& \longrightarrow & \mathbb{N} \\ \quad x & \longmapsto & N(x) = \left[\frac{-\ln 2}{\ln x}\right] \end{cases}$$

     est croissante au sens large sur $[0;1[$; ce n'est certainement pas une bijection !!

- Soit x_0 tel que $\alpha < x_0 < 1$, alors $N(x_0) = \left[\dfrac{-\ln 2}{\ln x_0}\right]$ et $\left|\displaystyle\sum_{n=0}^{N(x_0)} a_n\right| < \varepsilon$

  Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $p \geqslant N(x_0)$. Il existe $x_1 \in [0;1[$ tel que $p = N(x_1)$, et au vu de la croissance de N, nous avons $x_0 < x_1 < 1$ et donc $\left|\displaystyle\sum_{n=0}^{p} a_n\right| < \varepsilon$
- Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N(x_0) \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p \in \mathbb{N}$ tel que $p \geqslant N(x_0)$, nous ayons $\left|\displaystyle\sum_{n=0}^{p} a_n\right| < \varepsilon$

Et donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} Sum_{p=0}^{n} a_p = 0$

3. **Intérêt du théorème**

L'intérêt du théorème est de rechercher une réciproque du théorème d'Abel angulaire 8.8.1

- On se donne donc une série complexe $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n$ et la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ que nous supposons de rayon de convergence $\rho \geqslant 1$.

  Si la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n$ converge, alors le théorème d'Abel angulaire 8.8.1 affirme que, pour $x \in]-1;+1[$, nous avons $f(x) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$:

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = \sum_{n\geqslant 0} a_n$$

- La réciproque serait :

  Si $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)$ existe, alors $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n$ converge et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)$

  Cette réciproque est fausse

  Pour s'en convaincre, il suffit de considérer la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n x^n$ de rayon de convergence $\rho = 1$.

  Si $x \in]-1;+1[$, alors $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}$ et nous avons $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{1}{1+x} = \frac{1}{2}$ alors que la série numérique $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n$ diverge.
- La réciproque n'est vraie que sous certaines conditions :

  $\to$ Si $a_n \in o\left(\dfrac{1}{n}\right)$, c'est le théorème taubérien faible 8.8.2

  $\to$ Si $a_n \in O\left(\dfrac{1}{n}\right)$, c'est le théorème taubérien fort ou de Hardy-Littlewood 8.8.4

8.9 Exponentielle et trigonométrie complexe

8.9.1 La fonction exponentielle complexe

1. Nous avons démontré que la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{n!}$ est absolument convergente sur $\mathbb{C}$ en entier.

   Pour tout $z \in \mathbb{C}$, nous notons $\mathrm{Exp}(z) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{n!}$

2. **Proposition**

   Pour tout $z \in \mathbb{C}$ et tout $z' \in \mathbb{C}$, nous avons $\mathrm{Exp}(z+z') = \mathrm{Exp}(z) \times \mathrm{Exp}(z')$

Démonstration

→ Nous savons que la série $\sum_{n\geqslant 0}\frac{z^n}{n!}$ est absolument convergente sur $\mathbb{C}$ et donc, pour tout $z\in\mathbb{C}$ et tout $z'\in\mathbb{C}$, nous avons :

$$\left(\sum_{n\geqslant 0}\frac{z^n}{n!}\right)\left(\sum_{n\geqslant 0}\frac{z'^n}{n!}\right)=\operatorname{Exp}(z)\times\operatorname{Exp}(z')=\sum_{n\geqslant 0}w_n$$

où w_n est défini par le produit de Cauchy

→ Calcul de w_n

Nous avons :

$$\begin{aligned} w_n &= \sum_{p=0}^{n}a_pb_{n-p}=\sum_{p=0}^{n}\frac{z^p}{p!}\frac{z'^{n-p}}{(n-p)!}=\frac{1}{n!}\sum_{p=0}^{n}n!\times\frac{z^p}{p!}\frac{z'^{n-p}}{(n-p)!}\\ &= \frac{1}{n!}\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}z^pz'^{n-p}=\frac{1}{n!}(z+z')^n \end{aligned}$$

Ainsi, nous obtenons $\operatorname{Exp}(z)\times\operatorname{Exp}(z')=\sum_{n\geqslant 0}\frac{(z+z')^n}{n!}=\operatorname{Exp}(z+z')$

Ce que nous voulions

3. **Proposition**

La restriction de la fonction Exp à $\mathbb{R}$ correspond à la fonction exponentielle réelle, autrement dit :

$$(\forall x\in\mathbb{R})\,(\operatorname{Exp}(x)=e^x)$$

Démonstration

→ En considérant le point précédent, la restriction de la fonction Exp à $\mathbb{R}$ vérifie, puisque $\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$, pour tout $x\in\mathbb{R}$ et tout $y\in\mathbb{C}$:

$$\operatorname{Exp}(x+y)=\operatorname{Exp}(x)\times\operatorname{Exp}(y)$$

→ La restriction de Exp à $\mathbb{R}$ est aussi dérivable et nous avons :

$$\operatorname{Exp}'(x)=\sum_{n\geqslant 0}\frac{nx^{n-1}}{n!}=\sum_{n\geqslant 1}\frac{nx^{n-1}}{n!}=\sum_{n\geqslant 1}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}=\sum_{n\geqslant 0}\frac{x^n}{n!}=\operatorname{Exp}(x)$$

→ D'après l'exposé de L_1 *(fonctions transcendantes)*, et sachant que $\operatorname{Exp}(1)=\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{n!}=e$, nous avons, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\operatorname{Exp}(x)=e^x$

Définition

Nous notons, pour tout $z\in\mathbb{C}$, $\operatorname{Exp}(z)=\sum_{n\geqslant 0}\frac{z^n}{n!}=e^z$

Nous définissons ainsi la fonction exponentielle complexe

8.9.2 Proposition

1. Nous avons $e^0=1$
2. Pour tout $z\in\mathbb{C}$, $(e^z)^{-1}=\frac{1}{e^z}=e^{-z}$
3. Pour tout $z\in\mathbb{C}$, nous avons $e^z\neq 0$

Démonstration

1. De toute évidence, $0 \in \mathbb{R}$ et de la restriction de Exp à $\mathbb{R}$, nous avons donc $e^0 = 1$
2. Facilement, nous avons, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $1 = e^0 = e^{z-z} = e^z \times e^{-z}$ et, donc, nous avons bien $(e^z)^{-1} = \dfrac{1}{e^z} = e^{-z}$, et ce pour tout $z \in \mathbb{C}$
3. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, e^z est inversible et donc, nous avons, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $e^z \neq 0$

Remarque 24 :

L'exponentielle complexe Exp est un homomorphisme du groupe additif $(\mathbb{C}, +)$ dans le groupe multiplicatif $(\mathbb{C}^*, \times)$

8.9.3 Théorème

1. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, nous avons $\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$
2. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, nous avons $|e^z| = e^{\mathrm{Re}(z)}$
3. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, nous avons $\left|e^{it}\right| = 1$

Démonstration

1. $\rightarrow$ Soit $\varphi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par :
$$\begin{cases} \varphi : \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \quad z & \longmapsto & \varphi(z) = \overline{z} \end{cases}$$
φ est une fonction continue sur $\mathbb{C}$ puisque, pour tout $z \in \mathbb{C}$ et tout $z_0 \in \mathbb{C}$, nous avons :
$$|\varphi(z) - \varphi(z_0)| = |\overline{z} - \overline{z_0}| = |\overline{z - z_0}| = |z - z_0|$$
Ainsi, pour toute suite convergente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres complexes, nous avons :
$$\lim_{n\to+\infty} \varphi(u_n) = \varphi\left(\lim_{n\to+\infty} u_n\right) \Longleftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \overline{u_n} = \overline{\lim_{n\to+\infty} u_n}$$
$\rightarrow$ Si nous considérons $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}$, nous avons $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = e^z$, et $\overline{u_n} = \overline{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\overline{z}^k}{k!}$ avec $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \overline{u_n} = e^{\overline{z}}$
Donc, d'après ci-dessus $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \overline{u_n} = \overline{\lim_{n\to+\infty} u_n} \Longleftrightarrow e^{\overline{z}} = \overline{e^z}$
2. Dès lors : $|e^z|^2 = e^z \times \overline{e^z} = e^z \times e^{\overline{z}} = e^{z+\overline{z}} = e^{2\,\mathrm{Re}(z)}$
Et donc $|e^z| = e^{\mathrm{Re}(z)}$
3. Si $t \in \mathbb{R}$, alors it est imaginaire pur et $\mathrm{Re}(it) = 0$ et donc $\left|e^{it}\right| = 1$

Remarque 25 :

Si, pour $z \in \mathbb{C}$, nous utilisons la forme algébrique $z = x + iy$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$, alors, en utilisant la propriété de l'exponentielle $e^z = e^{x+iy} = e^x \times e^{iy}$
Nous avons alors $|e^z| = e^x$ et $y \equiv \arg(e^z)\,[2\pi]$

8.9.4 Fonctions trigonométriques complexes

1. Pour $t \in \mathbb{R}$, nous avons $e^{it} = \cos t + i \sin t$ et comme $\cos t = \mathrm{Re}\left(e^{it}\right)$, nous avons alors :
$$\cos t = \mathrm{Re}\left(e^{it}\right) = \cos t = \mathrm{Re}\left(\sum_{n\geqslant 0} \frac{(it)^n}{n!}\right) = \sum_{n\geqslant 0} \mathrm{Re}\left(\frac{(it)^n}{n!}\right) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!}$$

2. De la même manière, nous avons $\sin t = \operatorname{Im}\left(e^{it}\right) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!}$

3. **Définition**

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, nous définissons :

$\rightarrow$ $\cos z = \sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$ $\rightarrow$ $\sin z = \sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$

8.9.5 Fonctions hyperboliques complexes

Pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$\rightarrow$ Le cosinus hyperbolique d'un nombre complexe est défini par $\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$. Et nous avons :

$$\cosh z = \sum_{n\geqslant 0} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

$\rightarrow$ Le sinus hyperbolique d'un nombre complexe est défini par $\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$. Et nous avons :

$$\sinh z = \sum_{n\geqslant 0} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Démonstration

Ce n'est pas une démonstration très difficile. Il suffit de rééecrire e^z comme série entière, c'est à dire $e^z = \sum_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{n!}$

1. Regardons $\cosh z$; nous avons tout d'abord :

$$e^z + e^{-z} = \sum_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{n!} + \sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n z^n}{n!} = \sum_{n\geqslant 0} (1 + (-1)^n) \frac{z^n}{n!}$$

Comme $(1 + (-1)^n) = 0$ si n est impair et $(1 + (-1)^n) = 2$ si n est pair, nous avons :

$$e^z + e^{-z} = \sum_{n\geqslant 0} 2 \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

Et donc, nous avons bien $\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \sum_{n\geqslant 0} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$

2. De même pour $\sinh z$, nous avons :

$$e^z - e^{-z} = \sum_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{n!} - \sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n z^n}{n!} = \sum_{n\geqslant 0} (1 - (-1)^n) \frac{z^n}{n!}$$

Comme $(1 - (-1)^n) = 0$ si n est pair et $(1 - (-1)^n) = 2$ si n est impair, nous avons :

$$e^z - e^{-z} = \sum_{n\geqslant 0} 2 \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Et donc, nous avons bien $\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \sum_{n\geqslant 0} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$

8.9.6 Quelques formules classiques

Nous avons les formules suivantes, vraies pour tout $z \in \mathbb{C}$

1. $\cos z = \cosh iz = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$
2. $\sin z = -i \sinh iz = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$
3. $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$
4. $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$
5. $\cos(-z) = \cos z$
6. $\cosh(-z) = \cosh z$
7. $\sin(-z) = -\sin z$
8. $\sinh(-z) = -\sinh z$

Démonstration

Nous ne démontrerons pas les points 5,6,7 et 8 : ils sont très faciles et utilisent les définitions exponentielles des fonctions trigonométriques ou hyperboliques.

1. Démontrons que $\cos z = \cosh iz = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$

$$\begin{aligned}\cosh iz &= \sum_{n \geqslant 0} \frac{(iz)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n \geqslant 0} \frac{i^{2n}}{(2n)!} z^{2n} = \sum_{n \geqslant 0} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} \\ &= \cos z\end{aligned}$$

   Et donc $\cos z = \cosh iz = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$

2. Démontrons maintenant, que $\sin z = -i \sinh iz = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$

   Nous itérons la méthode :

$$\begin{aligned}\sinh iz &= \sum_{n \geqslant 0} \frac{(iz)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n \geqslant 0} \frac{i^{2n+1}}{(2n+1)!} z^{2n+1} = i \sum_{n \geqslant 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} \\ &= i \sin z\end{aligned}$$

   Nous avons donc $\sinh iz = i \sin z \iff \sin z = -i \sinh iz$ et donc $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$

3. Nous avons :

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = \left(\frac{e^z + e^{-z}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^z - e^{-z}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2z} + e^{-2z} + 2}{4} - \frac{e^{2z} + e^{-2z} - 2}{4} = 1$$

   En fait, nous retrouvons les même calculs que ceux vus en L_1 dans le chapitre sur les fonctions transcendantes

4. Et, pour terminer :

$$\cos^2 z + \sin^2 z = (\cosh iz)^2 + (-i \sinh iz)^2 = \cosh^2 iz - \sinh^2 iz = 1$$

Remarque 26 :

Nous avons rassemblé dans la proposition 8.9.6 les formules semblables à celles que l'on retrouve dans $\mathbb{R}$, ce qui ne sera pas toujours le cas.

1. Dans $\mathbb{R}$, nous avons aussi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ et $\sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$
2. Nous retrouvons les résultats établis sur $\mathbb{R}$: les fonctions cos et cosh sont paires et les fonctions sin et sinh sont impaires.
3. De manière évidente, et par simples calculs, nous trouvons :

$$e^z = \cosh z + \sinh z \text{ et } e^{-z} = \cosh z - \sinh z$$

4. De même, et par simples calculs, nous trouvons : $e^{iz} = \cos z + i \sin z$ et $e^{-iz} = \cos z - i \sin z$

8.9.7 Formules d'addition

Nous avons les classiques formules d'addition, pour tout $a \in \mathbb{C}$ et tout $b \in \mathbb{C}$:

1. $\cosh(a+b) = \cosh a \cosh b + \sinh a \sinh b$
2. $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
3. $\sinh(a+b) = \cosh a \sinh b + \sinh a \cosh b$
4. $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

Démonstration

Ce n'est pas exactement difficile comme démonstration et nous ne ferons que les 2 premières.

1. Nous avons :

$$\begin{aligned}
\cosh(a+b) &= \frac{e^{a+b}+e^{-a-b}}{2} = \frac{1}{2}\left(e^a e^b + e^{-a}e^{-b}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left((\cosh a + \sinh a)(\cosh b + \sinh b) + (\cosh a - \sinh a)(\cosh b - \sinh b)\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(2\cosh a \cosh b + 2\sinh a \sinh b\right) = \cosh a \cosh b + \sinh a \sinh b
\end{aligned}$$

2. Pour démontrer que $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$, nous allons utiliser le fait que $\cos z = \cosh iz$ et $\sin z = -i \sinh iz$

$$\begin{aligned}
\cos(a+b) &= \cosh i(a+b) = \cosh(ia+ib) = \cosh ia \cosh ib + \sinh ia \sinh ib\\
&= \cos a \cos b + (i \sin a)(i \sin b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b
\end{aligned}$$

8.9.8 Proposition

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, la fonction $\cos z$ n'est pas bornée

Démonstration

Soit $z \in \mathbb{C}$.
Ecrivons $z = x + iy$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned}
\cos z = \cos(x+iy) &= \cos x \cos iy - \sin x \sin iy = \cos x \cosh y - \sin x(-i \sinh y)\\
&= \cos x \cosh y + i \sin x \sinh y
\end{aligned}$$

Et donc, $|\cos z|^2 = \cos^2 x \cosh^2 y + \sin^2 x \sinh^2 y$.
De $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, nous tirons $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ et donc

$$\begin{aligned}
|\cos z|^2 &= \cos^2 x \cosh^2 y + \left(1 - \cos^2 x\right)\sinh^2 y = \cos^2 x\left(\cosh^2 y - \sinh^2 y\right) + \sinh^2 y = \cos^2 x + \sinh^2 y\\
&\geqslant \sinh^2 y
\end{aligned}$$

La fonction $\sinh^2 y$ n'est pas bornée sur $\mathbb{R}$, et donc la fonction $|\cos z|^2$ n'est pas bornée sur $\mathbb{C}$
Ce que nous voulions

Remarque 27 :

1. Bien entendu, si $\cos z$ n'est pas bornée, il en est de même de $\sin z$
2. Ainsi, si les fonctions cos et sin **restreintes à l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ sont bornées**, il n'est pas du tout de même dans $\mathbb{C}$

8.9.9 Le logarithme complexe

1. La question que nous posons dans ce paragraphe, est celle-ci :

   Etant donné un nombre complexe $z \in \mathbb{C}$, existe-t-il un nombre complexe $Z \in \mathbb{C}$ tel que $e^Z = z$

2. Tout d'abord, si $z = 0$, il n'existe pas de $Z \in \mathbb{C}$ tel que $e^Z = 0$, puisque nous avons vu en 8.9.2 que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, nous avons $e^Z \neq 0$
3. Si $Z = x + iy$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$, alors, d'après les propriétés de l'exponentielle,

$$e^Z = e^{x+iy} = e^x \times e^{iy}$$

Si $|z| = \rho$ (avec $\rho > 0$) et θ est un argument de $z \in \mathbb{C}$, nous avons alors $z = \rho e^{i\theta}$ et donc de $e^Z = z \iff e^x \times e^{iy} = \rho e^{i\theta}$, nous déduisons :

$$\begin{cases} \rho = e^x \iff x = \ln \rho = \ln |z| \\ y \equiv \theta \, [2\pi] \iff y = \theta + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

4. Nous pouvons donc alors, écrire $Z = \ln \rho + i (\theta + 2k\pi)$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
Il y a donc une infinité de nombres Z_k, indicés par $k \in \mathbb{Z}$ tels que $z = e^{Z_k}$

5. **Définition du logarithme complexe**

Nous définissons le logarithme complexe d'un nombre complexe $z \in \mathbb{C}$ par :

$$\text{Log}_k (z) = \ln |z| + i (\arg z + 2k\pi) \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

Remarque 28 :

Il y a donc une infinité de logarithme d'un nombre complexe, ces logarithmes étant indicés par $k \in \mathbb{Z}$

8.9.10 Proposition

Soient $z \in \mathbb{C}$, $z' \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{Z}$ et $k' \in \mathbb{Z}$. Alors :

$$\text{Log}_k (z) + \text{Log}_{k'} (z') = \text{Log}_{k+k'} (zz')$$

Démonstration

Nous avons donc :
- ⋆ $\text{Log}_k (z) = \ln |z| + i (\arg z + 2k\pi)$
- ⋆ $\text{Log}_{k'} (z') = \ln |z'| + i (\arg z' + 2k'\pi)$

Et, en additionnant :

$$\begin{aligned} \text{Log}_k (z) + \text{Log}_{k'} (z') &= \ln |z| + \ln |z'| + i (\arg z + \arg z' + 2 (k + k') \pi) \\ &= \ln (|z| |z'|) + i (\arg z + \arg z' + 2 (k + k') \pi) \\ &= \text{Log}_{k+k'} (zz') \end{aligned}$$

Remarque 29 :

On suppose que $z = x$ avec $x \in \mathbb{R}$. Que devient le logarithme à ce moment là ?

1. Si $x > 0$, alors $x = xe^{2ik\pi}$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et donc $\text{Log}_k (x) = \ln x + 2ik\pi$ et donc $\text{Log}_0 x$ coïncide avec le logarithme népérien $\ln x$
2. Si $x < 0$, alors $x = |x| e^{i(\pi+2k\pi)}$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et donc $\text{Log}_k (x) = \ln |x| + i (\pi + 2k\pi)$
Nous avons, en particulier $\text{Log}_k (-1) = i (\pi + 2k\pi)$

Exemple 13 :

Quelques exemples

1. **Donner** $\text{Log}_k (i)$
Nous avons $i = e^{i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)}$ et donc $\text{Log}_k (i) = i \left(\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$

2. **Donner** $\text{Log}_k\,(1+i)$
   De la même manière, $1+i=\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)}$ et donc

$$\text{Log}_k\,(1+i)=\ln\sqrt{2}+i\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)=\frac{1}{2}\ln 2+i\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)$$

Exercice 20 :

1. Résoudre, dans $\mathbb{C}$, les équations suivantes :
   (a) $e^z=-2$ (b) $|\cos z|=|\sin z|$
2. Montrer que, pour tout $x\in\mathbb{R}$ et tout $y\in\mathbb{R}$, $|\sin(x+iy)|=|\sin x+\sin(iy)|$
3. Etablir les inégalités suivantes, vraies pour tout $z\in\mathbb{C}$
   (a) $|e^z-1|\leqslant e^{|z|}-1\leqslant |z|\,e^{|z|}$ (b) $|\cos z|\leqslant\cosh|z|$ (c) $|\sin z|=|\sinh z|$

8.10 Liste d'exercices

8.10.1 Recherche du rayon de convergence

Exercice 21 :

Soit $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}a_nz^n$ une série entière. On suppose qu'elle diverge pour $z=3+4i$ et qu'elle converge pour $z=5i$. Quel est son rayon de convergence ?

Exercice 22 :

Démontrer que si une série entière converge pour un $z_0\in\mathbb{C}$, alors elle converge absolument pour tout $z\in\mathbb{C}$ tel que $|z|<|z_0|$

Exercice 23 :

Donner le rayon de convergence des séries suivantes :

1. $\sum\limits_{n\geqslant1}\frac{z^n}{n(n+1)}$
2. $\sum\limits_{n\geqslant2}\frac{z^n}{n(n-1)}$
3. $\sum\limits_{n\geqslant1}\frac{z^n}{1+2+\cdots+n}$
4. $\sum\limits_{n\geqslant1}\frac{n!}{n^n}z^n$
5. $\sum\limits_{n\geqslant1}\cosh nz^n$
6. $\sum\limits_{n\geqslant1}e^{an^2+bn+c}z^n$

Exercice 24 :

D'Alembert ? Cauchy ? Equivalents ?
Donner le rayon de convergence des séries suivantes :

1. $\sum\limits_{n\geqslant1}\cos\left(\frac{1}{n}\right)z^n$
2. $\sum\limits_{n\geqslant1}\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right]^n z^n$
3. $\sum\limits_{n\geqslant0}i^nz^n$
4. $\sum\limits_{n\geqslant2}(1+ni)\,z^n$
5. $\sum\limits_{n\geqslant1}\frac{2^n}{n^2}z^n$
6. $\sum\limits_{n\geqslant1}\frac{n^3}{3^n}z^n$
7. $\sum\limits_{n\geqslant1}\frac{\ln n}{\sqrt{n}+2}z^n$
8. $\sum\limits_{n\geqslant1}\frac{n+1}{(-3)^n}z^n$
9. $\sum\limits_{n\geqslant0}\left(\int_0^1 t^ne^{-t}\,\mathrm{d}t\right)z^n$

Exercice 25 :

Quel est le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{k\times k!}{n!}\right)z^n$?

Exercice 26 :

Soit $\alpha\in\mathbb{R}$. Déterminer le rayon de convergence ρ de la série $\sum_{n\geqslant 0}\arctan n^\alpha x^n$, pour $x\in\mathbb{R}$. Etudier cette série lorsque $x=\rho$ ou $x=-\rho$

Exercice 27 :

Déterminer le rayon de convergence ρ de la série $\sum_{n\geqslant 0}v_n z^n$ où $v_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4k^2-1}$.

Exercice 28 :

Pour tout entier naturel non nul $n\in\mathbb{N}^*$; on désigne par a_n le nombre de diviseurs de n. Déterminer le rayon de convergence ρ de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}a_n z^n$

Exercice 29 :

1. On note a_n la n-ième décimale du développement décimal de $\sqrt{3}$. Quel est le rayon de convergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}a_n z^n$?
2. Déterminer le rayon de convergence ρ de la série entière $\sum_{\substack{n\in\mathbb{N}^*\\ n \text{ premier}}} z^n$

Exercice 30 :

On considère les séries $\sum_{n\in\mathbb{N}}a_n z^n$ de rayon de convergence ρ_A et $\sum_{n\in\mathbb{N}}b_n z^n$ de rayon de convergence ρ_B. Nous supposons $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}=l$. Comparer ρ_A et ρ_B

Exercice 31 :

Donner le rayon de convergence et la somme de la série $\sum_{n\geqslant 0}(2^n+1)\,z^n$

Exercice 32 :

1. Donner le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{(n+5)!}(z+5)^n$
2. En admettant que, pour tout $z\in\mathbb{C}$, $\sum_{n\geqslant 0}\frac{z^n}{n!}=e^z$, donner la somme de la série $\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{(n+5)!}(z+5)^n$

Exercice 33 :

1. Donner le développement en série entière, en précisant son rayon de convergence, de la fonction arctan
2. En déduire la valeur de $\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{-1}{3}\right)^n\times\frac{1}{2n+1}$
3. Calculer la primitive qui s'annule en 0 de la fonction arctan et donner le développement en série entière de cette fonction, en précisant son rayon de convergence,

4. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}$

Exercice 34 :

1. Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière réelle $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$
2. Même question : déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière réelle $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^2-1}{n+2} x^n$

Exercice 35 :

Calculer la somme de la série numérique $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{3n+1}$

Exercice 36 :

Soit $f(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2} dt$; montrer que $f(x) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{(2n+1)\, n!} x^{2n+1}$

Exercice 37 :

Déterminer le développement en série entière de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{(2x+3)^2}$.
Préciser le rayon de convergence de la série entière

Exercice 38 :

Déterminer le développement en série entière de la fonction f définie par $f(x) = (x+1)\ln(x+1)$.
Préciser le rayon de convergence de la série entière

Exercice 39 :

Soit $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{4^n}{C_{2n}^n} x^n$

1. Donner le rayon de convergence de la série
2. Montrer que si $f(x) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{4^n}{C_{2n}^n} x^n$, f est solution de l'équation différentielle

$$\begin{cases} 2\left(x-x^2\right) y' - (2x+1)\, y = -1 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$$

Exercice 40 :

1. Former de deux façons le développement en série entière en 0 de $f(x) = e^{-x^2} \displaystyle\int_0^x e^{t^2}\, \mathrm{d}t$
2. En déduire la relation $\displaystyle\binom{2n}{n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{4^n}{2n+1}$

8.10.2 Exercices divers

Exercice 41 :

Cet exercice est lié à l'histoire des théorèmes taubériens

Nous considérons la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$. On suppose que cette série est absolument convergente pour $|z|<1$ et si $|z|<1$, on note $f(z)=\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ sa somme.

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, nous posons :

$\Rightarrow$ $S_n = a_0+a_1+\cdots+a_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$

$\Rightarrow$ $T_n = \dfrac{a_0+a_1+\cdots+a_n}{n+1} = \dfrac{S_n}{n+1} = \dfrac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} a_k$ *(Moyenne de Césaro)*

1. Montrer que si $|z|<1$, alors la série $\sum_{n\geqslant 0} S_n z^n$ est absolument convergente et admet pour somme $H(z)=\dfrac{f(z)}{1-z}$
2. Quel est le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geqslant 0} T_n z^n$?

Exercice 42 :

1. Donner le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{n^k}{n!} z^n$, pour $k\in\mathbb{N}$
2. Démontrer que pour tout $k\in\mathbb{N}$, il existe un polynôme de degré k tel que, $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{n^k}{n!} z^n = P_k(z)\, e^z$

Exercice 43 :

Soient $\alpha\in\mathbb{R}$ et $f(x)=\cos(\alpha \arcsin x)$

1. Déterminer une équation différentielle d'ordre 2 dont f est solution.
2. En déduire un développement en série entière de f .

Exercice 44 :

Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de la variable réelle avec $a_n\in\mathbb{R}^+$ et $x\in\mathbb{R}$ de rayon de convergence infini.

Montrer que si $f(x)=\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ est bornée, alors f est constante.

Exercice 45 :

Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière complexe de rayon de convergence $\rho=+\infty$ et de somme $f(z)=\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$

1. Soient $r\geqslant 0$ et $n\in\mathbb{N}$. Calculer $L(r,n)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f\left(re^{i\theta}\right) e^{-in\theta}\,\mathrm{d}\theta$
2. En déduire que, si f est bornée sur $\mathbb{C}$, alors f est constante
3. En déduire une démonstration du théorème de D'Alembert.

Exercice 46 :

1. Nous considérons 2 réels α et β tels que $0 < \alpha < \beta < 2\pi$ fixés une fois pour toutes.
   Nous considérons aussi la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :
   $$I_n = \int_\alpha^\beta \sum_{k=1}^{n} e^{ik\theta}\,\mathrm{d}\theta$$
   Démontrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ admet une limite finie lorsque n tend vers $+\infty$
2. En déduire que les séries $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{e^{in\alpha}}{n}$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{e^{in\beta}}{n}$ sont de même nature
3. Démontrer que, pour tout $\theta \in\,]0;2\pi[$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{e^{in\theta}}{n}$ est convergente et donner sa limite

8.11 Correction de quelques exercices

8.11.1 Recherche du rayon de convergence

Exercice 1 :

Déterminer les domaines de convergence des séries entières :

1. $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$

   Appelons $u_n(z) = \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$, en utilisant la règle de d'Alembert, nous avons :
   $$\left|\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right| = \frac{(2n)!}{(2n+2)!} \times |z|^2 = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} \times |z|^2$$
   Or, pour tout $z \in \mathbb{C}$, nous avons $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} \times |z|^2 = 0$, nous pouvons conclure que la série entière $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$ converge absolument pour tout $z \in \mathbb{C}$

2. $\sum_{n\geqslant 0} n^n z^n$

   Comme tout à l'heure, si $u_n(z) = n^n z^n$, alors :
   $$\left|\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right| = \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} |z|$$
   Or, $\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} = \frac{(n+1)^n}{n^n} \times (n+1) = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \times (n+1)$

   Il est bien connu que $\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$, et que donc $\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \times (n+1) = +\infty$.

   Cette série ne converge donc que pour $z = 0$

Exercice 2 :

Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence ρ.

Montrer que, pour tout entier $p \geqslant 2$ le rayon de convergence ρ_A de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^{pn}$ est $\rho_A = +\infty$ si $\rho = +\infty$ ou $\rho_A = \sqrt[p]{\rho}$ si ρ est fini.

1. Supposons que $\rho = +\infty$

   Alors, pour tout $u \in \mathbb{C}$, la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n u^n$ est convergente ; en particulier si $u = z^p$, avec $p \in \mathbb{N}$ et $p \geqslant 2$; et donc le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^{pn}$ est aussi $\rho_A = +\infty$

2. Supposons maintenant que ρ soit fini

   Si $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \leqslant \sqrt[p]{\rho}$, alors $|z|^p \leqslant \rho$ et donc la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n (z^p)^n$ converge absolument.

   D'autre part, si $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \geqslant \sqrt[p]{\rho}$, alors $|z|^p \geqslant \rho$ et donc la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n (z^p)^n$ diverge.

   En résumé, si $|z| \leqslant \sqrt[p]{\rho}$ alors la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^{pn}$ converge, et si $|z| \geqslant \sqrt[p]{\rho}$, alors $\sum_{n\geqslant 0} a_n (z^p)^n$ diverge.

   Le rayon de convergence ρ_A de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^{pn}$ est $\rho_A = +\infty$ si $\rho = +\infty$ ou $\rho_A = \sqrt[p]{\rho}$ si ρ est fini.

Exercice 3 :

Déterminer le rayon de convergence ρ de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0}(-1)^n z^{2n}$ et étudier la série pour $|z|=\rho$. Quelle est la somme de cette série ?

⇒ Tout d'abord, on peut dire que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}(-1)^n z^{2n}$ est une série du type $\sum\limits_{n\geqslant 0}a_n z^{pn}$ où $p=2$. Le rayon de convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}(-1)^n z^{2n}$ est donc la racine carrée de du rayon de convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}(-1)^n z^{n}$

⇒ Le rayon de convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}(-1)^n z^{n}$ est 1 et donc le rayon de convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}(-1)^n z^{2n}$ est donc 1

⇒ Nous avons :

$$\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n z^{2n}=\sum_{n\geqslant 0}\left(-z^2\right)^n=\frac{1}{1+z^2}$$

⇒ Si $|z|=1$, alors $\left|\left(-z^2\right)^n\right|=1$, et donc, le terme général de la série numérique $\sum\limits_{n\geqslant 0}\left(-z^2\right)^n$ ne tend pas vers zéro, et la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0}\left(-z^2\right)^n$ ne peut converger.

Exercice 4 :

Montrer que si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres complexes telle qu'il existe un nombre complexe $z_0\in\mathbb{C}^*$ tel que la suite $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée, alors la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0}\frac{a_n}{n!}z^n$ a un rayon de convergence infini.

⇒ Si la suite $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, cela veut dire qu'il existe un nombre réel $M>0$ tel que, pour tout $n\in\mathbb{N}$ $|a_n z_0^n|\leqslant M$

⇒ Alors, pour tout $n\in\mathbb{N}$, nous avons :

$$\left|\frac{a_n}{n!}z^n\right|=\frac{|a_n|}{n!}|z|^n=\frac{|a_n z_0^n|}{n!}\frac{|z|^n}{|z_0|^n}\leqslant M\frac{\left|\frac{z}{z_0}\right|^n}{n!}$$

Nous savons que pour tout $t\in\mathbb{R}$, la série numérique $\sum\limits_{n\geqslant 0}\frac{t^n}{n!}$ converge, et donc la série numérique $\sum\limits_{n\geqslant 0}M\frac{\left|\frac{z}{z_0}\right|^n}{n!}$ converge ; par majoration, la série numérique $\sum\limits_{n\geqslant 0}\left|\frac{a_n}{n!}z^n\right|$ est convergente.

⇒ Ainsi, pour tout $z\in\mathbb{C}$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}\frac{a_n}{n!}z^n$ est absolument convergente et a donc un rayon de convergence infini.

Exercice 5 :

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe bornée.

1. *Que peut-on dire des rayons de convergence des séries $\sum\limits_{n\geqslant 0}a_n z^n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0}\frac{a_n}{n!}z^n$?*

   ⇒ **Le rayon de convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}a_n z^n$**

   La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant une suite complexe bornée, il existe $M>0$ tel que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, nous ayions $|a_n|\leqslant M$.

Nous avons vu, dans la démonsration du corollaire 8.2.2 que le rayon de convergence de cette série était supérieur ou égal à 1.

$\Rightarrow$ **Le rayon de convergence de la série** $\sum_{n\geqslant 0} \frac{a_n}{n!} z^n$

Nous allons montrer que cette série converge uniformément pour tout $z \in \mathbb{C}$.
Soit donc $z \in \mathbb{C}$. Alors :

$$\left|\frac{a_n}{n!} z^n\right| = |a_n| \frac{|z|^n}{n!} \leqslant M \frac{|z|^n}{n!}$$

La série $\sum_{n\geqslant 0} M\frac{|z|^n}{n!}$ est une série numérique convergente, et donc, d'après les théorèmes de majoration sur les séries numériques, la série $\sum_{n\geqslant 0} \left|\frac{a_n}{n!} z^n\right|$ est donc aussi une série numéruique convergente.

Ce qui veut dire que la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{a_n}{n!} z^n$ est absolument convergente pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Le rayon de convergence de cette série est donc infini.

On note respectivement $f(z)$ et $g(z)$ les sommes de ces séries entières.

2. *Montrer que pour tout réel $x \in \left]0;1\right[$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} g(t)\, e^{\frac{-t}{x}}\, \mathrm{d}t$ est convergente.*

Faisons une remarque : Si la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{a_n}{n!} z^n$ converge absolument pour tout $z \in \mathbb{C}$, elle converge donc absolument pour tout $t \in \mathbb{R}$, de telle sorte que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, la fonction $g(t) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{a_n}{n!} t^n$ est parfaitement définie.

Soit $x \in \left]0;1\right[$

Nous allons démontrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} g(t)\, e^{\frac{-t}{x}}\, \mathrm{d}t$ est absolument convergente, c'est à dire que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \left|g(t)\, e^{\frac{-t}{x}}\right| \mathrm{d}t$ est définie.

Nous avons :

$$\left|g(t)\, e^{\frac{-t}{x}}\right| = \left|\sum_{n\geqslant 0} \frac{a_n}{n!} t^n e^{\frac{-t}{x}}\right| \leqslant M e^{\frac{-t}{x}} \sum_{n\geqslant 0} \frac{t^n}{n!} = M e^{\frac{-t}{x}} e^t$$

Ainsi, $\left|g(t)\, e^{\frac{-t}{x}}\right| \leqslant M e^{t\left(1-\frac{1}{x}\right)}$

En appelant $\alpha = \left(1 - \frac{1}{x}\right)$, comme $x \in \left]0;1\right[$, nous avons $\left(1 - \frac{1}{x}\right) < 0$.

Comme nous savons que si $\alpha < 0$, les intégrales $\int_0^{+\infty} e^{\alpha t}\, \mathrm{d}t$ sont convergentes, nous déduisons que $\int_0^{+\infty} M e^{-t\left(1-\frac{1}{x}\right)}\, \mathrm{d}t$ converge et que, par les théorèmes de majoration, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \left|g(t)\, e^{\frac{-t}{x}}\right| \mathrm{d}t$ converge et donc que l'intégrale $\int_0^{+\infty} g(t)\, e^{\frac{-t}{x}}\, \mathrm{d}t$ est absolument convergente, et donc convergente.

3. *Montrer que $\int_0^{+\infty} g(t)\, e^{\frac{-t}{x}}\, \mathrm{d}t = x f(x)$ pour tout réel $x \in \left]0;1\right[$*

Cette question est plus difficile et mérite une attention certaine

$\Rightarrow$ On commence par un changement de variables.

Nous faisons donc le changement $t = xu \Longleftrightarrow u = \dfrac{t}{x}$ et donc $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u} = x \Longleftrightarrow \mathrm{d}t = x\,\mathrm{d}u$ d'où :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} g(t)\, e^{\frac{-t}{x}}\,\mathrm{d}t = & \int_0^{+\infty} g(xu)\, e^{-u} x\,\mathrm{d}u \\ = & \; x \int_0^{+\infty} g(xu)\, e^{-u}\,\mathrm{d}u\end{aligned}$$

⇒ Maintenant, il faut montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(xu)\, e^{-u}\,\mathrm{d}u = f(x)$

⋆ Tout d'abord $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(xu)\, e^{-u}\,\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} \sum_{n\geqslant 0} \frac{a_n}{n!}(ux)^n e^{-u}\,\mathrm{d}u$ et donc :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} g(xu)\, e^{-u}\,\mathrm{d}u = & \int_0^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k!}(ux)^k e^{-u}\,\mathrm{d}u + \int_0^{+\infty} \sum_{k\geqslant n+1} \frac{a_k}{k!}(ux)^k e^{-u}\,\mathrm{d}u \\ = & \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k x^k}{k!} \int_0^{+\infty} u^k e^{-u}\,\mathrm{d}u + \int_0^{+\infty} \sum_{k\geqslant n+1} \frac{a_k}{k!}(ux)^k e^{-u}\,\mathrm{d}u\end{aligned}$$

⋆ Lors de l'étude des intégrales généralisées, nous avons établi que

$$\int_0^{+\infty} u^k e^{-u}\,\mathrm{d}u = \Gamma(k+1) = k!$$

et nous avons donc :

$$\int_0^{+\infty} g(xu)\, e^{-u}\,\mathrm{d}u = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \int_0^{+\infty} \sum_{k\geqslant n+1} \frac{a_k}{k!}(ux)^k e^{-u}\,\mathrm{d}u$$

Et donc

$$\left|\int_0^{+\infty} g(xu)\, e^{-u}\,\mathrm{d}u - \sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right| = \left|\int_0^{+\infty} \sum_{k\geqslant n+1} \frac{a_k}{k!}(ux)^k e^{-u}\,\mathrm{d}u\right|$$

⋆ De $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = f(x)$, nous allons montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\int_0^{+\infty} g(xu)\, e^{-u}\,\mathrm{d}u - \sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right| = 0$$

c'est à dire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left|\int_0^{+\infty} \sum_{k\geqslant n+1} \frac{a_k}{k!}(ux)^k e^{-u}\,\mathrm{d}u\right| = 0$

⋆ Regardons tout d'abord $\displaystyle\left|\int_0^{+\infty} \sum_{k\geqslant n+1} \frac{a_k}{k!}(ux)^k e^{-u}\,\mathrm{d}u\right|$. Nous avons :

$$\begin{aligned}\left|\int_0^{+\infty} \sum_{k\geqslant n+1} \frac{a_k}{k!}(ux)^k e^{-u}\,\mathrm{d}u\right| \leqslant & \int_0^{+\infty} \left|\sum_{k\geqslant n+1} \frac{a_k}{k!}(ux)^k e^{-u}\right| \mathrm{d}u \\ \leqslant & \int_0^{+\infty} \sum_{k\geqslant n+1} \frac{|a_k|}{k!}(ux)^k e^{-u}\,\mathrm{d}u \\ \leqslant & \; M \int_0^{+\infty} \sum_{k\geqslant n+1} \frac{(ux)^k}{k!} e^{-u}\,\mathrm{d}u\end{aligned}$$

⋆ Maintenant, nous devons voir que :

$$\sum_{k\geqslant 0}\frac{(ux)^k}{k!}=e^{ux}\iff\sum_{k=0}^{n}\frac{(ux)^k}{k!}+\sum_{k\geqslant n+1}\frac{(ux)^k}{k!}=e^{ux}\iff\sum_{k\geqslant n+1}\frac{(ux)^k}{k!}=e^{ux}-\sum_{k=0}^{n}\frac{(ux)^k}{k!}$$

Et donc $\left|\displaystyle\int_0^{+\infty}\sum_{k\geqslant n+1}\frac{a_k}{k!}(ux)^k e^{-u}\,\mathrm{d}u\right|\leqslant M\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(e^{ux}-\sum_{k=0}^{n}\frac{(ux)^k}{k!}\right)e^{-u}\,\mathrm{d}u$

⋆ Or :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\left(e^{ux}-\sum_{k=0}^{n}\frac{(ux)^k}{k!}\right)e^{-u}\,\mathrm{d}u&=\int_0^{+\infty}e^{u(x-1)}\,\mathrm{d}u-\sum_{k=0}^{n}\frac{(x)^k}{k!}\int_0^{+\infty}u^k e^{-u}\,\mathrm{d}u\\&=\int_0^{+\infty}e^{u(x-1)}\,\mathrm{d}u-\sum_{k=0}^{n}x^k\text{ puisque }\int_0^{+\infty}u^k e^{-u}\,\mathrm{d}u=k!\end{aligned}$$

⋆ Calculons, maintenant $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{u(x-1)}\,\mathrm{d}u$

Pour $T>0$, nous avons :

$$\int_0^{T}e^{u(x-1)}\,\mathrm{d}u=\frac{1}{x-1}\left[e^{u(x-1)}\right]_0^T=\frac{e^{T(x-1)}}{x-1}-\frac{1}{x-1}$$

Comme $x-1<0$, nous avons $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{u(x-1)}\,\mathrm{d}u=\frac{1}{1-x}$

⋆ Ainsi, $\left|\displaystyle\int_0^{+\infty}\sum_{k\geqslant n+1}\frac{a_k}{k!}(ux)^k e^{-u}\,\mathrm{d}u\right|\leqslant M\left(\frac{1}{1-x}-\sum_{k=0}^{n}x^k\right)$

Comme $0<x<1$, nous avons $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}x^k=\frac{1}{1-x}$, nous avons aussi, donc

$$\lim_{n\to+\infty}M\left(\frac{1}{1-x}-\sum_{k=0}^{n}x^k\right)=0$$

Comme $\left|\displaystyle\int_0^{+\infty}\sum_{k\geqslant n+1}\frac{a_k}{k!}(ux)^k e^{-u}\,\mathrm{d}u\right|\leqslant M\left(\frac{1}{1-x}-\sum_{k=0}^{n}x^k\right)$, nous avons aussi

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\int_0^{+\infty}\sum_{k\geqslant n+1}\frac{a_k}{k!}(ux)^k e^{-u}\,\mathrm{d}u\right|=0$$

En conclusion, $\displaystyle\int_0^{+\infty}g(xu)\,e^{-u}\,\mathrm{d}u=f(x)$

Et donc $\displaystyle\int_0^{+\infty}g(t)\,e^{\frac{-t}{x}}\,\mathrm{d}t=xf(x)$ pour tout réel $x\in\,]0;1[$

Exercice 6 :

On considère la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}a_n z^n$ où $a_n=\left((-1)^n+2\right)^n$. Etudier le rayon de convergence de cette série.

Que dire de la suite $\left(\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)_{n\in\mathbb{N}}$?

→ Tout d'abord, nous devons remarquer que $a_{2n}=3^n$ et $a_{2n+1}=1$.

Si $r>\dfrac{1}{3}$, alors $a_{2n}r^{2n}=3^{2n}r^{2n}=(3r)^{2n}$; comme $3r>1$ alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}a_{2n}r^{2n}=\lim_{n\to+\infty}(3r)^{2n}=+\infty$ et donc la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}a_n z^n$ diverge.

Si ρ est le rayon de convergence de cette série, nous avons sûrement $\rho \leqslant \dfrac{1}{3}$

→ Pour $0 \leqslant r \leqslant \dfrac{1}{3}$, nous avons : $a_{2n}r^{2n} = 3^{2n}r^{2n} = (3r)^{2n}$

Comme $0 \leqslant 3r < 1$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} (3r)^{2n}$ est sûrement convergente et avec $0 < r \leqslant \dfrac{1}{3} < 1$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} r^n$ est convergente.

→ Ainsi, ρ, le rayon de convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ est surement supérieur ou égal à $\dfrac{1}{3}$

→ Donc le rayon de convergence ρ est $\rho = \dfrac{1}{3}$

→ Appelons $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $w_n = \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$. Nous avons :

$$w_{2n} = \frac{a_{2n+1}}{a_{2n}} = \frac{1}{3^{2n}} \text{ et } w_{2n+1} = \frac{a_{2n+2}}{a_{2n+1}} = \frac{3^{2n+2}}{1} = 3^{2n+2}$$

La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet donc pas de limite, et donc la suite $\left(\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet pas de limite

Exercice 7 :

Quel est le rayon de convergence des séries suivantes ?

1. $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{z^n}{\sqrt{n}}$

   Ici, nous avons $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ et donc $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = \sqrt{\dfrac{n}{n+1}}$.

   Nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{\dfrac{n}{n+1}} = 1$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$ et le rayon de convergence de cette série est donc 1

2. $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{\ln n}{\sqrt{n}+2} z^n$

   Ici, $a_n = \dfrac{\ln n}{\sqrt{n}+2}$ et donc $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \dfrac{\ln(n+1)}{\sqrt{n+1}+2} \times \dfrac{\sqrt{n}+2}{\ln n} = \dfrac{\ln(n+1)}{\ln n} \times \dfrac{\sqrt{n}+2}{\sqrt{n+1}+2}$

   Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(n+1)}{\ln n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{n}+2}{\sqrt{n+1}+2} = 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$ et le rayon de convergence de cette série est donc 1

3. $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{n+1}{(-3)^n} z^n$

   Nous avons donc $a_n = \dfrac{n+1}{(-3)^n}$ et donc $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \dfrac{n+2}{3^{n+1}} \times \dfrac{3^n}{n+1} = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{n+2}{n+1}$

   Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} dfrac13 \times \dfrac{n+2}{n+1} = \dfrac{1}{3}$, c'est à dire $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \dfrac{1}{3}$ et donc $\rho = 3$

4. $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{(2n)!}{(n!)^2} z^n$

   Avant de commencer, il faut remarquer que $\dfrac{(2n)!}{(n!)^2} = \mathrm{C}_{2n}^{n} = \dbinom{2n}{n}$.

   Nous avons

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(2(n+1))!}{(n+1)! \times (n+1)!} \times \frac{n! \times n!}{(2n)! \times (2n)!} = \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)\times(n+1)} = \frac{2(2n+1)}{n+1}$$

Nous avons alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2\,(2n+1)}{n+1} = 4$ et donc, le rayon de convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}z^n$ est $\dfrac{1}{4}$

Exercice 8 :

Donner le rayon de convergence des séries suivantes :

1. $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{z^n}{n^n}$

   Ici, $a_n = \dfrac{1}{n^n}$ et $|a_n|^{\frac{1}{n}} = \left(\dfrac{1}{n^n}\right)^{\frac{1}{n}} = \dfrac{1}{n}$

   Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n} = 0$, nous avons donc $\lim\limits_{n\to+\infty}|a_n|^{\frac{1}{n}} = 0$

   Le rayon de convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{z^n}{n^n}$ est donc $\rho = +\infty$

2. $\sum\limits_{n\geqslant 1}\sqrt[n]{n}z^n$

   ⋆ Ici, $a_n = \sqrt[n]{n} = n^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{\ln n}{n}}$ et $|a_n|^{\frac{1}{n}} = \left(e^{\frac{\ln n}{n}}\right)^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{\ln n}{n^2}}$

   Nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\ln n}{n^2} = 0$, et alors $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{\frac{\ln n}{n^2}} = 1$, nous avons donc $\lim\limits_{n\to+\infty}|a_n|^{\frac{1}{n}} = 1$

   Le rayon de convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\sqrt[n]{n}z^n$ est donc $\rho = +1$

   ⋆ Regardons ce qui se passe sur le cercle de convergence $|z| = 1$. Nous avons :

   $$|a_n z^n| = \left|\sqrt[n]{n}z^n\right| = \left|\sqrt[n]{n}\right||z|^n = e^{\frac{\ln n}{n}}$$

   Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{\frac{\ln n}{n}} = 1$, nous avons donc $\lim\limits_{n\to+\infty}|a_n z^n| = 1$ et la série diverge donc sur le cercle de convergence

3. $\sum\limits_{n\geqslant 1}\left(2+\dfrac{1}{n}\right)^n z^n$

   ⋆ Nous avons $a_n = \left(2+\dfrac{1}{n}\right)^n$ et donc $|a_n|^{\frac{1}{n}} = \left(2+\dfrac{1}{n}\right)$

   Nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty}|a_n|^{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(2+\dfrac{1}{n}\right) = 2$.

   Le rayon de convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\left(2+\dfrac{1}{n}\right)^n z^n$ est donc $\rho = \dfrac{1}{2}$

   ⋆ Regardons ce qui se passe sur le cercle de convergence $|z| = \dfrac{1}{2}$. Nous avons :

   $$|a_n z^n| = \left|\left(2+\frac{1}{n}\right)^n z^n\right| = \left|\left(2+\frac{1}{n}\right)^n\right||z|^n = \left(2+\frac{1}{n}\right)^n\times\frac{1}{2^n} = \left(1+\frac{1}{2n}\right)^n$$

   Comme $\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)}$, que $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln\left(1+\dfrac{1}{2n}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} n\times\dfrac{1}{2n} = \dfrac{1}{2}$, nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{n\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)} = \lim\limits_{n\to+\infty}|a_n z^n| = \sqrt{e}$

   La série diverge donc sur le cercle de convergence

4. $\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{an+b}{n+d}\right)^n z^n$ *avec* $a>0$

 ⋆ Une nouvelle fois $a_n=\left(\frac{an+b}{n+d}\right)^n$ et donc $|a_n|^{\frac{1}{n}}=\left|\frac{an+b}{n+d}\right|$

 Nous avons $\lim_{n\to+\infty}|a_n|^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{an+b}{n+d}\right|=|a|=a$.

 Le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{an+b}{n+d}\right)^n z^n$ avec $a>0$ est donc $\rho=\frac{1}{a}$

 ⋆ Regardons ce qui se passe sur le cercle de convergence $|z|=\frac{1}{a}$. Nous avons :

$$|a_nz^n|=\left|\left(\frac{an+b}{n+d}\right)^n z^n\right|=\left|\frac{an+b}{n+d}\right|^n|z|^n=\left|\frac{an+b}{n+d}\right|^n\times\frac{1}{a^n}=\left|\frac{an+b}{an+ad}\right|^n$$

 Regardons un peu l'expression $\frac{an+b}{an+ad}$. nous avons :

$$\frac{an+b}{an+ad}=\frac{an+b+ad-ad}{an+ad}=\frac{an+ad+b-ad}{an+ad}=1+\frac{b-ad}{a\,(n+d)}$$

 De plus, $\left|\frac{an+b}{an+ad}\right|^n=e^{n\ln\left(\left|\frac{an+b}{an+ad}\right|\right)}=e^{n\ln\left(\left|1+\frac{b-ad}{a\,(n+d)}\right|\right)}$.

 Et $\lim_{n\to+\infty}n\ln\left(\left|1+\frac{b-ad}{a\,(n+d)}\right|\right)=\lim_{n\to+\infty}n\times\frac{b-ad}{a\,(n+d)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n\,(b-ad)}{a\,(n+d)}=\frac{b-ad}{a}$.

 D'où nous avons $\lim_{n\to+\infty}e^{n\ln\left(\left|\frac{an+b}{an+ad}\right|\right)}=\lim_{n\to+\infty}|a_nz^n|=e^{\frac{b-ad}{a}}$

 Le terme général ne tendant pas vers 0, la série diverge donc sur le cercle de convergence

Exercice 9 :

Soit $\sum_{n\geqslant 0}a_nz^n$ *une série entière de rayon de convergence* ρ *et telle que* $a_0\neq 0$. *Démontrer qu'il existe une série* $\sum_{n\geqslant 0}b_nz^n$ *telle que* $\left(\sum_{n\geqslant 0}a_nz^n\right)\left(\sum_{n\geqslant 0}b_nz^n\right)=1$

Nous avons $\left(\sum_{n\geqslant 0}a_nz^n\right)\left(\sum_{n\geqslant 0}b_nz^n\right)=\sum_{n\geqslant 0}c_nz^n$ où $c_n=\sum_{i=0}^{n}a_ib_{n-i}$.

Pour que $\left(\sum_{n\geqslant 0}a_nz^n\right)\left(\sum_{n\geqslant 0}b_nz^n\right)=1$, nous avons $c_0=1$, et pour $n\geqslant 1$, $c_n=0$.

Nous obtenons donc les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
a_0b_0=1 &\iff b_0=\frac{1}{a_0}\\
a_0b_1+a_1b_0=0 &\iff b_1=\frac{-a_1b_0}{a_0}=\frac{-a_1}{a_0^2}\\
\vdots\quad & \qquad\vdots\\
\sum_{i=0}^{n}a_ib_{n-i}=0 &\iff a_0b_n=-\sum_{i=1}^{n}a_ib_{n-i}\iff b_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{-a_i}{a_0}b_{n-i}
\end{aligned}$$

La suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc bien définie par récurrence. La série $\sum_{n\geqslant 0}b_nz^n$ est donc bien définie

Exercice 10 :

En utilisant la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}$*, calculer* $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n}{n+1}$

1. Si nous considérons la série $S(x)=\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}$, le rayon de convergence de cette série entière est 1 ; on le démontre avec la règle de D'Alembert.
2. La série numérique $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n}{n+1}$ est une série alternée vérifiant le critère des séries alternées est donc une série convergente.
3. Si, pour $|x|<1$, nous avons $f(x)=\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}$, d'après le théorème 8.5.1, on peut prolonger f par continuité en posant :
$$f(1)=\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n}{n+1}$$
4. Si nous dérivons f, nous obtenons $f'(x)=\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n x^n=\sum_{n\geqslant 0}(-x)^n=\frac{1}{1+x}$ pour $|x|<1$
5. D'où $f(x)=\ln(1+x)$ et $f(1)=\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n}{n+1}=\ln 2$

Exercice 11 :

En utilisant la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$*, calculer* $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n}{2n+1}$

Répétition ! ! ! !

1. Si nous considérons la série $S(x)=\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$, le rayon de convergence de cette série entière est 1 ; on le démontre avec la règle de D'Alembert.
2. La série numérique $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ est une série alternée vérifiant le critère des séries alternées et est donc une série convergente.
3. Si, pour $|x|<1$, nous avons $f(x)=\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$, d'après le théorème 8.5.1, on peut prolonger f par continuité en posant :
$$f(1)=\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n}{2n+1}$$
4. Si nous dérivons f, nous obtenons $f'(x)=\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n x^{2n}=\sum_{n\geqslant 0}\left(-x^2\right)^n=\frac{1}{1+x^2}$ pour $|x|<1$
5. D'où $f(x)=\arctan x$ et $f(1)=\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n}{n+1}=\arctan 1=\frac{\pi}{4}$

Exercice 12 :

On considère la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}(n+1)\,x^n$

1. *Trouver le rayon de convergence de la série*

   Sans difficultés, bien entendu, le rayon de convergence de cette série est 1 ; il suffit d'utiliser le critère de D'Alembert *(A faire seul)*

2. *Trouver la série primitive de* $\sum_{n\geqslant 0}(n+1)\,x^n$ *et en donner la somme*

 ▷ Clairement, la série primitive est donnée par $\sum_{n\geqslant 0}x^{n+1}$ qui a, elle aussi, pour rayon de convergence 1

 ▷ Nous avons, pour $|x|<1$, $\sum_{n\geqslant 0}x^{n+1}=x\sum_{n\geqslant 0}x^n=\frac{x}{1-x}$

3. *En déduire la somme de* $\sum_{n\geqslant 0}(n+1)\,x^n$

 $S(x)=\sum_{n\geqslant 0}(n+1)\,x^n$ est donc la dérivée de $\frac{x}{1-x}$, et la dérivée de $\frac{x}{1-x}$ est donnée par $\frac{1}{(1-x)^2}$

 Donc, pour $|x|<1$, $S(x)=\frac{1}{(1-x)^2}$

4. *Trouver la somme de la série* $1+\frac{2}{2}+\frac{3}{4}+\frac{4}{8}+\frac{5}{16}+\frac{6}{32}+\cdots$

 Il suffit de remarquer que cette somme est :

$$1+\frac{2}{2}+\frac{3}{4}+\frac{4}{8}+\frac{5}{16}+\frac{6}{32}+\cdots+=\sum_{n\geqslant 0}(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^n=S\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2}=4$$

Exercice 13 :

Développer en série entière la fonction $f(x)=\arcsin x$ *en précisant le rayon de convergence.*

- ⋆ La dérivée de $f(x)=\arcsin x$ est $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- ⋆ Pour $|x|<1$, nous avons $\frac{1}{\sqrt{1+x}}=\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n\frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}x^n$ et donc

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+(-x^2)}}=\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n\frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}\left(-x^2\right)^n=\sum_{n\geqslant 0}\frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}x^{2n}$$

- ⋆ D'où, bien entendu, $\arcsin x=\sum_{n\geqslant 0}\frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}\,(2n+1)}x^{2n+1}$

Le rayon de convergence de la série est donc $\rho=1$

Exercice 14 :

Développer en série entière, au voisinage du 0*, les fonctions suivantes*

1. $\sin\left(x^2\right)$

 ⋆ Rappelons le développement en série entière de $\sin u$:

$$\sin u=\sum_{p\geqslant 0}\frac{(-1)^p}{(2p+1)!}u^{2p+1}$$

 ⋆ Il suffit, maintenant, de remplacer u par x^2 et nous obtenons :

$$\sin x^2=\sum_{p\geqslant 0}\frac{(-1)^p}{(2p+1)!}\left(x^2\right)^{2p+1}=\sum_{p\geqslant 0}\frac{(-1)^p}{(2p+1)!}x^{4p+2}$$

 Le rayon de convergence de cette série est $+\infty$

2. $\cos 3x$

   Rien de nouveau !! $\cos u = \sum_{p \geqslant 0} \frac{(-1)^p}{(2p)!} u^{2p}$ et donc :

$$\cos 3x = \sum_{p \geqslant 0} \frac{(-1)^p}{(2p)!} (3x)^{2p} = \sum_{p \geqslant 0} \frac{(-9)^p}{(2p)!} x^{2p}$$

   Le rayon de convergence de cette série est $+\infty$

3. $\ln\left(1+x^2\right)$

   Voici une question un peu plus sexie. Nous proposons 2 méthodes *(en fait, très voisines)*

   → Première méthode :
   On connait déjà le développement en série entière de $\ln(1+u)$:

$$\ln(1+u) = \sum_{n \geqslant 0} \frac{(-1)^n u^{n+1}}{n+1}$$

   Et donc, en remplaçant u par x^2, nous obtenons :

$$\ln\left(1+x^2\right) = \sum_{n \geqslant 0} \frac{(-1)^n \left(x^2\right)^{n+1}}{n+1} = \sum_{n \geqslant 0} \frac{(-1)^n x^{2n+2}}{n+1}$$

   → Seconde méthode :
   Utilisons, maintenant, la dérivée de $\ln\left(1+x^2\right)$
   $\ln'\left(1+x^2\right) = \frac{2x}{1+x^2}$.
   Le développement en série entière de $\frac{1}{1+x^2}$ est donné par :

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n \geqslant 0} (-1)^n x^{2n}$$

   Et donc celui de $\frac{2x}{1+x^2}$ est $\frac{2x}{1+x^2} = \sum_{n \geqslant 0} 2(-1)^n x^{2n+1}$, d'où, en passant à la primitive :

$$\ln\left(1+x^2\right) = \sum_{n \geqslant 0} 2(-1)^n \frac{x^{2n+2}}{2n+2} = \sum_{n \geqslant 0} (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{n+1}$$

   Nous remarquons que nous arrivons au même résultat !! *(Ouf !!)*
   Le rayon de convergence de cette série est 1

4. $\cos x e^x$

   Cette fois ci, c'est bien différent !!

   ⋆ Nous commençons par écrire $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$, de telle sorte que :

$$\cos x e^x = e^x \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right) = \frac{e^{(1+i)x} + e^{(1-i)x}}{2}$$

   ⋆ D'une part :

$$e^{(1+i)x} = \sum_{n \geqslant 0} \frac{(1+i)^n x^n}{n!}$$

   Et d'autre part :

$$e^{(1-i)x} = \sum_{n \geqslant 0} \frac{(1-i)^n x^n}{n!}$$

De telle sorte que le développement en série entière de $\cos xe^x$ devient :

$$\cos xe^x = \frac{1}{2}\left(\sum_{n\geqslant 0}\frac{(1+i)^n x^n}{n!} + \sum_{n\geqslant 0}\frac{(1-i)^n x^n}{n!}\right) = \frac{1}{2}\sum_{n\geqslant 0}\left[(1+i)^n + (1-i)^n\right]\frac{x^n}{n!}$$

- ⋆ Maintenant, il faut évaluer $(1+i)^n + (1-i)^n$
  - ▷ En utilisant la forme trigonométique de $1+i$, nous avons $1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ et donc

$$(1+i)^n = \left(\sqrt{2}\right)^n e^{\frac{in\pi}{4}} = 2^{\frac{n}{2}}e^{\frac{in\pi}{4}}$$

  - ▷ De la même manière, nous avons $(1-i)^n = 2^{\frac{n}{2}}e^{\frac{-in\pi}{4}}$

  De telle sorte que $(1+i)^n + (1-i)^n = 2^{\frac{n}{2}}\left(e^{\frac{in\pi}{4}} + e^{\frac{-in\pi}{4}}\right) = 2\times 2^{\frac{n}{2}}\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$

D'où nous avons $\frac{1}{2}\sum_{n\geqslant 0}\left[(1+i)^n + (1-i)^n\right]\frac{x^n}{n!} = \frac{1}{2}\sum_{n\geqslant 0} 2\times 2^{\frac{n}{2}}\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)\frac{x^n}{n!}$, et donc :

$$\cos xe^x = \sum_{n\geqslant 0} 2^{\frac{n}{2}}\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)\frac{x^n}{n!}$$

Le rayon de convergence de cette série est $+\infty$ *Remarque :Pour résoudre cette question, nous sommes passés par l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$, pour revenir à l'ensemble des nombres réels, puisque nous avions affaire à une fonction à valeurs réelles*

5. $\cos(x+1)$

En utilisant les formules d'addition, nous avons $\cos(x+1) = \cos x\cos 1 - \sin x\sin 1$
Et maintenant, en prenant les classiques développement en série de $\cos x$ et $\sin x$, nous avons :

$$\cos 1\cos x = \sum_{p\geqslant 0}\frac{(-1)^p\cos 1}{(2p)!}x^{2p} \text{ et } \sin x\sin 1 = \sum_{p\geqslant 0}\frac{(-1)^p\sin 1}{(2p+1)!}x^{2p+1}$$

Et en sommant, nous obtenons :

$$\cos(x+1) = \sum_{p\geqslant 0}\frac{(-1)^p\cos 1}{(2p)!}x^{2p} - \sum_{p\geqslant 0}\frac{(-1)^p\sin 1}{(2p+1)!}x^{2p+1}$$

De telle sorte que nous pourrions écrire $\cos(x+1) = \sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ où

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n\cos 1}{(2n)!} \text{ et } a_{2n+1} = \frac{(-1)^{n+1}\sin 1}{(2n+1)!}$$

Le rayon de convergence de cette série est $+\infty$

6. $\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

Remarquons tout d'abord que cette fonction n'est définie que pour $\frac{1+x}{1-x} > 0$, c'est à dire $|x| < 1$.
Nous allons donc tout d'abord simplifier cette fonction, pour $|x| < 1$

$$\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \frac{1}{2}\left[\ln(1+x) - \ln(1-x)\right]$$

- ⋆ Nous connaissons le développement en série entière de $\ln(1-x)$. Nous avons :

$$\ln(1-x) = -\sum_{n\geqslant 0}\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$\star$ Et donc $\ln(1+x) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}$

D'où, pour $|x| < 1$:

$$\ln(1+x) - \ln(1-x) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} + \sum_{n\geqslant 0} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n + 1}{n+1} x^{n+1}$$

Remarquons que si n est impair, alors $(-1)^n + 1 = 0$ et que si n est pair, alors $(-1)^n + 1 = 2$, de telle sorte que

$$\ln(1+x) - \ln(1-x) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{2}{2n+1} x^{2n+1}$$

Et donc

$$\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Le rayon de convergence de cette série est 1

Exercice 15 :

Développer en série entière, au voisinage du 0, les fonctions suivantes :

1. $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)(x-2)}$

   Nous allons d'abord décomposer f en éléments simples. Nous avons donc :

   $$\frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{1-x}$$

   $\diamondsuit$ Tout d'abord, nous avons, et pour $|x| < 1$, $\dfrac{1}{1-x} = \sum_{n\geqslant 0} x^n$

   $\diamondsuit$ Ensuite : $\dfrac{1}{x-2} = -\dfrac{1}{2-x} = \dfrac{-1}{2} \times \dfrac{1}{1-\frac{x}{2}}$

   Ainsi, pour $\left|\dfrac{x}{2}\right| < 1 \iff |x| < 2$, nous avons :

   $$\frac{1}{1-\frac{x}{2}} = \sum_{n\geqslant 0} \left(\frac{x}{2}\right)^n = \sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{2^n}$$

   Et donc $\dfrac{1}{x-2} = -\sum_{n\geqslant 0} \dfrac{x^n}{2^{n+1}}$

   D'où, pour $|x| < 1$, nous avons :

   $$f(x) = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{1-x} = \sum_{n\geqslant 0} x^n - \sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{2^{n+1}} = \sum_{n\geqslant 0} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) x^n$$

   Le rayon de convergence de cette série est donc 1

2. $g(x) = \ln\left(x^2 - 5x + 6\right)$

   De manière claire et facile, nous avons $\ln\left(x^2 - 5x + 6\right) = \ln[(3-x)(2-x)] = \ln(3-x) + \ln(2-x)$.

   Remarquons que cette fonction f n'est définie que pour $x > 3$ ou $x < 2$ et que l'égalité $\ln\left(x^2 - 5x + 6\right) = \ln(3-x) + \ln(2-x)$ n'est correcte que si $x < 2$

   $\diamondsuit$ En dérivant $\ln(3-x)$, nous obtenons $\ln'(3-x) = \dfrac{-1}{3-x}$.

Comme tout à l'heure, nous avons $\dfrac{1}{3-x}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{1-\frac{x}{3}}$ et donc, pour $\left|\dfrac{x}{3}\right|<1 \Longleftrightarrow |x|<3$, nous avons :

$$\frac{1}{1-\frac{x}{3}}=\sum_{n\geqslant 0}\frac{x^n}{3^n}$$

Et donc

$$\frac{-1}{3-x}=\frac{-1}{3}\times\sum_{n\geqslant 0}\frac{x^n}{3^n}=-\sum_{n\geqslant 0}\frac{x^n}{3^{n+1}}$$

D'où $\ln(3-x)=-\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{x^{n+1}}{3^{n+1}(n+1)}+\ln 3$

$\diamondsuit$ De même, en dérivant $\ln(2-x)$, nous obtenons $\ln'(3-x)=\dfrac{-1}{2-x}$.

Comme tout à l'heure, nous avons $\dfrac{1}{2-x}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{1-\frac{x}{2}}$ et donc, pour $\left|\dfrac{x}{2}\right|<1 \Longleftrightarrow |x|<2$, nous avons :

$$\frac{1}{1-\frac{x}{2}}=\sum_{n\geqslant 0}\frac{x^n}{2^n}$$

Et donc

$$\frac{-1}{2-x}=\frac{-1}{2}\times\sum_{n\geqslant 0}\frac{x^n}{2^n}=-\sum_{n\geqslant 0}\frac{x^n}{2^{n+1}}$$

D'où $\ln(2-x)=-\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{x^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)}+\ln 2$

Ainsi, pour $|x|<2$, nous avons :

$$\begin{aligned}\ln\left(x^2-5x+6\right) &= -\sum_{n\geqslant 0}\frac{x^{n+1}}{3^{n+1}(n+1)}+\ln 3-\sum_{n\geqslant 0}\frac{x^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)}+\ln 2\\ &= \ln 6-\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{1}{3^{n+1}}+\frac{1}{2^{n+1}}\right)\frac{x^{n+1}}{n+1}\\ &= \ln 6-\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{1}{3^{n}}+\frac{1}{2^{n}}\right)\frac{x^{n}}{n}\end{aligned}$$

3. $h(x)=\displaystyle\int_0^x\cos t^2\,\mathrm{d}t$

Assez simple, au fond ! h est la primitive de $\cos x^2$ qui s'annule en $x=0$

Nous avons donc $h'(x)=\cos x^2$

En reprenant le développement en série entière de $\cos u$, nous avons : $\cos u=\displaystyle\sum_{p\geqslant 0}\frac{(-1)^p}{(2p)!}u^{2p}$ d'où

$$\cos x^2=\sum_{p\geqslant 0}\frac{(-1)^p}{(2p)!}\left(x^2\right)^{2p}=\sum_{p\geqslant 0}\frac{(-1)^p}{(2p)!}x^{4p}$$

Et donc, en intégrant :

$$h(x)=\sum_{p\geqslant 0}\frac{(-1)^p}{(2p)!\,(4p+1)}x^{4p+1}$$

Exercice 16 :

Déterminer, en précisant leur rayon de convergence, les solutions développables en série entière de l'équation différentielle $xy''+(x-2)\,y'-2y=0$

Supposons qu'il existe une solution f de l'équation différentielle proposée, non identiquement nulle, et développable en série entière sur un intervalle $]-\rho;\rho[$ où ρ est le rayon de convergence à déterminer.

Supposons donc que nous ayions $f(x) = \sum_{n \geqslant 0} a_n x^n$

Alors :

- $f'(x) = \sum_{n \geqslant 0} n a_n x^{n-1}$ et $x f'(x) = \sum_{n \geqslant 0} n a_n x^n = \sum_{n \geqslant 1} n a_n x^n$.

  D'autre part, $-2f'(x) = \sum_{n \geqslant 0} -2 n a_n x^{n-1} = \sum_{n \geqslant 1} -2 n a_n x^{n-1} = \sum_{n \geqslant 0} -2(n+1) a_{n+1} x^n$ et donc

$$(x-2) f'(x) = -2a_1 + \sum_{n \geqslant 1} [n a_n - 2(n+1) a_{n+1}] x^n$$

- Maintenant, $f''(x) = \sum_{n \geqslant 0} n(n-1) a_n x^{n-2}$ et $x f''(x) = \sum_{n \geqslant 0} n(n-1) a_n x^{n-1} = \sum_{n \geqslant 2} n(n-1) a_n x^{n-1}$.

  Nous avons donc $x f''(x) = \sum_{n \geqslant 1} n(n+1) a_{n+1} x^n$.

Et donc f est solution de l'équation différentielle $xy'' + (x-2) y' - 2y = 0$ si et seulement si :

$$\sum_{n \geqslant 1} n(n+1) a_{n+1} x^n - 2a_1 + \sum_{n \geqslant 1} [n a_n - 2(n+1) a_{n+1}] x^n - 2 \sum_{n \geqslant 0} a_n x^n = 0$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$(-2a_1 - 2a_0) + \sum_{n \geqslant 1} (n(n+1) a_{n+1} + [n a_n - 2(n+1) a_{n+1}] - 2a_n) x^n = 0$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$(-2a_1 - 2a_0) + \sum_{n \geqslant 1} (n-2) [(n+1) a_{n+1} + a_n] x^n = 0$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$-2(a_1 + a_0) - (2a_2 + a_1) x + \sum_{n \geqslant 3} (n-2) [(n+1) a_{n+1} + a_n] x^n = 0$$

De l'unicité du développement en série entière, nous avons :

$$\left\{ \begin{array}{rl} a_0 + a_1 = & 0 \\ 2a_2 + a_1 = & 0 \\ (n-2)[(n+1) a_{n+1} + a_n] = & 0 \text{ pour } n \geqslant 3 \end{array} \right.$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\left\{ \begin{array}{rl} a_0 + a_1 = & 0 \\ 2a_2 + a_1 = & 0 \\ (n+1) a_{n+1} + a_n = & 0 \text{ pour } n \geqslant 3 \end{array} \right.$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\left\{ \begin{array}{rl} a_0 + a_1 = & 0 \\ 2a_2 + a_1 = & 0 \\ a_{n+1} = & \dfrac{-a_n}{n+1} \text{ pour } n \geqslant 3 \end{array} \right.$$

- Des égalités $a_0 + a_1 = 0$ et $2a_2 + a_1 = 0$, nous tirons $a_1 = -a_0$ et $a_2 = \frac{-a_1}{2} = \frac{a_0}{2}$, d'où nous tirons une première écriture de f :

$$f(x) = a_0 \left(1 - x + \frac{x^2}{2}\right) + \sum_{n \geqslant 3} a_n x^n$$

- Il reste maintenant à calculer a_n pour $n \geqslant 3$ De la dernière identité $a_{n+1} = \frac{-a_n}{n+1}$ vraie pour

$n \geqslant 3$, nous tirons :

$$\begin{aligned} a_4 &= \frac{-a_3}{4} \\ a_5 &= \frac{-a_4}{5} \\ a_6 &= \frac{-a_5}{6} \\ \vdots &\ \vdots \\ a_{k+1} &= \frac{-a_k}{k+1} \\ a_{k+2} &= \frac{-a_{k+1}}{k+2} \\ \vdots &\ \vdots \\ a_{n-1} &= \frac{-a_{n-2}}{n-1} \\ a_n &= \frac{-a_{n-1}}{n} \end{aligned}$$

En multipliant termes à termes, nous obtenons :

$$a_4 \times a_5 \times a_6 \times \cdots \times a_{n-1} \times a_n = (-1)^{n-3} \times a_3 \times a_4 \times a_5 \times \cdots \times a_{n-2} \times a_{n-1} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{5} \times \cdots \times \frac{1}{n-1} \times \frac{1}{n}$$

Et donc, par simplification, nous obtenons

$$a_n = (-1)^{n-3} \times a_3 \times \frac{1}{3 \times 4 \times 5 \times \cdots \times (n-1) \times n} = (-1)^{n-3} \times a_3 \times \frac{6}{n!}$$

▷ D'où nous pouvons écrire f par :

$$f(x) = a_0 \left(1 - x + \frac{x^2}{2}\right) + 6a_3 \sum_{n \geqslant 3} \frac{(-1)^{n-3}}{n!} x^n = a_0 \left(1 - x + \frac{x^2}{2}\right) - 6a_3 \sum_{n \geqslant 3} \frac{(-1)^n}{n!} x^n$$

Il est simple de voir que $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \frac{(-1)^n}{n!} x^n = e^{-x}$ et que, donc $\displaystyle\sum_{n \geqslant 3} \frac{(-1)^n}{n!} x^n = e^{-x} - 1 + x - \frac{x^2}{2}$

Ainsi, $f(x) = a_0 \left(1 - x + \frac{x^2}{2}\right) - 6a_3 \left(e^{-x} - \left(1 - x + \frac{x^2}{2}\right)\right) = (a_0 + 6a_3) \left(1 - x + \frac{x^2}{2}\right) - 6a_3 e^{-x}$

Et la solution générale de l'équation différentielle $xy'' + (x-2)\, y' - 2y = 0$ est donc :

$$f(x) = \lambda \left(1 - x + \frac{x^2}{2}\right) + \mu e^{-x} \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R} \text{ et } \mu \in \mathbb{R}$$

Le rayon de convergence ρ

Comme la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \frac{(-1)^n}{n!} x^n$ a pour rayon de convergence $\rho = +\infty$, la solution f est vraie sur $\mathbb{R}$ en entier

Exercice 17 :

Montrer que la fonction f définie sur $]-1;+1[$ par $f(x) = \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$ est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre. En déduire le développement en série entière de cette fonction.

1. En supposant $f(x) = \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$ solution d'une équation différentielle sur l'intervalle $]-1;+1[$, nous pouvons écrire

$$\sqrt{1-x^2} f(x) = \arcsin x$$

En calculant la dérivée, nous obtenons :

$$\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} f(x) + \sqrt{1-x^2} f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Et donc, pour $x \in \left]-1;+1\right[$, nous pouvons multiplier par $\sqrt{1-x^2}$, nous avons :

$$-xf(x) + \left(1-x^2\right) f'(x) = 1$$

f est donc solution de l'équation $\left(1-x^2\right) y' - xy = 1$

2. En supposant $f(x) = \sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ pour $x \in \left]-1;+1\right[$, nous avons :

   $\rightarrow$ $xf(x) = x\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n = \sum_{n\geqslant 0} a_n x^{n+1} = \sum_{n\geqslant 1} a_{n-1} x^n$

   $\rightarrow$ $f'(x) = \sum_{n\geqslant 0} n a_n x^{n-1} = \sum_{n\geqslant 1} n a_n x^{n-1} = \sum_{n\geqslant 0} (n+1) a_{n+1} x^n$

   $\rightarrow$ $x^2 f'(x) = \sum_{n\geqslant 0} n a_n x^{n+1} = \sum_{n\geqslant 1} n a_n x^{n+1} = \sum_{n\geqslant 2} (n-1) a_{n-1} x^n$

   D'où nous devons avoir les relations :

$$\sum_{n\geqslant 0} (n+1) a_{n+1} x^n - \sum_{n\geqslant 2} (n-1) a_{n-1} x^n - \sum_{n\geqslant 1} a_{n-1} x^n = 1$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$a_1 + 2a_2 x + \sum_{n\geqslant 2} (n+1) a_{n+1} x^n - \sum_{n\geqslant 2} (n-1) a_{n-1} x^n - a_0 x - \sum_{n\geqslant 2} a_{n-1} x^n = 1$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$a_1 + (2a_2 - a_0) x + \sum_{n\geqslant 2} \left((n+1) a_{n+1} - (n-1) a_{n-1} - a_{n-1}\right) x^n$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$a_1 + (2a_2 - a_0) x + \sum_{n\geqslant 2} \left((n+1) a_{n+1} - n a_{n-1}\right) x^n = 1$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$a_1 + \sum_{n\geqslant 1} \left((n+1) a_{n+1} - n a_{n-1}\right) x^n = 1$$

3. D'où nous tirons :

$$\begin{cases} a_1 = & 1 \\ (n+1) a_{n+1} - n a_{n-1} = & 0 \text{ pour } n \geqslant 1 \end{cases}$$

   $\rightarrow$ Sachant que $f(0) = \dfrac{\arcsin 0}{\sqrt{1-0^2}} = 0 = a_0$ et que $a_{n+1} = \dfrac{n}{n+1} a_{n-1}$, nous avons, pour les termes d'ordre pair $a_{2p} = \dfrac{2p-1}{2p} a_{2p-2}$, ce qui donne, par une récurrence simple, puisque $a_0 = 0$, que tous les termes d'ordre pair sont nuls.

   $\rightarrow$ Regardons les termes d'ordre impair. Nous avons :

$$\begin{aligned} a_3 &= \frac{2}{3} a_1 \\ a_5 &= \frac{4}{5} a_3 \\ a_7 &= \frac{6}{7} a_5 \\ &\vdots \\ a_{2n-1} &= \frac{2n-2}{2n-1} a_{2n-3} \\ a_{2n+1} &= \frac{2n}{2n+1} a_{2n-1} \end{aligned}$$

Et donc, en multipliant termes à termes, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
a_3 \times a_5 \times a_7 \times \cdots \times a_{2n-1} \times a_{2n+1} = a_1 \times a_3 \times a_5 \times \cdots \times a_{2n-1} \times \frac{2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times 2n}{3 \times 5 \times 7 \times \cdots \times (2n+1)} \\
\Longleftrightarrow \\
a_{2n+1} = \frac{\prod_{k=1}^{n} 2k}{\prod_{k=1}^{n} (2k+1)} \\
\Longleftrightarrow \\
a_{2n+1} = \frac{\left(\prod_{k=1}^{n} 2k\right)\left(\prod_{k=1}^{n} 2k\right)}{\left(\prod_{k=1}^{n} (2k+1)\right)\left(\prod_{k=1}^{n} 2k\right)} \\
\Longleftrightarrow \\
a_{2n+1} = \frac{2^n \left(\prod_{k=1}^{n} k\right)\left(2^n \prod_{k=1}^{n} k\right)}{(2n+1)!} \\
\Longleftrightarrow \\
a_{2n+1} = \frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n+1)!}
\end{aligned}$$

D'où

$$f(x) = x + \sum_{n \geqslant 1} a_{2n+1} x^{2n+1} = \sum_{n \geqslant 0} \frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

En ayant remarqué que $1 = a_1 = \dfrac{2^0 (0!)^2}{(2 \times 0 + 1)!}$

Exercice 20 :

1. *Résoudre, dans $\mathbb{C}$, les équations suivantes :*

   (a) $e^z = -2$

   Nous avons $e^z = -2 \Longleftrightarrow e^z = 2e^{i(\pi+2k\pi)} \Longleftrightarrow e^x \times e^{iy} = 2e^{i(\pi+2k\pi)}$

   Nous en déduisons $x = \ln 2$ et $y = \pi + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. L'ensemble des solutions est donc

   $$\mathcal{S} = \{z = \ln 2 + i(\pi + 2k\pi) \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\}$$

   (b) $|\cos z| = |\sin z|$

   Nous avons $|\cos z| = |\sin z| \Longleftrightarrow |\cos z|^2 = |\sin z|^2$

   En posant $z = x+iy$, nous avons $\cos z = \cos(x+iy) = \cos x \cos iy - \sin x \sin iy = \cos x \cosh y + i \sin x \sinh y$ et donc $|\cos z|^2 = \cos^2 x \cosh^2 y + \sin^2 x \sinh^2 y$.

   De la même manière *(formule d'adition et égalités)*, nous avons $|\sin z|^2 = \sin^2 x \cosh^2 y + \cos^2 x \sinh^2 y$, et donc :

   $$\begin{aligned}
   |\cos z|^2 = |\sin z|^2 &\Longleftrightarrow \cos^2 x \cosh^2 y + \sin^2 x \sinh^2 y = \sin^2 x \cosh^2 y + \cos^2 x \sinh^2 y \\
   &\Longleftrightarrow \left(\sinh^2 y - \cosh^2 y\right)\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right) = 0
   \end{aligned}$$

   Comme, pour tout $y \in \mathbb{R}$, $\sinh y \neq \cosh y$, nous avons $\left(\sinh^2 y - \cosh^2 y\right) \neq 0$ et donc :

   $$|\cos z|^2 = |\sin z|^2 \Longleftrightarrow \cos^2 x = \sin^2 x \Longleftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \text{ où } k \in \mathbb{Z}$$

   Ainsi, $|\cos z| = |\sin z| \Longleftrightarrow z = \left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}\right) + iy$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et $y \in \mathbb{R}$

2. *Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y \in \mathbb{R}$, $|\sin(x+iy)| = |\sin x + \sin(iy)|$*

   Nous avons, comme précédemment, $|\sin(x+iy)| = |\sin x + \sin(iy)| \Longleftrightarrow |\sin(x+iy)|^2 = |\sin x + \sin(iy)|^2$
   Facile, finalement.
   → Nous avons déjà démontré que $|\sin(x+iy)|^2 = \sin^2 x \cosh^2 y + \cos^2 x \sinh^2 y$.
   → D'autre part, $|\sin x + \sin(iy)|^2 = |\sin x + i\sinh y|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y$
   → En revenant à $\sin^2 x \cosh^2 y + \cos^2 x \sinh^2 y$, nous avons :

   $$\begin{aligned} \sin^2 x \cosh^2 y + \cos^2 x \sinh^2 y &= \sin^2 x\left(1+\sinh^2 y\right) + \cos^2 x \sinh^2 y \\ &= \sin^2 x + \sin^2 x \sinh^2 x + \cos^2 x \sinh^2 y \\ &= \sin^2 x + \left(\cos^2 x + \sin^2 x\right)\sinh^2 y = \sin^2 x + \sinh^2 y \end{aligned}$$

   En conclusion, nous avons bien

   $$|\sin(x+iy)|^2 = |\sin x + \sin(iy)|^2 \Longleftrightarrow |\sin(x+iy)| = |\sin x + \sin(iy)|$$

3. *Etablir les inégalités suivantes, vraies pour tout $z \in \mathbb{C}$*

   (a) $|e^z - 1| \leqslant e^{|z|} - 1 \leqslant |z|\, e^{|z|}$

   ⇒ Nous avons, tout d'abord, $|e^z - 1| = \left|\sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{n!}\right|$.

   Ensuite, $\left|\sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{n!}\right| \leqslant \sum_{n\geqslant 1} \left|\frac{z^n}{n!}\right| = \sum_{n\geqslant 1} \frac{|z|^n}{n!} = e^{|z|} - 1$

   Nous venons donc de montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|e^z - 1| \leqslant e^{|z|} - 1$

   ⇒ En second lieu, $e^{|z|} - 1 \leqslant |z|\, e^{|z|} \Longleftrightarrow e^{|z|} - 1 - |z|\, e^{|z|} \leqslant 0 \Longleftrightarrow e^{|z|}(1-|z|) - 1 \leqslant 0$
   Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = e^x(1-x) - 1$.
   La dérivée de f est, sur $\mathbb{R}^+$: $f'(x) = e^x(1-x) - e^x = -xe^x$
   Ainsi, pour tout $x \geqslant 0$ nous avons $f'(x) \leqslant 0$ et donc, f est décroissante sur $\mathbb{R}^+$, ce qui veut dire que, pour tout $x \geqslant 0$ $f(x) \leqslant f(0) = 0$
   Et donc, pour tout $x \geqslant 0$, $e^x(1-x) - 1 \leqslant 0 \Longleftrightarrow e^x - 1 \leqslant xe^x$

   ⇒ Comme, pour tout $x \geqslant 0$, nous avons $e^x - 1 \leqslant xe^x$, alors, pour tout $z \in \mathbb{C}$, nous avons l'inégalité :

   $$e^{|z|} - 1 \leqslant |z|\, e^{|z|}$$

   En conclusion, nous avons la double inégalité, vraie pour tout $z \in \mathbb{C}$: $|e^z - 1| \leqslant e^{|z|} - 1 \leqslant |z|\, e^{|z|}$
   Ce que nous voulions

   (b) $|\cos z| \leqslant \cosh |z|$

   Nous avons, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|\cos z| = \left|\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}\right|$.
   Par l'inégalité triangulaire des modules, nous avons :

   $$|\cos z| = \left|\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}\right| \leqslant \sum_{n\geqslant 0} \frac{|z|^{2n}}{(2n)!} = \cosh |z|$$

   Donc $|\cos z| \leqslant \cosh |z|$
   La démonstration est absolument identique pour démontrer que $|\sin z| = |\sinh z|$

Exercice 21 :

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière. On suppose qu'elle diverge pour $z = 3+4i$ et qu'elle converge pour $z = 5i$. Quel est son rayon de convergence ?

Soit ρ le rayon de convergence de la série.
- Si la série diverge pour $z = 3+4i$, alors $\rho \leqslant |3+4i| = \sqrt{3^2+4^2} = 5$
- Si, au contraire, la série converge pour $z = 5i$, alors $\rho \geqslant |5i| = 5$

Donc, $\rho = 5$

Exercice 22 :

Démontrer que si une série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge absolument pour un $z_0 \in \mathbb{C}$, alors elle converge absolument pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$

Cet exercice ne pose pas de difficulté.
Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$. Alors :

$$|a_n z^n| = |a_n| \, |z|^n < |a_n| \, |z_0|^n$$

Par hypothèse, la série numérique $\sum_{n\geqslant 0} |a_n| \, |z_0|^n$ converge, et donc la série $\sum_{n\geqslant 0} |a_n z^n|$ converge.
Ce qui veut dire que la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge absolument pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$

Exercice 23 :

Donner le rayon de convergence des séries :

1. $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{z^n}{1+2+\cdots+n}$

   Identité connue : $1+2+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ de telle sorte que nous pouvons écrire :

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{1+2+\cdots+n} = \sum_{n\geqslant 1} \frac{2}{n(n+1)} z^n$$

   Et le rayon de convergence est donc 1

2. $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{n!}{n^n} z^n$

   Appelons $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$; alors :

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{(n+1)}} \times \frac{n^n}{n!} = \frac{(n+1) \times n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

   Nous avons $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$.

   En $+\infty$, $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\simeq} \dfrac{1}{n}$, et donc $\lim_{n\to+\infty} n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = 1$ et donc $\lim_{n\to+\infty} e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e$, et nous en déduisons donc que $\lim_{n\to+\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \dfrac{1}{e}$ et le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{n!}{n^n} z^n$ est donc $\rho = e$

3. $\sum_{n\geqslant 1} \cosh n z^n$

   ⋆ Rappelons que $\cosh n = \dfrac{e^n + e^{-n}}{2}$ et que donc

$$\frac{\cosh(n+1)}{\cosh n} = \frac{e^{n+1} + e^{-n-1}}{e^n + e^{-n}} = \frac{e^n e + e^{-n} e}{e^n + e^{-n}} = \frac{e^n\left(e + e^{-2n-1}\right)}{e^n\left(1 + e^{-2n}\right)} = \frac{e + e^{-2n-1}}{1 + e^{-2n}}$$

   ⋆ Comme $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{e + e^{-2n-1}}{1 + e^{-2n}} = e$, le rayon de converge est $\rho = \dfrac{1}{e}$

- ⋆ Regardons la convergence sur le cercle de convergence.
  Si $|z| = \dfrac{1}{e}$, alors :
  $$|\cosh nz^n| = \frac{e^n + e^{-n}}{2}\,|z|^n = \frac{e^n + e^{-n}}{2e^n}$$
  Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{e^n + e^{-n}}{2e^n} = \dfrac{1}{2}$, la série numérique $\sum\limits_{n\geqslant 1} |\cosh nz^n|$ ne peut être convergente, et la série n'est donc pas convergente sur le cercle de convergence.

4. $\sum\limits_{n\geqslant 1} e^{an^2+bn+c} z^n$
   - ⋆ Nous avons
   $$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{e^{a(n+1)^2+b(n+1)+c}}{e^{an^2+bn+c}} = \frac{e^{an^2}e^{2an}e^a e^{bn}e^b e^a}{e^{an^2}e^{bn}e^c} = e^{2an+a+b} = e^{a(2n+1)+b}$$
   - ⋆ Si $a > 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{a(2n+1)+b} = +\infty$ et le rayon de convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} e^{an^2+bn+c} z^n$ est $\rho = 0$
   - ⋆ Si $a = 0$, alors $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = e^b$ et le rayon de convergence de la série est alors $\rho = \dfrac{1}{e^b} = e^{-b}$
     Que se passe-t-il sur le cercle de convergence ?
     Si $|z| = e^{-b}$, alors $\left|e^{an^2+bn+c}z^n\right| = \left|e^{bn+c}\right| |z|^n = e^{bn}e^c e^{-bn} = e^c$.
     La série numérique $\sum\limits_{n\geqslant 1} \left|e^{bn+c}z^n\right|$ diverge alors grossièrement et la série ne converge pas sur le cercle de convergence.
   - ⋆ Si $a < 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{a(2n+1)+b} = 0$ et le rayon de convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} e^{an^2+bn+c} z^n$ est $\rho = +\infty$, c'est à dire que la série converge pour tout $z \in \mathbb{C}$

Exercice 24 :

Donner le rayon de convergence des séries suivantes :

1. $\sum\limits_{n\geqslant 1} \cos\left(\dfrac{1}{n}\right) z^n$

   Question qui ne pose pas de difficulté puisque le terme *cos* $\left(\dfrac{1}{n}\right)$ est borné. Le rayon de convergence de cette série est donc de 1
2. $\sum\limits_{n\geqslant 1} \left[\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n\right]^n z^n$
   Au vu de l'expression du coefficient, nous utilisons la règle de Cauchy.
   Si $a_n = \left[\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n\right]^n$, alors $(a_n)^{\frac{1}{n}} = \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n$. Nous devons donc rechercher $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n$.
   $$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$$
   Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) = 1$, nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n = e$ et le rayon de convergence de cette série est $\dfrac{1}{e}$

3. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} i^n z^n$

Puisque $|i^n| = 1$, le coefficient est borné et le rayon de convergence de cette série est bien 1
Il est possible d'en connaître la somme :

En effet, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} i^n z^n = \sum_{n\geqslant 0} (iz)^n = \frac{1}{1-iz}$

Facile ! !

4. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} (1+ni)\, z^n$

En utilisant la règle de D'Alembert, nous avons $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \dfrac{\sqrt{1+(n+1)^2}}{\sqrt{1+n^2}}$ et donc

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{1+(n+1)^2}}{\sqrt{1+n^2}} = 1$$

Et donc le rayon de convergence de cette série est donc 1.
Donc, pour $|z|<1$, nous avons : $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}(1+ni)\,z^n = \sum_{n\geqslant 2} z^n + \sum_{n\geqslant 2} niz^n$

Nous regardons plus précisément :

▷ $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} z^n = \sum_{n\geqslant 0} z^n - 1 - z = \frac{1}{1-z} - (1+z) = \frac{z^2}{1-z}$

▷ $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} niz^n = iz\sum_{n\geqslant 2} nz^{n-1} = iz\left(\sum_{n\geqslant 1} nz^{n-1} - 1\right) = iz\left(\frac{1}{(1-z)^2} - 1\right) = iz\frac{2z-z^2}{(1-z)^2}$

D'où, pour $|z|<1$, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}(1+ni)\,z^n = \frac{z^2}{1-z} + iz\frac{2z-z^2}{(1-z)^2} = \frac{-(1+i)\,z^3 + (1+2i)\,z^2}{(1-z)^2}$

5. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{2^n}{n^2} z^n$

Par la règle de D'Alembert, $\dfrac{2^{n+1}}{(n+1)^2} \times \dfrac{n^2}{2^n} = \dfrac{2n^2}{(n+1)^2}$, et donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{2n^2}{(n+1)^2} = 2$ et le rayon de convergence de cette série est $\dfrac{1}{2}$

6. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^3}{3^n} z^n$

On résoud juste comme au dessus : $\dfrac{(n+1)^3}{3^{n+1}} \times \dfrac{3^n}{n^3} = \dfrac{(n+1)^3}{3n^3}$

Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)^3}{3n^3} = \frac{1}{3}$ et donc, le rayon de convergence de la série est 3

7. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln n}{\sqrt{n}+2} z^n$

Toujours D'Alembert

$$\frac{\ln(n+1)}{\sqrt{n+1}+2} \times \frac{\sqrt{n}+2}{\ln n} = \frac{\ln(n+1)}{\ln n} \times \frac{\sqrt{n}+2}{\sqrt{n+1}+2}$$

▷ $\dfrac{\ln(n+1)}{\ln n} = \dfrac{\ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)}{\ln n} = \dfrac{\ln n + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n} = 1 + \dfrac{1}{\ln n} \times \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

Et donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(n+1)}{\ln n} = 1$

▷ D'autre part, $\dfrac{\sqrt{n}+2}{\sqrt{n+1}+2} \underset{+\infty}{\simeq} \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = 1$, nous avons aussi $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{n}+2}{\sqrt{n+1}+2} = 1$

Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(n+1)}{\sqrt{n+1}+2} \times \dfrac{\sqrt{n}+2}{\ln n} = 1$ et donc le rayon de convergence de cette série est 1

8. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{n+1}{(-3)^n} z^n$

Toujours Monsieur Jean Le Rond D'Alembert....

$$\left|\frac{n+2}{(-3)^{n+1}} \times \frac{(-3)^n}{n+1}\right| = \frac{n+2}{3(n+1)}$$

Et, surprise, le rayon de convergence de cette série est 3

9. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \left(\int_0^1 t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t\right) z^n$

Pour nous simplifier la vie, nous appelons $a_n = \displaystyle\int_0^1 t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

Comme, pour $t \in [0;+1]$, nous avons $\dfrac{1}{e} \leqslant e^t \leqslant 1$, alors :

$$\frac{1}{e}\int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t \Longleftrightarrow \frac{1}{e(n+1)} \leqslant a_n \leqslant \frac{1}{n+1}$$

La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \left(\int_0^1 t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t\right) z^n$ a même rayon de convergence que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{n+1}$ c'est à dire 1

Le rayon de convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \left(\int_0^1 t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t\right) z^n$ est donc 1

Exercice 25 :

Quel est le rayon de convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k\times k!}{n!}\right) z^n$ *?*

Ici, le coefficient de la série est $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k\times k!}{n!}$ et c'est à lui que nous nous intéressons ! !

Nous appelons ρ le rayon de convergence de la série

▷ Tout d'abord, $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k\times k!}{n!} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k\times k!}{n!} + \frac{n\times n!}{n!} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k\times k!}{n!} + n.$

Nous avons donc $a_n > n$. Le rayon de convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} nz^n$ est 1, et donc, d'après 8.2.1 nous avons $\rho \leqslant 1$

▷ Maintenant, pour $1 \leqslant k \leqslant n-1$, nous avons $\dfrac{k\times k!}{n!} \leqslant 1$

En effet,

$$\frac{k\times k!}{n!} = \frac{k}{(k+1)(k+2)\cdots(k+(n-k))} = \frac{k}{k+1} \times \frac{1}{(k+2)\cdots(k+(n-k))} \leqslant \frac{k}{k+1} \leqslant 1$$

Ainsi, $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k\times k!}{n!} + n \leqslant n-1+n < 2n$

Le rayon de convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} 2nz^n$ est aussi 1, et donc, d'après 8.2.1 nous avons $\rho \geqslant 1$

Donc $\rho = 1$

Exercice 26 :

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer le rayon de convergence ρ de la série $\sum_{n\geqslant 0} \arctan n^{\alpha} x^n$, pour $x \in \mathbb{R}$. Etudier cette série lorsque $x=\rho$ ou $x=-\rho$

1. Etude du rayon de convergence
   $\Rightarrow$ Si $\alpha > 0$.
   Alors $0 \leqslant \arctan n^{\alpha} < \dfrac{\pi}{2}$
   Le coefficient de la série est borné et donc, d'après le théorème 8.2.2 le rayon de convergence est $\rho = 1$
   $\Rightarrow$ Si $\alpha = 0$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $\arctan n^0 = \arctan 1 = \dfrac{\pi}{4}$ et donc le rayon de convergence est $\rho = 1$
   $\Rightarrow$ Si $\alpha < 0$ alors $\lim_{n\to+\infty} n^{\alpha} = 0$ et donc $\arctan n^{\alpha} \underset{+\infty}{\simeq} n^{\alpha}$. La série $\sum_{n\geqslant 0} \arctan n^{\alpha} x^n$ admet alors pour rayon de convergence $\rho = 1$
2. Etude si $x = 1$ ou $x = -1$
   $\Rightarrow$ Si $\alpha \geqslant 0$, alors la série devient
   - $\star$ Si $x = 1$, $\sum_{n\geqslant 0} \arctan n^{\alpha}$ qui diverge puisque le terme général de la série ne tend pas vers 0
   - $\star$ Si $x = -1$, $\sum_{n\geqslant 0} \arctan n^{\alpha} (-1)^n$ qui diverge puisque le terme général de la série ne tend pas vers 0
   - $\star$ Et si $\alpha = 0$, que ce soit pour $x = 1$ ou $x = -1$, le problème est le même ; il y a divergence de la série

   $\Rightarrow$ Si $\alpha < 0$ et $x = 1$, alors la série devient $\sum_{n\geqslant 0} \arctan n^{\alpha} = \sum_{n\geqslant 0} \arctan \dfrac{1}{n^{-\alpha}}$.
   Comme $\arctan \dfrac{1}{n^{-\alpha}} \underset{+\infty}{\simeq} \dfrac{1}{n^{-\alpha}}$, la série converge si et seulement si $-\alpha > 1$, c'est à dire $\alpha < -1$; elle diverge donc si $-1 \leqslant \alpha < 0$
   $\Rightarrow$ Si $\alpha < 0$ et $x = -1$, alors la série devient $\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n \arctan n^{\alpha}$. C'est une série alternée, qui vérifie le critère de convergence des séries alternées et qui est donc convergente.

Exercice 27 :

Déterminer le rayon de convergence ρ de la série $\sum_{n\geqslant 0} v_n z^n$ où $v_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{4k^2-1}$.

Il faut remarquer que v_n est la somme partielle d'ordre n de la série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{4n^2-1}$.

Le terme général de catte série est $\dfrac{1}{4n^2-1}$ et nous avons $\dfrac{1}{4n^2-1} \underset{+\infty}{\simeq} \dfrac{1}{4n^2}$ et la série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{4n^2}$ est une série de Riemann convergente.
Si $L = \sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{4n^2-1}$, nous avons, pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\dfrac{1}{3} \leqslant v_n < L$.
Les coefficients de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} v_n z^n$ sont donc bornés et le rayon de convergence de la série est donc 1
Si $|z| = 1$, alors $|v_n z^n| = v_n$ et comme $\lim_{n\to+\infty} v_n \neq 0$, la série $\sum_{n\geqslant 0} v_n z^n$ est divergente si $|z| = 1$

Exercice 28 :

Pour tout entier naturel non nul $n \in \mathbb{N}^*$; on désigne par a_n le nombre de diviseurs de n. Déterminer le rayon *de convergence ρ de la série entière $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} a_n z^n$*

⇒ Première chose, nous appelons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, D_n l'ensemble des diviseurs de n ; donc $a_n = \text{Card } D_n$. Très clairement, $2 \leqslant a_n < n$

⇒ La série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} 2z^n$ a pour rayon de convergence 1. D'après le théorème 8.2.1, nous avons $\rho \leqslant 1$

⇒ Recherchons le rayon de convergence de la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} nz^n$.

En utilisant la règle de D'Alembert, nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n+1}{n} = 1$ et donc, le rayon de convergence de la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} nz^n$ est donc 1

Tojours d'après le théorème 8.2.1, comme $a_n < n$, nous avons $\rho \geqslant 1$

Et donc $\rho = 1$

Exercice 29 :

1. *On note a_n la n-ième décimale du développement décimal de $\sqrt{3}$. Quel est le rayon de convergence de la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} a_n z^n$?*

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $0 \leqslant a_n \leqslant 9$; la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant bornée, le rayon de convergence de cette série est 1. Si $z = 1$, la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} a_n$ est divergente.

2. *Déterminer le rayon de convergence ρ de la série entière $\sum\limits_{\substack{n\in\mathbb{N}^* \\ n \text{ premier}}} z^n$*

   C'est, en fait une série du type $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ avec $a_n = 0$ si n est composé et $a_n = 1$ si n est premier.

   La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc bornée et le rayon de convergence est donc $\rho = 1$

   Pour aller plus loin

   Si $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ est une bijection croissante, quel est le rayon de convergence de la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} z^{\varphi(n)}$?

   De la même manière, c'est une série du type $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ où $a_n = 1$ s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = \varphi(p)$ et 0 sinon.

   Comme ci-dessus, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et le rayon de convergence est donc $\rho = 1$

Exercice 30 :

On considère les séries $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ de rayon de convergence ρ_A et $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} b_n z^n$ de rayon de convergence ρ_B. Nous supposons $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = l$. Comparer ρ_A et ρ_B

Nous allons traiter 2 cas ; le premier cas où $l \neq 0$ et le second où $l = 0$.

→ **Supposons $l \neq 0$**

⋆ Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $n \geqslant N$, alors $\left|\dfrac{a_n}{b_n} - l\right| \leqslant 1$.

En utilisant l'inégalité triangulaire, nous avons $\left|\dfrac{a_n}{b_n}\right| - |l| \leqslant \left|\dfrac{a_n}{b_n} - l\right| \leqslant 1$, c'est à dire, si $n \geqslant N$, nous avons : $\left|\dfrac{a_n}{b_n}\right| - |l| \leqslant 1$ et donc $\left|\dfrac{a_n}{b_n}\right| \leqslant |l| + 1$. Or :

$$\left|\frac{a_n}{b_n}\right| \leqslant |l| + 1 \Longleftrightarrow a_n \in O(b_n)$$

Et donc, d'après 8.2.1 $\rho_A \geqslant \rho_B$

⋆ Comme $l \neq 0$, de $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = l$, nous pouvons écrire $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{b_n}{a_n} = \dfrac{1}{l}$

Par le même raisonnement que précédemment, nous pouvons écrire que $b_n \in O(a_n)$ et donc que $\rho_B \geqslant \rho_A$

Ainsi, si $l \neq 0$, alors $\rho_A = \rho_B$

→ **On ne peut rien affirmer si $l = 0$**

Prenons par exemple la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ où, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = n$; dans ce cas le rayon de convergence est 1.

Et si $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} b_n z^n$ avec $b_n = n!$, le rayon de convergence est 0.

Les 2 rayons de convergence sont différents et nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n!} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{(n-1)!} 0$

Exercice 31 :

Donner le rayon de convergence et la somme de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} (2^n+1) z^n$

— Le rayon de convergence est une question classique. On utilise donc d'Alembert :

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{2^{n+1}+1}{2^n+1}\right| = \frac{\left(2^{n+1}+1\right)}{2^n+1} = \frac{2^{n+1}\left(1+2^{-n-1}\right)}{2^n\left(1+2^{-n}\right)} = \frac{2\left(1+2^{-n-1}\right)}{\left(1+2^{-n}\right)}$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2\left(1+2^{-n-1}\right)}{\left(1+2^{-n}\right)} = 2$; la série converge si $|z| < \dfrac{1}{2}$.

— <u>Pour trouver la somme de cette série</u>, nous allons utiliser deux autres séries $\sum\limits_{n\geqslant 0} 2^n z^n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} z^n$

⊕ La série $\sum\limits_{n\geqslant 0} z^n$ converge pour $|z| < 1$ et a pour somme $\sum\limits_{n\geqslant 0} z^n = \dfrac{1}{1-z}$

⊕ La série $\sum\limits_{n\geqslant 0} 2^n z^n$ converge pour $|z| < \dfrac{1}{2}$ *(facile à montrer)* et a pour somme

$$\sum_{n\geqslant 0} 2^n z^n = \sum_{n\geqslant 0} (2z)^n = \frac{1}{1-2z}$$

Ainsi, pour $|z| < \dfrac{1}{2}$, nous avons $\sum\limits_{n\geqslant 0} (2^n+1) z^n = \sum\limits_{n\geqslant 0} 2^n z^n + \sum\limits_{n\geqslant 0} z^n = \dfrac{1}{1-2z} + \dfrac{1}{1-z} = \dfrac{2-3z}{(1-z)(1-2z)}$

Donc $\boxed{\sum\limits_{n\geqslant 0} (2^n+1) z^n = \dfrac{2-3z}{(1-z)(1-2z)}}$

On met en évidence ici, le fait si $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ a un rayon de convergence R_a et $\sum\limits_{n\geqslant 0} b_n z^n$ a un rayon de convergence R_b, alors si $|z| < \min(R_a, R_b)$, alors $\sum\limits_{n\geqslant 0} (a_n+b_n) z^n$ converge et $\sum\limits_{n\geqslant 0} (a_n+b_n) z^n = \sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n + \sum\limits_{n\geqslant 0} b_n z^n$

Exercice 32 :

1. *Donner le rayon de convergence de la série* $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{1}{(n+5)!} (z+5)^n$

Nous avons $\left|\dfrac{a_{n+1}(z)}{a_n(z)}\right| = \dfrac{(n+5)!}{(n+6)!} |z+5| = \dfrac{|z+5|}{n+6}$

Nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{|z+5|}{n+6}=0$; le rayon de convergence est donc infini. La série converge sur $\mathbb{C}$ en entier

2. *En admettant que, pour tout $z\in\mathbb{C}$, $\sum\limits_{n\geqslant 0}\dfrac{z^n}{n!}=e^z$, donner la somme de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}\dfrac{1}{(n+5)!}(z+5)^n$*

   Nous avons donc :

$$\begin{aligned}\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{(n+5)!}(z+5)^n &= \sum_{n\geqslant 5}\frac{1}{n!}(z+5)^{n-5}\\ &= \frac{1}{(z+5)^5}\sum_{n\geqslant 5}\frac{1}{n!}(z+5)^n\\ &= \frac{1}{(z+5)^5}\left(\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{n!}(z+5)^n-\left(1+(z+5)+\frac{(z+5)^2}{2}+\frac{(z+5)^3}{6}+\frac{(z+5)^4}{24}\right)\right)\\ &= \frac{1}{(z+5)^5}\left(e^{(z+5)}-\left(1+(z+5)+\frac{(z+5)^2}{2}+\frac{(z+5)^3}{6}+\frac{(z+5)^4}{24}\right)\right)\end{aligned}$$

Exercice 33 :

1. *Donner le développement en série entière, en précisant son rayon de convergence, de la fonction* arctan

   Pour donner le développement de $\arctan x$ en série entière, nous allons commencer par donner celui de sa dérivée.
   Nous avons $(\arctan)'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ et si $|x|<1$, alors $\dfrac{1}{1+x^2}=\sum\limits_{n\geqslant 0}(-x^2)^n=\sum\limits_{n\geqslant 0}(-1)^n x^{2n}$.

   Donc, le développement de $\arctan x$ en série entière est, pour $|x|<1$ $\arctan x=\sum\limits_{n\geqslant 0}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$

2. *En déduire la valeur de $\sum\limits_{n\geqslant 0}\left(\dfrac{-1}{3}\right)^n\times\dfrac{1}{2n+1}$*

   Remarquons que :

$$\left(\frac{-1}{3}\right)^n=\frac{(-1)^n}{3^n}=(-1)^n\left[\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\right]^n=(-1)^n\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2n}$$

   Or, $\arctan\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\pi}{6}$ et donc :

$$\frac{\pi}{6}=\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2n+1}}{2n+1}=\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n\times\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{2n+1}=\frac{1}{\sqrt{3}}\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{-1}{3}\right)^n\times\frac{1}{2n+1}$$

   D'où $\sum\limits_{n\geqslant 0}\left(\dfrac{-1}{3}\right)^n\times\dfrac{1}{2n+1}=\dfrac{\pi\sqrt{3}}{6}=\dfrac{\pi}{2\sqrt{3}}$

3. *Calculer la primitive qui s'annule en 0 de la fonction* arctan *et donner le développement en série entière de cette fonction, en précisant son rayon de convergence*

   Le calcul de la primitive de $\arctan x$ est un calcul classique vu en L_0 ; on l'obtient en faisant une intégration par parties.
   Nous avons donc $\displaystyle\int\arctan x\,\mathrm{d}x=x\arctan x-\ln\sqrt{1+x^2}$. C'est bien la primitive de $\arctan x$ qui s'annule en $x=0$
   Donc, pour $|x|<1$, $x\arctan x-\ln\sqrt{1+x^2}=\sum\limits_{n\geqslant 0}(-1)^n\dfrac{x^{2n+2}}{(2n+1)(2n+2)}$

4. *En déduire la valeur de* $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}$

Nous appelons $S(x) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n x^{2n+2}}{(2n+1)(2n+2)}$. Le rayon de convergence de cette série est 1

⊕ $S(1) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}$ est une série absolument convergente.

En effet, $\sum_{n\geqslant 0} \left| \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)} \right| = \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}$.

Comme $\frac{1}{(2n+1)(2n+2)} \underset{+\infty}{\simeq} \frac{1}{4n^2}$ et que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{4n^2}$ est une série de Riemann convergente, la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}$ converge

⊕ D'après le théorème « à la mode Abel » 8.5.1, on peut prolonger $f(x) = x\arctan x - \ln\sqrt{1+x^2}$ en $x = 1$, en posant $f(1) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}$

⊕ Or, $f(1) = \arctan 1 - \ln 2 = \frac{\pi}{4} - \ln 2$ et donc

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{\pi}{4} - \ln 2$$

Exercice 34 :

Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière réelle $\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$

Voici un exercice qui ne devrait pas poser de difficultés

1. **Recherche du rayon de convergence**
   Serez vous étonnés que le rayon de convergence soit 1 ?....Si oui, il y a encore du travail ! !

2. **Donc, pour** $|x| < 1$**, nous appelons** $F(x) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$

⇒ De la décomposition $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, nous pouvons écrire $\frac{x^{n+1}}{n(n+1)} = \frac{x^{n+1}}{n} - \frac{x^{n+1}}{n+1}$ d'où, pour $|x| < 1$, nous avons :

$$F(x) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} = \sum_{n\geqslant 1} \frac{x^{n+1}}{n} - \sum_{n\geqslant 1} \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

⇒ Etudions, maintenant $g(x) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{x^{n+1}}{n+1}$

Pour $|x| < 1$ la dérivée $g'(x)$ s'exprime $g'(x) = \sum_{n\geqslant 1} x^n = \sum_{n\geqslant 0} x^n - 1 = \frac{1}{1-x} - 1$.

D'où, en passant à la primitive, nous avons $g(x) = -\ln(1-x) - x$

⇒ Passons à la seconde expression $h(x) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{x^{n+1}}{n}$ définie pour $|x| < 1$.

Nous pouvons écrire, toujours pour $|x| < 1$, $h(x) = xh_1(x)$ où $h_1(x) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n}$.

Si nous dérivons $h_1(x)$, nous obtenons $h_1'(x) = \sum_{n\geqslant 1} x^{n-1} = \sum_{n\geqslant 0} x^n = \frac{1}{1-x}$.

Nous en déduisons que $h_1(x) = -\ln(1-x)$ et que, donc $h(x) = -x\ln(1-x)$

Nous en déduisons que $F(x) = h(x) - g(x) = -x\ln(1-x) + \ln(1-x) + x = x + (1-x)\ln(1-x)$

Ainsi, si $|x| < 1$, nous avons $F(x) = \sum_{n\geqslant 1} \dfrac{x^{n+1}}{n(n+1)} = x + (1-x)\ln(1-x)$

Exercice 35 :

Calculer la somme de la série numérique $\sum_{n\geqslant 0} \dfrac{(-1)^n}{3n+1}$

⇒ La série $\sum_{n\geqslant 0} \dfrac{(-1)^n}{3n+1}$ est une série numérique alternée. On démontre facilement qu'elle est convergente puisqu'elle vérifie le critère des séries alternées.

⇒ **Recherche de la somme de** $\sum_{n\geqslant 0} \dfrac{(-1)^n}{3n+1}$

⊕ On considère la série entière d'une variable réelle $S(x) = \sum_{n\geqslant 0} \dfrac{x^{3n+1}}{3n+1}$

Le rayon de convergence de cette série est clairement 1 *(Utiliser la règle de D'Alembert)*
On peut remarquer que

$$S(-1) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^{3n+1}}{3n+1} = -\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^{3n}}{3n+1} = -\sum_{n\geqslant 0} \frac{\left((-1)^3\right)^n}{3n+1} = -\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{3n+1}$$

De la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 0} \dfrac{(-1)^n}{3n+1}$, on peut déduire que la série $S(-1) = \sum_{n\geqslant 0} \dfrac{(-1)^{3n+1}}{3n+1}$ est convergente, et d'après le théorème « à la Abel » 8.5.1 nous pouvons déduire que

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{3n+1} = \lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} S(x)$$

Reste, maintenant à calculer $S(x)$

⊕ Pour $|x| < 1$, la série dérivée de S est $S'(x) = \sum_{n\geqslant 0} x^{3n} = \sum_{n\geqslant 0} \left(x^3\right)^n = \dfrac{1}{1-x^3}$.

Calculons, maintenant, $\displaystyle\int \frac{1}{1-x^3}\,\mathrm{d}x$

La décomposition en éléments simples de $\dfrac{1}{1-x^3}$ nous donne :

$$\frac{1}{1-x^3} = \frac{1}{3}\left\{\frac{1}{1-x} + \frac{x+2}{x^2+x+1}\right\}$$

Et donc $\displaystyle\int \frac{1}{1-x^3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\left\{\int \frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x + \int \frac{x+2}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x\right\}$

⊕ Il est facile de voir que $\displaystyle\int \frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x = -\ln(1-x)$

⊕ Remarquons, dans un premier temps, que :

$$\frac{x+2}{x^2+x+1} = \frac{1}{2} \times \frac{2x+1}{x^2+x+1} + \frac{3}{2} \times \frac{1}{x^2+x+1}$$

Donc $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x + \frac{3}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x$

⋆ Clairement, et facilement, $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x = \ln\left(x^2+x+1\right) + c$ où $c \in \mathbb{R}$

⋆ Ensuite, c'est un travail classique de calcul de primitive :

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}x \\ &= \int \frac{1}{u^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}u \text{ où nous avons fait le changement de variables } u=x+\frac{1}{2} \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2u}{\sqrt{3}}\right) \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)+c \text{ où } c\in\mathbb{R}\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1-x^3}\,\mathrm{d}x &= \frac{-1}{3}\ln(1-x)+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\ln\left(x^2+x+1\right)+\frac{3}{2}\times\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)+\lambda \\ &= \frac{1}{6}\ln\left(x^2+x+1\right)+\sqrt{3}\arctan\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{3}\ln(1-x)+\lambda\end{aligned}$$

où $\lambda\in\mathbb{R}$

Comme $S(0)=0$, nous avons $\sqrt{3}\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}+\lambda=0 \Longleftrightarrow \lambda=-\sqrt{3}\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}\pi}{6}$

Et nous avons donc

$$S(-1)=\sqrt{3}\arctan\frac{-1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{3}\ln 2-\frac{\sqrt{3}\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}\pi}{3}-\frac{1}{3}\ln 2$$

En conclusion, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n}{3n+1}=\frac{\sqrt{3}\pi}{3}+\frac{1}{3}\ln 2$

Exercice 36 :

Soit $f(x)=\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}dt$; montrer que $f(x)=\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{(2n+1)\,n!}x^{2n+1}$

Il faut noter qu'ici, f est la primitive de la fonction e^{-x^2} qui s'annule en $x=0$.

▷ Nous avons alors $f'(x)=e^{-x^2}$ et le développement en série entière de e^{-x^2} est donné par :

$$e^{-x^2}=\sum_{n\geqslant 0}\frac{\left(-x^2\right)^n}{n!}=\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!}$$

▷ Et donc, par primitivation, nous obtenons

$$f(x)=\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)\,n!}$$

Ce que nous voulions

Remarquons que le rayon de convergence de cette série est $+\infty$

Exercice 37 :

Déterminer le développement en série entière de la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{1}{(2x+3)^2}$. Préciser le rayon de convergence de la série entière

Nous allons proposer 2 méthodes pour résoudre cet exercice

1. <u>Première méthode</u>

   Il est tout à fait loisible que nous puissions nous ramener à une expression du type $u(x)=(1+x)^\alpha$, et nous aurions, ici, $\alpha=-2$. Il faut donc « *touiller* » un peu !

Pour commencer, $2x+3 = 3\left(\frac{2x}{3}x+1\right)$, et donc

$$f(x) = \frac{1}{(2x+3)^2} = (2x+3)^{-2} = 3^{-2}\left(\frac{2x}{3}+1\right)^{-2}$$

Développons, pour $|u|<1$ l'expression $(1+u)^{-2}$ en série entière.

$$\begin{aligned}(1+u)^{-2} &= 1+\sum_{n\geqslant 1}\frac{-2(-2-1)\cdots(-2-n+1)}{n!}u^n\\ &= 1+\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n\frac{2(3)\cdots(n+1)}{n!}u^n\\ &= 1+\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n\frac{(n+1)!}{n!}u^n\\ &= 1+\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n(n+1)u^n\end{aligned}$$

Et donc, pour $\left|\frac{2x}{3}\right|<1 \Longleftrightarrow |x|<\frac{3}{2}$, nous avons :

$$\left(\frac{2x}{3}+1\right)^{-2} = 1+\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n\frac{2^n(n+1)}{3^n}x^n$$

D'où

$$\begin{aligned}f(x) = 3^{-2}\left(\frac{2x}{3}+1\right)^{-2} &= \frac{1}{9}\left(1+\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n\frac{2^n(n+1)}{3^n}x^n\right)\\ &= \frac{1}{9}+\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n\frac{2^n(n+1)}{3^{n+2}}x^n\\ &= \sum_{n\geqslant 0}(-1)^n\frac{2^n(n+1)}{3^{n+2}}x^n\end{aligned}$$

Le rayon de convergence est de $\rho = \frac{3}{2}$

2. <u>Seconde méthode</u>

La seconde méthode consiste à partir de la fonction $u(x) = \frac{1}{2x+3}$ et à remarquer que $u'(x) = \frac{-2}{(2x+3)^2} = -2f(x)$

▷ Le développement de $u(x)$ est classique :

$$\frac{1}{2x+3} = \frac{1}{3}\times\frac{1}{1+\frac{2x}{3}}$$

Et donc, pour $\left|\frac{2x}{3}\right|<1 \Longleftrightarrow |x|<\frac{3}{2}$, nous avons :

$$\frac{1}{1+\frac{2x}{3}} = \sum_{n\geqslant 0}(-1)^n\left(\frac{2x}{3}\right)^n = \sum_{n\geqslant 0}(-1)^n\frac{2^n}{3^n}x^n$$

D'où, pour $|x|<\frac{3}{2}$, nous avons $u(x) = \sum_{n\geqslant 0}(-1)^n\frac{2^n}{3^{n+1}}x^n$

▷ En dérivant, nous obtenons le développement de $u'(x)$:

$$u'(x) = \frac{-2}{(2x+3)^2} = \sum_{n\geqslant 0}(-1)^n\frac{n\times 2^n}{3^{n+1}}x^{n-1}$$

▷ Et donc, de $u'(x) = -2f(x) \Longleftrightarrow f(x) = \dfrac{-1}{2}u'(x)$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} f(x) = &\ \frac{-1}{2}\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n \frac{n\times 2^n}{3^{n+1}}x^{n-1} \\ = &\ \sum_{n\geqslant 0}(-1)^{n+1}\frac{n\times 2^{n-1}}{3^{n+1}}x^{n-1} \\ = &\ \sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n+1}\frac{n\times 2^{n-1}}{3^{n+1}}x^{n-1} \\ = &\ \sum_{n\geqslant 0}(-1)^{n}\frac{(n+1)\times 2^{n}}{3^{n+2}}x^{n} \end{aligned}$$

A noter

Nous avons, très souvent écrit quelque chose du type :

$$\sum_{\color{red}{n\geqslant 0}}(-1)^{n+1}\frac{n\times 2^{n-1}}{3^{n+1}}x^{n-1} = \sum_{\color{red}{n\geqslant 1}}(-1)^{n+1}\frac{n\times 2^{n-1}}{3^{n+1}}x^{n-1}$$

En effet, il faut remarquer que :

$$\begin{aligned} \sum_{n\geqslant 0}(-1)^{n+1}\frac{n\times 2^{n-1}}{3^{n+1}}x^{n-1} &= \underbrace{(-1)^{0+1}\frac{0\times 2^{0-1}}{3^{0+1}}x^{0-1}}_{n=0} + \sum_{n\geqslant 0}(-1)^{n+1}\frac{n\times 2^{n-1}}{3^{n+1}}x^{n-1} \\ &= \underbrace{0}_{n=0} + \sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n+1}\frac{n\times 2^{n-1}}{3^{n+1}}x^{n-1} \\ &= \sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n+1}\frac{n\times 2^{n-1}}{3^{n+1}}x^{n-1} \end{aligned}$$

Exercice 38 :

Déterminer le développement en série entière de la fonction f définie par $f(x) = (x+1)\ln(x+1)$. Préciser le rayon de convergence de la série entière

Nous allons donner 2 résolutions de cet exercice

1. Première résolution

   Remarquons, que pour $|x| < 1$, nous avons $\ln(x+1) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$, et donc, toujours pour $|x| < 1$:

$$\begin{aligned} (x+1)\ln(x+1) = &\ (x+1)\left(\sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}\right) \\ = &\ \sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n-1}\frac{x^{n+1}}{n} + \sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} \\ = &\ \sum_{n\geqslant 2}(-1)^{n-2}\frac{x^n}{n-1} + \sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} \\ = &\ x + \sum_{n\geqslant 2}\left(\frac{(-1)^{n-2}}{n-1} + \frac{(-1)^{n-1}}{n}\right)x^n \\ = &\ x + \sum_{n\geqslant 2}\left(\frac{(-1)^{n-2}n + (-1)^{n-1}(n-1)}{n(n-1)}\right)x^n \\ = &\ x + \sum_{n\geqslant 2}\left(\frac{n\left((-1)^{n-2} + (-1)^{n-1}\right) - (-1)^{n-1}}{n(n-1)}\right)x^n \\ = &\ x + \sum_{n\geqslant 2}\frac{(-1)^n}{n(n-1)}x^n \end{aligned}$$

Donc, pour $|x| < 1$, nous avons $(x+1)\ln(x+1) = x + \sum\limits_{n\geqslant 2} \dfrac{(-1)^n}{n(n-1)} x^n$

2. Seconde résolution

   L'autre méthode de résolution consiste à remarquer que $f'(x) = \ln(x+1) + 1$ et que, donc, pour $|x| < 1$, nous avons

$$f'(x) = \sum_{n\geqslant 1} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + 1$$

   Et, en primitivant et remarquant que $f(0) = 0$, nous avons, pour $|x| < 1$:

$$f(x) = x + \sum_{n\geqslant 1} (-1)^{n-1} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} = x + \sum_{n\geqslant 2} (-1)^n \frac{x^n}{n(n-1)}$$

Ainsi, 2 méthodes pour arriver au même résultat

Exercice 39 :

Soit $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{4^n}{C_{2n}^n} x^n$

1. *Donner le rayon de convergence de la série*

   On utilise la bonne vieille règle de D'Alembert :

$$\begin{aligned}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| &= \frac{C_{2n+2}^{n+1}}{C_{2n}^n} = \frac{(2n+2)!n!n!}{(n+1)!(n+1)!(2n)!}\\ &= \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2}\end{aligned}$$

   Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = 4$ et le rayon de convergence est donc $\rho = \dfrac{1}{4}$

2. *Montrer que si* $f(x) = \sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{4^n}{C_{2n}^n} x^n$, f *est solution de l'équation différentielle*

$$\begin{cases} 2(x-x^2)\,y' - (2x+1)\,y = -1 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$$

   Ce n'est pas une question très compliquée mais immensément calculatoire qui pourrait conduire à des erreurs de calcul. Donc prendre beaucoup de soins lors de la résolution

   → Pour nous simplifier la vie, nous allons appeler $a_n = \dfrac{4^n}{C_{2n}^n}$ quitte ensuite, et le moment venu, à remplacer a_n par sa valeur.
   $f(x)$ s'écrira donc, pour $|x| < \dfrac{1}{4}$, $f(x) = \sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$

   → Prenons les choses petit à petit :
   - ⋆ Nous avons $xf(x) = \sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^{n+1} = \sum\limits_{n\geqslant 1} a_{n-1} x^n$
   - ⋆ De telle sorte que :

$$(2x+1)f(x) = \sum_{n\geqslant 1} 2a_{n-1}x^n + \sum_{n\geqslant 0} a_n x^n = a_0 + \sum_{n\geqslant 1} (2a_{n-1} + a_n)\,x^n$$

   → Ensuite, comme toujours :

$$f'(x) = \sum_{n\geqslant 0} na_n x^{n-1} = \sum_{n\geqslant 1} na_n x^{n-1} = \sum_{n\geqslant 0} (n+1)\,a_{n+1} x^n$$

   Remarquons que $f'(0) = a_1 = \dfrac{4}{C_2^1} = \dfrac{4}{2} = 2$. Ca commence bien !!

⋆ Ensuite :

$$\begin{aligned} x^2 f'(x) &= \sum_{n\geqslant 0} (n+1)\, a_{n+1} x^{n+2} = a_1 x^2 + 2a_2 x^3 + \sum_{n\geqslant 2} (n+1)\, a_{n+1} x^{n+2} \\ &= a_1 x^2 + 2a_2 x^3 + \sum_{n\geqslant 4} (n-1)\, a_{n-1} x^n = \sum_{n\geqslant 2} (n-1)\, a_{n-1} x^n \end{aligned}$$

⋆ Et, puis, pour $xf'(x)$:

$$xf'(x) = \sum_{n\geqslant 0} (n+1)\, a_{n+1} x^{n+1} = \sum_{n\geqslant 1} n a_n x^n$$

⋆ Et pour terminer :

$$\begin{aligned} 2\left(x-x^2\right) f'(x) &= 2\left[xf'(x) - x^2 f'(x)\right] = 2\left[\sum_{n\geqslant 1} n a_n x^n - \sum_{n\geqslant 2} (n-1)\, a_{n-1} x^n\right] \\ &= 2\left[a_1 x + \sum_{n\geqslant 2} n a_n x^n - \sum_{n\geqslant 2} (n-1)\, a_{n-1} x^n\right] \\ &= 2a_1 x + \sum_{n\geqslant 2} 2\left(n a_n - (n-1)\, a_{n-1}\right) x^n \end{aligned}$$

→ Faisons maintenant la synthèse :

$$\begin{aligned} 2\left(x-x^2\right) f'(x) - (2x+1)\, f(x) &= 2a_1 x + \sum_{n\geqslant 2} 2\left(n a_n - (n-1)\, a_{n-1}\right) x^n - a_0 - \sum_{n\geqslant 1} \left(2a_{n-1} + a_n\right) x^n \\ &= 2a_1 x + \sum_{n\geqslant 2} 2\left(n a_n - (n-1)\, a_{n-1}\right) x^n - \\ &\qquad a_0 - \left(2a_0 + a_1\right) x - \sum_{n\geqslant 2} \left(2a_{n-1} + a_n\right) x^n \\ &= -a_0 + \left(a_1 - 2a_0\right) x + \sum_{n\geqslant 2} \left(2\left(n a_n - (n-1)\, a_{n-1}\right) - \left(2a_{n-1} + a_n\right)\right) x^n \\ &= -1 + \sum_{n\geqslant 2} \left(2n a_n - 2(n-1)\, a_{n-1} - 2a_{n-1} - a_n\right) x^n \\ &= -1 + \sum_{n\geqslant 2} \left((2n-1)\, a_n - 2n a_{n-1}\right) x^n \end{aligned}$$

Maintenant, évaluons $(2n-1)\, a_n - 2n a_{n-1}$. Nous avons :

$$\begin{aligned} (2n-1)\, a_n - 2n a_{n-1} &= \frac{(2n-1)\, 4^n}{\mathrm{C}_{2n}^n} - \frac{2n 4^{n-1}}{\mathrm{C}_{2n-2}^{n-1}} \\ &= \frac{(2n-1)\, 4^n \times n!n!}{(2n)!} - \frac{(2n)\, 4^{n-1} \times (n-1)!\,(n-1)!}{(2n-2)!} \\ &= \frac{4^{n-1} \times (n-1)!\,(n-1)!}{(2n-2)!} \left[\frac{(2n-1)\, 4n^2}{2n\,(2n-1)} - 2n\right] \\ &= \frac{4^{n-1} \times (n-1)!\,(n-1)!}{(2n-2)!} \left[\frac{4n^2}{2n} - 2n\right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

f vérifie bien l'équation différentielle $2\left(x-x^2\right) y' - (2x+1)\, y = -1$ et $y'(0) = 2$

Exercice 40 :

Former de deux façons le développement en série entière en 0 de $f(x) = e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2}\, \mathrm{d}t$. En déduire la relation

$$\binom{2n}{n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{4^n}{2n+1}$$

Nous allons donc utiliser 2 méthodes pour trouver le développement en série entière de $f(x)$:

▷ Une méthode utilisant les équations différentielles

▷ Une seconde méthode utilisant le produit des séries

Dans les 2 cas, nous posons $G(x) = \displaystyle\int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t$, et nous pouvons remarquer que $G'(x) = e^{x^2}$. Remarquons aussi que $f(0) = 0$

- **Equation différentielle vérifiée par f**

  → $f'(x) = -2xe^{-x^2}G(x) + e^{-x^2}G'(x) = -2xf(x) + e^{x^2}e^{-x^2} = -2xf(x) + 1$
  Ainsi, f vérifie l'équation différentielle $y' + 2xy = 1$ avec comme condition initiale $y(0) = 0$

  → Supposons $f(x) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$.
  Alors, $f'(x) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 0} n a_n x^{n-1} = \sum_{n\geqslant 1} n a_n x^{n-1} = \sum_{n\geqslant 0} (n+1)\, a_{n+1} x^n$ et $2xf(x) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 0} 2a_n x^{n+1} = \sum_{n\geqslant 1} 2a_{n-1} x^n$

  → D'où :

$$y' + 2xy = 1$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\sum_{n\geqslant 0} (n+1)\, a_{n+1} x^n + \sum_{n\geqslant 1} 2a_{n-1} x^n = 1$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$a_1 + \sum_{n\geqslant 1} \left((n+1)\, a_{n+1} + 2a_{n-1}\right) x^n = 1$$

  D'où nous tirons :

$$\left\{\begin{array}{rl} a_1 = & 1 \\ (n+1)\, a_{n+1} + 2a_{n-1} = & 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} a_1 = & 1 \\ a_{n+1} = & -\dfrac{2}{(n+1)} a_{n-1} \end{array}\right.$$

  D'où nous tirons :

$$\left\{\begin{array}{rl} a_1 = & 1 \\ a_3 = & \dfrac{-2}{3} a_1 \\ a_5 = & \dfrac{-2}{5} a_3 \\ \vdots & \vdots \\ a_{2n+1} = & \dfrac{-2}{2n+1} a_{2n-1} \end{array}\right.$$

  Ainsi, en effectuant le produit termes à termes, nous obtenons :

$$a_1 \times a_3 \times \cdots \times a_{2n+1} = \frac{(-1)^n \times 2^n}{3 \times 5 \times \cdots \times (2n+1)} \times a_1 \times a_3 \times \cdots \times a_{2n-1}$$

  D'où nous obtenons, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_{2n+1} = \frac{2^n \times (-1)^n}{\prod\limits_{k=0}^{n} (2k+1)}$$

  Comme $a_0 = 0$, la récurrence nous montre que tous les termes d'ordre pair sont nuls, ce qui est conforme au fait que f soit une fonction impaire.

- **Utilisation du produit de Cauchy**

  → Développement en série entière de e^{-x^2}
  Nous avons $e^x = \displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{n!}$ et donc $e^{-x^2} = \displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{\left(-x^2\right)^n}{n!} = \sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}$

  → Développement en série entière de $G(x)$

Comme $G'(x) = e^{x^2}$, nous avons le développement en série entière de $G'(x)$: $G'(x) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{x^{2n}}{n!}$ et donc $G(x) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{x^{2n+1}}{n!\,(2n+1)}$

→ Développement en série entière de $f(x)$

Nous avons $e^{-x^2} = \sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ avec $a_{2n+1} = 0$ et $a_{2n} = \frac{(-1)^n}{n!}$ et $G(x) = \sum_{n\geqslant 0} b_n x^n$ avec $b_{2n} = 0$ et $b_{2n+1} = \frac{1}{n!\,(2n+1)}$ et $f(x) = \sum_{n\geqslant 0} c_n x^n$ où $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$

⋆ Regardons les termes d'ordre pair :

$$c_{2n} = \sum_{k=0}^{2n} a_k b_{2n-k} = \sum_{k=0}^{n} a_{2k} b_{2n-2k} + \sum_{k=0}^{n-1} a_{2k+1} b_{2n-(2k+1)}$$

Parce que $b_{2n} = 0$, $b_{2n-2k} = b_{2(n-k)} = 0$ et $a_{2k+1} = 0$, nous avons $c_{2n} = 0$

⋆ Maintenant, les termes d'ordre impair :

$$c_{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} a_k b_{2n-k} = \sum_{k=0}^{n} a_{2k} b_{2n+1-2k} + \sum_{k=0}^{n} a_{2k+1} b_{2n+1-(2k+1)}$$

A nouveau, $b_{2n+1-(2k+1)} = b_{2n-2k} = b_{2(n-k)} = 0$, et donc $c_{2n+1} = \sum_{k=0}^{n} a_{2k} b_{2n+1-2k}$, et donc :

$$c_{2n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \times \frac{1}{(n-k)!\,(2(n-k)+1)}$$

- **De l'unicité du développement en série entière de** f, nous avons :

$$\frac{2^n \times (-1)^n}{\prod_{k=0}^{n} (2k+1)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \times \frac{1}{(n-k)!\,(2(n-k)+1)}$$

Ce qui est, en soi, une jolie identité qu'il est encore possible de rendre plus « sexie ».

⋆ Tout d'abord :

$$\begin{aligned}
\frac{2^n \times (-1)^n}{\prod_{k=0}^{n} (2k+1)} &= \frac{2^n \times (-1)^n \times \prod_{k=0}^{n} (2k)}{\prod_{k=0}^{n} (2k+1) \times \prod_{k=0}^{n} (2k)} \\
&= \frac{2^n \times (-1)^n \times 2^n \times n!}{(2n+1)!} \\
&= \frac{(-1)^n \times 4^n \times n!}{(2n+1)!} = \frac{(-1)^n \times 4^n \times n!}{(2n+1)\,(2n)!}
\end{aligned}$$

⋆ Ensuite :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \times \frac{1}{(n-k)!\,(2(n-k)+1)} &= \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \times \frac{n!}{(n-k)!\,(2(n-k)+1)} \\
&= \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \mathrm{C}_n^k \times \frac{1}{(2(n-k)+1)}
\end{aligned}$$

Nous avons $\mathrm{C}_n^k \times \dfrac{1}{(2(n-k)+1)} = \mathrm{C}_n^{n-k} \times \dfrac{1}{(2(n-k)+1)}$ et $(-1)^k = (-1)^n \times (-1)^{n-k}$, d'où

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \times \frac{1}{(n-k)!\,(2(n-k)+1)} &= \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \mathrm{C}_n^k \times \frac{1}{(2(n-k)+1)} \\ &= \frac{(-1)^n}{n!} \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \mathrm{C}_n^{n-k} \times \frac{1}{(2(n-k)+1)} \\ &= \frac{(-1)^n}{n!} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \mathrm{C}_n^k \times \frac{1}{(2k+1)}\end{aligned}$$

⋆ En faisant l'égalité déjà démontrée, nous avons :

$$\frac{(-1)^n \times 4^n \times n!}{(2n+1)\,(2n)!} = \frac{(-1)^n}{n!} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \mathrm{C}_n^k \times \frac{1}{(2k+1)}$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\frac{4^n \times n!}{(2n+1)\,(2n)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \mathrm{C}_n^k \times \frac{1}{(2k+1)}$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\frac{4^n}{(2n+1)} = \frac{(2n)!}{n! \times n!} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \mathrm{C}_n^k \times \frac{1}{(2k+1)}$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\frac{4^n}{(2n+1)} = \mathrm{C}_{2n}^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \mathrm{C}_n^k \times \frac{1}{(2k+1)}$$

Ce qui donne avec les notations classiques : $\dbinom{2n}{n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{4^n}{2n+1}$

8.11.2 Exercices divers

Exercice 41 :

Nous considérons la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$. On suppose que cette série est absolument convergente pour $|z| < 1$ et si $|z| < 1$, on note $f(z) = \sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ sa somme.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous posons :

$\Rightarrow$ $S_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k$

$\Rightarrow$ $T_n = \dfrac{a_0 + a_1 + \cdots + a_n}{n+1} = \dfrac{S_n}{n+1} = \dfrac{1}{n+1} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k$ (Moyenne de Césaro)

1. *Montrer que si $|z| < 1$, alors la série $\sum_{n\geqslant 0} S_n z^n$ est absolument convergente et admet pour somme $H(z) = \dfrac{f(z)}{1-z}$*

   (a) Remarquons que l'expression $S_n z^n$ s'écrit :

$$\left\{\begin{array}{rl} S_n z^n = & (a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\, z^n \\ = & a_0 z^n + a_1 z^n + a_2 z^n + \cdots + a_n z^n \\ = & a_0 z^n + (a_1 z)\, z^{n-1} + (a_2 z^2)\, z^{n-2} + \cdots + (a_n z^n)\, z^0 \\ = & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (a_k z^k)\, z^{n-k} \end{array}\right.$$

En fait $S_n z^n$ apparaît donc comme un produit de Cauchy du type $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$

(b) Ici, $S_n z^n$ est le terme d'ordre n du produit de 2 séries :
- ⋆ La première étant la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ qui admet pour somme, si $|z| < 1$, $f(z)$
- ⋆ La seconde étant la série $\sum_{n\geqslant 0} z^n$ qui admet pour somme, si $|z| < 1$, $\dfrac{1}{1-z}$

(c) Ainsi, pour $|z| < 1$, la série $\sum_{n\geqslant 0} S_n z^n$ admet pour somme $\dfrac{f(z)}{1-z}$

2. *Quel est le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geqslant 0} T_n z^n$?*

Considérons $G(z) = \sum_{n\geqslant 0} T_n z^{n+1}$. Alors

$$G'(z) = \sum_{n\geqslant 0} (n+1) T_n z^n = \sum_{n\geqslant 0} (n+1) \frac{S_n}{n+1} z^n = \sum_{n\geqslant 0} S_n z^n$$

$\sum_{n\geqslant 0} S_n z^n$ apparaît donc comme la série dérivée de la série $\sum_{n\geqslant 0} T_n z^{n+1}$ qui admettent donc le même rayon de convergence 1.

Comme $G(z) = \sum_{n\geqslant 0} T_n z^{n+1} = z\left(\sum_{n\geqslant 0} T_n z^n\right)$, la série $\sum_{n\geqslant 0} T_n z^n$ admet donc même rayon de convergence que G

Le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geqslant 0} T_n z^n$ est donc 1

Exercice 42 :

1. *Donner le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^k}{n!} z^n$, pour $k \in \mathbb{N}$*

Question simple qui se résoud à l'aide du classique rapport $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\dfrac{(n+1)^k n!}{n^k (n+1)!}\right|$ et on trouve que le rayon de convergence est infini

2. *Démontrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme de degré k tel que, $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^k}{n!} z^n = P_k(z) e^z$*

Nous allons faire une récurrence sur $k \in \mathbb{N}$

→ **Tout d'abord, c'est vrai pour** $n = 0$

En effet, nous avons $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{n^0}{n!} z^n = \sum_{n\geqslant 1} \dfrac{z^n}{n!} = e^z$ et donc $P_0(z) = 1$

→ **Supposons la propriété vraie à l'ordre k, c'est à dire** $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{n^k}{n!} z^n = P_k(z) e^z$ avec P_k polynôme de degré k

→ **Démontrons la propriété à l'ordre** $k+1$

Posons $\Phi_k(z) = \sum_{n\geqslant 1} \dfrac{n^k}{n!} z^n$.

Par hypothèse de récurrence, nous avons $\Phi_k(z) = P_k(z) e^z$

- ⋆ La série dérivée de $\Phi_k(z) = \sum_{n\geqslant 1} \dfrac{n^k}{n!} z^n$ est $\Phi_k'(z) = \sum_{n\geqslant 1} \dfrac{n^{k+1}}{n!} z^{n-1}$.

  Nous avons donc $z\Phi_k'(z) = \Phi_{k+1}(z)$

- ⋆ Nous avons aussi $\Phi_k'(z) = (P_k(z)\,e^z)' = P_k'(z)\,e^z + P_k(z)\,e^z = e^z\left(P_k'(z) + P_k(z)\right)$
- ⋆ Ainsi $\Phi_{k+1}(z) = \left[z\left(P_k'(z) + P_k(z)\right)\right]e^z$

  Remarquons que $z\left(P_k'(z) + P_k(z)\right)$ est un polynôme de degré $k+1$

  En posant $P_{k+1}(z) = z\left(P_k'(z) + P_k(z)\right)$, nous avons démontré que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{n^{k+1}}{n!}z^n = P_{k+1}(z)\,e^z$

La question est donc démontrée : pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme de degré k tel que, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{n^k}{n!}z^n = P_k(z)\,e^z$

Remarquons que ces polynômes sont parfaitement définis par la relation de récurrence ci-après :

$$\begin{cases} P_0(z) = & 1 \\ P_{k+1}(z) = & z\left(P_k'(z) + P_k(z)\right) \end{cases}$$

Nous obtenons ainsi $P_1(z) = z$, $P_2(z) = z(1+z) = z^2 + z$, $P_3(z) = z\left(2z + 1 + z^2 + 1\right) = z^3 + 2z^2 + 2z$

Exercice 43 :

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \cos(\alpha \arcsin x)$

1. *Déterminer une équation différentielle d'ordre 2 dont f est solution.*

   Nous allons nous mettre à calculer les dérivées premières et secondes.

   - ▷ La dérivée première est donnée par $f'(x) = -\dfrac{\alpha}{\sqrt{1-x^2}}\sin(\alpha\arcsin x)$, c'est à dire

   $$\sqrt{1-x^2}\,f'(x) = -\alpha\sin(\alpha\arcsin x)$$

   - ▷ Dérivons les deux membres de l'égalité ci-dessus ; nous obtenons :

   $$\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}f'(x) + \sqrt{1-x^2}\,f''(x) = \frac{-\alpha^2}{\sqrt{1-x^2}}\cos(\alpha\arcsin x)$$
   $$\Longleftrightarrow$$
   $$-xf'(x) + \left(1-x^2\right)f''(x) = -\alpha^2 f(x) \text{ après multiplication par } \sqrt{1-x^2}$$

   - ▷ En remarquant que $f(0) = \cos(\alpha\arcsin 0) = 1$, f vérifie donc l'équation différentielle :

   $$\begin{cases} \left(1-x^2\right)y'' - xy' + \alpha^2 y = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

2. *En déduire un développement en série entière de f .*

   Supposons donc que $f(x) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 0}a_n x^n$. Nous pouvons d'ores et déjà remarquer que $a_0 = 1$ et que f étant paire, les termes d'ordre impair sont nuls

   - ▷ Nous avons $f'(x) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 0}n a_n x^{n-1} = \sum_{n\geqslant 1}n a_n x^{n-1}$ et donc $xf'(x) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 1}n a_n x^n$
   - ▷ Et donc $f''(x) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 0}n(n-1)a_n x^{n-2} = \sum_{n\geqslant 2}n(n-1)a_n x^{n-2}$
     - ⋆ Donc $x^2 f''(x) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 2}n(n-1)a_n x^n$
     - ⋆ Et $f''(x) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 2}n(n-1)a_n x^{n-2} = \sum_{n\geqslant 0}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n$

Nous devons donc avoir :

$$\sum_{n\geqslant 0}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n-\sum_{n\geqslant 2}n(n-1)a_nx^n-\sum_{n\geqslant 1}na_nx^n+\sum_{n\geqslant 0}\alpha^2a_nx^n=0$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$2a_2+6a_3x+\sum_{n\geqslant 2}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n-\sum_{n\geqslant 2}n(n-1)a_nx^n-a_1x-\sum_{n\geqslant 2}na_nx^n+\alpha^2a_0+\alpha^2a_1x+\sum_{n\geqslant 2}\alpha^2a_nx^n=0$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\left(\alpha^2a_0+2a_2\right)+\left(6a_3-a_1+\alpha^2a_1\right)x+\sum_{n\geqslant 2}\left[(n+2)(n+1)a_{n+2}-n(n-1)a_n-na_n+\alpha^2a_n\right]x^n=0$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\left(\alpha^2a_0+2a_2\right)+\left(6a_3-a_1+\alpha^2a_1\right)x+\sum_{n\geqslant 2}\left[(n+2)(n+1)a_{n+2}-\left(n^2-\alpha^2\right)a_n\right]x^n=0$$

Nous tirons donc $a_{2p+1}=0$ et $(n+2)(n+1)a_{n+2}-\left(n^2-\alpha^2\right)a_n=0$, et en faisant le calcul habituel, nous obtenons :

$$a_{2p}=\prod_{k=1}^{p}\left(\frac{(2k-2)^2-\alpha^2}{2k(2k-1)}\right)a_0 \text{ avec } a_0=1$$

Exercice 44 :

Soit $\sum_{n\geqslant 0}a_nx^n$ une série entière de la variable réelle avec $a_n\in\mathbb{R}^+$ et $x\in\mathbb{R}$ de rayon de convergence infini.
Montrer que si $f(x)=\sum_{n\geqslant 0}a_nx^n$ est bornée, alors f est constante.

Supposons f bornée

→ Si $f(x)=\sum_{n\geqslant 0}a_nx^n$ est constante, alors, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=\lambda$ et donc si $f(x)=\sum_{n\geqslant 0}a_nx^n$, en particulier $f(x)=f(0)=a_0=\lambda$

→ Supposons qu'il existe $k>0$ tel que $a_k\neq 0$. Soit k_0 le plus petit entier tel que $a_{k_0}\neq 0$. Alors :

$$f(x)=a_0+a_{k_0}x_{k_0}+\sum_{n\geqslant k_0+1}a_nx^n=a_0+a_{k_0}x_{k_0}\left(1+\sum_{n\geqslant k_0+1}a_nx^{n-k_0}\right)$$

Ainsi, pour $x\geqslant 0$, $f(x)\geqslant a_0+a_{k_0}x_{k_0}$, et donc $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$
f n'est donc pas bornée.
Il y a donc contradiction. Ainsi, pour tout $k\in\mathbb{N}$ avec $k\geqslant 1$, $a_k=0$ et donc $f(x)=a_0$ et f est donc bornée.

Exercice 45 :

Bien entendu, cet exercice est le prolongement du précédent
Soit $\sum_{n\geqslant 0}a_nz^n$ une série entière complexe de rayon de convergence $\rho=+\infty$ et de somme $f(z)=\sum_{n\geqslant 0}a_nz^n$

1. *Soient $r\geqslant 0$ et $n\in\mathbb{N}$. Calculer $L(r,n)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}f\left(re^{i\theta}\right)e^{-in\theta}\,\mathrm{d}\theta$*

   Nous nous fixons donc $r\geqslant 0$ et $n\in\mathbb{N}$.
   Soit $R\in\mathbb{R}^+$ tel que $R>r$ et nous appelons $D(O,R)=\{z\in\mathbb{C}$ tels que $||<R\}$.

La série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge uniformément sur $D(O,R)$ et il nous est possible de « permuter signes somme et intégrale », et donc :

$$\begin{aligned} L(r,n) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(re^{i\theta}\right)e^{-in\theta}\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{k\geqslant 0} a_k r^k e^{ik\theta}\right)e^{-in\theta}\,\mathrm{d}\theta \\ &= \sum_{k\geqslant 0}\frac{a_k r_k}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(e^{ik\theta}\right)e^{-in\theta}\,\mathrm{d}\theta = \sum_{k\geqslant 0}\frac{a_k r_k}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(k-n)\theta}\,\mathrm{d}\theta \end{aligned}$$

→ Pour calculer $\int_0^{2\pi} e^{i(k-n)\theta}\,\mathrm{d}\theta$, nous allons étudier $\int_0^{2\pi} e^{ip\theta}\,\mathrm{d}\theta$ pour $p\in\mathbb{Z}$

→ Si $p=0$, alors $\int_0^{2\pi} e^{ip\theta}\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta = 2\pi$

→ Si $p\neq 0$, alors $\int_0^{2\pi} e^{ip\theta}\,\mathrm{d}\theta = \left[\frac{e^{ip\theta}}{ip}\right]_0^{2\pi} = \frac{e^{2i\pi\theta}-1}{ip} = 0$

Et donc $\int_0^{2\pi} e^{i(k-n)\theta}\,\mathrm{d}\theta = 2\pi$ si $k=n$ et $\int_0^{2\pi} e^{i(k-n)\theta}\,\mathrm{d}\theta = 0$ si $k\neq n$, de telle sorte que :

$$L(r,n) = \sum_{k\geqslant 0}\frac{a_k r_k}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(k-n)\theta}\,\mathrm{d}\theta = \frac{a_n r_n}{2\pi}\times 2\pi = a_n r^n$$

2. *En déduire que, si f est bornée sur $\mathbb{C}$, alors f est constante*

→ Supposons f bornée sur $\mathbb{C}$.
Il existe donc $M>0$ tel que, pour tout $z\in\mathbb{C}$, $|f(z)|\leqslant M$

→ Ainsi :

$$\begin{aligned} |L(r,n)| &= \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(re^{i\theta}\right)e^{-in\theta}\,\mathrm{d}\theta\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f\left(re^{i\theta}\right)e^{-in\theta}\right|\,\mathrm{d}\theta \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|\left|e^{-in\theta}\right|\,\mathrm{d}\theta \\ &\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|\,\mathrm{d}\theta \leqslant \frac{1}{2\pi}\times M\times 2\pi = M \end{aligned}$$

Ainsi, si f bornée sur $\mathbb{C}$, $L(r,n) = a_n r^n$ est aussi borné sur $\mathbb{C}$, et par la même borne que f.

→ Soit, alors $n\geqslant 1$, fixé et regardons, maintenant $\lim_{r\to+\infty}|L(r,n)| = \lim_{r\to+\infty}|a_n|\,r^n$. Nous avons, de manière évidente, si $n\geqslant 1$, $\lim_{r\to+\infty}|a_n|\,r^n = +\infty$.
Ce qui est en contradiction avec le fait que $L(r,n) = a_n r^n$ soit borné sur $\mathbb{C}$ et que f soit bornée sur $\mathbb{C}$, sauf, sui pour $n\geqslant 1$, $a_n = 0$.

Ainsi, $f(z) = \sum_{n\geqslant 0} a_n z^n = a_0$ et donc f est constante.

3. *En déduire une démonstration du théorème de D'Alembert.*

Rappel du théorème de D'Alembert

Tout polynôme non constant, à coefficients complexes, admet au moins une racine complexe
C'est le théorème fondamental de l'Algèbre

Pour cela, voir Wikipédia

Soit $P\in\mathbb{C}[X]$ non constant, c'est à dire de degré au moins 1, et n'admettant aucune racine dans $\mathbb{C}$.

Alors, la fonction $F(z) = \dfrac{1}{P(z)}$ est bornée et développable en série entière, avec un rayon de convergence infini.

D'après la question précédente, F est une fonction constante, c'est à dire que, pour tout $z\in\mathbb{C}$, $F(z) = k \Longleftrightarrow P(z) = \dfrac{1}{k}$, c'est à dire que le polynôme serait constant. Il y a donc contradiction.

Donc, tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ non constant admet aumoins une racine dans $\mathbb{C}$

Exercice 46 :

1. *Nous considérons 2 réels α et β tels que $0 < \alpha < \beta < 2\pi$ fixés une fois pour toutes. Nous considérons aussi la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :*

$$I_n = \int_\alpha^\beta \sum_{k=1}^n e^{ik\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

Démontrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ admet une limite finie lorsque n tend vers $+\infty$

$\Rightarrow$ Tout d'abord, nous avons $\displaystyle\sum_{k=1}^n e^{ik\theta} = \frac{e^{i\theta}\left(1-e^{in\theta}\right)}{1-e^{i\theta}}$, et donc :

$$I_n = \int_\alpha^\beta \sum_{k=1}^n e^{ik\theta}\,\mathrm{d}\theta = \int_\alpha^\beta \frac{e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}}\,\mathrm{d}\theta - \int_\alpha^\beta \frac{e^{i(n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}}\,\mathrm{d}\theta$$

Comme $0 < \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta < 2\pi$, la fonction $\dfrac{1}{1-e^{i\theta}}$ est continue sur l'intervalle $[\alpha;\beta]$ et donc, d'après le lemme de Riemann-Lebesgue vu en L_1, nous avons $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_\alpha^\beta \frac{e^{i(n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}}\,\mathrm{d}\theta = 0$ et donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = \int_\alpha^\beta \frac{e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}}\,\mathrm{d}\theta$

La suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ admet donc une limite finie lorsque n tend vers $+\infty$, et cette limite est $\displaystyle\int_\alpha^\beta \frac{e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}}\,\mathrm{d}\theta$

$\Rightarrow$ Calcul de $\displaystyle\int_\alpha^\beta \frac{e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}}\,\mathrm{d}\theta$

$\Rightarrow$ Remarquons que :

$$\begin{aligned}
\frac{e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}} &= \frac{e^{i\theta}\left(1-e^{-i\theta}\right)}{\left(1-e^{i\theta}\right)\left(1-e^{-i\theta}\right)} = \frac{e^{i\theta}-1}{2-2\cos\theta} \\
&= \frac{(\cos\theta - 1 + i\sin\theta)}{2(1-\cos\theta)} = -\frac{1}{2} + i\frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{4\sin^2\frac{\theta}{2}} \\
&= -\frac{1}{2} + i\frac{\frac{1}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Ainsi, $\displaystyle\int_\alpha^\beta \frac{e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}}\,\mathrm{d}\theta = \int_\alpha^\beta \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\frac{1}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\right)\mathrm{d}\theta = \left[-\frac{\theta}{2} + i\ln\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|\right]_\alpha^\beta$

Comme $0 < \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta < 2\pi$, nous avons $0 < \dfrac{\theta}{2} < \pi$ et donc $\sin\dfrac{\theta}{2} > 0$, d'où

$$\int_\alpha^\beta \frac{e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}}\,\mathrm{d}\theta = -\frac{\beta}{2} + i\ln\sin\frac{\beta}{2} + \frac{\alpha}{2} - i\ln\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha-\beta}{2} + i\ln\left(\frac{\sin\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\right)$$

Ainsi, pour faire plus simple : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = \frac{\alpha-\beta}{2} + i\ln\left(\frac{\sin\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\right)$

2. *En déduire que les séries $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{e^{in\alpha}}{n}$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{e^{in\beta}}{n}$ sont de même nature*

Revenons au calcul de $\displaystyle\int_\alpha^\beta \sum_{k=1}^n e^{ik\theta}\,\mathrm{d}\theta = \sum_{k=1}^n \int_\alpha^\beta e^{ik\theta}\,\mathrm{d}\theta$

$\Rightarrow$ Calculons donc $\displaystyle\int_\alpha^\beta e^{ik\theta}\,\mathrm{d}\theta$

Rien de très difficile :

$$\int_\alpha^\beta e^{ik\theta}\,\mathrm{d}\theta = \left[\frac{e^{ik\theta}}{ik}\right]_\alpha^\beta = \left[\frac{-ie^{ik\theta}}{k}\right]_\alpha^\beta = i\left(\frac{-ie^{ik\alpha}}{k} - \frac{-ie^{ik\beta}}{k}\right)$$

⇒ De telle sorte que :

$$\int_\alpha^\beta \sum_{k=1}^n e^{ik\theta}\,\mathrm{d}\theta = \sum_{k=1}^n \int_\alpha^\beta e^{ik\theta}\,\mathrm{d}\theta = i\sum_{k=1}^n \frac{e^{ik\alpha}}{k} - i\sum_{k=1}^n \frac{e^{ik\beta}}{k}$$

⇒ Nous sommes, ici, devant deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ où $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{e^{ik\alpha}}{k}$ et $v_n = \sum_{k=1}^n \frac{ie^{ik\beta}}{k}$ telles que $\lim_{n\to+\infty}(u_n - v_n)$ est finie.

Alors, les 2 suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont de même nature : c'est qu'elles sont, ou bien toutes les deux convergentes, ou bien toutes les deux divergentes.

En effet ; supposons l'une des deux convergentes et l'autre divergente.
On prend, par exemple $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergente.
Alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée et la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ étant divergente, la suite $(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'admet pas de limite ; ce qui est contradictoire.
Nous aurions la même démonstration si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est divergente et la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, convergente.

Les 2 suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont donc de même nature.

3. *Démontrer que, pour tout $\theta \in]0;2\pi[$, la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{e^{in\theta}}{n}$ est convergente et donner sa limite*

⇒ Montrons que, pour tout $\theta \in]0;2\pi[$, la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{e^{in\theta}}{n}$ est convergente.

Nous venons de montrer que les séries $\sum_{n\geqslant 1} \frac{e^{in\alpha}}{n}$ et $\sum_{n\geqslant 1} \frac{e^{in\beta}}{n}$ sont de même nature.

En prenant $\alpha = \theta$ et $\beta = \pi$, nous voyons que les séries $\sum_{n\geqslant 1} \frac{e^{in\theta}}{n}$ et $\sum_{n\geqslant 1} \frac{e^{in\pi}}{n}$ sont de même nature.

Or, $\sum_{n\geqslant 1} \frac{e^{in\pi}}{n} = \sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$ est une série numérique alternée convergente. Ainsi, pour tout $\theta \in]0;2\pi[$, la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{e^{in\theta}}{n}$ est convergente.

⇒ Recherche de la somme de $\sum_{n\geqslant 1} \frac{e^{in\theta}}{n}$

Nous avons :

$$i\sum_{n\geqslant 1} \frac{e^{in\theta}}{n} - i\sum_{n\geqslant 1} \frac{e^{in\pi}}{n} = \frac{\theta-\pi}{2} + i\ln\left(\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\right)$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n} - \sum_{n\geqslant 1} \frac{e^{in\theta}}{n} = -\ln\left(\frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}}\right) + i\frac{\theta-\pi}{2}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$-\ln 2 - \sum_{n\geqslant 1} \frac{e^{in\theta}}{n} = \ln\left(\sin\frac{\theta}{2}\right) + i\frac{\theta-\pi}{2}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$-\sum_{n\geqslant 1} \frac{e^{in\theta}}{n} = \ln 2 + \ln\left(\sin\frac{\theta}{2}\right) + i\frac{\theta-\pi}{2}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{e^{in\theta}}{n} = -\ln 2\left(\sin\frac{\theta}{2}\right) - i\frac{\theta-\pi}{2}$$

Nous avons donc : $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{e^{in\theta}}{n}=-\ln 2\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)+i\frac{\pi-\theta}{2}$

En nous intéressant aux parties réelles et aux parties imaginaires, nous avons :

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{\cos n\theta}{n}=-\ln 2\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)\ \text{ et }\ \sum_{n\geqslant 1}\frac{\sin n\theta}{n}=\frac{\pi-\theta}{2}$$

Quelques considérations :

Nous avons vu que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{z^n}{n}$ admettait pour rayon de convergence 1 qu'elle était divergente pour $z=1$ *(série harmonique)*, convergente pour $z=-1$ *(série alternée)*.

Dans cet exercice, nous avons montré que si $|z|=1$ *(c'est à dire si $z=e^{i\theta}$)* avec $z\neq 1$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{z^n}{n}$ était convergente.

Ceci montre que le comportement d'une série sur le cercle de convergence apparaît erratique

Chapitre 9

Séries trigonométriques, séries de Fourier

La présentation des séries de Fourier est un casse-tête ! ! Arriver des séries numériques, des séries de fonctions et des séries entières pour se retrouver devant un être mathématique aussi puissant mais qui demande beaucoup de doigté est une réelle aventure.
Ainsi, avant de traiter des séries de Fourier, nous présenteons les séries trigonométriques.
Pour traiter complètement les séries de Fourier,nous ne disposons pas encore des classes de fonctions intégrables au sens de Lebesgue. Pour cette première approche, je me suis donc placé dans le cadre de l'intégrale de Riemann, avec les outils du L_2.
L'étude commence par la convergence en moyenne quadratique, puis la convergence ponctuelle avec des résultats sur la convergence uniforme.

9.1 Séries Trigonométriques

9.1.1 Définition

On appelle série trigonométrique, une série de la forme $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{inx}$

Remarque 1 :

1. Il est possible de donner une autre définition de série trigonométrique :

   On appelle série trigonométrique une série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n(x)$ dont le terme général $u_n(x)$ est de la forme

   $$u_0(x) = a_0 \text{ et pour } n \in \mathbb{N}^* u_n(x) = a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

   Dans ce cas, cette série est à valeurs réelles alors que la série définie dans la définition 9.1.1 la fonction est à valeurs dans $\mathbb{C}$
2. On peut avoir une série trigonométrique de la forme $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n e^{inx}$; c'est, en fait, un cas particulier de série entière avec $z = e^{ix}$, et donc, si le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ est $\rho > 1$, il n'y a pas de problème de convergence.

Exemple 14 :

Exemples de séries trigonométriques.

1. La série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{\cos nx}{n^2}$ est trigonométrique.
2. La série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{ne^{inx}}{n^2+1}$ est une série trigonométrique

9.1.2 Définition

1. Une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, 2π-périodique, est développable en série trigonométrique si elle est limite simple d'une série trigonométrique
2. Une série trigonométrique $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{inx}$ est convergente sur une partie $D \subset \mathbb{R}$ s'il existe une fonction $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ qui vérifie l'assertion suivante :

$$(\forall x \in D)\,(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists N_{x,\varepsilon} \in \mathbb{N}) \left(p \geqslant N_{x,\varepsilon} \Longrightarrow \left| \sum_{n=-p}^{p} a_p e^{ipx} - f(x) \right| < \varepsilon \right)$$

Et on écrit $f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{inx}$

Remarque 2 :

1. La définition 9.1.2 est la définition de la convergence simple.
2. Une série trigonométrique est une série de fonctions particulières définies sur tout $\mathbb{R}$. Par conséquent, tous les théorèmes et propositions vus dans le chapitre des séries de fonctions restent vrais
3. On aurait pu donner la définition de convergence simple, de convergence normale

9.1.3 Proposition

Si la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|$ converge, alors la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

Démonstration

1. Le fait que la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|$ converge signifie que $\sum_{n \in \mathbb{N}} |c_n|$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}} |c_{-n}|$ convergent.
2. Donc, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$ $\left|c_n e^{inx}\right| \leqslant |c_n|$, et les séries $\sum_{n \in \mathbb{N}} c_n e^{inx}$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}} c_{-n} e^{-inx}$ convergent normalement
3. Donc la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

Remarque 3 :

1. De la convergence normale sur $\mathbb{R}$, on déduit la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$
2. De la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$, on tire que si S est la somme de $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}$, c'est à dire $S(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}$, S est continue sur $\mathbb{R}$ puisque les fonctions e^{inx} son continues sur $\mathbb{R}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$; de plus, S est une fonction périodique et de période 2π
3. Dans ce cas, si la somme est continue, cela n'implique en rien sa dérivabilité

Si nous prenons pour exemple la fonction de Weierstrass définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$W(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\cos 3^n x}{2^n}$$

La série $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^n}$ étant convergente, la série $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\cos 3^n x}{2^n}$ est normalement convergente et donc continue sur $\mathbb{R}$. Cependant, la série dérivée $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N}} -\frac{3^n}{2^n} \sin 3^n x$ est divergente.

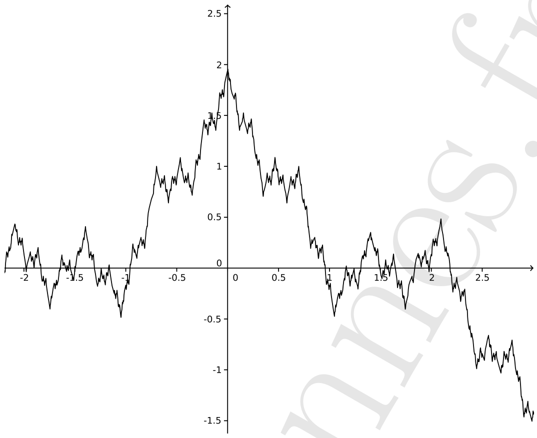

FIGURE 9.1 – Le début de la fonction de Weierstrass. $W(x) = \cos x + \dfrac{\cos 3x}{2} + \dfrac{\cos 9x}{4} + \dfrac{\cos 27x}{8} + \dfrac{\cos 81x}{16} + \dfrac{\cos 243x}{32} + \dfrac{\cos 729x}{64}$

Il faut entrer dans les conditions du théorème 7.2.3 pour que la somme de la série trigonométrique soit dérivable, entre autres que la série dérivée converge uniformément.

4. Exemple : les séries $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{e^{inx}}{n^\alpha}$ convergent pour tout α entier strictement supérieur à 1

9.1.4 Proposition

Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 2 suites numériques réelles qui tendent vers 0 en décroissant, c'est à dire que :
- $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} b_n = 0$
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} \leqslant a_n$ et $b_{n+1} \leqslant b_n$

Alors, la série trigonométrique $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N}} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ converge pour tout $x \in \mathbb{R} - 2\pi\mathbb{Z}$

Démonstration

On utilise la règle d'Abel pour les séries vue en 6.5.2.

1. Soient $m \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$ avec $m \leqslant n$

On appelle $U_{m,n}(x) = \sum_{k=m}^{n} \cos kx$ et $V_{m,n}(x) = \sum_{k=m}^{n} \sin kx$, alors, pour $x \neq 2k\pi$:

$$\begin{aligned} U_{m,n}(x) + iV_{m,n}(x) &= \sum_{k=m}^{n} \cos kx + i \sin kx \\ &= \sum_{k=m}^{n} e^{ikx} = e^{imx} \sum_{k=m}^{n} e^{i(k-m)x} = e^{imx} \sum_{k=0}^{n-m} e^{ikx} \\ &= e^{imx} \frac{1 - e^{i(n-m+1)x}}{1 - e^{ix}} \\ &= e^{imx} \frac{\sin\left(\frac{n-m+1}{2}\right)x}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \end{aligned}$$

Donc$|U_{m,n}(x) + iV_{m,n}(x)| \leqslant \left| e^{imx} \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\right)x}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \right| \leqslant \frac{1}{\left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right|}$.

Alors, comme $|U_{m,n}(x)| \leqslant |U_{m,n}(x) + iV_{m,n}(x)|$, et que $|V_{m,n}(x)| \leqslant |U_{m,n}(x) + iV_{m,n}(x)|$, nous avons :

$$\begin{cases} |U_{m,n}(x)| \leqslant \dfrac{1}{\left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right|} \\ |V_{m,n}(x)| \leqslant \dfrac{1}{\left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right|} \end{cases}$$

2. Regardons la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   Nous avons $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ et regardons $\sum_{n\geqslant 0} |a_{n+1} - a_n|$

$$\sum_{k=0}^{n} |a_{k+1} - a_k| = Sum_{k=0}^{n} a_{k+1} - a_k = a_{n+1} - a_0$$

   Comme $\lim_{n\to+\infty} a_{n+1} = 0$, nous avons $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} |a_{k+1} - a_k| = -a_0$ qui converge, et d'après 6.5.2, nous avons la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \cos nx$ qui converge

   De la même manière, nous démontrons que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n \sin nx$ qui converge

D'après le lemme d'Abel 6.5.2 pour les séries, pour $x \neq 2k\pi$, les séries $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \cos nx$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n \sin nx$ sont convergentes, et donc, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ est convergente.

Remarque 4 :

1. Il est immédiat que si $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une suite numérique complexe telle que : $a_n = c_n + c_{-n}$ et $b_n = i(c_n - c_{-n})$ soient réels et tendent vers 0 en décroissant, alors la série trigonométrique $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ converge pour tout $x \neq 2k\pi$, et, dans ce cas, nous avons la convergence des deux séries $\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n e^{inx}$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} c_{-n} e^{-inx}$
2. Si la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ converge, quelle est la nature de $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$?
   La réponse pose peu de problème **en cas de convergence normale :**
   $\Rightarrow$ Elle est périodique et de période 2π
   $\Rightarrow$ Elle est continue ;
   $\Rightarrow$ Si elle est dérivable, alors sa dérivée est $f'(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} inc_n e^{inx}$

9.1.5 Série trigonométrique associée à une série entière

1. Soit $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.

   On sait que, pour tout $r \in \mathbb{R}$, tel que $0 < r < R$, la série trigonométrique $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n r^n e^{inx}$ est normalement convergente *(on a remplacé le z dans la série entière par re^{ix})*, et nous avons, bien évidemment,
$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n r^n e^{inx} = f\left(re^{ix}\right)$$

2. **Exemple**

   Pour $z \in \mathbb{C}$ et $|z| < 1$, nous avons : $\sum_{n\in\mathbb{N}} z^n = \frac{1}{1-z}$, et donc, $\sum_{n\in\mathbb{N}} r^n e^{inx}$ est une série trigonométrique du type $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ avec $c_n = r^n$ si $n \geqslant 0$ et $c_n = 0$ si $n < 0$.

   Nous avons, pour $0 \leqslant r < +1$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} r^n e^{inx} = \frac{1}{1-re^{ix}}$.

   De plus,
$$\frac{1}{1-re^{ix}} = \frac{1-re^{-ix}}{\left(1-re^{ix}\right)\left(1-re^{-ix}\right)} = \frac{1-re^{-ix}}{r^2-2r\cos x+1}$$
   De telle sorte que, pour $0 \leqslant r < +1$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} r^n \cos nx = \frac{1-r\cos x}{r^2-2r\cos x+1}$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} r^n \sin nx = \frac{r\sin x}{r^2-2r\cos x+1}$

9.2 Les polynômes trigonométriques

9.2.1 Définition

Soit $N \in \mathbb{N}$
On appelle polynôme trigonométrique de degré N, une expression P_N de la forme
$$P_N(x) = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ikx}$$
Où les c_k sont des nombres complexes $(c_k \in \mathbb{C})$

Remarque 5 :

1. Nous avons $P_0(x) = c_0 e^{i0x} = c_0$. Les constantes peuvent donc aussi être considérées comme des polynômes trigonométriques
2. Un polynôme trigonométrique peut aussi s'écrire : $P_N(x) = c_0 + \sum_{k=1}^{N}\left(c_k e^{ikx} + c_{-k}e^{-ikx}\right)$
3. On peut avoir $c_k = c_{-k}$, et alors $P_N(x) = c_0 + \sum_{k=1}^{N} c_k\left(e^{ikx}+e^{-ikx}\right) = c_0 + 2\sum_{k=1}^{N} c_k \cos kx$
4. De même, il est tout autant possible d'avoir $c_k = -c_{-k}$ et alors
$$P_N(x) = c_0 + \sum_{k=1}^{N} c_k\left(e^{ikx}-e^{-ikx}\right) = c_0 + 2i\sum_{k=1}^{N} c_k \sin kx$$

5. En utilisant les fonctions trigonométriques, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} P_N(x) = & \quad c_0 + \sum_{k=1}^{N} c_k (\cos kx + i \sin kx) + \sum_{k=1}^{N} c_{-k} (\cos kx - i \sin kx) \\ = & \quad c_0 + \sum_{k=1}^{N} (c_k + c_{-k}) \cos kx + \sum_{k=1}^{N} i (c_k - c_{-k}) \sin kx \end{aligned}$$

Et, si nous posons, $a_0 = 2c_0$, $a_k = c_k + c_{-k}$, $b_k = i(c_k - c_{-k})$, c'est à dire $c_0 = \dfrac{a_0}{2}$, $c_k = \dfrac{a_k - ib_k}{2}$, $c_{-k} = \dfrac{a_k + ib_k}{2}$, nous avons :

$$P_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} a_k \cos kx + \sum_{k=1}^{N} ib_k \sin kx$$

6. Si les termes $(a_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ et $(b_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ sont réels, alors $c_{-k} = \overline{c_k}$ et $a_k = 2\,\mathrm{Re}(c_k)$ et $b_k = -2\,\mathrm{Im}(c_k)$. A ce moment là, nous avons :

$$P_N(x) = c_0 + \sum_{k=1}^{N} \left(c_k e^{ikx} + \overline{c_k} e^{-ikx} \right)$$

7. Les polynômes trigonométriques, considérés comme des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, sont des fonctions indéfiniment dérivables et périodiques de période 2π. Nous pourrons les étudier sur un intervalle de longueur 2π

9.2.2 Théorème

1. $\mathrm{T}[x]$ est l'ensemble des polynômes trigonométriques. Alors $\mathrm{T}[x]$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel
2. $\mathrm{T}_N[x]$ est l'ensemble des polynômes trigonométriques de degré inférieur ou égal à N
   Alors, $\mathrm{T}_N[x]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{T}[x]$ de dimension $2N+1$
   La base canonique est donnée par $\mathcal{B} = \{e_k$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et $-N \leqslant k \leqslant N\}$ où e_k est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e_k(x) = e^{ikx}$

Démonstration

1. Tous les éléments de $\mathrm{T}[x]$ sont des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ indéfiniment dérivables et périodiques de période 2π.
   Appelons $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ indéfiniment dérivables. $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel . Nous allons montrer que $\mathrm{T}[x]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.
   - Il est évident que $\mathrm{T}[x] \subset \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et que $\mathrm{T}[x] \neq \emptyset$

     En effet, la fonction nulle $\mathcal{O}$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ $\mathcal{O}(x) = 0$ est un élément de $\mathrm{T}[x]$
   - Soient $P \in \mathrm{T}[x]$,$Q \in \mathrm{T}[x]$, $\lambda \in \mathbb{C}$ et $\mu \in \mathbb{C}$. Alors :

     $$(\lambda P + \mu Q)(x) = \lambda P(x) + \mu Q(x) = \lambda \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ikx} + \mu \sum_{k=-N_1}^{N_1} d_k e^{ikx}$$

     En supposant $N \geqslant N_1$, nous avons $(\lambda P + \mu Q)(x) = \lambda \displaystyle\sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ikx} + \mu \sum_{k=-N}^{N} d_k e^{ikx}$ avec $d_k = 0$ pour $-N \leqslant k \leqslant -N_1 - 1$ et $N_1 \leqslant k \leqslant N$ Ainsi, $(\lambda P + \mu Q)(x) = \lambda \displaystyle\sum_{k=-N}^{N} (\lambda c_k + \mu d_k) e^{ikx}$

     Nous avons bien $\lambda P + \mu Q \in \mathrm{T}[x]$

$\mathrm{T}[x]$ est bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$

2. $\mathrm{T}_N[x]$ est clairement un sous-espace vectoriel de $\mathrm{T}[x]$ de famille génératrice $\{e_k$ avec $k\in\mathbb{Z}$ et $-N\leqslant k\leqslant N\}$. En fait, nous avons $\mathrm{T}_N[x]=\mathrm{Vect}(\{e_k$ avec $k\in\mathbb{Z}$ et $-N\leqslant k\leqslant N\})$; d'après le cours sur les $\mathbb{K}$-espaces vectoriels , $\mathrm{T}_N[x]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{T}[x]$
   Il faut, maintenant, montrer que c'est une famille libre.

   Soient donc $(\lambda_k)_{-N\leqslant k\leqslant N}$, $2N+1$ nombres complexes tels que $\displaystyle\sum_{k=-N}^{N}\lambda_k e_k=\mathcal{O}$. Il faut démontrer que, pour tout $k\in\mathbb{Z}$ tels que $-N\leqslant k\leqslant N$, $\lambda_k=0$.

   L'écriture $\displaystyle\sum_{k=-N}^{N}\lambda_k e_k=\mathcal{O}$ signifie que, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\displaystyle\sum_{k=-N}^{N}\lambda_k e_k(x)=0\iff\sum_{k=-N}^{N}\lambda_k e^{ikx}=0$
   Soit $p\in\mathbb{Z}$ avec $-N\leqslant p\leqslant N$ alors :

$$\int_0^{2\pi}\left(\sum_{k=-N}^{N}\lambda_k e^{ikx}\right)e^{-ipx}\,\mathrm{d}x=\int_0^{2\pi}\sum_{k=-N}^{N}\lambda_k e^{i(k-p)x}\,\mathrm{d}x=\sum_{k=-N}^{N}\lambda_k\int_0^{2\pi}e^{i(k-p)x}\,\mathrm{d}x=0$$

   Or, si $k\neq p$

$$\int_0^{2\pi}e^{i(k-p)x}\,\mathrm{d}x=\left[\frac{e^{i(k-p)x}}{i(k-p)}\right]_0^{2\pi}=\frac{e^{2i(k-p)\pi}-1}{i(k-p)}=0$$

   Et si $k=p$, alors $\displaystyle\int_0^{2\pi}e^{i(k-p)x}\,\mathrm{d}x=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}x=2\pi$.

   De telle sorte que $\displaystyle\sum_{k=-N}^{N}\lambda_k\int_0^{2\pi}e^{i(k-p)x}\,\mathrm{d}x=\lambda_p\times 2\pi=0$ et donc $\lambda_p=0$

   Nous venons de montrer que, pour tout $p\in\mathbb{Z}$ avec $-N\leqslant p\leqslant N$ alors $\lambda_p=0$. La famille génératrice $\{e_k$ avec $k\in\mathbb{Z}$ et $-N\leqslant k\leqslant N\}$ est aussi une famille libre ; c'est donc une base de $\mathrm{T}_N[x]$, et nous concluons tout de suite que $\dim\mathrm{T}_N[x]=2N+1$

Remarque 6 :

Nous avons $\mathrm{T}_N[x]\subset\mathrm{T}_{N+1}[x]$, et plus généralement, si $N\leqslant P$, $\mathrm{T}_N[x]\subset\mathrm{T}_P[x]$.
On démontre aussi, et facilement, que $\mathrm{T}[x]=\bigcup\limits_{N\geqslant 0}\mathrm{T}_N[x]$

9.2.3 Définition

On dit que ce polynôme converge si $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}P_N(X)=\lim_{N\to+\infty}\sum_{k=-N}^{N}c_k e^{ikx}$ existe.

Remarque 7 :

Attention !
La définition 9.2.3 de la convergence est propre aux polynômes trigonométriques. Ce n'est pas la définition la plus communément admise :

1. On dit qu'une série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}}c_k e^{ikx}$ converge si $\displaystyle\lim_{\substack{N_1\to+\infty\\N_2\to-\infty}}\sum_{k=N_2}^{N_1}c_k e^{ikx}$ existe
2. De manière générale, si $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, on dit que la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}}u_n$ est convergente, si et seulement si les séries $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}u_n$ et $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}u_{-n}$ sont convergentes, et on pose alors :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}u_n=\sum_{n\in\mathbb{N}}u_n+\sum_{n\in\mathbb{N}}u_{-n}$$

3. En fait, nous avons l'implication :

$$\lim_{\substack{N_1\to+\infty\\ N_2\to-\infty}} \sum_{k=N_2}^{N_1} c_k e^{ikx} \text{ existe} \Longrightarrow \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ikx} \text{ existe}$$

4. Dans la définition 9.2.3 ci-dessus, il y a symétrie.

9.2.4 Définition et théorème

1. Dans $\mathrm{T}[x]$, nous définissons l'application φ par :

$$\begin{cases} \varphi : \mathrm{T}[x] \times \mathrm{T}[x] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (f,g) & \longmapsto & \varphi[(f,g)] = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\,\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x \end{cases}$$

   Alors :
   (a) φ est un produit scalaire sur $\mathrm{T}[x]$
   (b) Nous noterons désormais $\varphi[(f,g)] = \langle f/g\rangle$ et la norme issue du produit scalaire $\|f\|_2 = \sqrt{\langle f/f\rangle}$
2. φ restreinte à $\mathrm{T}_N[x]$ est aussi un produit scalaire, et, pour ce produit scalaire, la famille $\mathcal{B} = \{e_k \text{ avec } k\in\mathbb{Z} \text{ et } -N\leqslant k\leqslant N\}$ est une base orthonormée de $\mathrm{T}_N[x]$

Démonstration

1. Montrer que φ est un produit scalaire, ne pose pas de difficultés. Il suffira d'utiliser les propriétés de l'intégrale.
   (a) **Propriété de linéarité**
   → Soient $f\in\mathrm{T}[x]$, $f_1\in\mathrm{T}[x]$ et $g\in\mathrm{T}[x]$, alors :

$$\begin{aligned} \varphi[(f+f_1,g)] &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(f(x)+f_1(x))\,\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_1(x)\,\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x \\ &= \varphi[(f,g)] + \varphi[(f_1,g)] \end{aligned}$$

   → On démontrerait, de la même manière, que, pour tout $f\in\mathrm{T}[x]$, $g\in\mathrm{T}[x]$ et $g_1\in\mathrm{T}[x]$ nous avons $\varphi[(f,g+g_1)] = \varphi[(f,g)] + \varphi[(f,g_1)]$
   → Idem pour démontrer que, pour tout $\lambda\in\mathbb{C}$, $\varphi[(\lambda f,g)] = \lambda\varphi[(f,g)]$ et $\varphi[(f,\lambda g)] = \overline{\lambda}\varphi[(f,g)]$
   (b) **Utilisation du conjugué**
   Nous avons, et de manière très classique :

$$\overline{\varphi[(f,g)]} = \overline{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\overline{f(x)\,\overline{g(x)}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\overline{f(x)}g(x)\,\mathrm{d}x = \varphi[(g,f)]$$

   (c) Bien entendu, que pour tout $f\in\mathrm{T}[x]$, non nulle, f étant continue,

$$\varphi[(f,f)] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\overline{f(x)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(x)|^2\,\mathrm{d}x > 0$$

   (d) D'autre part,
   → Si $f=\mathcal{O}$, il est évident que $\varphi[(f,f)] = 0$
   → Réciproquement, supposons $\varphi[(f,f)] = 0$; alors, $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}|f(x)|^2\,\mathrm{d}x = 0$. f étant une fonction continue, $|f|^2$ est aussi continue ; elle est en plus positive. Donc, des théorème d'intégration, $|f|^2$ est nulle et aussi f

Nous avons donc $\varphi[(f,f)] = 0 \Longleftrightarrow f = \mathcal{O}$

φ est donc bien un produit scalaire.

2. **La base $\mathcal{B} = \{e_k$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et $-N \leqslant k \leqslant N\}$ est orthonormée**

   Très simple!!

   D'après des calculs déjà réalisés, si $k \neq p$:

$$\begin{aligned}\langle e_k / e_p\rangle &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e_k(x)\overline{e_p(x)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e_k(x)\overline{e_p(x)}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{ikx}e^{-ipx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(k-p)x}\,\mathrm{d}x = 0\end{aligned}$$

   Et si $k = p$, alors $\langle e_k / e_k\rangle = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \mathrm{d}x = 1$

   La base $\mathcal{B} = \{e_k$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et $-N \leqslant k \leqslant N\}$ est bien orthonormée

Remarque 8 :

1. Le fait que les vecteurs $\mathcal{B} = \{e_k$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et $-N \leqslant k \leqslant N\}$ forme une famille orthonormée montre que cette famille $\mathcal{B}$ est indépendante.
2. Le fait que la base $\mathcal{B} = \{e_k$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et $-N \leqslant k \leqslant N\}$ soit orthonormée a des conséquences intéressantes

9.2.5 Coefficients de Fourier

Soit $f \in \mathrm{T}_N[x]$, alors $f(x) = \displaystyle\sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ikx}$. Alors :

1. Pour tout n tel que $-N \leqslant n \leqslant N$, $c_n = \langle f / e_n\rangle$

   Autrement dit : $c_n = \langle f / e_n\rangle = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\,e^{-inx}\,\mathrm{d}x$
2. c_n est le coefficient de Fourier d'ordre n de f

Démonstration

La démonstration est évidente et laissée au lecteur

Remarque 9 :

1. Souvent, pour bien préciser que le coefficient de Fourier d'ordre n dépend de f, on le note $c_n(f)$
2. Pour $f \in \mathrm{T}_N[x]$, nous pouvons écrire $f = \displaystyle\sum_{k=-N}^{N} \langle f / e_k\rangle\, e_k$

9.2.6 Théorème

Soit $f \in \mathrm{T}_N[x]$, avec $f(x) = \displaystyle\sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ikx}$ alors $\|f\|_2^2 = \displaystyle\sum_{k=-N}^{N} |c_k|^2$

Démonstration

Comme la base $\mathcal{B} = \{e_k$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et $-N \leqslant k \leqslant N\}$ est orthonormée, nous pouvons utiliser le théorème de Pythagorre.

Il est aussi possible de calculer directement et cela ne doit poser aucune difficulté

9.3 Les Séries de Fourier

9.3.1 Les espaces de fonctions

Pour poursuivre notre étude, nous devons préciser des espaces de fonctions avec lesquels nous allons travailler.

1. Nous notons $\mathcal{C}(T)$ l'espace des **fonctions continues** sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{C}$ et qui sont 2π-périodiques.
2. Nous notons $\mathcal{C}^k(T)$ le sous-espace de $\mathcal{C}(T)$ des fonctions k **fois continuement dérivables** sur le tore T et qui sont 2π-périodiques.
3. Nous notons $\mathcal{C}_M(T)$ les fonctions continues par morceaux, c'est à-dire les fonctions 2π-périodiques qui ont un nombre fini $a_1, \cdots, a_s$ de discontinuités sur une période $[0;2\pi]$ et qui sont prolongeables en une fonction continue sur chaque intervalle de $[0;2\pi]$ déterminé par le partage $a_1, \cdots, a_s$. C'est à dire qu'en chaque point de discontinuité a_k une telle fonction admet une limite à droite et une limite à gauche.
4. Nous notons $\mathcal{C}^1_M(T)$ les fonctions 2π-périodiques. continues par morceaux et dérivables par morceaux. Ce sont les fonctions f continues par morceaux et qui de plus réalisent les conditions suivantes :

   L'intervalle $[0;2\pi]$ peut être décomposé en un nombre fini d'intervalles $[a_i, a_{i+1}]$ tels que dans chaque intervalle ouvert $]a_i, a_{i+1}[$ la fonction f soit continue, dérivable, de dérivée f' continue par morceaux et telle que $\displaystyle\int_{a_i}^{a_{i+1}} |f'(t)|\, \mathrm{d}t$ existe *(éventuellement comme intégrale impropre)*

Remarque 10 :

Nous avons $\mathcal{C}(T) \subset \mathcal{C}_M(T)$ et $\mathcal{C}^1(T) \subset \mathcal{C}^1_M(T)$

9.3.2 Définition de coefficients de Fourier

Soit $f \in \mathcal{C}_M(T)$, c'est à dire une fonction périodique, et de période 2π continue par morceaux dans $[0,2\pi]$ et à valeurs complexes.
On appelle <u>coefficients de Fourier d'ordre k</u>, le nombre :

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\, e^{-ikt}\, \mathrm{d}t$$

Remarque 11 :

1. En prolongeant la définition de $\langle f/g\rangle$ donnée précédemment en 9.2.4 pour les polynômes trigonométriques, aux fonctions de $\mathcal{C}_M(T)$

$$\langle f/g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x$$

   nous pouvons écrire $c_k(f) = \langle f/e_k\rangle$

2. Le produit $\langle f/g\rangle$ n'est pas, dans $\mathcal{C}_M(T)$, un produit scalaire puisqu'il n'est pas défini positif, puisque si

$$\|f\|_2 = \sqrt{\langle f/f\rangle} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2\, \mathrm{d}t}$$

   On peut avoir $\|f\|_2 = 0$ sans que $f = \mathcal{O}$

   Par exemple, soit $f : [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} f : [0,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & f(x) = \left\{\begin{array}{l} 0 \text{ si } x \in [0:\pi[\cup]\pi;2\pi[\\ 5 \text{ si } x = \pi \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Nous avons $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}|f(t)|^2\,\mathrm{d}t=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}|f(t)|^2\,\mathrm{d}t+\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{\pi}^{2\pi}|f(t)|^2\,\mathrm{d}t=0$ alors que $f\neq\mathcal{O}$
$\|f\|_2$ n 'est pas une norme sur $\mathcal{C}_M(T)$ mais simplement une semi-norme .

3. Il y a plusieurs façons d'avoir une vraie norme.

   Par exemple en travaillant non pas sur $\mathcal{C}_M(T)$, mais sur $\widetilde{\mathcal{C}_M(T)}$ constitué des « **fonctions régulières** » de $\mathcal{C}_M(T)$, c'est à dire celles qui, en tout point $x\in[0,2\pi]$, vérifient

   $$\widetilde{f}(x)=\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}\quad\text{où } f\left(x^+\right)=\lim_{\substack{t\to x\\ t>x}}f(t)\ \text{ et } f\left(x^-\right)=\lim_{\substack{t\to x\\ t<x}}f(t)$$

   Si f est continue, alors $\widetilde{f}=f$, sinon, nous avons ce qu'on appelle des discontinuités de première espèce qui sont, dans un intervalle borné, toujours en nombre fini ; pour les visualiser, reportez vous à la figure 9.2

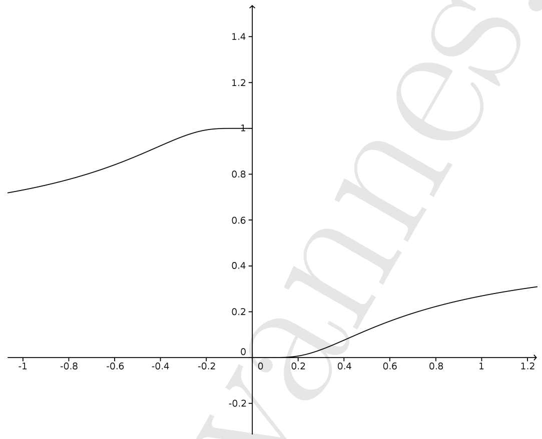

FIGURE 9.2 – Exemple de discontinuité de première espèce. $f(0^+)=0$ et $f(0^-)=+1$

   Les fonctions continues de $\mathcal{C}(T)$ sont donc bien des éléments de $\widetilde{\mathcal{C}_M(T)}$, c'est à dire $\mathcal{C}(T)\subset\widetilde{\mathcal{C}_M(T)}$

4. Nous pouvons continuer sans inconvénient à travailler avec une semi-norme. C'est ce que nous ferons pour le moment.
5. Nous allons donc écire, et nous y reviendrons souvent :

   $$\boxed{c_k(f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\,e^{-ikt}\,\mathrm{d}t=\langle f/e_k\rangle}$$

6. Soit, pour tout $n\in\mathbb{Z}$ l'application c_n définie par :

   $$\left\{\begin{array}{rcl} c_n:\mathcal{C}_M(T) & \longrightarrow & \mathbb{C}\\ f & \longmapsto & c_n(f)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}f(t)\,e^{-int}\,\mathrm{d}t\end{array}\right.$$

   → c_n est une application linéaire. Pour le démontrer, il suffit d'utiliser les propriétés du calcul intégral.
   → D'autre part, c_n est continu :

   $$|c_n(f-g)|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(t)-g(t)|\,\mathrm{d}t\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\|f-g\|_\infty\,\mathrm{d}t=\|f-g\|_\infty$$

9.3.3 Proposition

Soit $f\in\mathcal{C}_M(T)$. Alors $\|f\|_2\leqslant\|f\|_\infty$

<u>Démonstration</u>

C'est une démonstration qui ne pose pas de difficultés
Nous avons $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0;2\pi]} |f(x)|$, donc :

$$\|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \|f\|_\infty^2 \, \mathrm{d}t = \|f\|_\infty^2$$

D'où, nous avons bien $\|f\|_2 \leqslant \|f\|_\infty$

Exercice 1 :

Soit $f \in \mathcal{C}^1(T)$.
Démontrer que les coefficients de Fourier de f' vérifient, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f') = inc_n(f)$

9.3.4 Proposition

Les coefficients de Fourier d'une fonction $f \in \mathcal{C}_M(T)$ sont bornés.

<u>Démonstration</u>

Comme $f \in \mathcal{C}_M(T)$, f est continue par morceaux sur $[0;2\pi]$, donc bornée sur $[0;2\pi]$.
Supposons que, pour tout $x \in [0;2\pi]$, nous ayions $|f(x)| \leqslant \Lambda$, alors :

$$\begin{aligned} |c_k(f)| = {} & \frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi} f(t)\, e^{-ikt}\, \mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)| \left|e^{-ikt}\right| \mathrm{d}t \\ \leqslant {} & \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)| \, \mathrm{d}t \leqslant \frac{\Lambda \times 2\pi}{2\pi} = \Lambda \end{aligned}$$

Exercice 2 :

Voici un exercice classique du calcul intégral.
Soit $f \in \mathcal{C}_M(T)$, une fonction périodique de période T, intégrable sur tout intervalle borné. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_x^{x+T} f(t)\, \mathrm{d}t$, ne dépend pas de x

Remarque 12 :

Une fois cet exercice résolu, nous pourrons, par exemple, écrire que :

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\, e^{-ikt}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-ikt}\, \mathrm{d}t$$

Ce qui peut nous simplifier des calculs, surtout lorsque f est paire ou impaire.

9.3.5 Proposition

Soit $f \in \mathcal{C}_M(T)$

1. Si f est paire, alors, pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f) = c_{-n}(f)$
2. Si f est impaire, alors, pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f) = -c_{-n}(f)$
3. Si f est à valeurs réelles, alors $c_{-n}(f) = \overline{c_n(f)}$

Démonstration

1. Les deux premiers items ont une démonstration semblable, liées à la périodicité de f et de e_k. En référence à l'exercice précédent, nous avons :

$$\int_0^{2\pi} f(t)\, e^{-ikt}\,\mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-ikt}\,\mathrm{d}t$$

   (a) Supposons f paire, alors, en faisant le changement de variable $t = -u$, et donc $\mathrm{d}t = -\mathrm{d}u$, nous avons

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-ikt}\,\mathrm{d}t = -\int_{\pi}^{-\pi} f(-u)\, e^{-ik(-u)}\,\mathrm{d}u$$

   En utilisant la parité de f, nous avons :

$$-\int_{\pi}^{-\pi} f(-u)\, e^{-ik(-u)}\,\mathrm{d}u = \int_{-\pi}^{\pi} f(u)\, e^{ik(u)}\,\mathrm{d}u$$

   Ainsi :

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\, e^{-ikt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-ikt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\, e^{ik(u)}\,\mathrm{d}u = c_{-k}(f)$$

   (b) De même, si f est impaire, avec le même changement de variable $t = -u$, nous obtenons :

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-ikt}\,\mathrm{d}t = -\int_{\pi}^{-\pi} f(-u)\, e^{-ik(-u)}\,\mathrm{d}u = -\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\, e^{ik(u)}\,\mathrm{d}u$$

   Et donc $c_k(f) = -c_{-k}(f)$

2. Supposons, maintenant, f à valeurs réelles. Alors,

$$\overline{c_k(f)} = \overline{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\, e^{-ikt}\,\mathrm{d}t} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{f(t)\, e^{-ikt}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\, e^{ikt}\,\mathrm{d}t = c_{-k}(f)$$

9.3.6 Définition de série de Fourier d'une fonction f

Soit $f \in \mathcal{C}_M(T)$, une fonction périodique, de période 2π, continue par morceaux dans $[0, 2\pi]$ et à valeurs complexes.

1. On appelle série de Fourier de la fonction f la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)\, e^{inx}$
2. L'expression $S_N(f)(x) = \displaystyle\sum_{k=-N}^{N} c_k(f)\, e^{ikx}$ est la somme partielle de rang N de la série de Fourier de f.
3. Nous avons $S_N(f) = \displaystyle\sum_{k=-N}^{N} \langle f/e_k\rangle\, e_k \Longleftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}) \left(S_N(f)(x) = \sum_{k=-N}^{N} \langle f/e_k\rangle\right) e^{inx}$

Remarque 13 :

1. Remarquons que $S_N(f)(x) = \displaystyle\sum_{k=-N}^{N} c_k(f)\, e^{ikx}$, la somme partielle de rang N de la série de Fourier de f est un polynôme trigonométrique de $\mathrm{T}_N[x]$
2. C'est une question importante que de savoir si la série $\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(f)\, e^{ikx}$ converge et si oui, converge-t-elle vers la fonction f, et dans quel sens converge-t-elle ? On dit que ce polynôme converge si $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} S_N(f)(x) = \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=-N}^{N} c_k(f)\, e^{ikx}$ existe.

Rappelons que cette définition de la convergence est propre aux polynômes trigonométriques.
Dans la définition 9.3.6 ci-dessus, il y a symétrie

9.3.7 Proposition

Soit $f \in \mathcal{C}_M(T)$. Alors, $S_N(f)$ est la projection orthogonale de $f \in \mathcal{C}_M(T)$ sur l'espace des polynômes trigonométriques $\mathrm{T}_N[x]$

Démonstration

En effet, soit $f \in \mathcal{C}_M(T)$.

1. Démontrons que S_N est une projection, c'est à dire que $S_N[S_N(f)] = S_N(f)$, c'est à dire que $S_N \circ S_n = S_N$

$$\begin{aligned} S_N[S_N(f)] &= \sum_{k=-N}^{N} \langle S_N(f)/e_k\rangle e_k = \sum_{k=-N}^{N} \left\langle \sum_{j=-N}^{N} \langle f/e_j\rangle e_j/e_k \right\rangle e_k \\ &= \sum_{k=-N}^{N} \left(\sum_{j=-N}^{N} \langle f/e_j\rangle \langle e_j/e_k\rangle \right) e_k \\ &= \sum_{k=-N}^{N} \langle f/e_k\rangle e_k = S_N(f) \end{aligned}$$

   S_N est bien une projection.

2. Nous allons, maintenant, démontrer que cette projection est orthogonale, c'est à dire $\langle f - S_N(f)/S_N(f)\rangle = 0$.
   Nous pouvons écrire $f = (f - S_N(f)) + S_N(f)$ et nous avons :

$$\langle f - S_N(f)/S_N(f)\rangle = \langle f/S_N(f)\rangle - \langle S_N(f)/S_N(f)\rangle$$

   Or :

   $\rightarrow$ $\langle S_N(f)/S_N(f)\rangle = \|S_N(f)\|_2^2 = \sum_{k=-N}^{+N} |c_k(f)|^2$

   $\rightarrow$ $\langle f/S_N(f)\rangle = \left\langle f/\sum_{k=-N}^{N} \langle f/e_k\rangle e_k \right\rangle = \sum_{k=-N}^{N} \overline{\langle f/e_k\rangle} \langle f/e_k\rangle = \sum_{k=-N}^{N} \overline{c_k(f)} c_k(f) = \sum_{k=-N}^{N} |c_k(f)|^2$

   $\rightarrow$ Et donc $\langle f - S_N(f)/S_N(f)\rangle = \sum_{k=-N}^{+N} |c_k(f)|^2 - \sum_{k=-N}^{+N} |c_k(f)|^2 = 0$ et donc les fonctions f et $f - S_N(f)$ sont donc orthogonales.

   $S_N(f)$ est donc bien la projection orthogonale de $f \in \mathcal{C}_M(T)$ sur l'espace des polynômes trigonométriques $\mathrm{T}_N[x]$

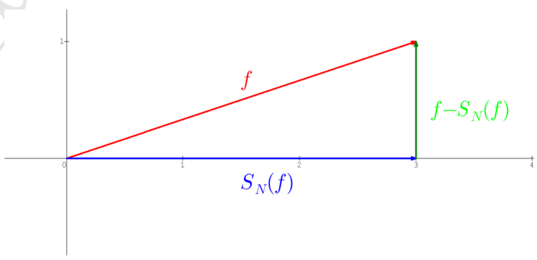

FIGURE 9.3 – Une visualisation de la projection orthogonale de f

S_N est donc bien une projection orthogonale.

Remarque 14 :

1. L'étude de la convergence se fera donc pour divers modes de convergence. Etude de convergence, veut dire **approximation de fonctions**
   Qu'est ce que **l'approximation de fonctions** ?
   Qu'est ce que cela veut dire qu'une fonction est proche d'une autre ? ? Il y a en fait, plusieurs modes pour dire qu'une fonction est proche d'une autre.
   (a) **Par la valeur absolue**
   $$d_\infty (f, g) = \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)| = \|f - g\|_\infty$$
   C'est la distance rencontrée quand on a vu la convergence uniforme ; on dit souvent que c'est **la norme de la convergence uniforme**
   Une fonction est donc proche d'une autre si $d_\infty (f, g) = \|f - g\|_\infty$ est aussi petit que possible.
   (b) **Par l'intégrale**
   On peut dire que 2 fonctions sont proches l'une de l'autre si la différence entre leurs intégrales n'est pas trop importante. On écrit alors :
   $$d_1 (f, g) = \int_a^b |f(t) - g(t)| \,\mathrm{d}t = \|f - g\|_1$$
   (c) **Au sens des moindres carrés**
   Dans $\mathcal{C}_M (T)$, l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $[0; 2\pi]$, à valeurs dans $\mathbb{C}$, on choisit comme norme sur $\mathcal{C}_M (T)$, pour de très bonnes raisons, entre autre, parce qu'elle dérive d'une forme de produit scalaire *(nous avons vu que cela n'en était pas réellement un)* :
   $$\langle f/g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x$$
   D'où la norme :
   $$\|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t$$
   dont on déduit la distance
   $$d_2 (f, g) = \|f - g\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t) - g(t)|^2 \,\mathrm{d}t}$$
   Nous commencerons par la convergence en moyenne quadratique *(ou au sens des moindres carrés)* qui se trouve être la plus adaptée aux séries de Fourier.
2. Dans la partie sur les polynômes trigonométriques, nous avons mis en évidence une base orthonormée qui nous a permis une étude commode. Il s'agit maintenant de passer au cas d'une famille orthonormée infinie, qui ne sera pas une base au sens algébrique du terme, mais une base en un sens topologique.
   Autrement dit nous allons essayer d'adapter l'aspect « géométrie euclidienne » au cas d'un nombre infini de coordonnées.
   Pour cela nous avons tout d'abord besoin de résultats d'approximation. Nous allons les énoncer et les démontrer brièvement afin de pouvoir mettre en place rapidement la théorie que nous avons en vue. Nous reviendrons plus tard plus en détail sur cet aspect.

Exemple 15 :

Exemples de calculs de coefficients de Fourier et de séries de Fourier

1. Considérons la fonction constante $f(x) = \lambda$. Alors :
   $$c_k (f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \lambda e^{-ikt} \,\mathrm{d}t = \frac{\lambda}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ikt} \,\mathrm{d}t = \begin{cases} \lambda \text{ si } k = 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$
   Ainsi, si f est constante, la série de Fourier de f est f elle-même.

2. Soit $f \in \mathcal{C}_M(T)$ telle que :

$$\left\{\begin{array}{rcl} f : [-\pi;+\pi[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \left\{\begin{array}{l} 0 \text{ si } x = -\pi \\ t \text{ si } x \in]-\pi;+\pi[\end{array}\right. \end{array}\right.$$

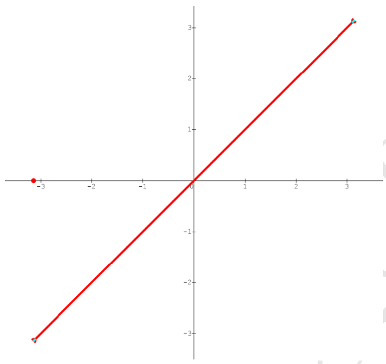

Figure 9.4 – Le graphe de f

Calculons, maintenant, les coefficients de Fourier.

— $c_k(f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\,e^{-ikt}\,\mathrm{d}t$

→ Si $k = 0$, alors $c_0(f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} t\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{2\pi}\left[\dfrac{t^2}{2}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0.$

Donc, $c_0(f) = 0$

→ Si $k \neq 0$, alors, nous avons $c_k(f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} te^{-ikt}\,\mathrm{d}t$. Pour calculer cette intégrale, nous allons faire une intégration par parties.

$$\left[\begin{array}{ll} u = t & u' = 1 \\ v' = e^{-ikt} & v = \dfrac{-1}{ik}e^{-ikt} \end{array}\right]$$

D'où :

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} te^{-ikt}\,\mathrm{d}t &= \left[\frac{-t}{ik}e^{-ikt}\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{ik}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt}\,\mathrm{d}t \\ &= -\left(\frac{\pi e^{-ik\pi} - (-\pi)\,e^{ik\pi}}{ik}\right) + \frac{1}{ik}\left[\frac{e^{-ikt}}{-ik}\right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= -\left(\frac{2\pi(-1)^k}{ik}\right) = \frac{2\pi(-1)^{k+1}}{ik}\end{aligned}$$

D'où $c_k(f) = \dfrac{1}{2\pi} \times \dfrac{2\pi(-1)^{k+1}}{ik} = \dfrac{(-1)^{k+1}}{ik}$

→ La somme partielle de rang N de la série de Fourier de f est donnée par :

$$\begin{aligned} S_N(f)(x) &= \sum_{k=1}^{N} c_k(f)\,e^{ikx} + c_{-k}(f)\,e^{-ikx} = \sum_{k=1}^{N} \frac{(-1)^{k+1}}{ik}e^{ikx} + \frac{(-1)^{-k+1}}{-ik}e^{-ikx} \\ &= \sum_{k=1}^{N} \frac{(-1)^{k+1}}{ik}\left(e^{ikx} - e^{-ikx}\right) = \sum_{k=1}^{N} \frac{(-1)^{k+1}}{ik}2i\sin kx \\ &= \sum_{k=1}^{N} \frac{2(-1)^{k+1}\sin kx}{k}\end{aligned}$$

3. **<u>Fonction en dents de scie</u>**

Soit f, définie sur $\mathbb{R}$, périodique et de période 2π, définie sur $[-\pi, +\pi]$ par $f(x) = |x|$.
Lorsque nous avons une telle définition, il est intéressant de faire le graphe de f, et de tenter d'exprimer f en fonction de x, dans des intervalles plus exotiques du type $[+\pi, +3\pi]$

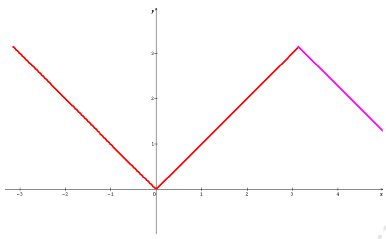

FIGURE 9.5 – Graphe de la fonction étudiée

(a) On calcule alors $c_k(f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-ikt}\,\mathrm{d}t$, et, ici,

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |t|\, e^{-ikt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\left\{\int_{-\pi}^{0} -te^{-ikt}\,\mathrm{d}t + \int_0^{\pi} te^{-ikt}\,\mathrm{d}t\right\}$$

En faisant le changement de variables $u = -t$, et donc $\mathrm{d}t = -\,\mathrm{d}u$ dans la première intégrale, nous avons :

$$\int_{-\pi}^{0} -te^{-ikt}\,\mathrm{d}t = -\int_{\pi}^{0} ue^{iku}\,\mathrm{d}u = \int_0^{\pi} ue^{iku}\,\mathrm{d}u$$

Et donc :

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\left\{\int_0^{\pi} ue^{iku}\,\mathrm{d}u + \int_0^{\pi} te^{-ikt}\,\mathrm{d}t\right\} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} t\left(e^{ikt} + e^{-ikt}\right)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} t\cos kt\,\mathrm{d}t$$

Intégrons par parties l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi} t\cos kt\,\mathrm{d}t$

$$\begin{bmatrix} u = t & u' = 1 \\ v' = \cos kt & v = \dfrac{1}{k}\sin kt \end{bmatrix}$$

Donc :

$$\int_0^{\pi} t\cos kt\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t}{k}\sin kt\right]_0^{\pi} - \frac{1}{k}\int_0^{\pi}\sin kt\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{k}\int_0^{\pi}\sin kt\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{k}\left[\frac{-\cos kt}{k}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{k^2}\left((-1)^k - 1\right)$$

Nous obtenons $c_k(f) = \dfrac{1}{\pi k^2}\left((-1)^k - 1\right)$, et on peut remarquer que $c_k(f) = c_{-k}(f)$, d'où nous avons les sommes partielles d'ordre N

$$\begin{aligned} S_N(f)(x) = &\quad c_0(f) + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k^2}\left((-1)^k - 1\right)\left(e^{ikx} + e^{-ikx}\right) \\ = &\quad c_0(f) + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k^2}\left((-1)^k - 1\right)\cos kx \end{aligned}$$

Comme $\left((-1)^k - 1\right) = 0$ si k est pair et $\left((-1)^k - 1\right) = -2$ si k est impair, nous avons :

$$S_N(f)(x) = c_0(f) - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{N}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}$$

(b) Il nous reste maintenant à calculer $C_0(f)$; or,

$$C_0(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |t| \, \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$$

Et donc, la série de Fourier de f est :

$$\boxed{\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k\geqslant 0}\frac{\cos((2k+1)x)}{(2k+1)^2}}$$

(c) Dans la figure 9.6 ci-après, nous avons superposé les graphes de $|x|$, de $S_1(f)(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{\cos 3x}{9}\right)$ et de $S_2(f)(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{\cos 3x}{9} + \frac{\cos 5x}{25}\right)$

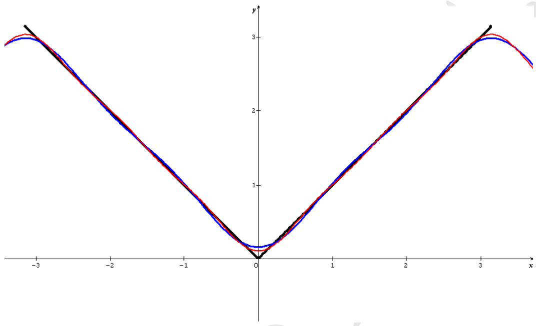

FIGURE 9.6 – Approximation de $|x|$ par les polynômes trigonométriques $S_1(f)(x)$ et $S_2(f)(x)$

4. **Fonction créneau**

La fonction créneau est la fonction périodique et de période 2π définie par :

$$f(x) = \begin{cases} -1 \text{ si } -\pi < x < 0 \\ +1 \text{ si } 0 < x < \pi \end{cases}$$

Pour le graphe, voir la figure 9.7

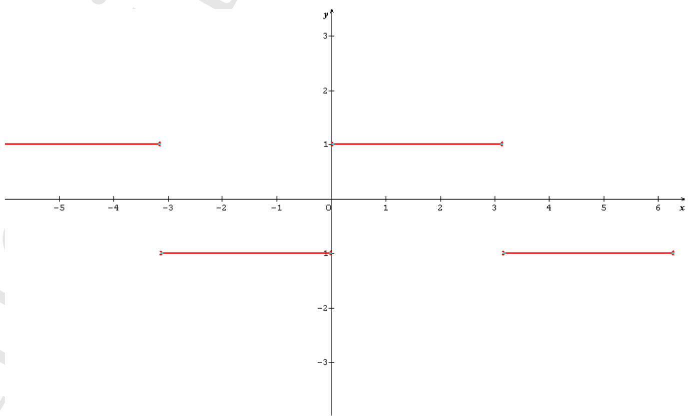

FIGURE 9.7 – Graphe de la fonction créneau

(a) Nous allons calculer les coefficients de Fourier $C_k(f)$

i. Pour $k = 0$, $C_0(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} -1 \, \mathrm{d}x + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{+\pi} \mathrm{d}x = 0$

ii. Pour $k \neq 0$

$$\begin{aligned} C_k(f) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\, e^{-ikx}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} -1e^{-ikx}\,dx + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{+\pi} e^{-ikx}\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Regardons l'intégrale $\displaystyle\int_{-\pi}^{0} -1e^{-ikx}\,\mathrm{d}x$; en faisant le changement de variables $u = -x$, nous obtenons $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = -1$, et donc

$$\int_{-\pi}^{0} -1e^{-ikx}\,\mathrm{d}x = \int_{\pi}^{0} e^{iku}\,\mathrm{d}u = -\int_{0}^{\pi} e^{iku}\,\mathrm{d}u$$

D'où, $C_k(f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{0}^{+\pi} e^{-ikx}\,\mathrm{d}x - \dfrac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} e^{ikx}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} e^{-iku} - e^{iku}\,\mathrm{d}u = \dfrac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} -2i\sin kx\,\mathrm{d}x$

Nous avons $\displaystyle\int_{0}^{\pi} -2i\sin kx\,\mathrm{d}x = 2i\left[\frac{\cos kx}{k}\right]_0^{\pi} = 2i\left(\frac{(-1)^k - 1}{k}\right)$ de telle sorte que :

$$C_k(f) = \begin{cases} 0 \text{ si } k \text{ est pair} \\ \dfrac{-4i}{2\pi k} = \dfrac{-2i}{\pi k} \text{ si } k \text{ est impair} \end{cases}$$

(b) Nous allons, maintenant, calculer la somme partielle de rang N de la série de Fourier de f. Ce polynôme trigonométrique est défini par :

$$S_N(f)(x) = \sum_{k=-N}^{N} C_k(f)\, e^{ikx} = C_0(f) + \sum_{k=1}^{N}\left(C_k(f)\, e^{ikx} + C_{-k}(f)\, e^{-ikx}\right)$$

Nous avons, d'après le point précédent, $C_0(f) = 0$ et $C_{2k}(f) = 0$, nous avons alors :

$$S_{2N+1}(f)(x) = \sum_{k=0}^{N}\left(C_{2k+1}(f)\, e^{i(2k+1)x} + C_{-(2k+1)}(f)\, e^{-i(2k+1)x}\right)$$

Or, $C_{2k+1}(f) = \dfrac{-2i}{\pi(2k+1)}$ et $C_{-(2k+1)}(f) = \dfrac{-2i}{-\pi(2k+1)} = \dfrac{2i}{\pi(2k+1)} = -C_{2k+1}$

D'où nous obtenons :

$$\begin{aligned} S_{2N+1}(f)(x) &= \sum_{k=1}^{N} C_{2k+1}(f)\left(e^{i(2k+1)x} - e^{-i(2k+1)x}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{N} C_{2k+1}(f)\, 2i\sin(2k+1)x \\ &= \sum_{k=0}^{N} \frac{-2i}{\pi(2k+1)} 2i\sin(2k+1)x \\ &= \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{N} \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1} \end{aligned}$$

Sur la figure 9.8ci-après, nous avons tracé $S_3(f)(x)$, $S_5(f)(x)$, $S_7(f)(x)$ et $S_9(f)(x)$

Exercice 3 :

Soit f périodique et de période 2π dont les coefficients de Fourier sont notés $c_n(f)$. Quels sont les coefficients de Fourier de la fonction translatée $g(t) = f(t - t_0)$?

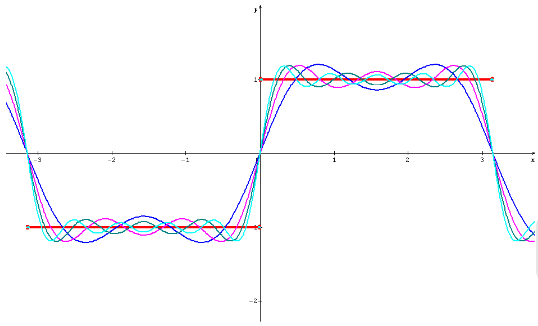

FIGURE 9.8 – Polynômes trigonométriques approchant la fonction créneau

Exercice 4 :

Nous avons travaillé le développement en série de Fourier de fonctions périodiques et de période 2π. Qu'en est-il des fonctions qui sont périodiques, mais d'une période différente de 2π ?
Soit donc f une fonction périodique, de période T et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

1. Soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction définie par $g(x) = f\left(\dfrac{T}{2\pi}x\right)$. Montrer que :
   (a) La fonction g est continue par morceaux
   (b) La fonction g est périodique et de période 2π
2. On appelle $C_n(g)$ le coefficient de Fourier de g d'ordre n. Démontrer que nous avons :

$$C_n(g) = C_n^1(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(u)\, e^{-in\frac{2\pi u}{T}}\,\mathrm{d}u$$

9.4 Le théorème de Féjer

9.4.1 Lemme préparatoire : le noyau de Dirichlet

On appelle noyau de Dirichlet l'expression $D_N(x) = \displaystyle\sum_{k=-N}^{N} e^{ikx}$

Nous avons :

1. $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} D_N(t)\,\mathrm{d}t = 1$
2. Le noyau de Dirichlet est périodique de période 2π et pair
3. $D_n(x) = \dfrac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{x}{2}} = \dfrac{\sin(2n+1)\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$

Démonstration

1. Il est facile de démontrer que $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} D_N(t)\,\mathrm{d}t = 1$, puisque, si $k \neq 0$, $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt}\,\mathrm{d}t = 0$ et si $k = 0$, $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^{i0t}\,\mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}t = 2\pi$, et donc :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_N(t)\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{k=-N}^{N} e^{ikt}\right)\mathrm{d}t = \sum_{k=-N}^{N}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt}\,\mathrm{d}t\right)\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}t + \sum_{k=1}^{N}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt}\,\mathrm{d}t\right) = 1\end{aligned}$$

2. Que $D_N(x) = \sum_{k=-N}^{N} e^{ikx}$ soit périodique de période 2π et pair est évident

3. Nous allons démontrer que $D_n(x) = \dfrac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{x}{2}} = \dfrac{\sin(2n+1)\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$

   On peut écrire différemment le noyau de Dirichlet :

$$D_n(x) = 1 + \sum_{k=1}^{n}\left(e^{ikx} + e^{-ikx}\right) = 1 + \sum_{k=1}^{n}\left(e^{ix}\right)^k + \sum_{k=1}^{n}\left(e^{-ix}\right)^k$$

   (a) Nous allons tout d'abord calculer $\sum_{k=1}^{n}\left(e^{ix}\right)^k$, pour $x \neq 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

   En utilisant la somme des termes d'une suite géométrique, toujours pour $x \neq 2k\pi$, nous avons : $\sum_{k=1}^{n}\left(e^{ix}\right)^k = \dfrac{e^{ix} - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}}$

   En multipliant numérateur et dénominateur par $e^{-i\frac{x}{2}}$, nous obtenons :

$$\frac{e^{ix} - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}} = \frac{e^{-i\frac{x}{2}}\left(e^{ix} - e^{i(n+1)x}\right)}{e^{-i\frac{x}{2}}\left(1 - e^{ix}\right)} = \frac{e^{i\frac{x}{2}} - e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)x}}{e^{-i\frac{x}{2}} - e^{i\frac{x}{2}}}$$

   (b) La simplification de $\sum_{k=1}^{n}\left(e^{-ix}\right)^k$ est la même, et nous obtenons :

$$\sum_{k=1}^{n}\left(e^{-ix}\right)^k = \frac{e^{-i\frac{x}{2}} - e^{-i\left(n+\frac{1}{2}\right)x}}{e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}}}$$

   (c) Nous faisons maintenant la somme $\sum_{k=1}^{n}\left(e^{ix}\right)^k + \sum_{k=1}^{n}\left(e^{-ix}\right)^k$. Donc,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\left(e^{ix}\right)^k + \sum_{k=1}^{n}\left(e^{-ix}\right)^k &= \frac{e^{i\frac{x}{2}} - e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)x}}{e^{-i\frac{x}{2}} - e^{i\frac{x}{2}}} + \frac{e^{-i\frac{x}{2}} - e^{-i\left(n+\frac{1}{2}\right)x}}{e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}}} \\
&= \frac{e^{i\frac{x}{2}} - e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)x}}{e^{-i\frac{x}{2}} - e^{i\frac{x}{2}}} - \frac{e^{-i\frac{x}{2}} - e^{-i\left(n+\frac{1}{2}\right)x}}{e^{-i\frac{x}{2}} - e^{i\frac{x}{2}}} \\
&= \frac{\left(e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}}\right) + \left(e^{-ix\left(n+\frac{1}{2}\right)} - e^{ix\left(n+\frac{1}{2}\right)}\right)}{e^{-i\frac{x}{2}} - e^{i\frac{x}{2}}} \\
&= \frac{2i\sin\frac{x}{2} - 2i\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{-2i\sin\frac{x}{2}} \\
&= -1 + \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{x}{2}}
\end{aligned}$$

   D'où, $D_n(x) = 1 - 1 + \dfrac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{x}{2}} = \dfrac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{x}{2}} = \dfrac{\sin(2n+1)\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$

Remarque 15 :

De l'identité $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} D_N(t)\,\mathrm{d}t = 1$, nous pouvons conclure que $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x = 2\pi$

9.4.2 Lemme préparatoire : le noyau de Féjèr

Nous définissons donc K_n, le noyau de Féjèr, en posant pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [-\pi; \pi]$:

$$K_N(x) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} D_k(x)$$

Nous avons :

1. K_N est paire et périodique de période 2π
2. Nous avons $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_N(t)\, \mathrm{d}t = 1$
3. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, $K_N(x) = \frac{1}{N} \left(\frac{\sin\left(N\frac{x}{2}\right)}{\sin \frac{x}{2}} \right)^2$ et donc, $K_N(x) \geqslant 0$

Démonstration

1. Que K_N soit paire et périodique de période 2π vient de la définition même de K_N, puisque K_N est combinaison linéaire de noyaux de Dirichlet D_k pairs et périodique et de période 2π
2. Démontrons que $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_N(t)\, \mathrm{d}t = 1$

   Pour le démontrer, il suffit de retraduire l'expression proposée :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_N(t)\, \mathrm{d}t &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} D_k(t) \right) \mathrm{d}t = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_k(t)\, \mathrm{d}t \right) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} 1 = 1 \end{aligned}$$

3. Démontrons que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, $K_N(x) = \frac{1}{N} \left(\frac{\sin\left(N\frac{x}{2}\right)}{\sin \frac{x}{2}} \right)^2$

   Pour le démontrer, nous allons utiliser le classique et fastidieux calcul avec les nombres complexes imaginaires.
   Pour faire plus simple, nous allons calculer $NK_N(x)$.
   Nous avons $NK_N(x) = \sum_{k=0}^{N-1} D_k(x) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\sin(2k+1)\frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} = \frac{1}{\sin \frac{x}{2}} \sum_{k=0}^{N-1} \sin\left((2k+1)\frac{x}{2}\right)$

   Et nous avons $\sin\left((2k+1)\frac{x}{2}\right) = \frac{e^{i(2k+1)\frac{x}{2}} - e^{-i(2k+1)\frac{x}{2}}}{2i}$.
   Et donc

$$\begin{aligned} NK_N(x) \sin \tfrac{x}{2} &= \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{e^{i(2k+1)\frac{x}{2}} - e^{-i(2k+1)\frac{x}{2}}}{2i} \right) \\ &= \frac{1}{2i} \sum_{k=0}^{N-1} \left(e^{i(2k+1)\frac{x}{2}} - e^{-i(2k+1)\frac{x}{2}} \right) \\ &= \frac{1}{2i} \left(\sum_{k=0}^{N-1} e^{i(2k+1)\frac{x}{2}} - \sum_{k=0}^{N-1} e^{-i(2k+1)\frac{x}{2}} \right) \end{aligned}$$

   Nous avons : $e^{i(2k+1)\frac{x}{2}} = e^{kix+\frac{ix}{2}} = e^{\frac{ix}{2}} \times e^{kix} = e^{\frac{ix}{2}} \times \left(e^{ix}\right)^k$
   Et donc :

$$\sum_{k=0}^{N-1} e^{i(2k+1)\frac{x}{2}} = e^{\frac{ix}{2}} \sum_{k=0}^{N-1} \left(e^{ix}\right)^k = e^{\frac{ix}{2}} \left(\frac{1 - e^{iNx}}{1 - e^{ix}} \right)$$

De la même manière :

$$\sum_{k=0}^{N-1} e^{-i(2k+1)\frac{x}{2}} = e^{\frac{-ix}{2}} \sum_{k=0}^{N-1} \left(e^{-ix}\right)^k = e^{\frac{-ix}{2}} \left(\frac{1-e^{-iNx}}{1-e^{-ix}}\right)$$

Et donc

$$\begin{aligned}
2iNK_N(x)\sin\tfrac{x}{2} &= e^{\frac{ix}{2}}\left(\frac{1-e^{iNx}}{1-e^{ix}}\right) - e^{\frac{-ix}{2}}\left(\frac{1-e^{-iNx}}{1-e^{-ix}}\right) \\
&= \frac{e^{\frac{ix}{2}}\left(1-e^{-ix}\right)\left(1-e^{iNx}\right) - e^{\frac{-ix}{2}}\left(1-e^{ix}\right)\left(1-e^{-iNx}\right)}{\left(1-e^{ix}\right)\left(1-e^{-ix}\right)} \\
&= \frac{\left(e^{\frac{ix}{2}}-e^{\frac{-ix}{2}}\right)\left(1-e^{iNx}\right) - \left(e^{\frac{-ix}{2}}-e^{\frac{ix}{2}}\right)\left(1-e^{-iNx}\right)}{2\left(1-\cos x\right)} \\
&= \frac{\left(e^{\frac{ix}{2}}-e^{\frac{-ix}{2}}\right)\left[\left(1-e^{iNx}\right)+\left(1-e^{-iNx}\right)\right]}{2\left(1-\cos x\right)} \\
&= \frac{2i\sin\frac{x}{2}\left[2-2\cos Nx\right]}{2\left(1-\cos x\right)}
\end{aligned}$$

Et donc $2iNK_N(x)\sin\frac{x}{2} = \dfrac{2i\sin\frac{x}{2}\left[2-2\cos Nx\right]}{2\left(1-\cos x\right)} \Longleftrightarrow NK_N(x) = \dfrac{\left(1-1\cos Nx\right)}{\left(1-\cos x\right)}$ En utilisant la formule trigonométrique $1-\cos 2u = 2\sin^2 u$, nous avons alors :

$$NK_N(x) = \frac{\left(2\sin^2\left(N\frac{x}{2}\right)\right)}{\left(2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)} = \left(\frac{\sin\left(N\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right)^2$$

Et, nous avons donc bien $K_N(x) = \dfrac{1}{N}\left(\dfrac{\sin\left(N\frac{x}{2}\right)}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2$

Remarque 16 :

Comme tout à l'heure, des identités $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} K_N(t)\,\mathrm{d}t = 1$ et $K_N(x) = \dfrac{1}{N}\left(\dfrac{\sin\left(N\frac{x}{2}\right)}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2$, nous pouvons déduire que :

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\sin\left(N\frac{x}{2}\right)}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2 \mathrm{d}x = 2\pi N$$

9.4.3 Théorème de Féjèr

Soit $f \in \mathcal{C}(T)$, c'est à dire f continue, périodique et de prériode 2π

On considère la somme partielle de rang N de sa série de Fourier $S_N(f)(x) = \displaystyle\sum_{k=-N}^{N} c_k(f)\,e^{ikx}$

Alors, si nous posons $\sigma_n(f) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} S_k(f)$, la suite de fonctions $\left(\sigma_n(f)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f, c'est à dire : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\sup_{x\in[0;2\pi]}\left|\sigma_n(f)(x)-f(x)\right|\right) = 0 \Longleftrightarrow \lim_{n\to+\infty}\left\|\sigma_n(f)-f\right\|_\infty = 0$

Démonstration

Cette démonstration va se faire en plusieurs étapes, et pour la faciliter, en utilisant la périodicité de f, nous alons travailler sur $[-\pi;+\pi]$

1. Ecrivons différemment $S_N(f)(x)$

⇒ Tout d'abord :

$$c_k(f)\,e^{ikx} = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,e^{-ikt}\,\mathrm{d}t\right)e^{ikx} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,e^{ik(x-t)}\,\mathrm{d}t$$

⇒ Donc, et par linéarité de l'intégrale :

$$\begin{aligned} S_N(f)(x) = &\ \sum_{k=-N}^{N} c_k(f)\,e^{ikx} = \sum_{k=-N}^{N}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,e^{ik(x-t)}\,\mathrm{d}t \\ = &\ \frac{1}{2\pi}{}_{-}{-\pi}^{\pi} f(t)\left(\sum_{k=-N}^{N} e^{ik(x-t)}\right)\mathrm{d}t \\ = &\ \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,D_N(x-t)\ \mathrm{d}t \end{aligned}$$

Où $D_N(x) = \displaystyle\sum_{k=-N}^{N} e^{ikx}$ est le noyau de Dirichlet

2. Nous allons, maintenant, étudier $\sigma_n(f)$ en utilisant le noyau de Féjèr

→ Nous avons $\sigma_N(f)(x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\,K_N(t)\ \mathrm{d}t$ où K_N est le noyau de Féjèr

Comme tout à l'heure, nous allons ré-écrire l'expression demandée :

$$\begin{aligned} \sigma_N(f)(x) = &\ \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} S_k(f)(x) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,D_k(x-t)\ \mathrm{d}t \\ = &\ \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left(\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} D_k(x-t)\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,K_N(x-t)\ \mathrm{d}t \end{aligned}$$

Nous venons de montrer que $\sigma_N(f)(x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,K_N(x-t)\ \mathrm{d}t$.

En faisant le changement de variables $u = x - t \iff t = x - u$ et donc $\mathrm{d}t = -\,\mathrm{d}u$, nous avons :

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,K_N(x-t)\ \mathrm{d}t = &\ -\int_{x+\pi}^{x-\pi} f(x-u)\,K_N(u)\ \mathrm{d}u \\ = &\ \int_{x-\pi}^{x+\pi} f(x-u)\,K_N(u)\ \mathrm{d}u \\ = &\ \int_{-\pi}^{\pi} f(x-u)\,K_N(u)\ \mathrm{d}u \text{ puisque } f \text{ et } K_N \text{ sont périodiques} \end{aligned}$$

Donc $\sigma_N(f)(x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,K_N(x-t)\ \mathrm{d}t = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\,K_N(t)\ \mathrm{d}t$

3. Nous allons montrer la convergence uniforme de la suite $(\sigma_N(f))_{N\in\mathbb{N}}$

Soit donc $\varepsilon > 0$

⇒ f étant continue sur l'intervalle $[-\pi;\pi]$, y est uniformément continue.

Il existe donc $\eta > 0$ tel que, pour tout $x \in [-\pi;\pi]$ et tout $y \in [-\pi;\pi]$, si $|x-y| < \eta$ alors $|f(x) - f(y)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$

⇒ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons :

$$\begin{aligned} |f(x) - \sigma_N(f)(x)| = &\ \left|f(x)\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_N(t)\ \mathrm{d}t\right) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\,K_N(t)\ \mathrm{d}t\right| \\ = &\ \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x) - f(x-t))\,K_N(t)\ \mathrm{d}t\right| \\ \leqslant &\ \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x) - f(x-t)|\,K_N(t)\ \mathrm{d}t \\ \leqslant &\ \frac{1}{2\pi}\int_{\{|t|<\eta\}}|f(x) - f(x-t)|\,K_N(t)\ \mathrm{d}t + \\ &\ \frac{1}{2\pi}\int_{\{\eta\leqslant|t|<\pi\}}|f(x) - f(x-t)|\,K_N(t)\ \mathrm{d}t \end{aligned}$$

▷ Regardons, maintenant $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{\{|t|<\eta\}} |f(x) - f(x-t)|\, K_N(t)\, \mathrm{d}t$

Dans l'ensemble $\{|t| < \eta\}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons $\{|x - (x-t)| = |t| < \eta\}$ et donc $|f(x) - f(x-t)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$

Ainsi :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{\{|t|<\eta\}} |f(x) - f(x-t)|\, K_N(t)\, \mathrm{d}t &\leqslant \frac{\varepsilon}{2} \times \frac{1}{2\pi}\int_{\{|t|<\eta\}} K_N(t)\, \mathrm{d}t \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2} \times \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} K_N(t)\, \mathrm{d}t = \frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

puisque $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} K_N(t)\, \mathrm{d}t = 1$

▷ Maintenant, posons nos regards sur $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{\{\eta \leqslant |t| < \pi\}} |f(x) - f(x-t)|\, K_N(t)\, \mathrm{d}t$

⋆ Posons $M = \sup\limits_{x \in [-\pi;+\pi]} |f(x)|$ [1], nous avons $|f(x) - f(x-t)| \leqslant 2M$, et donc :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\{\eta \leqslant |t| < \pi\}} |f(x) - f(x-t)|\, K_N(t)\, \mathrm{d}t \leqslant \frac{M}{\pi}\int_{\{\eta \leqslant |t| < \pi\}} K_N(t)\, \mathrm{d}t$$

⋆ Nous avons démontré que $K_N(t) = \dfrac{1}{N}\left(\dfrac{\sin\left(N\frac{t}{2}\right)}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2$.

Comme $\eta \leqslant |t| < \pi$, alors $\dfrac{\eta}{2} \leqslant \left|\dfrac{t}{2}\right| < \dfrac{\pi}{2}$, c'est à dire $\dfrac{-\pi}{2} < t \leqslant \dfrac{-\eta}{2}$ ou $\dfrac{\eta}{2} \leqslant \dfrac{t}{2} < \dfrac{\pi}{2}$, c'est à dire, à chaque fois :

$$\left|\sin\frac{t}{2}\right| \geqslant \sin\frac{\eta}{2} \Longleftrightarrow \sin^2\frac{t}{2} \geqslant \sin^2\frac{\eta}{2} \Longleftrightarrow \frac{1}{\sin^2\frac{t}{2}} \leqslant \frac{1}{\sin^2\frac{\eta}{2}}$$

Et donc $K_N(t) = \dfrac{1}{N}\left(\dfrac{\sin\left(N\frac{t}{2}\right)}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2 \leqslant \dfrac{1}{N\sin^2\frac{\eta}{2}}$

⋆ Nous avons donc :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{\{\eta \leqslant |t| < \pi\}} |f(x) - f(x-t)|\, K_N(t)\, \mathrm{d}t &\leqslant \frac{M}{\pi} \times \frac{1}{N\sin^2\frac{\eta}{2}}\int_{\{\eta \leqslant |t| < \pi\}} \mathrm{d}t \\ &\leqslant \frac{M}{N\pi\sin^2\frac{\eta}{2}}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}t = \frac{2M}{N\sin^2\frac{\eta}{2}}\end{aligned}$$

⇒ En synthèse, nous avons $|f(x) - \sigma_N(f)(x)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{2M}{N\sin^2\frac{\eta}{2}}$, et cette inégalité ne dépend pas de $x \in \mathbb{R}$

Comme $\lim\limits_{N \to +\infty} \dfrac{2M}{N\sin^2\frac{\eta}{2}} = 0$, il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que si $N \geqslant N_\varepsilon$, alors $0 \leqslant \dfrac{2M}{N\sin^2\frac{\eta}{2}} \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Et donc, pour ce même $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, si $N \geqslant N_\varepsilon$, alors $|f(x) - \sigma_N(f)(x)| \leqslant \varepsilon$

La convergence de la suite $(\sigma_N(f))_{N\in\mathbb{N}}$ vers f est donc uniforme

Remarque 17 :

1. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, $S_N(f)$ est un polynôme trigonométrique ($S_N(f) \in \mathrm{T}[x]$), et donc comme $\mathrm{T}[x]$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel , $\sigma_n(f)$ est aussi un polynôme trigonométrique de $\mathrm{T}[x]$, comme combinaison linéaire de polynômes trigonométriques.
   On dit donc que toute fonction $f \in \mathcal{C}(T)$ *(fonction continue 2π-périodique)* est limite uniforme d'une suite de polynômes trigonométriques.

1. On écrit souvent, aussi, $M = \|f\|_\infty$

2. Ce qui veut dire que, pour tout $\varepsilon > 0$ et pour toute fonction $f \in \mathcal{C}(T)$, il existe un polynôme trigonométique $P \in \mathrm{T}[x]$ tel que $\|f - P\|_{\infty} < \varepsilon$
3. Le théorème de Féjèr est parfois appelé **version « trigonométrique » du théorème d'approximation de Weierstrass**
4. Il faut remarquer l'importance de la continuité de f dans le compact $[-\pi; +\pi]$ puisque nous avons utilisé le théorème de Heine.
5. Qu'en est-il des fonctions continues par morceaux, c'est à dire $f \in \mathcal{C}_M(T)$? En fait, la réponse est simple : les polynômes trigonométriques étant continus *(et même indéfiniment continuement dérivables)* on ne peut bien sûr avoir convergence uniforme vers f que là où f est continue et donc, il existe des fonctions $f \in \mathcal{C}_M(T)$ qui ne peuvent être limites uniformes de polynômes trigonométriques.
6. Tout se passe donc au sens des moindres carrés

9.4.4 Théorème

Soit $g \in \mathcal{C}_M(T)$. Alors, il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions de $\mathcal{C}(T)$ *(C'est à dire telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ $f_n \in \mathcal{C}(T)$)* telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - g\|_2 = 0$

Démonstration

→ Soit $g \in \mathcal{C}_M(T)$.
Il existe alors $a_1, a_2, \ldots, a_N$ N points de discontinuité de g sur l'intervalle $[0; 2\pi]$

→ On construit alors, pour $n \in \mathbb{N}^*$ la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, par :
$f_n : [0; 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$ et telle que, pour tout $x \in [0; 2\pi] \setminus \left(\bigcup\limits_{k=2}^{N} \left[a_k - \dfrac{1}{n}; a_k + \dfrac{1}{n}\right]\right)$, $f_n(x) = g(x)$, et f_n est affine sur chaque intervalle $\left[a_k - \dfrac{1}{n}; a_k + \dfrac{1}{n}\right]$, c'est à dire que si $x \in \left[a_k - \dfrac{1}{n}; a_k + \dfrac{1}{n}\right]$, alors

$$f_n(x) = g\left(a_k - \frac{1}{n}\right) + \frac{n}{2}\left(g\left(a_k + \frac{1}{n}\right) - g\left(a_k - \frac{1}{n}\right)\right)\left(x - \left(a_k - \frac{1}{n}\right)\right)$$

f_n est continue sur $[0; 2\pi]$, par construction

→ Nous avons $\|f_n - g\|_2^2 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} |f_n(t) - g(t)|^2 \,\mathrm{d}t$, et par construction des f_n, nous avons :

$$\|f_n - g\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\left(\sum_{k=1}^{N} \int_{a_k - \frac{1}{n}}^{a_k + \frac{1}{n}} |f_n(t) - g(t)|^2 \,\mathrm{d}t\right)$$

→ Regardons ce qui se passe au point de discontinuité a_k, ou plutôt, sur l'intervalle $\left[a_k - \dfrac{1}{n}; a_k - \dfrac{1}{n}\right]$:

$$\begin{aligned} |f_n(t) - g(t)| &= \left|g\left(a_k - \frac{1}{n}\right) + \frac{n}{2}\left(g\left(a_k + \frac{1}{n}\right) - g\left(a_k - \frac{1}{n}\right)\right)\left(t - \left(a_k - \frac{1}{n}\right)\right) - g(t)\right| \\ &\leqslant \left|g\left(a_k - \frac{1}{n}\right) - g(t)\right| + \frac{n}{2}\left|g\left(a_k + \frac{1}{n}\right) - g\left(a_k - \frac{1}{n}\right)\right| \times \left|t - \left(a_k - \frac{1}{n}\right)\right| \end{aligned}$$

Appelons $M = \sup\limits_{x\in[0;2\pi]} |g(x)|$, alors :

- ⋆ $\left|g\left(a_k - \dfrac{1}{n}\right) - g(t)\right| \leqslant 2M$, tout comme $\left|g\left(a_k + \dfrac{1}{n}\right) - g\left(a_k - \dfrac{1}{n}\right)\right| \leqslant 2M$
- ⋆ Nous avons aussi, en considérant la longueur de l'intervalle $\left[a_k - \dfrac{1}{n}; a_k + \dfrac{1}{n}\right]$,

$$\left|t - \left(a_k - \frac{1}{n}\right)\right| \leqslant \left|a_k + \frac{1}{n} - \left(a_k - \frac{1}{n}\right)\right| = \frac{2}{n}$$

Ce qui fait que :

$$\frac{n}{2}\left|g\left(a_k+\frac{1}{n}\right)-g\left(a_k-\frac{1}{n}\right)\right|\times\left|t-\left(a_k-\frac{1}{n}\right)\right|\leqslant\frac{n}{2}\times 2M\times\frac{2}{n}=2M$$

Et donc, en synthèse :

$$|f_n(t)-g(t)|\leqslant 4M\iff|f_n(t)-g(t)|^2\leqslant 16M^2$$

D'où :

$$\int_{a_k-\frac{1}{n}}^{a_k+\frac{1}{n}}|f_n(t)-g(t)|^2\,\mathrm{d}t\leqslant\int_{a_k-\frac{1}{n}}^{a_k+\frac{1}{n}}16M^2\,\mathrm{d}t=16M^2\times\frac{2}{n}$$

Et donc, $\|f_n-g\|_2^2\leqslant\dfrac{1}{2\pi}\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{N}16M^2\times\frac{2}{n}\right)=\dfrac{16M^2N}{n\pi}$

Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{16M^2N}{n\pi}=0$, nous avons aussi $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\|f_n-g\|_2^2=0$.
Ce que nous voulions : nous avons trouvé une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions de $\mathcal{C}(T)$ telles que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\|f_n-g\|_2=0$

Remarque 18 :

Il est donc possible de dire que, pour toute fonction $g\in\mathcal{C}_M(T)$ et pour tout $\varepsilon>0$, il existe une fonction continue $f\in\mathcal{C}(T)$ telle que $\|f-g\|_2\leqslant\varepsilon$: il suffira de choisir une fonction f_n telle que $\dfrac{16M^2N}{n\pi}<\varepsilon^2$

9.4.5 Corollaire

Pour toute fonction $g\in\mathcal{C}_M(T)$ et pour tout $\varepsilon>0$ il existe un polynôme trigonométrique $P\in\mathrm{T}[x]$ tel que $\|P-g\|_2\leqslant\varepsilon$

Démonstration

Soit $g\in\mathcal{C}_M(T)$ et $\varepsilon>0$
Il existe $f\in\mathcal{C}(T)$ tel que $\|f-g\|_2\leqslant\dfrac{\varepsilon}{2}$
Il existe un polynôme trigonométique $P\in\mathrm{T}[x]$ tel que $\|f-P\|_\infty<\dfrac{\varepsilon}{2}$.
D'après 9.3.3, nous avons $\|f-P\|_2\leqslant\|f-P\|_\infty<\dfrac{\varepsilon}{2}$.
Donc :

$$\|P-g\|_2\leqslant\|P-f\|_2+\|f-g\|_2\leqslant\|f-P\|_\infty+\|f-g\|_2\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

Ce que nous voulions

9.5 Approximation en moyenne quadratique

9.5.1 Inégalité de Bessel

Soit $f \in \mathcal{C}_M(T)$, c'est à dire une fonction périodique de période 2π et continue par morceaux

On considère $S_N(f)(x) = \sum_{k=-N}^{N} C_k(f) e^{ikx} = \sum_{k=-N}^{N} \langle f/e_k \rangle e^{ikx}$

1. Parmi tous les polynômes trigonométriques $Q_N \in \mathrm{T}_N[x]$, $S_N(f)$ est celui qui réalise l'écart minimal avec f au sens de la norme des moindres carrés, c'est à dire,
$$\|f - S_N(f)\|_2 \leqslant \|f - Q_N\|_2$$
2. On a, en fait, $\|f - S_N(f)\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t - \sum_{k=-N}^{N} |c_k(f)|^2$
3. Et donc $\sum_{k=-N}^{N} |c_k(f)|_2^2 \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t$ Cette dernière inégalité est l'inégalité de Bessel

Démonstration

Cette démonstration utilise l'outil géométrique

1. Soit $Q_N \in \mathrm{T}_N[x]$. Alors, $f - Q_N = f - S_N(f) + S_N(f) - Q_N$
Comme $S_N(f) - Q_N \in \mathrm{T}_N[x]$ et que, d'après 9.3.7, $S_N(f)$ est la projection orthogonale de f sur $\mathrm{T}_N[x]$, $S_N(f) - f$ est orthogonal à tout élément de $\mathrm{T}_N[x]$, nous avons, en particulier $\langle S_N(f) - f / S_N(f) - Q_N \rangle = 0$.
On peut donc appliquer le théorème de Pythagorre :
$$\|f - Q_N\|_2^2 = \|f - S_N(f)\|_2^2 + \|S_N(f) - Q_N\|_2^2$$
Donc,
$$\|f - Q_N\|_2^2 \geqslant \|f - S_N(f)\|_2^2 \iff \|f - S_N(f)\|_2 \leqslant \|f - Q_N\|_2$$
Et ceci est vrai pour tout $Q_N \in \mathrm{T}_N[x]$
2. En prenant, comme cas particuler pour Q_N le polynôme nul, nous retrouvons ce que nous avons établi en 9.3.7 :
$$\|f\|_2^2 = \|f - S_N(f)\|_2^2 + \|S_N(f)\|_2^2 \tag{9.1}$$
Ce qui montre que $\|S_N(f)\|_2^2 \leqslant \|f\|_2^2$, c'est à dire $\|S_N(f)\|_2 \leqslant \|f\|_2$, ce qui est le lot de toutes les projections orthogonales
Or, $\|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x$ d'une part, et d'autre part, $\|S_N(f)\|_2^2 = \langle S_N(f) / S_N(f) \rangle$.
D'après 9.3.7, nous avons $\|S_N(f)\|_2^2 = \sum_{k=-N}^{N} |C_k(f)|^2 = \sum_{k=-N}^{N} |\langle f/e_k \rangle|^2$
D'après l'équation 9.1, nous déduisons d'une part :
$$\boxed{\|f - S_N(f)\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \, dt - \sum_{k=-N}^{N} |c_k(f)|^2}$$
Et, d'autre part,
$$\boxed{\sum_{k=-N}^{N} |c_k(f)|^2 \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t}$$

Remarque 19 :

En posant $S_N = \sum_{k=-N}^{N} |c_k(f)|^2$, alors, d'après 9.5.1, la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ est une suite à termes positifs, croissante et majorée par $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t$. Elle est donc convergente.

9.5.2 Proposition

Soit $f \in \mathcal{C}_M(T)$, c'est à dire une fonction périodique de période 2π et continue par morceaux
Alors la série de Fourier de f converge vers f en moyenne quadratique, c'est-à-dire $\lim\limits_{N\to+\infty} \|f - S_N(f)\|_2 = 0$

Démonstration

Soient $f \in \mathcal{C}_M(T)$ et $\varepsilon > 0$.
D'après le corollaire 9.4.5, il existe un polynôme trigonométrique $P \in \mathrm{T}[x]$ tel que $\|P - f\|_2 \leqslant \varepsilon$.
Soit $p = \deg P$, alors, pour tout $N \geqslant p$, $\mathrm{T}_p[x] \subset \mathrm{T}_N[x]$ et donc $P \in \mathrm{T}_N[x]$.
D'après 9.5.1, nous avons, pour tout $P \in \mathrm{T}_N[x]$, $\|f - S_N(f)\|_2 \leqslant \|f - P\|_2 \leqslant \varepsilon$
Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que si $N \geqslant p$, alors $\|f - S_N(f)\|_2 \leqslant \varepsilon$
Ce que nous voulions, c'est à dire $\lim\limits_{N\to+\infty} \|f - S_N(f)\|_2 = 0$

9.5.3 Corollaire : Egalité de Parseval

Soit $f \in \mathcal{C}_M(T)$. Alors, la série numérique $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k(f)|^2$ est convergente, et, nous avons :

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k(f)|^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\langle f/e_k\rangle|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \, dt = \|f\|^2$$

Démonstration

1. Nous avons déjà posé en remarque que si $S_N = \sum_{k=-N}^{N} |c_k(f)|^2$, alors, d'après 9.5.1, la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ étant une suite à termes positifs, croissante et majorée par $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t$ est donc convergente.
2. D'autre part, d'après 9.5.1, nous avons $\|f - S_N(f)\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t - \sum_{k=-N}^{N} |c_k(f)|^2$.

   Comme, d'après 9.5.2, nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f - S_N(f)\|_2^2 = 0$, c'est à dire

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t - \sum_{k=-N}^{N} |c_k(f)|^2 \right) = 0$$

   Autrement dit $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=-N}^{N} |c_k(f)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t$, ou, ce qui est équivalent

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k(f)|^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\langle f/e_k\rangle|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \, dt = \|f\|^2$$

Ce que nous voulions

9.5.4 Corollaire

Soit $f \in \mathcal{C}_M(T)$. Alors les coefficients de Fourier de f tendent vers 0. Plus précisément :

$$\lim_{n \to +\infty} c_n(f) = 0 \text{ et } \lim_{n \to -\infty} c_n(f) = 0$$

Démonstration

Nous venons de démontrer que $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k(f)|^2 = \|f\|^2$, c'est à dire que les séries numériques $\sum_{k=0}^{+\infty} |c_k(f)|^2$ et $\sum_{k=0}^{+\infty} |c_{-k}(f)|^2$ sont convergentes.
La conclusion vient de la théorie des séries numériques.

Exercice 5 :

Démontrer que si 2 fonctions u et v continues ont les mêmes coefficients de Fourier sont égales.

9.6 Convergence ponctuelle des séries de Fourier

Introduction

On a vu que toute fonction continue périodique peut être approchée uniformément par des polynômes trigonométriques.
On a vu aussi que, dans le cas de la convergence en moyenne quadratique, ce sont les sommes partielles de la série de Fourier associée qui donnent les meilleures approximations.
On peut donc se demander si pour la convergence uniforme ou la convergence simple il en est de même, mais la réponse est négative.
Même plus, il existe des fonctions continues périodiques pour lesquelles en certains points la série de Fourier ne converge pas.
Nous allons voir toutefois que sous certaines hypothèses on peut donner des résultats sur la convergence.

9.6.1 Le lemme de Lebesgue

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction intégrable sur l'intervalle compact $[a\,, b]$
Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose

$$I(\lambda) = \int_a^b f(t)\, e^{i\lambda t}\, dt$$

Alors, $\lim_{|\lambda| \to +\infty} I(\lambda) = 0$

Démonstration

C'est un résultat déjà démontré dans le chapitre du calcul intégral de L_1

9.6.2 Théorème de convergence simple de DIRICHLET

Soit $f \in \mathcal{C}_M^1(T)$, c'est à dire $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, périodique et de période 2π, continue par morceaux, et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux dans sur $\mathbb{R}$

Alors, $S_N(x) = \sum_{k=-N}^{N} C_k(f)\, e^{ikx}$ converge simplement, pour tout $x \in \mathbb{R}$ vers $\widetilde{f}(x) = \frac{1}{2}\{f(x^+) + f(x^-)\}$

C'est à dire que, partout où f est continue, $S_N(x) = \sum_{k=-N}^{N} C_k(f)\, e^{ikx}$ converge simplement, pour tout $x \in \mathbb{R}$ vers $\widetilde{f}(x) = f(x)$

Démonstration

1. Nous allons rappeler les notations déjà établies :
   - ⋆ Pour $f \in \mathcal{C}_M^1(T)$, on pose $C_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-int}\,\mathrm{d}t$; $C_n(f)$ est le coefficient de Fourier de f d'ordre n
   - ⋆ $S_N(f)(x) = \sum_{n=-N}^{+N} C_n(f)\, e^{inx}$ est le polynôme trigonométrique d'ordre N, attaché à f.
2. Nous allons donc étudier $\lim_{N\to+\infty} S_N(f)$

   Nous avons $C_n(f)\, e^{inx} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{in(x-t)}\,\mathrm{d}t$, et

$$S_N(f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left(\sum_{n=-N}^{+N} e^{in(x-t)}\right)\mathrm{d}t$$

3. Posons $\varphi_N(u) = \frac{1}{2\pi}\left(\sum_{n=-N}^{+N} e^{inu}\right)$.

   Nous avons donc : $S_N(f)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\varphi_N(x-t)\; dt$

   En fait, $\varphi_N(u) = \frac{1}{2\pi}D_N(u)$ où D_N est le noyau de Dirichlet. φ_N est donc aussi continue et périodique de période 2π et paire.

   D'après 9.4.1, nous avons : $\varphi_N(u) = \frac{1}{2\pi}\frac{\sin(2N+1)\frac{u}{2}}{\sin\frac{u}{2}}$.
4. Nous allons écrire $S_N(f)(x)$ de deux façons différentes.
   (a) Comme nous l'avons déjà fait en 9.4.3 nous commençons par faire le changement de variables $u = x - t$, d'où $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -1$ c'est à dire $\mathrm{d}t = -\,\mathrm{d}u$.

   D'où

$$\begin{aligned}
S_N(f)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\varphi_N(x-t)\,\mathrm{d}t &= -\int_{x+\pi}^{x-\pi} f(x-u)\,\varphi_N(u)\,\mathrm{d}u \\
&= \int_{x-\pi}^{x+\pi} f(x-u)\,\varphi_N(u)\,\mathrm{d}u \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} f(x-u)\,\varphi_N(u)\,\mathrm{d}u
\end{aligned}$$

   Car f et φ_N sont périodiques et de période 2π.

   Donc, $S_N(f)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-u)\,\varphi_N(u)\; dt$

(b) On refait un changement de variable $u = -x + t$ d'où $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 1$ c'est à dire $\mathrm{d}u = \mathrm{d}t$, d'où

$$S_N(f)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\varphi_N(x-t)\,\mathrm{d}t = \int_{-x-\pi}^{-x+\pi} f(x+u)\,\varphi_N(-u)\,\mathrm{d}t$$

Or, φ_N est paire, et donc :

$$\int_{-x-\pi}^{-x+\pi} f(x+u)\,\varphi_N(-u)\,\mathrm{d}t = \int_{-x-\pi}^{-x+\pi} f(x+u)\,\varphi_N(u)\,\mathrm{d}t$$

D'autre part :

$$\int_{-x-\pi}^{-x+\pi} f(x+u)\,\varphi_N(u)\,\mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+u)\,\varphi_N(u)\,\mathrm{d}t$$

Car f et φ_N sont périodiques et de période 2π.

Donc, $S_N(f)(x) = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x+u)\,\varphi_N(u)\ dt$

Nous avons donc :

$$2S_N(f)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-u)\,\varphi_N(u)\,\mathrm{d}u + \int_{-\pi}^{\pi} f(x+u)\,\varphi_N(u)\,\mathrm{d}u$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$2S_N(f)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \left(f(x-u) + f(x+u)\right)\varphi_N(u)\,\mathrm{d}u$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$S_N(f)(x) = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \left(f(x-u) + f(x+u)\right)\varphi_N(u)\,\mathrm{d}u$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$S_N(f)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{f(x-u) + f(x+u)}{2}\right)\varphi_N(u)\,\mathrm{d}u$$

5. Soit $Un : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, qui à tout $x \in \mathbb{R}$ fait correspondre $Un(x) = 1$

Alors, $S_N(Un)(x) = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} Un(x+u)\,\varphi_N(u)\ du = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_N(u)\ du$

Or, de l'identité $\varphi_N(u) = \dfrac{1}{2\pi}\left(\displaystyle\sum_{n=-N}^{+N} e^{inu}\right)$, nous tirons :

$$S_N(Un)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_N(u)\,\mathrm{d}u = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi}\left(\sum_{n=-N}^{+N} e^{inu}\right)\mathrm{d}u = \sum_{n=-N}^{+N} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{inu}\,\mathrm{d}u$$

Or, pour $n \neq 0$, nous avons $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^{inu}du = \left[\frac{e^{inu}}{in}\right]_{-\pi}^{+\pi} = \frac{(-1)^n - (-1)^n}{in} = 0$, et, pour $n = 0$, $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} du = 1$.

D'où $S_N(Un)(x) = Un(x) = 1$

6. On appelle $\widetilde{f}(x) = \dfrac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$, c'est à dire que, partout où f est continue, alors $\widetilde{f} = f$

Il nous faut donc évaluer $S_N(f)(x) - \widetilde{f}(x)$ et démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} S_N(f)(x) - \widetilde{f}(x) = 0$

(a) Tout d'abord, d'après les calculs précédents, $\widetilde{f}(x) = \widetilde{f}(x) \times S_N(Un)(x)$.

Donc :

$$\widetilde{f}(x) = \widetilde{f}(x)\,S_N(Un)(x) = \widetilde{f}(x)\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_N(u)\,\mathrm{d}u = \int_{-\pi}^{\pi} \widetilde{f}(x)\,\varphi_N(u)\,\mathrm{d}u$$

Donc $S_N(f)(x) - \widetilde{f}(x) = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{f(x-u) + f(x+u)}{2} - \widetilde{f}(x)\right)\varphi_N(u)\ du$

(b) La fonction $\psi(u) = \left(\dfrac{f(x-u)+f(x+u)}{2} - \widetilde{f}(x)\right)\varphi_N(u)$ est une fonction paire ; donc :

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{f(x-u)+f(x+u)}{2} - \widetilde{f}(x)\right)\varphi_N(u)\,\mathrm{d}u = \; & 2\int_0^{\pi}\left(\frac{f(x-u)+f(x+u)}{2} - \widetilde{f}(x)\right)\varphi_N(u)\,\mathrm{d}u \\ = \; & \int_0^{\pi}\left(f(x-u)+f(x+u)-2\widetilde{f}(x)\right)\varphi_N(u)\,\mathrm{d}u\end{aligned}$$

(c) Nous avons vu, d'après 9.4.1 que $\varphi_N(u) = \dfrac{1}{2\pi}D_N(u)$ où $D_N(u)$ est le noyau de Dirichlet d'ordre N. Et donc,

$$\begin{aligned}S_N(f)(x) - \widetilde{f}(x) = \; & \int_0^{\pi}\left(f(x-u)+f(x+u)-2\widetilde{f}(x)\right)\frac{\sin(2N+1)\frac{u}{2}}{2\pi\sin\frac{u}{2}}\,du \\ = \; & \int_0^{\pi} g(u)\sin\left((2N+1)\tfrac{u}{2}\right)\,du\end{aligned}$$

Où $g(u) = \dfrac{(f(x-u)+f(x+u)) - 2\widetilde{f}(x)}{2\pi\sin\frac{u}{2}}$

(d) Nous allons montrer que g peut se prolonger par continuité en 0.
Nous avons, en fait,

$$\begin{aligned}g(u) = \; & \frac{(f(x-u)+f(x+u)) - f(x^+) - f(x^-)}{2\pi\sin\frac{u}{2}} \\ = \; & \frac{f(x-u)-f(x^-)}{2\pi\sin\frac{u}{2}} + \frac{f(x+u)-f(x^+)}{2\pi\sin\frac{u}{2}}\end{aligned}$$

→ Regardons l'expression $\dfrac{f(x+u)-f(x^+)}{2\pi\sin\frac{u}{2}}$

Nous avons $\dfrac{f(x+u)-f(x^+)}{2\pi\sin\frac{u}{2}} = \dfrac{1}{\pi}\left[\dfrac{\frac{u}{2}}{\sin\frac{u}{2}}\left(\dfrac{f(x+u)-f(x^+)}{u}\right)\right]$

- ⋆ Nous avons $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\frac{u}{2}}{\sin\frac{u}{2}} = 1$
- ⋆ f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, donc $\lim\limits_{\substack{u\to 0\\ u>0}}\dfrac{f(x+u)-f(x^+)}{u} = f'_d(x)$
- ⋆ Donc $\lim\limits_{\substack{u\to 0\\ u>0}}\dfrac{1}{\pi}\left[\dfrac{\frac{u}{2}}{\sin\frac{u}{2}}\left(\dfrac{f(x+u)-f(x^+)}{u}\right)\right] = \dfrac{f'_d(x)}{\pi}$

→ Regardons maintenant $\dfrac{f(x-u)-f(x^-)}{2\pi\sin\frac{u}{2}}$

- ⋆ La décomposition est semblable, et, en fait, il faut regarder de plus près $\dfrac{f(x-u)-f(x^-)}{u}$
- ⋆ Or, $\lim\limits_{\substack{u\to 0\\ u>0}}\dfrac{f(x-u)-f(x^-)}{-u} = f'_g(x)$
- ⋆ Donc $\lim\limits_{\substack{u\to 0\\ u>0}}\dfrac{f(x-u)-f(x^-)}{2\pi\sin\frac{u}{2}} = \dfrac{-f'_g(x)}{\pi}$

Nous avons donc $\lim\limits_{u\to 0} g(u) = \dfrac{f'_d(x) - f'_g(x)}{\pi}$
g peut donc être prolongée par continuité en 0

7. g est donc continue par morceaux sur $[0;\pi]$. D'après le lemme de Lebesgue 9.6.1, nous avons :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi} g(u)\sin\left((2N+1)\frac{u}{2}\right)\,\mathrm{d}u = 0$$

C'est à dire $\lim\limits_{n\to+\infty} S_N(f)(x) - \widetilde{f}(x) = 0$

Nous avons donc la convergence simple de $S_N(f)$ vers $\widetilde{f}$

Ce que nous voulions.

9.6.3 Corollaire

Soit $f \in \mathcal{C}_M^1(T)$, c'est à dire que f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[0, 2\pi]$, alors, la convergence de la série de Fourier vers f est normale.

Démonstration

Pour montrer que la convergence est normale, il faut montrer que le coefficient $\left|C_k(f)\, e^{ikx}\right|$ est majoré par le terme général d'une série numérique convergente.

1. Par une intégration par parties, on montre que $C_k(f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\, e^{-ikt} dt = \dfrac{C_k(f')}{ik}$

   Cette question a déjà été résolue en exercice pour les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. Elle s'adapte très facilement aux fonctions de classe C^1 par morceaux.
   Soient $0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_p = 2\pi$ les points de discontinuité de f, tels que f soit de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $]a_j ; a_{j+1}[$.
   Alors, $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\, e^{-ikt}\, \mathrm{d}t = \sum_{j=0}^{p-1} \int_{a_j}^{a_{j+1}} f(t)\, e^{-ikt}\, \mathrm{d}t$
   Regardons, maintenant, l'intégrale sur l'intervalle $]a_j ; a_{j+1}[$ sur lequel il est possible de faire une intégration par parties On pose :

$$\begin{bmatrix} u = f & u' = f' \\ v' = e^{-ikt} & v = \dfrac{e^{-ikt}}{-ik} \end{bmatrix}$$

   Donc :

$$\begin{aligned} \int_{a_j}^{a_{j+1}} f(t)\, e^{-ikt}\, \mathrm{d}t &= \left[f(t) \frac{e^{-ikt}}{-ik} \right]_{a_j}^{a_{j+1}} - \int_{a_j}^{a_{j+1}} f'(t) \frac{e^{-ikt}}{-ik}\, \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{ik}\left(f(a_{j+1})\, e^{-ika_{j+1}} - f(a_j)\, e^{-ika_j} \right) + \frac{1}{ik} \int_{a_j}^{a_{j+1}} f'(t)\, e^{-ikt}\, \mathrm{d}t \end{aligned}$$

   D'où :

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(t)\, e^{-ikt}\, \mathrm{d}t &= \sum_{j=0}^{p-1} \int_{a_j}^{a_{j+1}} f(t)\, e^{-ikt}\, \mathrm{d}t \\ &= \sum_{j=0}^{p-1} \frac{1}{ik}\left(f(a_{j+1})\, e^{-ika_{j+1}} - f(a_j)\, e^{-ika_j} \right) + \sum_{j=0}^{p-1} \frac{1}{ik} \int_{a_j}^{a_{j+1}} f'(t)\, e^{-ikt}\, \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{ik} \sum_{j=0}^{p-1} \left(f(a_{j+1})\, e^{-ika_{j+1}} - f(a_j)\, e^{-ika_j} \right) + \frac{1}{ik} \sum_{j=0}^{p-1} \int_{a_j}^{a_{j+1}} f'(t)\, e^{-ikt}\, \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{ik}\left(f(2\pi)\, e^{-2ik\pi} - f(0)\, e^0 \right) + \int_0^{2\pi} f'(t)\, e^{-ikt}\, \mathrm{d}t \end{aligned}$$

   Comme f est 2π-périodique, c'est à dire que $f(2\pi) = f(0)$, que $e^{-2ik\pi} = e^0 = 1$, nous avons :

$$\int_0^{2\pi} f(t)\, e^{-ikt}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{ik} \int_0^{2\pi} f'(t)\, e^{-ikt}\, \mathrm{d}t$$

   Et donc, $C_k(f) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\, e^{-ikt}\, \mathrm{d}t = \dfrac{1}{2\pi} \times \dfrac{1}{ik} \displaystyle\int_0^{2\pi} f'(t)\, e^{-ikt}\, \mathrm{d}t = \dfrac{1}{ik} C_k(f')$
   Ce que nous voulions
   On peut faire remarquer, et c'est un résultat remarquable, que :

$$C_k(f) = \frac{C_k(f')}{ik} \Longleftrightarrow C_k(f') = ik C_k(f)$$

2. Dire que f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, c'est dire que $f' \in \mathcal{C}_M(T)$, et donc, d'après l'égalité de Parseval, $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |C_k(f')|^2$ est une série numérique convergente, et nous avons :

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |C_k(f')|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f'(t)|^2 \,\mathrm{d}t$$

3. On utilise ici, une inégalité très intéressante, presque courante, issue des identités remarquables, vraie pour tout $x_i n\mathbb{R}$ et tout $y \in \mathbb{R}$:

$$|xy| \leqslant \frac{x^2 + y^2}{2}$$

De cette inégalité, on tire que $|C_k(f)| = \left| kC_k(f) \times \frac{1}{k} \right| \leqslant \frac{1}{2}\left(|kC_k(f)|^2 + \frac{1}{k^2} \right)$

4. Or, $|kC_k(f)| = |C_k(f')|$; donc, de l'inégalité précédente, $|C_k(f)| \leqslant \frac{1}{2}\left(|C_k(f')|^2 + \frac{1}{k^2} \right)$.

→ D'après le point précédent, $\sum_{-\infty}^{+\infty} |C_k(f')|^2$ est une série convergente.

→ $\sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ est une série convergente

Ce qui montre que le terme $\left| C_k(f) e^{ikx} \right|$ est majoré par le terme général d'une série numérique convergente ; la convergence de $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k(f) e^{ikx}$ est donc normale sur $\mathbb{R}$.

Remarque 20 :

1. La convergence normale permet d'utiliser les résultats sur la convergence uniforme des séries *(dérivation, intégration en particulier)*
2. On obtient ainsi des résultats sur la régularité des coefficients de Fourier d'une fonction :
   ⇒ Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, comme $ikC_k(f) = C_k(f')$, de la convergence de $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k(f')|^2$, nous avons, $\lim_{k \to \pm\infty} |kC_k(f)|^2 = \lim_{k \to \pm\infty} |C_k(f')|^2 = 0$, c'est à dire $\lim_{k \to \pm\infty} kC_k(f) = 0$, autrement dit, $C_k(f)$ est négligeable devant $\frac{1}{k}$, ce qui se traduit par : $C_k(f) \in o\left(\frac{1}{k}\right)$.
   → Plus généralement, et par récurrence, on montre que si f est de classe $\mathcal{C}^p$, alors, $\lim_{k \to \pm\infty} k^p C_k(f) = 0$, autrement dit, $C_k(f) \in o\left(\frac{1}{k^p}\right)$

9.6.4 Des exemples de développement en série de Fourier

En fait, ces développement ont déjà été faits en 9.3.7, page 559

1. **Fonction en dents de scie**
   Soit f, définie sur $\mathbb{R}$, périodique et de période 2π, définie sur $[-\pi, +\pi]$ par $f(x) = |x|$.
   Page 560, nous avons montré le graphe et calculé sa série de Fourier. Et donc, la série de Fourier de f est :

$$\boxed{S_f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k \geqslant 0} \frac{\cos((2k+1)x)}{(2k+1)^2}}$$

(a) f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, d'après le théorème de Dirichlet, il y a convergence de cette série

(b) On en déduit, en prenant des valeurs particulières de x, que, par exemple pour $x = 0$,

$$f(0) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k \geqslant 0} \frac{\cos((2k+1)\,0)}{(2k+1)^2} = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k \geqslant 0} \frac{1}{(2k+1)^2} = 0$$

D'où, puisque $f(0) = 0$, $\displaystyle\sum_{k \geqslant 0} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$

(c) En allant plus loin, nous avons :

$$\sum_{k \geqslant 1} \frac{1}{k^2} = \sum_{k \geqslant 0} \frac{1}{(2k+1)^2} + \sum_{k \geqslant 1} \frac{1}{(2k)^2} = \sum_{k \geqslant 0} \frac{1}{(2k+1)^2} + \frac{1}{4} \sum_{k \geqslant 1} \frac{1}{k^2}$$

On en déduit que $\displaystyle\frac{3}{4} \sum_{k \geqslant 1} \frac{1}{k^2} = \sum_{k \geqslant 0} \frac{1}{(2k+1)^2}$

D'où $\displaystyle\sum_{k \geqslant 1} \frac{1}{k^2} = \frac{4\pi^2}{3 \times 8} = \frac{\pi^2}{6}$; on démontre ainsi un résultat souvent annoncé :

$$\boxed{\sum_{k \geqslant 1} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}}$$

2. **<u>Fonction créneau</u>**

La fonction créneau est la fonction périodique et de période 2π définie par :

$$f(x) = \begin{cases} -1 \text{ si} - \pi < x < 0 \\ +1 \text{ si} 0 < x < \pi \end{cases}$$

C'est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Nous continuons ce que nous avons vu page562

Nous avons calculé le polynôme trigonométrique qui, par le théorème de Dirichlet 9.6.2, converge simplement vers f. Ce polynôme est défini par :

$$S_{2N+1}(f)(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{N} \frac{\sin(2k+1)\,x}{2k+1}$$

Nous avons toujours $\lim\limits_{N \to +\infty} S_{2N+1}(f)(x) = \widetilde{f}(x)$.

Voir figure 9.9

(a) Pour $x = \dfrac{\pi}{2}$ qui est un point de continuité, nous avons

$$1 = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\sin(2k+1)\,\frac{\pi}{2}}{2k+1} \Longleftrightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$$

(b) Au contraire, pour $x = 0$, nous avons un point de discontinuité, et $\widetilde{f}(0) = 0$, et on a bien, pour tout $N \in \mathbb{N}$, $S_{2N+1}(f)(0) = 0$

3. **<u>Phénomène de Gibbs</u>**<u>*(Souriez !!)*</u>

Un agrandissement de la courbe au voisinage du point d'abscisse 0 et d'ordonnée 1 *(voir figure 9.10)* montre que le polynôme $S_{2N+1}(f)(x)$ s'écarte notablement du segment $[-1; +1]$ au voisinage de 0 :

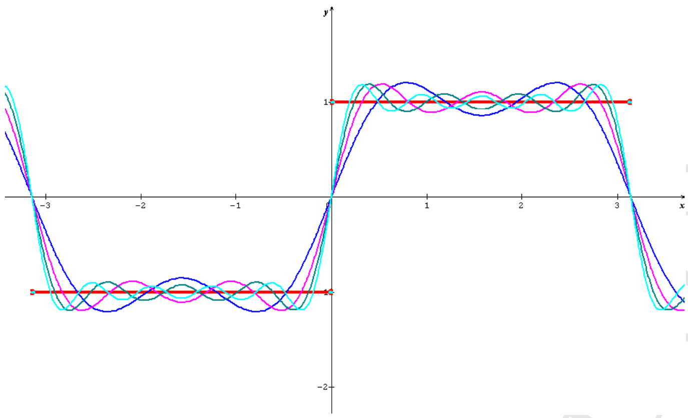

FIGURE 9.9 – Polynômes trigonométriques approchant la fonction créneau

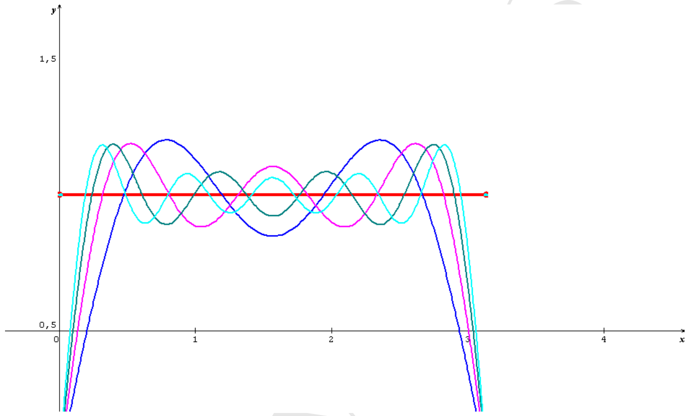

FIGURE 9.10 – Agrandissement sur l'intervalle $[0;\pi]$: illustration du phénomène de Gibbs

$\Rightarrow$ Pour étudier ce qui se passe, nous allons étudier la dérivée de $S_{2N+1}(f)$ et considérer le premier maximum de $S_{2N+1}(f)$ sur $\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right]$

Les calculs montrent donc que $[S_{2N+1}(f)]'(x) = \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{k=0}^{N}\cos(2k+1)x$, ce qui peut aussi s'écrire par :

$$\begin{aligned}
\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{N}\cos(2k+1)x &= \frac{2}{\pi}\left(\sum_{k=0}^{N}e^{i(2k+1)x}+e^{-i(2k+1)x}\right)\\
&= \frac{2}{\pi}\left(\sum_{k=0}^{N}e^{i(2k+1)x}+\sum_{k=0}^{N}e^{-i(2k+1)x}\right)\\
&= \frac{2}{\pi}\left(e^{ix}\sum_{k=0}^{N}\left(e^{2ix}\right)^k+e^{-ix}\sum_{k=0}^{N}\left(e^{-2ix}\right)^k\right)\\
&= \frac{2}{\pi}\left(\frac{e^{ix}\left(1-e^{2i(N+1)x}\right)}{1-e^{2ix}}+\frac{e^{-ix}\left(1-e^{-2i(N+1)x}\right)}{1-e^{-2ix}}\right)\\
&= \frac{2}{\pi}\left(\frac{1-e^{2i(N+1)x}}{e^{ix}-e^{-ix}}+\frac{1-e^{-2i(N+1)x}}{e^{ix}-e^{-ix}}\right)\\
&= \frac{2}{\pi}\left(\frac{e^{2i(N+1)x}-e^{-2i(N+1)x}}{e^{ix}-e^{-ix}}\right)\\
&= \frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin 2(N+1)x}{\sin x}\right)
\end{aligned}$$

Nous avons donc $[S_{2N+1}(f)]'(x) = \dfrac{2}{\pi}\left(\dfrac{\sin 2(N+1)x}{\sin x}\right)$.

⇒ Sur l'intervalle $\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right]$, $\sin x$ est toujours positif, le signe de $\dfrac{\sin 2(N+1)x}{\sin x}$ ne dépendra que du numérateur. Nous avons donc :

$$0 < 2(N+1)x < \pi \Longleftrightarrow 0 < x < \frac{\pi}{2(N+1)}$$

Le premier maximum est donc donné par : $[S_{2N+1}(f)]\left(\dfrac{\pi}{2(N+1)}\right)$.

⇒ Or, comme $[S_{2N+1}(f)](0) = 0$, nous avons :

$$\begin{aligned} [S_{2N+1}(f)]\left(\frac{\pi}{2(N+1)}\right) &= [S_{2N+1}(f)]\left(\frac{\pi}{2(N+1)}\right) - [S_{2N+1}(f)](0) \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2(N+1)}} [S_{2N+1}(f)]'(x)\,dx \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2(N+1)}} \frac{\sin 2(N+1)x}{\sin x}dx \end{aligned}$$

Nous avons donc $[S_{2N+1}(f)]\left(\dfrac{\pi}{2(N+1)}\right) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2(N+1)}} \dfrac{\sin 2(N+1)x}{\sin x}dx$

⇒ Faisons, dans l'intégrale, le changement de variable $u = 2(N+1)x$; alors, $x = \dfrac{u}{2(N+1)}$ et $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 2(N+1) \Longleftrightarrow \dfrac{\mathrm{d}u}{2(N+1)} = \mathrm{d}x$. Alors :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2(N+1)}} \frac{\sin 2(N+1)x}{\sin x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{\sin\left(\frac{u}{2(N+1)}\right)}\frac{\mathrm{d}u}{2(N+1)}$$

C'est à dire que $[S_{2N+1}(f)]\left(\dfrac{\pi}{2(N+1)}\right) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} \dfrac{\sin u}{2(N+1)\sin\left(\frac{u}{2(N+1)}\right)}\,\mathrm{d}u$

⇒ Appelons maintent $\Phi_N(u) = \dfrac{\sin u}{2(N+1)\sin\left(\frac{u}{2(N+1)}\right)}$.

Ré-écrivons $\Phi_N(u) = \dfrac{\sin u \times u}{2(N+1)u\sin\left(\frac{u}{2(N+1)}\right)} = \dfrac{\sin u}{u} \times \dfrac{\frac{u}{2(N+1)}}{\sin\left(\frac{u}{2(N+1)}\right)}$

En utilisant les limites remarquables, nous avons :

→ Une première fois, $\lim\limits_{u\to 0}\Phi_N(u) = \lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\sin u}{u} \times \dfrac{\frac{u}{2(N+1)}}{\sin\left(\frac{u}{2(N+1)}\right)} = 1$, ce qui nous permet de prolonger Φ_N par continuité en 0, en posant $\Phi_N(0) = 1$, ce qui montre que $\displaystyle\int_0^{\pi}\Phi_N(u)\,\mathrm{d}u$ est une intégrale bien définie

→ Et une seconde fois, $\lim\limits_{N\to+\infty}\dfrac{\frac{u}{2(N+1)}}{\sin\left(\frac{u}{2(N+1)}\right)} = 1$, de telle sorte que la suite de fonctions $(\Phi_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $\dfrac{\sin u}{u}$

⇒ Montrons maintenant que la suite de fonctions $(\Phi_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $\dfrac{\sin u}{u}$ sur l'intervalle $[0;\pi]$

Pour le démontrer, nous aurons besoin des inégalités suivantes démontrées en L_0 et L_1 :

- Pour tout $x \in \left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$, nous avons $\dfrac{2x}{\pi} \leqslant \sin x$
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons $|\sin x - x| \leqslant \dfrac{|x|^3}{6}$

Nous avons, pour tout $t \in [0;\pi]$:

$$\begin{aligned}\left|\Phi_N(t) - \frac{\sin t}{t}\right| &= \left|\frac{\sin t}{t} \times \frac{\frac{t}{2(N+1)}}{\sin\left(\frac{t}{2(N+1)}\right)} - \frac{\sin t}{t}\right| \\ &= \left|\frac{\sin t}{t}\right| \left|\frac{\frac{t}{2(N+1)}}{\sin\left(\frac{t}{2(N+1)}\right)} - 1\right| \\ &= \left|\frac{\sin t}{t}\right| \left|\frac{\frac{t}{2(N+1)} - \sin\left(\frac{t}{2(N+1)}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2(N+1)}\right)}\right|\end{aligned}$$

Comme, pour tout $t \in \mathbb{R}$, nous avons $\left|\dfrac{\sin t}{t}\right| \leqslant 1$, nous pouvons écrire :

$$\left|\Phi_N(t) - \frac{\sin t}{t}\right| \leqslant \left|\frac{\frac{t}{2(N+1)} - \sin\left(\frac{t}{2(N+1)}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2(N+1)}\right)}\right|$$

$\Rightarrow$ Nous allons, maintenant, étudier la quantité $\left|\dfrac{\frac{t}{2(N+1)} - \sin\left(\frac{t}{2(N+1)}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2(N+1)}\right)}\right|$

- $\star$ Tout d'abord, pour tout $t \in [0;\pi]$, nous avons :

$$\left|\frac{t}{2(N+1)} - \sin\left(\frac{t}{2(N+1)}\right)\right| \leqslant \frac{1}{6}\left(\frac{t}{2(N+1)}\right)^3 = \frac{t^3}{48(N+1)^3}$$

- $\star$ D'autre part, comme $0 \leqslant t \leqslant \pi$, alors $0 \leqslant \dfrac{t}{2(N+1)} \leqslant \dfrac{\pi}{2(N+1)} \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, d'où nous tirons :

$$\sin\left(\frac{t}{2(N+1)}\right) \geqslant \frac{2t}{2(N+1)\pi} = \frac{t}{(N+1)\pi}$$

Et donc, si $t \in [0;\pi]$ alors $\dfrac{1}{\sin\left(\frac{t}{2(N+1)}\right)} \leqslant \dfrac{(N+1)\pi}{t}$

- $\star$ Et donc :

$$\left|\Phi_N(t) - \frac{\sin t}{t}\right| \leqslant \frac{(N+1)\pi}{t} \times \frac{t^3}{48(N+1)^3} = \frac{\pi t^2}{48(N+1)^2} \leqslant \frac{\pi^3}{48(N+1)^2}$$

Pour tout $t \in [0;\pi]$, nous avons $\left|\Phi_N(t) - \dfrac{\sin t}{t}\right| \leqslant \dfrac{\pi^3}{48(N+1)^2}$; la majoration est uniforme et comme $\lim\limits_{N\to+\infty} \dfrac{\pi^3}{48(N+1)^2} = 0$, nous déduisons que la suite de fonctions $(\Phi_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $\dfrac{\sin t}{t}$ sur l'intervalle $[0;\pi]$

$\Rightarrow$ Nous pouvons donc écrire :

$$\lim_{N\to+\infty} [S_{2N+1}(f)]\left(\frac{\pi}{2(N+1)}\right) = \frac{2}{\pi}\lim_{N\to+\infty}\int_0^\pi \Phi_N(u)\,du = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \lim_{N\to+\infty}\Phi_N(u)\,du = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin u}{u}\,du$$

Ce qui sous entend que le premier maximum de $S_{2N+1}(f)$ tend vers un nombre fixe qui est $\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin u}{u}\,du$ et non pas 1

$\Rightarrow$ Tentons de donner une évaluation de $\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin u}{u}\,du$.

Nous partons de la série entière définissant $\sin u$: $\sin u = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{u^{2n+1}}{(2n+1)!}$

Et donc, pour $u \neq 0$, nous avons $\dfrac{\sin u}{u} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{u^{2n}}{(2n+1)!}$

Nous avons vu, dans le chapitre sur les séries entières que la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{u^{2n}}{(2n+1)!}$ converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}$, donc, en particulier sur l'intervalle $[0; \pi]$.
Nous avons donc :

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u = & \int_0^\pi \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n+1)!}\,\mathrm{d}u = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^\pi (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n+1)!}\,\mathrm{d}u \\ = & \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\pi^{2n+1}}{(2n+1)\,(2n+1)!}\end{aligned}$$

La série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\pi^{2n+1}}{(2n+1)\,(2n+1)!}$ est une série alternée et nous avons toujours

$$S_{2n-1} \leqslant \int_0^\pi \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u \leqslant S_{2n}$$

Nous avons, par exemple :

$$\sum_{n=0}^{5} (-1)^n \frac{\pi^{2n+1}}{(2n+1)\,(2n+1)!} \leqslant \int_0^\pi \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u \leqslant \sum_{n=0}^{6} (-1)^n \frac{\pi^{2n+1}}{(2n+1)\,(2n+1)!}$$

C'est à dire, après calculs :

$$1,85190 \leqslant \int_0^\pi \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u \leqslant 1,851938 \Longleftrightarrow 1,17895 \leqslant \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u \leqslant 1,17898$$

Et donc $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} [S_{2N+1}(f)]\left(\frac{\pi}{2\,(N+1)}\right) \simeq 1,1789$

9.7 Exercices

9.7.1 Applications directes du cours

Voilà une liste d'exercices qui ne pose pas de difficultés théoriques. La difficulté réside dans les calculs longs, fastidieux et qui demandent un immense soin.

Exercice 6 :

1. Soit f une fonction continue périodique et de période 2π. On suppose f de classe $\mathcal{C}^k$. Montrer que $(c_n(f))$ est un $o\left(\dfrac{1}{n^k}\right)$
2. **Etude d'une réciproque** Soit $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite de nombres complexes tels que $c_n \in o\left(\dfrac{1}{n^k}\right)$ pour tout entier positif $k \in \mathbb{N}$. On considère la série : $S(x) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$
   (a) Montrer que la série S converge normalement sur $\mathbb{R}$, que sa somme est de classe $\mathcal{C}^\infty$
   (b) Pourquoi est-il possible d'énoncer le résultat suivant :

   Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue et 2π-périodique. f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ si et seulement si, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $c_n(f) \in O\left(\dfrac{1}{n^k}\right)$

Exercice 7 :

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ 2π-périodique, dérivable, telle qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ vérifiant, pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$f'(t) = f(t+\lambda)$$

1. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, nous avons $\left(in - e^{in\lambda}\right) c_n(f) = 0$
2. En déduire pour quelles valeurs de λ, on peut effectivement trouver une telle fonction f non identiquement nulle.

Exercice 8 :

1. Soit f une fonction numérique de période 2π telle que : $f(x) = x^2$ si $|x| \leqslant \pi$
   (a) Calculer la série de Fourier de f
   (b) En déduire :
      i. $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2}$
      ii. $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{p^2}$
      iii. $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$
      iv. $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^4}$
      v. $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^4}$
2. Soit g la fonction périodique et de période 2π , définie pour $x \in [0; 2\pi[$ par $g(x) = x^2$
   (a) Déterminer la série de Fourier de g
   (b) Calculer $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2}$, puis $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^4}$

Exercice 9 :

Soit f une fonction numérique de période 2π telle que :

$$f(x) = \begin{cases} \pi - x \text{ si } x \in [0; \pi[\\ \pi + x \text{ si } x \in [-\pi; 0[\end{cases}$$

1. Calculer la série de Fourier de f
2. Retrouver $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$

Exercice 10 :

Montrer que, pour $x \in [0; \pi[$, on a, à la fois :

$$x(\pi - x) = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos 2nx}{n^2} \text{ et } x(\pi - x) = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)^3}$$

Pour le démontrer, inspirez vous des graphes de la figure 9.11 :

Exercice 11 :

1. Soit $a > 0$. Développer en série entière la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x + e^a}$
2. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $a > 0$, nous avons :
$$\frac{1}{\cos x + \cosh a} = \frac{1}{\sinh a}\left(\frac{e^a}{e^{ix} + e^a} - \frac{e^{-a}}{e^{ix} + e^{-a}}\right)$$
3. En déduire le développement en série de Fourier de la fonction g définie par $g(x) = \dfrac{1}{\cos x + \cosh a}$ avec $a > 0$

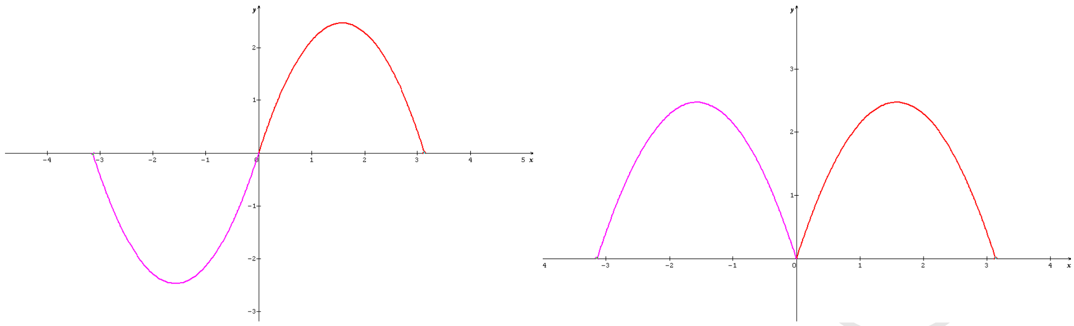

FIGURE 9.11 – Graphes possibles

Exercice 12 :

Soit $p \notin \mathbb{Z}$.
Soit f une fonction numérique de période 2π définie par $f(x) = \cos px$ si $|x| \leqslant \pi$

1. Développer f en série de Fourier
2. En déduire que : $\cot p\pi = \dfrac{1}{p\pi} + \dfrac{2p}{\pi} \sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{1}{p^2 - n^2}$

Exercice 13 :

Soit f une fonction continue 2π-périodique telle que, pour chaque $N \in \mathbb{N}$, on ait $\sup\limits_{x \in [0;2\pi]} S_N(f)(x) = \|S_N(f)\|_\infty \leqslant 1$. Montrer que $\sup\limits_{x \in [0;2\pi]} f(x) = \|f\|_\infty \leqslant 1$

9.7.2 Exercices moins proches du cours

Exercice 14 :

On désigne par $\mathbb{U}$ le cercle unité, c'est à dire $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \text{ tels que } |z| = 1\}$.
On rappelle que $(\mathbb{U}, \times)$ est un sous-groupe commutatif de $(\mathbb{C}, \times)$ et qu'un endomorphisme de groupe $\varphi : \mathbb{U} \longrightarrow \mathbb{U}$ est tel que pour tout $z \in \mathbb{U}$ et tout $z_1 \in \mathbb{U}$, $\varphi(zz_1) = \varphi(z) \times \varphi(z_1)$.
Rechercher tous les endomorphismes continus de $\mathbb{U}$

Exercice 15 :

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ 2π-périodique.
On suppose qu'il existe $\alpha > 0$ et $C > 0$ tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y \in \mathbb{R}$ $|f(x) - f(y)| \leqslant C|x - y|^\alpha$

1. Pour $a \in \mathbb{R}$ exprimer $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t + a) e^{-int} \, \mathrm{d}t$ en fonction de $c_n(f)$
2. En déduire l'existence d'un réel $M > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$ $|c_n(f)| \leqslant \dfrac{M}{n^\alpha}$.

Exercice 16 :

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique de classe $\mathcal{C}^1$ et telle que $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t) \, \mathrm{d}t = 0$.
Nous avons le lien entre les coefficients de Fourier $c_n(f)$ et $c_n(f')$: $c_n(f') = inc_n(f)$

1. Démontrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$ $|f(t)| \leqslant \sum\limits_{n \in \mathbb{Z}^*} \dfrac{1}{|n|} |c_n(f')|$
2. En déduire l'inégalité $\|f\|_\infty^2 \leqslant \dfrac{\pi}{6} \displaystyle\int_0^{2\pi} |f'(t)|^2 \, \mathrm{d}t$

3. **Inégalité de Wirtinger**

   Démontrer que $\displaystyle\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{2\pi} |f'(t)|^2 \,\mathrm{d}t$.

9.7.3 Série de Fourier d'une fonction de période T

Nous avons travaillé, dans le cours, le développement en série de Fourier de fonctions périodiques et de période 2π. Qu'en est-il des fonctions qui sont périodiques, mais d'une période différente de 2π ?
Soit donc f une fonction périodique, de période T et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.
L'objet des exercices qui suivent est de construire une série trigonométrique qui converge vers f.

Exercice 17 :

1. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction définie par $g(x) = f\left(\dfrac{T}{2\pi}x\right)$. Montrer que :
   (a) La fonction g est périodique et de période 2π
   (b) La fonction g est continue par morceaux
2. On appelle $C_n(g)$ le coefficient de Fourier de g d'ordre n. Démontrer que nous avons :

$$C_n(g) = C_n^1(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(u)\, e^{-in\frac{2\pi u}{T}} \,\mathrm{d}u$$

3. On suppose que, cette fois-ci, f est de classe $\mathcal{C}^1$. Démontrer que, pour tout $x \in [0;T]$, nous avons le développement :

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n^1(f)\, e^{in\frac{2\pi u}{T}}$$

   C'est le développement de f en série de Fourier

4. Démontrez que nous avons aussi $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left|C_n^1(f)\right|^2 = \frac{1}{T}\int_0^T |f(u)|^2 \,du$

   C'est l'égalité de Parseval

Exercice 18 :

Cet exercice s'inscrit dans la suite du précédent.

1. Calculer le développement en série de Fourier des fonctions suivantes :
   (a) f est périodique et de période 2, et $f(t) = |t|$ si $|t| < 1$
   (b) f est périodique et de période $a > 0$, et $f(t) = \dfrac{t}{a}$ si $0 \leqslant t < a$
2. Ecrire l'égalité de Parseval pour chacune des fonctions ci-dessus

9.7.4 Problème

Dans cette section, je présente un problème de concours qui « parle autour des séries de Fourier ». Nous y trouvons parfois *(Et c'est bien normal pour un problème de concours !)* des questions qui sont des questions de cours. Je ne les traiterai pas. J'ai essayé de trouver un problème qui apporte un plus aux notions vues dans le cours

Exercice 19 :

Soit $\mathcal{C}^\infty(T)$ l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ et 2π-périodique.

Pour tout $f \in \mathcal{C}^\infty(T)$, et tout $p \in \mathbb{Z}$, on posera $c_p(f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\, e^{-ipt} \,\mathrm{d}t$.

On désignera par $\|f\|_\infty$ la borne supérieure de $|f(t)|$ quand t décrit $\mathbb{R}$, c'est à dire :

$$\|f\|_\infty = \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t)| = \sup_{t\in[0;2\pi]} |f(t)|$$

Enfin, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on désignera par E_k, l'ensemble des éléments $f \in \mathcal{C}^\infty(T)$ ayant la propriété suivante :

Il existe $M > 0$ et $A > 0$ *(pouvant l'un et l'autre dépendre de f)* tels que *(avec la convention usuelle $f^{(0)} = f$)* on ait, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\left\|f^{(n)}\right\|_\infty \leqslant M (n!)^k A^n$$

On se propose, dans ce problème, d'étudier quelques propriétés de E_k, et notamment de caractériser par leurs coefficients de Fourier les éléments de E_k

Partie 1 : Généralités sur E_k et étude particulière de E_0

1. (a) Montrer que, pour tout $f \in \mathcal{C}^\infty(T)$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}$ est bornée.
   (b) Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(T)$; calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $p \in \mathbb{Z}$, $c_p\left(f^{(n)}\right)$, coefficient de Fourier d'indice p de f fonction de $c_p(f)$, de n et de p.
   (c) Établir, pour $p \neq 0$, l'inégalité $|c_p(f)| \leqslant \dfrac{\left\|f^{(n)}\right\|_\infty}{|p|^n}$
2. Montrer que, pour tout $f \in \mathcal{C}^\infty(T)$ et tout $n \in \mathbb{N}$: $\lim\limits_{|p|\to+\infty} |p|^n |c_p(f)| = 0$
3. Soit $(c_p)_{p\in\mathbb{Z}}$ une suite de nombres complexes telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{|p|\to+\infty} |p|^k c_p = 0$
   (a) Montrer que les séries de fonctions $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} c_p e^{ipt}$ et $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} c_{-p} e^{-ipt}$ où $t \in \mathbb{R}$, sont normalement convergentes dans $\mathbb{R}$.
   (b) Si l'on pose :$f(t) = \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} c_p e^{ipt} + \sum_{p=1}^{+\infty} c_{-p} e^{-ipt}$, montrer que $f \in \mathcal{C}^\infty(T)$
   (c) Montrer que $c_p = c_p(f)$
4. Etablir que, si f et g sont deux éléments de E_k, et μ une constante complexe, alors μf ,$f + g$ fg et f' sont éléments de E_k,
5. Soit $f \in E_0$.
   (a) Déduire de la question 1 que $c_p(f)$ est nul sauf pour un nombre fini de valeurs de p
   (b) Soit q un entier strictement positif ; on définit f par $f(t) = \displaystyle\sum_{p=-q}^{q} c_p e^{ipt}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, les c_p étant des constantes complexes et l'un au moins des deux nombres c_q et c_{-q} étant non nul. Montrer qu'il existe $M > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left\|f^{(n)}\right\|_\infty \leqslant Mq^n$ et que, si M' et A sont deux constantes positives satisfaisant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, à l'inégalité :$\left\|f^{(n)}\right\|_\infty \leqslant M'A^n$, alors $A \geqslant q$
6. Soit q un entier strictement positif ; on définit g_1 par : $g_1(\theta) = \cos^q \theta$
   Établir la meilleure inégalité possible du type suivant :

   $$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ nous avons } \left\|g_1^{(n)}\right\|_\infty \leqslant M_1 (n!)^k A_1^n$$

   (*c'est-à-dire trouver le plus petit A_1, possible et, pour cet A_1 trouver le plus petit M_1 possible).*

Partie 2 ***(intermède ludique et reposant)*** **: étude de fonctions et de majorations**

1. Soient $a > 1$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Etudier les variations de la fonction f_n ainsi définie :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} f_n : \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f_n(x) = x^n a^{-x} \end{array} \right.$$

Donner explicitement le maximum de cette fonction.

2. (a) Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $u_n = \dfrac{1}{n!} \times \left(\dfrac{n}{e}\right)^n$

   (b) En déduire l'inégalité $n! \geqslant e\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$

3. On pose, pour tout $x > 0$, $\Phi(x) = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} (n!x^{-n})$

   (a) Donner une expression explicite de $\Phi(x)$ lorsque $x \in]s, s+1]$, où $s \in \mathbb{N}$.

   (b) Etudier la continuité de Φ ; représenter graphiquement la restriction de Φ à l'intervalle $]0, 4]$.

   (c) Etablir l'existence d'une constante β telle que, pour tout $x > 0$: $\Phi(x) \leqslant \beta e^{\frac{-x}{2}}$

Partie 3 : Etude du cas particulier des « fonctions rationnelles trigonométriques »

1. Soit $a \in \mathbb{C}$, tel que $|a| > 1$. On pose, pour tout $t \in \mathbb{R}$: $h_a(t) = \displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} a^{-p} e^{ipt}$

   (a) Donner une expression explicite de $h_a(t)$.

   (b) Etablir que $h_a \in \mathcal{C}^\infty(T)$; donner, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le développement en série de Fourier de $h_a^{(n)}$

   (c) Etablir l'inégalité, valable pour n et p entiers, $n \geqslant 0$ et $p > 0$: $p^n \times |a|^{-\frac{p}{2}} \leqslant \left(\dfrac{2}{\ln|a|}\right)^n \times n!$

   (d) En déduire que $h_a \in E_1$

2. Soit $b \in \mathbb{C}$, avec $|b| \neq 1$.

   (a) Donner les coefficients de Fourier de la fonction ψ_b, définie par $\psi_b(t) = \dfrac{1}{b - e^{it}}$

   (b) En déduire que $\psi_b \in E_1$

Partie 4 : Caractérisation des éléments de E_k par leurs coefficients de Fourier

1. Soit k un entier strictement positif, et soit $f \in E_k$; par définition des éléments de E_k, il existe alors $M > 0$ et $A > 0$ tels pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\left\| f^{(n)} \right\|_\infty \leqslant M (n!)^k A^n$$

   (a) Etablir que, pour tout entier relatif $p \neq 0$, nous avons l'inégalité $c_p(f) \leqslant M(n!)^k \left(\dfrac{A}{|p|}\right)^n$

   (b) A l'aide de la fonction Φ définie pour tout $x > 0$ par $\Phi(x) = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} (n!x^{-n})$, montrer l'existence de deux constantes strictement positives, B et λ telles que, pour tout $p \in \mathbb{Z}$:

$$|c_p(f)| \leqslant B \exp\left(-\lambda |p|^{\frac{1}{k}}\right)$$

2. Inversement soit C une application de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{C}$, ainsi définie :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} C : \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ p & \longmapsto & C(p) = c_p \end{array} \right.$$

pour laquelle il existe deux constantes $B > 0$ et $\lambda > 0$ strictement positives telles que, pour tout $p \in \mathbb{Z}$, nous ayions

$$|c_p| \leqslant B \exp\left(-\lambda |p|^{\frac{1}{k}}\right)$$

(a) Etablir qu'il existe un élément $f \in \mathcal{C}^{\infty}(T)$ tel que, pour tout $p \in \mathbb{Z}$ $c_p = c_p(f)$

(b) Déduire de la partie 2 l'inégalité, valable pour tout couple $(n,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ d'entiers strictement positifs :

$$p^n \exp\left(-\frac{\lambda}{2} p^{\frac{1}{k}}\right) \leqslant (n!)^k \left(\frac{2k}{\lambda}\right)^{nk}$$

(c) En déduire une majoration de $\left\|f^{(n)}\right\|_{\infty}$ et montrer que $f \in E_k$

9.8 Correction des exercices

9.8.1 Exercices du cours

Exercice 1 :

Soit $f \in \mathcal{C}^1(T)$. Démontrer que les coefficients de Fourier de f' vérifient, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f') = inc_n(f)$

Nous avons, par définition, $c_n(f') = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f'(t)\, e^{-int}\,\mathrm{d}t$.
Nous allons faire une intégration par parties :

$$\left\{ \begin{array}{ll} u' = f'(t) & u = f(t) \\ v = e^{-int} & v' = -ine^{-int} \end{array} \right\}$$

D'où

$$c_n(f') = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f'(t)\, e^{-int}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\left(\left[f(t)\, e^{-int}\right]_0^{2\pi} + in\int_0^{2\pi} f(t)\, e^{-int}\,\mathrm{d}t\right)$$

Comme la fonction $f(t)$ est périodique et de période 2π, nous avons

$$\left[f(t)\, e^{-int}\right]_0^{2\pi} = f(2\pi)\, e^{-2in\pi} - f(0) = f(2\pi) - f(0) = 0$$

Et donc, $c_n(f') = \dfrac{1}{2\pi} \times in\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\, e^{-int}\,\mathrm{d}t = in\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\, e^{-int}\,\mathrm{d}t = inc_n(f)$
Ce que nous voulions

Exercice 2 :

Soit $f \in \mathcal{C}_M(T)$, une fonction périodique de période T, intégrable sur tout intervalle borné. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_x^{x+T} f(t)\,\mathrm{d}t$, ne dépend pas de x

C'est un exercice classique de L_1 !!
Par la relation de Chasles :

$$\int_x^{x+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_x^0 f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t + \int_T^{x+T} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Nous faisons, dans l'intégrale $\displaystyle\int_T^{x+T} f(t)\,\mathrm{d}t$, le changement de variables $u = t - T$. Alors, $\mathrm{d}t = \mathrm{d}u$ et

$$\int_T^{x+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x f(u+T)\,\mathrm{d}u$$

De la périodicité de f, nous avons $f(u+T) = f(u)$ et donc :

$$\int_T^{x+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x f(u+T)\,\mathrm{d}u = \int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u$$

Et donc :

$$\begin{aligned} \int_x^{x+T} f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_x^0 f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t + \int_T^{x+T} f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_x^0 f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u \\ &= \int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Ce qui montre bien que $\displaystyle\int_x^{x+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t$ qui est une intégrale qui ne dépend pas de x.

Exercice 3 :

Soit f périodique et de période 2π dont les coefficients de Fourier sont notés $c_n(f)$. Quels sont les coefficients de Fourier de la fonction translatée $g(t) = f(t - t_0)$?

▷ Tout d'abord on vérifie, sans difficulté que g est aussi périodique et de période 2π :

$$g(t + 2\pi) = f(t - t_0 + 2\pi) = f(t - t_0) = g(t)$$

▷ Maintenant, calculons les $c_n(g)$, les coefficients de Fourier de g :

$$c_n(g) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(t)\, e^{-ikt}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t - t_0)\, e^{-ikt}\, \mathrm{d}t$$

On fait le changement de variable classique $u = t - t_0$, alors $\mathrm{d}u = \mathrm{d}t$ et, alors :

$$\begin{aligned} c_n(g) = &\ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t - t_0)\, e^{-ikt}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-t_0}^{2\pi - t_0} f(u)\, e^{-ik(u+t_0)}\, \mathrm{d}u \\ = &\ \frac{e^{-ikt_0}}{2\pi}\int_{-t_0}^{2\pi - t_0} f(u)\, e^{-iku}\, \mathrm{d}u = \frac{e^{-ikt_0}}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(u)\, e^{-iku}\, \mathrm{d}u \\ = &\ e^{-ikt_0} c_n(f) \end{aligned}$$

Exercice 5 :

Démontrer que si 2 fonctions u et v continues ont les mêmes coefficients de Fourier sont égales.

1. **Très généralement**, nous avons $c_n(u) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} u(t)\, e^{-int}\, \mathrm{d}t$ et $c_n(v) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} v(t)\, e^{-int}\, \mathrm{d}t$, d'où nous tirons :
$$c_n(u) - c_n(v) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(t)\, e^{-int}\, \mathrm{d}t - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(t)\, e^{-int}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (u - v)(t)\, e^{-int}\, \mathrm{d}t = c_n(u - v)$$
Nous avons donc $c_n(u - v) = c_n(u) - c_n(v)$
2. D'autre part, comme $c_n(u) = c_n(v)$, nous avons $c_n(u - v) = 0$ et en utilisant l'identité de Parseval, nous avons :
$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(u - v)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |(u - v)(t)|^2\, \mathrm{d}t$$
C'est à dire $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} |(u - v)(t)|^2\, \mathrm{d}t = 0$ et donc, comme u et v sont continues, nous avons $|(u - v)(t)|^2 = 0$, c'est à dire $(u - v) = 0 \Longleftrightarrow u = v$

9.8.2 Applications directes du cours

Exercice 6 :

1. *Soit f une fonction continue périodique et de période 2π. On suppose f de classe $\mathcal{C}^k$. Montrer que $(c_n(f))$ est un $o\left(\dfrac{1}{n^k}\right)$*

   Question pas très difficile en soi
   → Nous avons déjà montré en exercice que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f') = inc_n(f)$
   → Par une récurrence simple, on montre que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $c_n\left(f^{(k)}\right) = (in)^k c_n(f)$, et donc $\left|c_n\left(f^{(k)}\right)\right| = n^k |c_n(f)|$
   → En appliquant 9.5.4 à $c_n\left(f^{(k)}\right)$, nous avons :
$$\lim_{n\to+\infty} c_n\left(f^{(k)}\right) = 0 \Longleftrightarrow \lim_{n\to+\infty} n^k |c_n(f)| = \lim_{n\to+\infty} \frac{|c_n(f)|}{\frac{1}{n^k}} = 0$$
   Et nous avons bien $(c_n(f)) \in o\left(\dfrac{1}{n^k}\right)$

2. **Etude d'une réciproque**

Soit $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite de nombres complexes tels que $c_n \in o\left(\dfrac{1}{|n|^k}\right)$ pour tout entier positif $k \in \mathbb{N}$.

On considère la série : $S(x) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$

Montrer que la série S converge normalement sur $\mathbb{R}$, que sa somme est de classe $\mathcal{C}^\infty$

$\Rightarrow$ Que $c_n \in o\left(\dfrac{1}{|n|^k}\right)$ veut dire que $\displaystyle\lim_{n\to\pm\infty} \frac{|c_n|}{\frac{1}{|n|^k}} = 0 \iff \lim_{n\to+\infty} \left|c_n n^k\right| = 0$

Donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $M_k > 0$, il existe $N_k \in \mathbb{N}$ tel que si $|n| \geqslant N_k$, alors $\left|c_n n^k\right| \leqslant M_k$ Ceci est vrai, en particulier pour $k = 0$ et $k = 2$. Donc, pour $|n| \geqslant \max\{N_0, N_2\}$, nous avons $|c_n| \leqslant M_0$ et $|c_n| n^2 \leqslant M_2$, et en additionnant, nous avons, si $|n| \geqslant \max\{N_0, N_2\}$, $|c_n|\left(1+n^2\right) \leqslant M_0 + M_2 \iff |c_n| \leqslant \dfrac{M_0+M_2}{1+n^2}$

Nous avons, en particulier, pour tout $|n| \geqslant \max\{N_0, N_2\}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $\left|c_n e^{inx}\right| \leqslant \dfrac{M_0+M_2}{1+n^2}$

Le nombre réel $\dfrac{M_0+M_2}{1+n^2}$ est le terme général d'une série numérique convergente et donc la série S converge normalement, donc uniformément sur $\mathbb{R}$. S est donc continue sur $\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ Les dérivées successives de S sont du type $S^{(k)}(x) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (in)^k c_n e^{inx}$.

Comme tout à l'heure, il existe une constante $M > 0$ et un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N$, $\left|(in)^k c_n\right| \leqslant \dfrac{M}{n^2+1}$ Donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la série $S^{(k)}$ converge normalement, et S est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$

Exercice 7 :

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ 2π-périodique, dérivable, telle qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ vérifiant, pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$f'(t) = f(t+\lambda)$$

1. *Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, nous avons $\left(in - e^{in\lambda}\right) c_n(f) = 0$*

Voilà une question qui ne pose aucune difficulté.
$\rightarrow$ Tout d'abord, nous avons $c_n(f') = inc_n(f)$
$\rightarrow$ Ensuite :

$$c_n(f') = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f'(t)\, e^{-int}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t+\lambda)\, e^{-int}\,\mathrm{d}t$$

En faisant le changement de variable des plus classiques $u = t + \lambda$, nous avons :

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} f(t+\lambda)\, e^{-int}\,\mathrm{d}t &= \int_{-\lambda}^{2\pi-\lambda} f(u)\, e^{-in(u-\lambda)}\,\mathrm{d}u \\ &= e^{in\lambda}\int_{-\lambda}^{2\pi-\lambda} f(u)\, e^{-in(u-\lambda)}\,\mathrm{d}u \\ &= e^{in\lambda}\int_0^{2\pi-} f(u)\, e^{-inu}\,\mathrm{d}u\end{aligned}$$

De telle sorte donc que $c_n(f') = e^{in\lambda} \times \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(u)\, e^{-inu}\,\mathrm{d}u = e^{in\lambda} c_n(f)$

$\rightarrow$ Nous avons donc $c_n(f') = inc_n(f) = e^{in\lambda} c_n(f)$, et donc :

$$inc_n(f) = e^{in\lambda} c_n(f) \iff inc_n(f) - e^{in\lambda} c_n(f) = 0 \iff \left(in - e^{in\lambda}\right) c_n(f) = 0$$

2. *En déduire pour quelles valeurs de λ, on peut effectivement trouver une telle fonction f non identiquement nulle.*

   Si f est une solution de l'équation différentielle $f'(t) = f(t+\lambda)$, alors f est dérivable et la relation $f'(t) = f(t+\lambda)$ entraîne que f est de classe $\mathcal{C}^1$. D'après le théorème de Dirichlet, f est donc somme de sa série de Fourier et donc $f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n(f)\, e^{inx}$

   S'il existe une solution à l'équation différentielle $f'(t) = f(t+\lambda)$ non identiquement nulle, il existe $n_0 \in \mathbb{Z}$ tel que $c_{n_0}(f) \neq 0$.
   L'identité $\left(in_0 - e^{in_0\lambda}\right) c_{n_0}(f) = 0$ implique donc que $in_0 - e^{in_0\lambda} = 0 \iff in_0 = e^{in_0\lambda}$.
   En passant aux modules, nous avons $n_0 = \pm 1$ et donc
   $\rightarrow$ Si $n_0 = 1$ alors $e^{i\lambda} = i$ et donc $\lambda = \dfrac{\pi}{2}$
   $\rightarrow$ Si $n_0 = -1$ alors $e^{-i\lambda} = -i$ et donc $\lambda = \dfrac{\pi}{2}$
   La valeur de λ, pour laquelle on peut effectivement trouver une telle fonction f non identiquement nulle est $\lambda = \dfrac{\pi}{2}$ et, à ce moment,$f(x) = ae^{-ix} + be^{ix}$.

   Réciproquement, nous vérifions sans difficulté que si $f(x) = ae^{-ix} + be^{ix}$, alors $f'(t) = f\left(t + \dfrac{\pi}{2}\right)$

Exercice 8 :

1. *Soit f une fonction numérique de période 2π telle que : $f(x) = x^2$ si $|x| \leqslant \pi$ Calculer les coefficients de Fourier de f*

   (a) *Calculer la série de Fourier de f*

   Tout d'abord, commençons par faire le graphe de f *(Figure 9.12)*

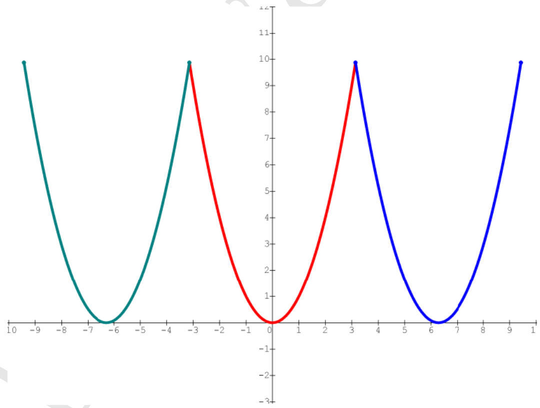

FIGURE 9.12 – Graphe de $f(x) = x^2$ sur $[-\pi;\pi]$

- Dans le cas présent, nous avons, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $C_k(f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} t^2 e^{-ikt}\,\mathrm{d}t$

  $\rightarrow$ Ensuite, on remarque que $C_0(f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} t^2\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{2\pi}\left[\dfrac{t^3}{3}\right]_{-\pi}^{\pi} = \dfrac{\pi^2}{3}$

  $\rightarrow$ Calculons maintenant, pour $k \in \mathbb{Z}$ et $k \neq 0$, $c_k(f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} t^2 e^{-ikt}\,\mathrm{d}t$

  Le calcul de $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} t^2 e^{-ikt}\,\mathrm{d}t$ va se faire en 2 intégrations par parties successives.

  ◇ Pour la première :

$$\begin{bmatrix} u = t^2 & u' = 2t \\ v' = e^{-ikt} & v = \dfrac{-e^{-ikt}}{ik} \end{bmatrix}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} t^2 e^{-ikt}\,\mathrm{d}t &= \left[\frac{-t^2 e^{-ikt}}{ik}\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{2}{ik}\int_{-\pi}^{\pi} te^{-ikt}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{-\pi^2 (-1)^k + (-\pi)^2 (-1)^k}{ik} + \frac{2}{ik}\int_{-\pi}^{\pi} te^{-ikt}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{ik}\int_{-\pi}^{\pi} te^{-ikt}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

◇ Calculons, maintenant, $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} te^{-ikt}\,\mathrm{d}t$ par parties

$$\begin{bmatrix} u = t & u' = 1 \\ v' = e^{-ikt} & v = \dfrac{-e^{-ikt}}{ik} \end{bmatrix}$$

Et donc :

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} te^{-ikt}\,\mathrm{d}t &= \left[\frac{-te^{-ikt}}{ik}\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{ik}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{-\pi (-1)^k + (-\pi)(-1)^k}{ik} + \frac{1}{ik}\left[\frac{e^{-ikt}}{-ik}\right]_{-\pi}^{\pi} \\
&= \frac{-2\pi (-1)^k}{ik} + \frac{1}{ik} \times \frac{e^{ik\pi} - e^{-ik\pi}}{-ik} \\
&= \frac{-2\pi (-1)^k}{ik}
\end{aligned}$$

◇ D'où, en remontant, $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} t^2 e^{-ikt}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{ik} \times \frac{-2\pi(-1)^k}{ik} = \frac{4\pi(-1)^k}{k^2}$

Et donc,

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{4\pi(-1)^k}{k^2}\right) = \frac{2 \times (-1)^k}{k^2}$$

- Calculons, maintenant, la série de Fourier de f
  On remarque que $c_k(f) = c_{-k}(f)$ et donc

$$\begin{aligned}
S_f(x) &= \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{+\infty} c_k(f)\left(e^{ikx} + e^{-ikx}\right) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2 \times (-1)^k}{k^2} \times 2\cos kx \\
&= \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4(-1)^k \cos kx}{k^2}
\end{aligned}$$

La série de Fourier est donc $S_f(x) = \dfrac{\pi^2}{3} + \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4(-1)^k \cos kx}{k^2}$

(b) *En déduire :*

i. $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2}$

Nous pouvons remarquer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-\pi;\pi]$ et que nous pouvons appliquer le théorème de Dirichlet

En $x = \pi$, nous avons $f(\pi) = \pi^2$ et $S_f(\pi) = f(\pi) = \pi^2$ et donc :

$$\frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4(-1)^k \cos k\pi}{k^2} = \pi^2$$

Mais, ce n'est pas fini !!
Nous avons $\cos k\pi = (-1)^k$ et donc $(-1)^k \cos k\pi = (-1)^k \times (-1)^k = 1$. D'où :

$$\frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4(-1)^k \cos k\pi}{k^2} = \pi^2 \iff \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4}{k^2} = \pi^2$$
$$\iff$$
$$4\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = -\frac{\pi^2}{3} + \pi^2 = \frac{-2\pi^2}{3} \iff \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Nous retrouvons le résultat classique : $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} = \frac{\pi^2}{6}$

ii. $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{p^2}$

Nous appliquons le théorème de Dirichlet
En $x = 0$, nous avons $f(0) = 0^2 = 0$ et $S_f(0) = f(0) = 0$ et donc :

$$\frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4(-1)^k \cos k \times 0}{k^2} = 0 \iff \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} = 0$$

D'où, $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} = \frac{-\pi^2}{12}$

iii. $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$

Y-a-t-il une véritable difficulté à cette question ? Il suffit de remarquer que :

$$\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} = \underbrace{\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p)^2}}_{\text{Somme des termes de rang pair}} + \underbrace{\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}}_{\text{Somme des termes de rang impair}}$$

Et donc $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} = \frac{1}{4}\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$, c'est à dire que nous avons $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{3}{4}\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2}$

Et donc, $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{3}{4} \times \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{8}$

iv. $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^4}$

L'égalité de Parseval nous donne $\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k(f)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2\, dt$

Dans notre cas, nous avons $\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k(f)|^2 = |c_0(f)|^2 + 2\sum_{k=1}^{+\infty} |c_k(f)|^2$, puisque $c_k(f) = c_{-k}(f)$.

C'est à dire $\displaystyle\frac{\pi^4}{9} + 2\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4}{k^4} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^4\,\mathrm{d}t$. Or

$$\int_{-\pi}^{\pi} t^4\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^5}{5}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{\pi^5 - (-\pi)^5}{5} = \frac{2\pi^5}{5}$$

Et donc, $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t = \dfrac{\pi^4}{5}$.
En synthèse,

$$\frac{\pi^4}{9} + 2\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{4}{k^4} = \frac{\pi^4}{5} \iff 8\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^4} = \frac{4\pi^4}{45} \iff \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

v. $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^4}$

Nous allons recommencer ce que nous avons fait dans une précédente question.

$$\begin{aligned}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{p^4} &= \underbrace{\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{(2p)^4}}_{\text{Somme des termes de rang pair}} + \underbrace{\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^4}}_{\text{Somme des termes de rang impair}} \\ &= \frac{1}{16}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{p^4} + \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^4}\end{aligned}$$

Et donc $\dfrac{15}{16}\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{p^4} = \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^4} \iff \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^4} = \frac{15}{16}\times\frac{\pi^4}{90} = \frac{\pi^4}{96}$

2. *Soit g la fonction périodique et de période 2π , définie pour $x \in [0; 2\pi[$ par $g(x) = x^2$*

Comme, tout à l'heure, faisons le graphe de g :

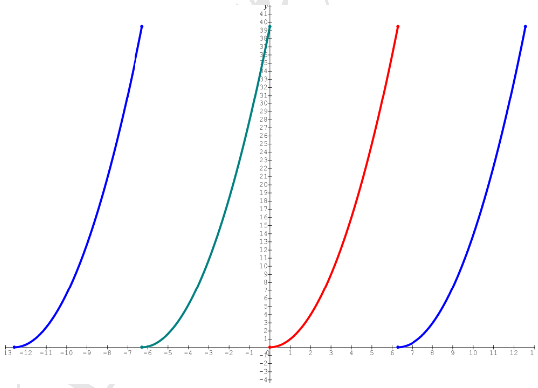

FIGURE 9.13 – Graphe de $g(x) = x^2$ sur $[0; 2\pi]$

Alors que nous pourrions penser le contraire, il est parfaitement clair que nous avons $f \neq g$.
De plus, g n'est pas une fonction paire, puisque, par exemple, $g(2) = 4$ et $g(-2) = (-2+2\pi)^2$; nous avons donc $g(2) \neq g(-2)$

(a) *Déterminer la série de Fourier de g*

- Nous avons, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $C_k(f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} t^2 e^{-ikt}\,\mathrm{d}t$

→ Ensuite, on remarque que $C_0(f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} t^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{2\pi} = \frac{4\pi^2}{3}$

→ Calculons maintenant, pour $k \in \mathbb{Z}$ et $k \neq 0$, $c_k(f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} t^2 e^{-ikt}\,\mathrm{d}t$

Le calcul de $\displaystyle\int_0^{2\pi} t^2 e^{-ikt}\,\mathrm{d}t$ va se faire en 2 intégrations par parties successives.

- ◇ Pour la première :

$$\begin{bmatrix} u = t^2 & u' = 2t \\ v' = e^{-ikt} & v = \dfrac{-e^{-ikt}}{ik} \end{bmatrix}$$

D'où :

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} t^2 e^{-ikt}\,\mathrm{d}t = & \left[\frac{-t^2 e^{-ikt}}{ik}\right]_0^{2\pi} + \frac{2}{ik}\int_0^{2\pi} te^{-ikt}\,\mathrm{d}t \\ = & \frac{-4\pi^2}{ik} + \frac{2}{ik}\int_0^{2\pi} te^{-ikt}\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

- ◇ Calculons, maintenant, $\displaystyle\int_0^{2\pi} te^{-ikt}\,\mathrm{d}t$ par parties

$$\begin{bmatrix} u = t & u' = 1 \\ v' = e^{-ikt} & v = \dfrac{-e^{-ikt}}{ik} \end{bmatrix}$$

Et donc :

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} te^{-ikt}\,\mathrm{d}t = & \left[\frac{-te^{-ikt}}{ik}\right]_0^{2\pi} + \frac{1}{ik}\int_0^{2\pi} e^{-ikt}\,\mathrm{d}t \\ = & \frac{-2\pi}{ik} + \frac{1}{ik}\left[\frac{e^{-ikt}}{-ik}\right]_0^{2\pi} \\ = & \frac{-2\pi}{ik} \end{aligned}$$

- ◇ D'où, en remontant, $\displaystyle\int_0^{2\pi} t^2 e^{-ikt}\,\mathrm{d}t = \frac{-4\pi^2}{ik} + \frac{2}{ik}\times\frac{-2\pi}{ik} = \frac{4\pi}{k^2} - \frac{4\pi^2}{ik} = 4\pi\left(\frac{1}{k^2} + \frac{i\pi}{k}\right)$

Et donc, pour $k \neq 0$

$$c_k(g) = \frac{1}{2\pi}\left(4\pi\left(\frac{1}{k^2} + \frac{i\pi}{k}\right)\right) = \frac{2}{k^2} + \frac{2i\pi}{k}$$

Remarquons que $\overline{c_{-k}(g)} = c_k(g)$

- Calculons, maintenant, la série de Fourier de g

Si $S_g(x)$ est la série de Fourier de g, nous avons :

$$S_g(x) = \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(c_k(g)\,e^{ikx} + c_{-k}(g)\,e^{-ikx}\right)$$

Regardons de plus près $c_k(g)\,e^{ikx} + c_{-k}(g)\,e^{-ikx}$ pour $k \geqslant 1$

- ▷ Nous allons utiliser une première méthode en utilisant une méthode de calcul brutal; nous allons développer :

$$\begin{aligned} c_k(g)\,e^{ikx} + c_{-k}(g)\,e^{-ikx} = & \left(\frac{2}{k^2} + \frac{2i\pi}{k}\right)(\cos kx + i\sin kx) + \left(\frac{2}{k^2} - \frac{2i\pi}{k}\right)(\cos kx - i\sin kx) \\ = & \frac{2}{k^2}\cos kx + i\frac{2}{k^2}\sin kx + \frac{2i\pi}{k}\cos kx - \frac{2\pi}{k}\sin kx + \dots \\ & \frac{2}{k^2}\cos kx - i\frac{2}{k^2}\sin kx - \frac{2i\pi}{k}\cos kx - \frac{2\pi}{k}\sin kx \\ = & \frac{4}{k^2}\cos kx - \frac{4\pi}{k}\sin kx \end{aligned}$$

- ▷ La seconde méthode consiste à utiliser le fait que $\overline{c_{-k}(g)} = c_k(g)$. Nous avons, à ce moment là :

$$c_k(g)\,e^{ikx} + c_{-k}(g)\,e^{-ikx} = c_k(g)\,e^{ikx} + \overline{c_k(g)\,e^{ikx}} = 2\,\mathrm{Re}\left(c_k(g)\,e^{ikx}\right)$$

Et en faisant le calcul de $\left(\dfrac{2}{k^2} + \dfrac{2i\pi}{k}\right)(\cos kx + i\sin kx)$, on trouve facilement que $2\,\mathrm{Re}\left(c_k(g)\,e^{ikx}\right) = \dfrac{4}{k^2}\cos kx - \dfrac{4\pi}{k}\sin kx$

Ainsi, la série de Fourier de g est donnée par

$$S_g(x) = \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4}{k^2} \cos kx - \frac{4\pi}{k} \sin kx$$

(b) *Calculer* $\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2}$, *puis* $\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^4}$

→ Calculons $\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2}$

f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, et donc, d'après le théorème de Dirichlet, pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$S_g(x) = \widetilde{g}(x) = \frac{g(x^+) + g(x^-)}{2}$$

Donc, $S_g(0) = \widetilde{g}(0) = \dfrac{g(0^+) + g(0^-)}{2} = \dfrac{1}{2}\left(0 + 4\pi^2\right) = 2\pi^2$.

Ainsi,

$$S_g(0) = 2\pi^2 = \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4}{k^2} \cos k0 - \frac{4\pi}{k} \sin k0 = \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4}{k^2}$$

D'où $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4}{k^2} = 2\pi^2 - \frac{4\pi^2}{3} = \frac{2\pi^2}{3} \iff \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{2\pi^2}{12} = \frac{\pi^2}{6}$

→ Calculons maintenant $\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^4}$

L'identité de Parseval nous donne : $\left(\frac{4\pi^2}{3}\right)^2 + \sum_{k=1}^{+\infty} |c_k(g)|^2 + |c_{-k}(g)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g(x)|^2 \, \mathrm{d}x$,

c'est à dire, en utilisant $\overline{c_{-k}(g)} = c_k(g)$, nous avons :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g(x)|^2 \, \mathrm{d}x = \frac{16\pi^4}{9} + 2\sum_{k=1}^{+\infty} |c_k(g)|^2$$

- ⋆ Nous avons $|c_k(g)|^2 = \left|\frac{2}{k^2} + i\frac{2\pi}{k}\right|^2 = \frac{4}{k^4} + \frac{4\pi^2}{k^2}$
- ⋆ De même, nous avons :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g(x)|^2 \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x^4 \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{x^5}{5}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \times \frac{32\pi^5}{5} = \frac{16\pi^4}{5}$$

Donc :

$$\frac{16\pi^4}{5} = \frac{16\pi^4}{9} + 2\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{4}{k^4} + \frac{4\pi^2}{k^2}\right)$$

$$\iff$$

$$8\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{16\pi^4}{5} - \frac{16\pi^4}{9} - 8\pi^2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$$

$$\iff$$

$$8\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{16\pi^4}{5} - \frac{16\pi^4}{9} - 8\pi^2 \times \frac{\pi^2}{6}$$

$$\iff$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

OUF !!

Exercice 9 :

Soit f une fonction numérique de période 2π telle que :

$$f(x)=\left\{\begin{array}{l}\pi-x \textit{ si } x\in[0;\pi[\\ \pi+x \textit{ si } x\in[-\pi;0[\end{array}\right.$$

1. *Calculer la série de Fourier de f*

   Nous n'allons pas déroger à la règle qui consiste à en faire le graphe *(Figure 9.14)* :

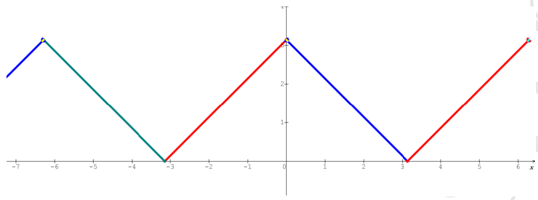

FIGURE 9.14 – Graphe de f

$\Rightarrow$ Pour tout $k\in\mathbb{Z}$, nous avons $c_k(f)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,e^{-ikx}\,\mathrm{d}x$.

Remarquons que f est une fonction paire de $\mathcal{C}^1_M(T)$; nous allons utiliser cette parité.

$\triangleright$ Tout d'abord, $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,e^{-ikx}\,\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{0} f(x)\,e^{-ikx}\,\mathrm{d}x+\int_{0}^{\pi} f(x)\,e^{-ikx}\,\mathrm{d}x$

$\triangleright$ Regardons l'intégrale $\displaystyle\int_{-\pi}^{0} f(x)\,e^{-ikx}\,\mathrm{d}x$ et faisons y le changement de variables $u=-x$; alors $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=-1\iff \mathrm{d}x=-\,\mathrm{d}u$ et donc :

$$\int_{-\pi}^{0} f(x)\,e^{-ikx}\,\mathrm{d}x=\int_{\pi}^{0} f(-u)\,e^{iku}\,(-\,\mathrm{d}u)=\int_{0}^{\pi} f(u)\,e^{iku}\,\mathrm{d}u$$

$\triangleright$ Ainsi :

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,e^{-ikx}\,\mathrm{d}x &= \int_{-\pi}^{0} f(x)\,e^{-ikx}\,\mathrm{d}x+\int_{0}^{\pi} f(x)\,e^{-ikx}\,\mathrm{d}x\\ &= \int_{0}^{\pi} f(u)\,e^{iku}\,\mathrm{d}u+\int_{0}^{\pi} f(x)\,e^{-ikx}\,\mathrm{d}x\\ &= \int_{0}^{\pi} f(x)\left(e^{iku}+e^{-ikx}\right)\,\mathrm{d}x\\ &= 2\int_{0}^{\pi} f(x)\cos kx\,\mathrm{d}x\\ &= 2\int_{0}^{\pi} (\pi-x)\cos kx\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Ansi, $c_k(f)=\dfrac{1}{2\pi}\times 2\displaystyle\int_{0}^{\pi}(\pi-x)\cos kx\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}(\pi-x)\cos kx\,\mathrm{d}x$

$\Rightarrow$ Pour $k=0$, nous avons $c_0(f)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{0}^{\pi}(\pi-x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{\pi}\times\dfrac{\pi^2}{2}=\dfrac{\pi}{2}$

$\Rightarrow$ Pour $k\neq 0$, nous allons calculer $\displaystyle\int_{0}^{\pi}(\pi-x)\cos kx\,\mathrm{d}x$ par parties.

Nous avons :

$$\left[\begin{array}{ll}u=\pi-x & u'=-1\\ v'=\cos kx & v=\dfrac{1}{k}\sin kx\end{array}\right]$$

D'où :

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} (\pi - x)\cos kx \,\mathrm{d}x &= \left[\frac{\pi}{k}\sin kx\right]_0^{\pi} + \frac{1}{k}\int_0^{\pi} \sin kx \,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{k}\left[\frac{-\cos kx}{k}\right]_0^{\pi} \\ &= \frac{1}{k^2}\left[-\cos kx\right]_0^{\pi} \\ &= \frac{1}{k^2}\left(1-(-1)^k\right)\end{aligned}$$

Donc, $c_k(f) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} (\pi - x)\cos kx\,\mathrm{d}x = \dfrac{\left(1-(-1)^k\right)}{\pi k^2}$

Remarquons que nous avons $c_k(f) = c_{-k}(f)$ et donc la série de Fourier de f est donnée par :

$$S_f(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} c_k(f)\left(e^{ikx} + e^{-ikx}\right) = \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} 2c_k(f)\cos kx$$

Remarquons tout de suite que :

$c_{2k}(f) = \dfrac{\left(1-(-1)^{2k}\right)}{\pi(2k)^2} = 0$ et que $c_{2k+1}(f) = \dfrac{\left(1-(-1)^{2k+1}\right)}{\pi(2k+1)^2} = \dfrac{2}{\pi(2k+1)^2}$

Et donc $S_f(x) = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\dfrac{1}{(2k+1)^2}\cos(2k+1)x$

2. *Retrouver* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}$

On peut donc, sans problème, appliquer le théorème de Dirichlet.

Nous avons : $S_f(0) = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\dfrac{1}{(2k+1)^2}$, c'est à dire $\pi = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\dfrac{1}{(2k+1)^2}$.

D'où nous obtenons $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi}{2}\times\frac{\pi}{4} = \frac{\pi^2}{8}$

Exercice 10 :

Montrer que, pour $x \in [0;\pi[$, on a, à la fois :

$$x(\pi - x) = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos 2nx}{n^2} \quad \text{et} \quad x(\pi - x) = \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)^3}$$

Pour le démontrer, inspirez vous des graphes de la figure 9.15 :

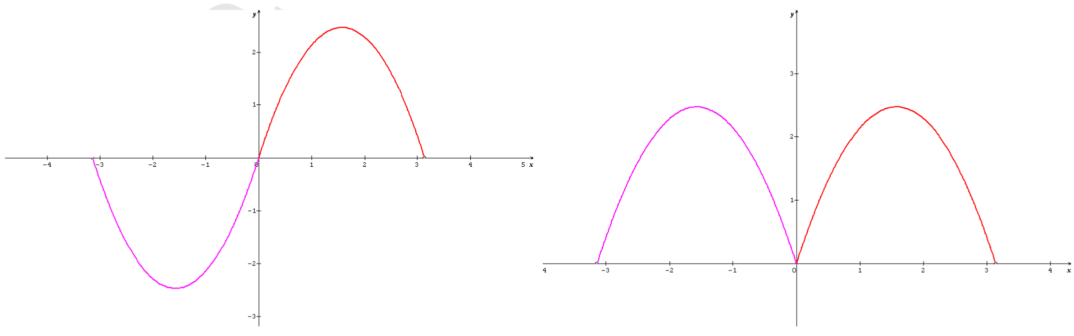

FIGURE 9.15 – Graphes possibles

C'est une question très surprenante : une même fonction qui s'exprime de 2 façons différentes sur le même intervalle $[0;\pi[$.
Pour résoudre cette question, nous allons étudier 2 fonctions f et g, périodiques et de période 2π qui ont la même expression sur l'intervalle $[0;\pi[$

1. **Soit f une fonction impaire, périodique et de période 2π définie sur $[0;\pi[$ par** $f(x) = x(\pi - x)$

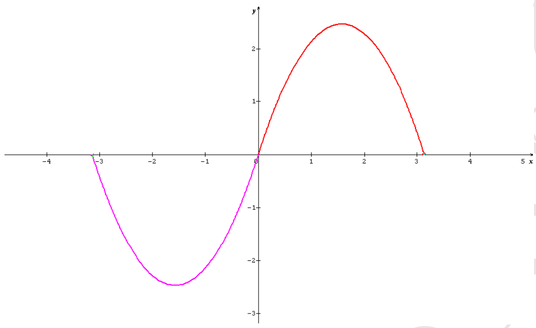

FIGURE 9.16 – Graphe de f

⇒ Comme toujours, nous avons pour tout $k \in \mathbb{Z}$, nous avons $c_k(f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-ikx}\,\mathrm{d}x$

Tout d'abord, $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-ikx}\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{0} f(x)\, e^{-ikx}\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\pi} f(x)\, e^{-ikx}\,\mathrm{d}x$

Regardons l'intégrale $\displaystyle\int_{-\pi}^{0} f(x)\, e^{-ikx}\,\mathrm{d}x$ et faisons y le changement de variables $u = -x$; alors $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = -1 \Longleftrightarrow \mathrm{d}x = -\,\mathrm{d}u$ et donc :

$$\int_{-\pi}^{0} f(x)\, e^{-ikx}\,\mathrm{d}x = \int_{\pi}^{0} f(-u)\, e^{iku}\,(-\,\mathrm{d}u) = -\int_{0}^{\pi} f(u)\, e^{iku}\,\mathrm{d}u$$

Donc,

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-ikx}\,\mathrm{d}x &= -\int_{0}^{\pi} f(u)\, e^{iku}\,\mathrm{d}u + \int_{0}^{\pi} f(x)\, e^{-ikx}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{0}^{\pi} f(x)\left(e^{-ikx} - e^{ikx}\right)\mathrm{d}x \\ &= -2i\int_{0}^{\pi} f(x)\sin kx\,\mathrm{d}x \\ &= -2i\int_{0}^{\pi} x(\pi - x)\sin kx\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Ainsi $c_k(f) = \dfrac{1}{2\pi} \times -2i\displaystyle\int_{0}^{\pi} x(\pi - x)\sin kx\,\mathrm{d}x = \dfrac{-i}{\pi}\int_{0}^{\pi} x(\pi - x)\sin kx\,\mathrm{d}x$

⇒ D'ores et déjà, nous avons $c_0(f) = 0$

⇒ Soit $k \in \mathbb{Z}$ et $k \neq 0$. Nous allons calculer $\displaystyle\int_{0}^{\pi} x(\pi - x)\sin kx\,\mathrm{d}x$ par une double intégration par parties.

⋆ Nous avons, pour la première intégration par parties :

$$\begin{bmatrix} u = x(\pi - x) & u' = \pi - 2x \\ v' = \sin kx & v = \dfrac{-1}{k}\cos kx \end{bmatrix}$$

D'où :

$$\begin{aligned}\int_{0}^{\pi} x(\pi - x)\sin kx\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{x(x-\pi)}{k}\cos kx\right]_0^{\pi} + \frac{1}{k}\int_{0}^{\pi}(\pi - 2x)\cos kx\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{k}\int_{0}^{\pi}(\pi - 2x)\cos kx\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

⋆ Nous intégrons, maintenant $\displaystyle\int_0^{\pi} (\pi - 2x)\cos kx \, \mathrm{d}x$ par parties. Ainsi :

$$\begin{bmatrix} u = \pi - 2x & u' = -2 \\ v' = \cos kx & v = \dfrac{1}{k}\sin kx \end{bmatrix}$$

D'où

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} (\pi - 2x)\cos kx \, \mathrm{d}x &= \left[\frac{\pi - 2x}{k}\sin kx\right]_0^{\pi} + \frac{2}{k}\int_0^{\pi} \sin kx \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{k}\int_0^{\pi} \sin kx \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{k}\left[\frac{-\cos kx}{k}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{k^2}\left(-(-1)^k + 1\right) \\
&= \frac{2\left((-1)^{k+1} + 1\right)}{k^2}
\end{aligned}$$

⋆ En remontant, nous obtenons $c_k(f) = \dfrac{-2i}{\pi k^3}\left(1 + (-1)^{k+1}\right)$

⇒ Comparons $c_k(f)$ et $c_{-k}(f)$

$$c_{-k}(f) = \frac{-2i}{\pi(-k)^3}\left(1 + (-1)^{-k+1}\right) = \frac{-2i}{-\pi k^3}\left(1 + (-1)^{k+1}\right) = \frac{2i}{\pi k^3}\left(1 + (-1)^{k+1}\right) = -c_k(f)$$

⇒ Alors, la série de Fourier de f est donnée par :

$$S_f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k(f)\left(e^{ikx} - e^{-ikx}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k(f)(2i\sin kx) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\left(1 + (-1)^{k+1}\right)}{k^3}\sin kx$$

Remarquons que si k est pair, alors $1 + (-1)^{k+1} = 0$ et si k est impair, $1 + (-1)^{k+1} = 2$. Nous en concluons donc :

$$S_f(x) = \frac{8}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\sin(2k+1)x}{(2k+1)^3}$$

D'après le théorème de Dirichlet, nous avons, pour tout $x \in [-\pi; \pi[$ et en particulier lorsque $x \in [0; \pi[$

$$f(x) = x(\pi - x) = \frac{8}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\sin(2k+1)x}{(2k+1)^3}$$

2. **Soit g une fonction paire, périodique et de période 2π définie sur $[0; \pi[$ par $g(x) = x(\pi - x)$**

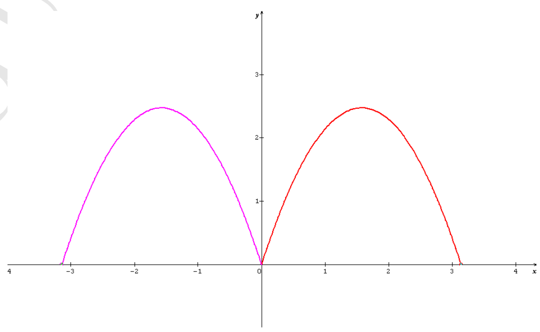

Figure 9.17 – Graphe de g

$\Rightarrow$ Comme tout à l'heure, nous avons pour tout $k \in \mathbb{Z}$, nous avons $c_k(g) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\, e^{-ikx}\, \mathrm{d}x$

De même, $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\, e^{-ikx}\, \mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{0} g(x)\, e^{-ikx}\, \mathrm{d}x + \int_{0}^{\pi} g(x)\, e^{-ikx}\, \mathrm{d}x$

Regardons l'intégrale $\displaystyle\int_{-\pi}^{0} g(x)\, e^{-ikx}\, \mathrm{d}x$ et faisons y le changement de variables $u = -x$; alors $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = -1 \iff \mathrm{d}x = -\,\mathrm{d}u$ et donc :

$$\int_{-\pi}^{0} g(x)\, e^{-ikx}\, \mathrm{d}x = \int_{\pi}^{0} g(-u)\, e^{iku}\, (-\,\mathrm{d}u) = \int_{0}^{\pi} g(u)\, e^{iku}\, \mathrm{d}u$$

Donc,

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\, e^{-ikx}\, \mathrm{d}x &= \int_{0}^{\pi} g(u)\, e^{iku}\, \mathrm{d}u + \int_{0}^{\pi} g(x)\, e^{-ikx}\, \mathrm{d}x \\
&= \int_{0}^{\pi} g(x)\left(e^{-ikx} + e^{ikx}\right) \mathrm{d}x \\
&= 2\int_{0}^{\pi} g(x) \cos kx \, \mathrm{d}x \\
&= 2\int_{0}^{\pi} x(\pi - x) \cos kx \, \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Ainsi $c_k(g) = \dfrac{1}{2\pi} \times 2\displaystyle\int_{0}^{\pi} x(\pi - x)\cos kx\, \mathrm{d}x = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{0}^{\pi} x(\pi - x)\cos kx\, \mathrm{d}x$

$\Rightarrow$ Calculons $c_0(g)$

$$c_0(g) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x(\pi - x)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi^3}{2} - \frac{\pi^3}{3}\right) = \frac{\pi^2}{6}$$

$\Rightarrow$ Soit $k \in \mathbb{Z}$ et $k \neq 0$. Nous allons calculer $\displaystyle\int_{0}^{\pi} x(\pi - x)\cos kx\, \mathrm{d}x$ par une double intégration par parties.

$\star$ Nous avons, pour la première intégration par parties :

$$\begin{bmatrix} u = x(\pi - x) & u' = \pi - 2x \\ v' = \cos kx & v = \dfrac{1}{k}\sin kx \end{bmatrix}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
\int_{0}^{\pi} x(\pi - x)\cos kx\, \mathrm{d}x &= \left[\frac{x(x-\pi)}{k}\sin kx\right]_0^{\pi} - \frac{1}{k}\int_{0}^{\pi} (\pi - 2x)\sin kx\, \mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{k}\int_{0}^{\pi} (\pi - 2x)\sin kx\, \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

$\star$ Nous intégrons, maintenant $\displaystyle\int_{0}^{\pi} (\pi - 2x)\sin kx\, \mathrm{d}x$ par parties. Ainsi :

$$\begin{bmatrix} u = \pi - 2x & u' = -2 \\ v' = \sin kx & v = \dfrac{-1}{k}\cos kx \end{bmatrix}$$

D'où

$$\begin{aligned}
\int_{0}^{\pi} (\pi - 2x)\sin kx\, \mathrm{d}x &= \left[\frac{2x - \pi}{k}\cos kx\right]_0^{\pi} - \frac{2}{k}\int_{0}^{\pi} \cos kx\, \mathrm{d}x \\
&= \left(\frac{(-1)^k\pi + \pi}{k}\right) - \frac{2}{k}\left[\frac{\sin kx}{k}\right]_0^{\pi} \\
&= \frac{\pi}{k}\left(1 + (-1)^k\right)
\end{aligned}$$

⋆ En remontant, nous obtenons $c_k(g) = \dfrac{-1}{k^2}\left(1+(-1)^k\right)$

⇒ Comparons $c_k(g)$ et $c_{-k}(g)$

$$c_{-k}(g) = \frac{-1}{(-k)^2}\left(1+(-1)^{-k}\right) = \frac{-1}{k^2}\left(1+(-1)^k\right) = c_k(g)$$

⇒ Alors, la série de Fourier de g est donnée par :

$$S_g(x) = \frac{\pi^2}{6}+\sum_{k=1}^{+\infty} c_k(g)\left(e^{ikx}+e^{-ikx}\right) = \frac{\pi^2}{6}+\sum_{k=1}^{+\infty} c_k(g)\left(2\cos kx\right) = \frac{\pi^2}{6}-2\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\left(1+(-1)^k\right)}{k^2}\cos kx$$

Remarquons que si k est pair, alors $1+(-1)^k = 2$ et si k est impair, $1+(-1)^k = 0$. Nous en concluons donc :

$$S_f(x) = \frac{\pi^2}{6} - 2\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{2}{(2k)^2}\cos 2k = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\cos 2k}{k^2}$$

D'après le théorème de Dirichlet, nous avons, pour tout $x \in [-\pi;\pi[$,et en particulier lorsque $x \in [0;\pi[$

$$f(x) = x(\pi - x) = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\cos 2k}{k^2}$$

Ce que nous voulions

Exercice 11 :

1. *Soit $a > 0$. Développer en série entière la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x+e^a}$*

   C'est une question classique de série entière. Nous avons :

$$f(x) = \frac{1}{x+e^a} = \frac{1}{e^a\left(e^{-a}x+1\right)} = e^{-a}\left(\frac{1}{1+e^{-a}x}\right)$$

   Pour $|e^{-a}x| < 1 \iff |x| < e^a$, nous avons $\dfrac{1}{1+e^{-a}x} = \displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\left(-e^{-a}x\right)^n = \sum_{n\geqslant 0}(-1)^n e^{-na}x^n$

   Et donc, pour $|x| < e^a$, nous avons $f(x) = e^{-a}\left(\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n e^{-na}x^n\right) = \sum_{n\geqslant 0}(-1)^n e^{-(n+1)a}x^n$

2. *Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $a > 0$, nous avons :*

$$\frac{1}{\cos x + \cosh a} = \frac{1}{\sinh a}\left(\frac{e^a}{e^{ix}+e^a} - \frac{e^{-a}}{e^{ix}+e^{-a}}\right)$$

   Question qui ne pose aucune difficulté : il faut savoir calculer!!

   Tout d'abord, rappelons que $\cos x = \dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$, $\cosh a = \dfrac{e^a+e^{-a}}{2}$ et $\sinh a = \dfrac{e^a-e^{-a}}{2}$.

   Et donc :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sinh a}\left(\frac{e^a}{e^{ix}+e^a} - \frac{e^{-a}}{e^{ix}+e^{-a}}\right) &= \frac{2}{e^a-e^{-a}}\left(\frac{e^ae^{ix}+1-e^{-a}e^{ix}-1}{\left(e^{ix}+e^a\right)\left(e^{ix}+e^{-a}\right)}\right)\\
&= \frac{2}{e^a-e^{-a}}\left(\frac{\left(e^a-e^{-a}\right)e^{ix}}{e^{2ix}+e^{-a}e^{ix}+e^{ix}e^a+1}\right)\\
&= \frac{2e^{ix}}{e^{2ix}+e^{-a}e^{ix}+e^{ix}e^a+1} = \frac{2}{e^{ix}+e^{-a}+e^a+e^{-ix}}\\
&= \frac{2}{2\cos x+2\cosh a} = \frac{1}{\cos x+\cosh a}
\end{aligned}$$

   Aucune difficulté, donc

3. *En déduire le développement en série de Fourier de la fonction g définie par $g(x) = \dfrac{1}{\cos x + \cosh a}$ avec $a > 0$*

Nous allons utiliser l'égalité $\dfrac{1}{\cos x + \cosh a} = \dfrac{1}{\sinh a}\left(\dfrac{e^a}{e^{ix}+e^a} - \dfrac{e^{-a}}{e^{ix}+e^{-a}}\right)$

→ Tout d'abord, $\dfrac{e^a}{e^{ix}+e^a} = \dfrac{1}{e^{-a}e^{ix}+1}$. Comme $\left|e^{-a}e^{ix}\right| = e^{-a} < 1$, puisque, comme $a > 0$, $e^{-a} < 1$, nous pouvons écrire, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{e^a}{e^{ix}+e^a} = \sum_{n\geqslant 0} (-1)^n e^{-na} e^{nix}$$

→ De même, $\dfrac{e^{-a}}{e^{ix}+e^{-a}} = \dfrac{e^{-a}e^{-ix}}{1+e^{-a}e^{-ix}}$, et comme $\left|e^{-a}e^{-ix}\right| = e^{-a} < 1$ nous avons aussi :

$$\frac{1}{1+e^{-a}e^{-ix}} = \sum_{n\geqslant 0} (-1)^n e^{-na} e^{-nix}$$

Et donc :

$$\begin{aligned}
\frac{e^{-a}e^{-ix}}{1+e^{-a}e^{-ix}} &= e^{-a}e^{-ix}\left(\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n e^{-na}e^{-nix}\right)\\
&= \sum_{n\geqslant 0} (-1)^n e^{-(n+1)a} e^{-(n+1)ix}\\
&= \sum_{n\geqslant 1} (-1)^{n-1} e^{-na} e^{-nix}
\end{aligned}$$

→ D'où, maintenant :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\cos x + \cosh a} &= \frac{1}{\sinh a}\left(\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n e^{-na}e^{-nix} - \sum_{n\geqslant 1} (-1)^{n-1} e^{-na}e^{-nix}\right)\\
&= \frac{1}{\sinh a}\left(1 + \sum_{n\geqslant 1} (-1)^n e^{-na}e^{-nix} - \sum_{n\geqslant 1} (-1)^{n-1} e^{-na}e^{-nix}\right)\\
&= \frac{1}{\sinh a}\left(1 + \sum_{n\geqslant 1} \left((-1)^n e^{-na}e^{-nix} - (-1)^{n-1} e^{-na}e^{-nix}\right)\right)\\
&= \frac{1}{\sinh a}\left(1 + \sum_{n\geqslant 1} (-1)^n e^{-na}\left(e^{-nix} + e^{-nix}\right)\right)\\
&= \frac{1}{\sinh a}\left(1 + \sum_{n\geqslant 1} (-1)^n e^{-na} 2\cos nx\right)
\end{aligned}$$

En conclusion, $\dfrac{1}{\cos x + \cosh a} = \dfrac{1}{\sinh a} + \displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{2(-1)^n e^{-na}}{\sinh a}\cos nx$

La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{2(-1)^n e^{-na}}{\sinh a}\cos nx$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. En effet,

$$\left|\frac{2(-1)^n e^{-na}}{\sinh a}\cos nx\right| \leqslant \frac{2e^{-na}}{\sinh a}$$

Or, $\dfrac{2e^{-na}}{\sinh a}$ est le terme général d'une série numérique convergente. D'où la convergence normale de la série calculée.

Exercice 12 :

Soit $p \notin \mathbb{Z}$.
Soit f une fonction numérique de période 2π définie par $f(x) = \cos px$ si $|x| \leqslant \pi$

Comme d'habitude, le graphe pour nous situer visuellement

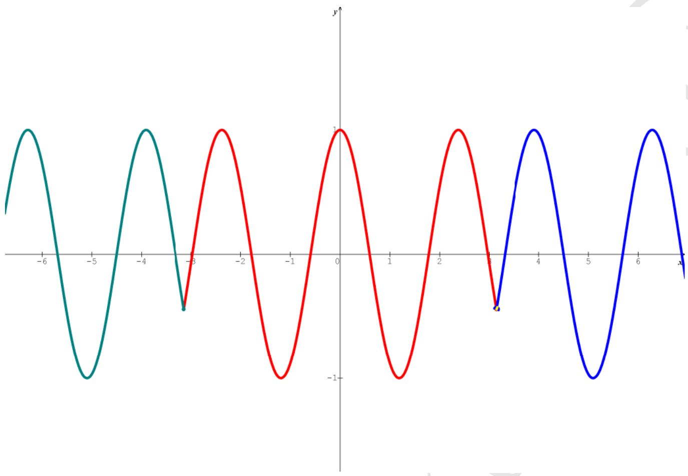

FIGURE 9.18 – Graphe de $\cos px$ avec, ici, $p = \sqrt{7}$

1. *Développer f en série de Fourier*

   $\Rightarrow$ Tout d'abord, nous avons $c_n(f)$, le coefficient de Fourier d'ordre n égal à :

   $$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-inx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (\cos px)\, e^{-inx}\,\mathrm{d}x$$

   Ensuite, $\cos px = \dfrac{e^{ipx} + e^{-ipx}}{2}$ et donc

   $$\begin{aligned} c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-inx}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{e^{ipx} + e^{-ipx}}{2}\right) e^{-inx}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ix(p-n)} + e^{-ix(p+n)}\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

   $\Rightarrow$ Nous allons calculer, de manière indépendante, $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^{ix(p-n)} + e^{-ix(p+n)}\,\mathrm{d}x$

   $\star$ Calcul de $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ix(p+n)}\,\mathrm{d}x$

   $$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ix(p+n)}\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{e^{-ix(p+n)}}{-i(p+n)}\right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{e^{-i\pi(p+n)} - e^{i\pi(p+n)}}{-i(p+n)} \\ &= \frac{i\left(e^{-i\pi(p+n)} - e^{i\pi(p+n)}\right)}{(p+n)} \end{aligned}$$

⋆ Calculons maintenant $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^{ix(p-n)}\,\mathrm{d}x$

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ix(p-n)}\,\mathrm{d}x = &\left[\frac{e^{ix(p-n)}}{i\,(p-n)}\right]_{-\pi}^{\pi}\\ = &\frac{e^{i\pi(p-n)}-e^{-i\pi(p-n)}}{i\,(p-n)}\\ = &\frac{i\left(e^{-i\pi(p-n)}-e^{i\pi(p-n)}\right)}{(p-n)}\end{aligned}$$

⇒ Maintenant, faisons la synthèse

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ix(p-n)}+e^{-ix(p+n)}\,\mathrm{d}x = &\frac{i\left(e^{-i\pi(p+n)}-e^{i\pi(p+n)}\right)}{(p+n)}+\frac{i\left(e^{-i\pi(p-n)}-e^{i\pi(p-n)}\right)}{(p-n)}\\ = &\ i\left\{\frac{(p-n)\left(e^{-i\pi(p+n)}-e^{i\pi(p+n)}\right)+(p+n)\left(e^{-i\pi(p-n)}-e^{i\pi(p-n)}\right)}{(p^2-n^2)}\right\}\end{aligned}$$

Nous allons, maintenant, regarder le seul numérateur :

$$\begin{gathered}(p-n)\left(e^{-i\pi(p+n)}-e^{i\pi(p+n)}\right)+(p+n)\left(e^{-i\pi(p-n)}-e^{i\pi(p-n)}\right)\\ =\\ pe^{-i\pi(p+n)}-pe^{i\pi(p+n)}-ne^{-i\pi(p+n)}+ne^{i\pi(p+n)}+pe^{-i\pi(p-n)}-pe^{i\pi(p-n)}+ne^{-i\pi(p-n)}-ne^{i\pi(p-n)}\\ =\\ pe^{-i\pi p}\left(e^{-i\pi n}+e^{i\pi n}\right)-pe^{i\pi p}\left(e^{i\pi n}+e^{-i\pi n}\right)-ne^{-i\pi p}\left(e^{-i\pi n}-e^{i\pi n}\right)+ne^{i\pi p}\left(e^{i\pi n}-e^{-i\pi n}\right)\\ =\\ 2p\,(-1)^n\left(e^{-i\pi p}-e^{i\pi p}\right)\\ =\\ 2p\,(-1)^n\,(-2i\sin p\pi)=-4ip\,(-1)^n\sin p\pi\end{gathered}$$

De telle sorte que

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{ix(p-n)}+e^{-ix(p+n)}\,\mathrm{d}x = i\left(\frac{-4ip\,(-1)^n\sin p\pi}{p^2-n^2}\right)=\frac{4p\,(-1)^n\sin p\pi}{p^2-n^2}$$

D'où, $c_n(f)=\dfrac{1}{4\pi}\times\dfrac{4p\,(-1)^n\sin p\pi}{p^2-n^2}=\dfrac{1}{\pi}\times\dfrac{p\,(-1)^n\sin p\pi}{p^2-n^2}$

⇒ Nous pouvons remarquer que $c_0(f)=\dfrac{\sin p\pi}{p\pi}$ et que, si $n\neq 0$ $c_{-n}(f)=c_n(f)$, de telle sorte que la série de Fourier de f est :

$$\begin{aligned}S_f(x) = &\frac{\sin p\pi}{p\pi}+\sum_{n=1}^{+\infty} c_n(f)\left(e^{inx}+e^{-inx}\right)\\ = &\frac{\sin p\pi}{p\pi}+\sum_{n=1}^{+\infty} c_n(f)\,(2\cos nx)\\ = &\frac{\sin p\pi}{p\pi}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\pi}\times\frac{p\,(-1)^n\sin p\pi}{p^2-n^2}\,(2\cos nx)\\ = &\frac{\sin p\pi}{p\pi}+\frac{2p\sin p\pi}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{p^2-n^2}\cos nx\end{aligned}$$

Donc, $S_f(x)=\dfrac{\sin p\pi}{p\pi}+\dfrac{2p\sin p\pi}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{p^2-n^2}\cos nx$

Comme la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, d'après le théorème de Dirichlet, nous pouvons écrire :

$$\cos px=\frac{\sin p\pi}{p\pi}+\frac{2p\sin p\pi}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{p^2-n^2}\cos nx$$

2. *En déduire que* $\cot p\pi = \dfrac{1}{p\pi} + \dfrac{2p}{\pi} \displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{p^2 - n^2}$

En faisant $x = \pi$, nous avons :

$$\begin{aligned}\cos p\pi &= \frac{\sin p\pi}{p\pi} + \frac{2p\sin p\pi}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{p^2-n^2} \cos n\pi \\ &= \frac{\sin p\pi}{p\pi} + \frac{2p\sin p\pi}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{p^2-n^2} (-1)^n \\ &= \frac{\sin p\pi}{p\pi} + \frac{2p\sin p\pi}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2-n^2}\end{aligned}$$

D'où, en divisant par $\sin p\pi$, nous obtenons :

$$\frac{\cos p\pi}{\sin p\pi} = \frac{1}{p\pi} + \frac{2p}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2-n^2} \Longleftrightarrow \cot p\pi = \frac{1}{p\pi} + \frac{2p}{\pi} \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{p^2-n^2}$$

On retrouve aussi ce résultat sous la forme $\pi \cot p\pi = \dfrac{1}{\pi} + \displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{2p}{p^2-n^2}$

Exercice 13 :

Soit f *une fonction continue* 2π*-périodique telle que, pour chaque* $N \in \mathbb{N}$*, on ait* $\sup\limits_{x\in[0;2\pi]} S_N(f)(x) = \|S_N(f)\|_\infty \leqslant 1$*. Montrer que* $\sup\limits_{x\in[0;2\pi]} f(x) = \|f\|_\infty \leqslant 1$

Cet exercice est une véritable et basique application du cours.

Le théorème de Féjer 9.4.3 précise que la moyenne arithmétique $\sigma_n(f) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} S_k(f)$ converge uniformément vers f, c'est à dire $\lim\limits_{n\to+\infty} \|\sigma_n(f) - f\|_\infty = 0$

Or, en utilisant l'inégalité triangulaire, nous avons : $\left|\|\sigma_n(f)\|_\infty - \|f\|_\infty\right| \leqslant \|\sigma_n(f) - f\|_\infty$ et donc, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \|\sigma_n(f) - f\|_\infty = 0$, nous avons aussi $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\|\sigma_n(f)\|_\infty - \|f\|_\infty\right| = 0$, c'est à dire

$$\lim_{n\to+\infty} \|\sigma_n(f)\|_\infty = \|f\|_\infty$$

Or, pour tout $x \in [0;2\pi]$, $|\sigma_n(f)(x)| \leqslant \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} |S_k(f)(x)|$ et comme, pour chaque $x \in [0;2\pi]$, nous avons $|S_k(f)(x)| \leqslant \sup\limits_{x\in[0;2\pi]} |S_k(f)(x)| = \|S_k(f)\|_\infty \leqslant 1$, nous avons aussi, pour tout $x \in [0;2\pi]$, $|\sigma_n(f)(x)| \leqslant \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \|S_k(f)\|_\infty \leqslant 1$

Donc, en particulier, $\sup\limits_{x\in[0;2\pi]} |\sigma_n(f)(x)| \leqslant 1$, c'est à dire $\|\sigma_n(f)\|_\infty \leqslant 1$.

Ainsi, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \|\sigma_n(f)\|_\infty = \|f\|_\infty$, nous avons aussi $\|f\|_\infty \leqslant 1$

9.8.3 Exercices moins proches du cours

Exercice 14 :

On désigne par $\mathbb{U}$ *le cercle unité, c'est à dire* $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}$ *tels que* $|z| = 1\}$*. On rappelle que* $(\mathbb{U}, \times)$ *est un sous-groupe commutatif de* $(\mathbb{C}, \times)$ *et qu'un endomorphisme de groupe* $\varphi : \mathbb{U} \longrightarrow \mathbb{U}$ *est tel que pour tout* $z \in \mathbb{U}$ *et tout* $z_1 \in \mathbb{U}$*,* $\varphi(zz_1) = \varphi(z) \times \varphi(z_1)$*.*
Recherher tous les endomorphismes continus de $\mathbb{U}$

Soit $\varphi : \mathbb{U} \longrightarrow \mathbb{U}$ un endomorphisme de groupe continu. L'objet de cette question est donc de trouver de quelle forme est φ
On considère $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie pour tout $t \in \mathbb{R}$, par $g(t) = \varphi\left(e^{it}\right)$. g est clairement continue comme composée de fonctions continues, périodique et de période 2π.
Considérons, maintenant, pour $k \in \mathbb{Z}$, le coefficient de Fourier d'ordre k de g,

$$c_k(g) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(t)\, e^{-ikt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi\left(e^{it}\right) e^{-ikt}\,\mathrm{d}t$$

De la périodicié de g, nous pouvons écrire, pour tout $a \in \mathbb{R}$ $c_k(g) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-a}^{2\pi-a} g(t)\, e^{-ikt}\,\mathrm{d}t$
En faisant la changement de variables $u = t + a$, nous avons :

$$\begin{aligned}
c_k(g) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(u-a)\, e^{-ik(u-a)}\,\mathrm{d}u = \frac{e^{ika}}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi\left(e^{i(u-a)}\right) e^{-iku}\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{e^{ika}}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi\left(e^{iu}e^{-ia}\right) e^{-iku}\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{e^{ika}}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi\left(e^{iu}\right)\varphi\left(e^{-ia}\right) e^{-iku}\,\mathrm{d}u \text{ puisque } \varphi \text{ est un morphisme} \\
&= e^{ika}\varphi\left(e^{-ia}\right)\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi\left(e^{iu}\right) e^{-iku}\,\mathrm{d}u = e^{ika}\varphi\left(e^{-ia}\right)\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(u)\, e^{-iku}\,\mathrm{d}u \\
&= e^{ika}\varphi\left(e^{-iua}\right) c_k(g)
\end{aligned}$$

Nous avons donc $c_k(g) = e^{ika}\varphi\left(e^{-ia}\right) c_k(g)$.
Comme $\left|g(u)\, e^{-iku}\right| = |g(u)| = \left|\varphi\left(e^{iu}\right)\right| = 1$ puisque $\varphi\left(e^{iu}\right) \in \mathbb{U}$, alors $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} g(u)\, e^{-iku}\,\mathrm{d}u \neq 0$ et donc, de $c_k(g) = e^{ika}\varphi\left(e^{-ia}\right) c_k(g)$, nous obtenons $e^{ika}\varphi\left(e^{-ia}\right) = 1$
Comme $\varphi\left(e^{-ia}\right) = \varphi\left(e^{ia}\right)^{-1}$, nous obtenons

$$e^{ika} = \varphi\left(e^{ia}\right) \Longleftrightarrow \varphi\left(e^{ia}\right) = \left(e^{ia}\right)^k$$

Ainsi, les seuls endomorphismes continus de $\mathbb{U}$ sont de la forme $\varphi(z) = z^k$ pour $z \in \mathbb{U}$

Exercice 15 :

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ 2π-périodique.
On suppose qu'il existe $\alpha > 0$ et $C > 0$ tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y \in \mathbb{R}$ $|f(x) - f(y)| \leqslant C|x-y|^\alpha$

1. *Pour $a \in \mathbb{R}$ exprimer $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t+a)\, e^{-int}\,\mathrm{d}t$ en fonction de $c_n(f)$*

   Faisons le changement de variables $u = t + a$ et donc $\mathrm{d}u = \mathrm{d}t$. Alors :

   $$\int_0^{2\pi} f(t+a)\, e^{-int}\,\mathrm{d}t = \int_a^{a+2\pi} f(u)\, e^{-in(u-a)}\,\mathrm{d}u = e^{ina}\int_a^{a+2\pi} f(u)\, e^{-inu}\,\mathrm{d}u = e^{ina}2\pi c_n(f)$$

   Nous avons donc $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t+a)\, e^{-int}\,\mathrm{d}t = e^{ina}2\pi c_n(f) \Longleftrightarrow c_n(f) = \frac{e^{-ina}}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t+a)\, e^{-int}\,\mathrm{d}t$

2. *En déduire l'existence d'un réel $M > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$ $|c_n(f)| \leqslant \dfrac{M}{n^\alpha}$.*

   Nous allons écrire

   $$\begin{aligned}
   2c_n(f) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\, e^{-int}\,\mathrm{d}t + \frac{e^{-ina}}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t+a)\, e^{-int}\,\mathrm{d}t \\
   &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(f(t) + e^{-ina}f(t+a)\right) e^{-int}\,\mathrm{d}t
   \end{aligned}$$

D'où $|2c_n(f)| \leqslant \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \left|f(t) + e^{-ina}f(t+a)\right| \mathrm{d}t$

En choisissant $a \in \mathbb{R}$ tel que $e^{-ina} = -1$, c'est à dire $na = \pi \iff a = \dfrac{\pi}{n}$, nous avons :

$$|c_n(f)| \leqslant \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} \left|f(t) - f\left(t + \frac{\pi}{n}\right)\right| \mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{4\pi} \times \left(\frac{\pi}{n}\right)^{\alpha}$$

En posant $M = \dfrac{\pi^{\alpha-1}}{4}$, nous avons bien $|c_n(f)| \leqslant \dfrac{M}{n^{\alpha}}$

Exercice 16 :

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique de classe $\mathcal{C}^1$ et telle que $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.
Nous avons le lien entre les coefficients de Fourier $c_n(f)$ et $c_n(f')$: $c_n(f') = inc_n(f)$

1. *Démontrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$ $|f(t)| \leqslant \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \frac{1}{|n|}|c_n(f')|$*

   f étant de classe $\mathcal{C}^1$, d'après le théorème de Dirichlet, f est somme de sa série de Fourier.
   Nous avons $c_0(f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.
   Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}$, nous avons :

   $$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} c_n(f)\,e^{int} = \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \frac{c_n(f')}{in}e^{int}$$

   En passant aux modules et en utilisant l'inégalité triangulaire :

   $$|f(t)| \leqslant \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \left|\frac{c_n(f')}{in}e^{int}\right| = \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \frac{|c_n(f')|}{|n|}$$

   Ce que nous voulions

2. *En déduire l'inégalité $\|f\|_\infty^2 \leqslant \dfrac{\pi}{6}\displaystyle\int_0^{2\pi} (f'(t))^2\,\mathrm{d}t$*

   ⇒ En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous avons :

   $$\left|\sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \frac{|c_n(f')|}{n}\right|^2 = \left|\sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \frac{1}{n}|c_n(f')|\right|^2 \leqslant \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \frac{1}{n^2}\right)\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}^*} |c_n(f')|^2\right)$$

   ⇒ C'est à dire que nous avons $|f(t)|^2 \leqslant \left(\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \frac{1}{n^2}\right)\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}^*} |c_n(f')|^2\right)$.

   Nous avons $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et donc $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(-n)^2} = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = 2 \times \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{3}$

   Autrement dit : $|f(t)|^2 \leqslant \dfrac{\pi^2}{3}\left(\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}^*} |c_n(f')|^2\right)$

   ⇒ D'après la relation de Parseval, nous avons $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}^*} |c_n(f')|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f'(t)|^2\,\mathrm{d}t$

   ⇒ Donc, pour tout $t \in \mathbb{R}$, nous avons :

   $$|f(t)|^2 \leqslant \frac{\pi^2}{3} \times \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f'(t)|^2\,\mathrm{d}t \iff |f(t)|^2 \leqslant \frac{\pi}{6}\int_0^{2\pi} |f'(t)|^2\,\mathrm{d}t$$

   Cette inégalité étant vraie pour tout $t \in \mathbb{R}$, nous avons donc :

   $$\sup_{x\in[0;2\pi]} |f(t)|^2 \leqslant \frac{\pi}{6}\int_0^{2\pi} |f'(t)|^2\,\mathrm{d}t \iff \|f\|_\infty^2 \leqslant \frac{\pi}{6}\int_0^{2\pi} |f'(t)|^2\,\mathrm{d}t$$

3. **Inégalité de Wirtinger**
   Démontrer que $\displaystyle\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t \leqslant \int_0^{2\pi} |f'(t)|^2 \, \mathrm{d}t$.
   On utilise l'égalité de Parseval, dans tous les sens!!
   $$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t = \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} |c_n(f)|^2 \leqslant \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} n^2 |c_n(f)|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} |c_n(f')|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f'(t)|^2 \, \mathrm{d}t$$
   Nous avons donc
   $$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f'(t)|^2 \, \mathrm{d}t \iff \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t \leqslant \int_0^{2\pi} |f'(t)|^2 \, \mathrm{d}t$$

9.8.4 Série de Fourier d'une fonction de période T

Exercice 17 :

1. *Soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie par $g(x) = f\left(\frac{T}{2\pi}x\right)$. Montrer que :*
   (a) *La fonction g est périodique et de période 2π*
   C'est une question pas trop difficile.
   Soit $x \in \mathbb{R}$; alors :
   $$g(x+2\pi) = f\left(\frac{T}{2\pi}(x+2\pi)\right) = f\left(\frac{Tx}{2\pi}+T\right) = f\left(\frac{Tx}{2\pi}\right) = g(x)$$
   g est donc bien périodique et de période 2π.
   L'étude de g peut donc se faire sur l'intervalle $[0; 2\pi]$
   (b) *La fonction g est continue par morceaux*
   Soient $a_1, \cdots, a_n$ les points de discontinuité de f sur l'intervalle $[0; T]$. Il est évident que les points $\frac{a_1 T}{2\pi}, \cdots, \frac{a_n T}{2\pi}$ seront les points de discontinuité de g sur $[0; 2\pi]$
   Donc $g \in \mathcal{C}_M(T)$
2. *On appelle $C_n(g)$ le coefficient de Fourier de g d'ordre n. Démontrer que nous avons :*
   $$C_n(g) = C_n^1(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(u)\, e^{-in\frac{2\pi u}{T}} \, \mathrm{d}u$$
   Ce n'est réellement pas une question difficile :
   $$C_n(g) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(u)\, e^{-inu} \, \mathrm{d}u = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(\frac{Tu}{2\pi}\right) e^{-inu} \, \mathrm{d}u$$
   Nous faisons donc le changement de variables $t = \frac{Tu}{2\pi}$ et donc $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u} = \frac{T}{2\pi} \iff \mathrm{d}u = \frac{2\pi}{T}\mathrm{d}t$
   D'où nous obtenons :
   $$C_n(g) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(\frac{Tu}{2\pi}\right) e^{-inu} \, \mathrm{d}u = \frac{1}{2\pi}\times\frac{2\pi}{T}\int_0^T f(t)\, e^{-in\frac{2\pi t}{T}} \, \mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\, e^{-\frac{2i\pi nt}{T}} \, \mathrm{d}t = C_n^1(f)$$
3. *On suppose que, cette fois-ci, f est de classe $\mathcal{C}^1$. Démontrer que, pour tout $x \in [0; T]$, nous avons le développement :*
   $$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n^1(f)\, e^{in\frac{2\pi u}{T}}$$

→ Clairement, si f est de classe $\mathcal{C}^1$ alors $g \in \mathcal{C}^1(T)$
→ Ensuite, en utilisant le théorème de Dirichlet, nous avons, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n(g)\, e^{inx} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n^1(f)\, e^{inx}$$

En particulier $g\left(\frac{2\pi x}{T}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n^1(f)\, e^{in\frac{2\pi x}{T}}$.

Comme $g\left(\frac{2\pi x}{T}\right) = f\left(\frac{T}{2\pi} \times \left(\frac{2\pi x}{T}\right)\right) = f(x)$ et donc :

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n^1(f)\, e^{in\frac{2\pi u}{T}}$$

4. *Démontrez que nous avons aussi* $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left|C_n^1(f)\right|^2 = \frac{1}{T}\int_0^T |f(u)|^2 \,\mathrm{d}u$

Nous avons l'égalité de Parseval pour g :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |C_n(g)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |g(t)|^2 \,\mathrm{d}t = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left|C_n^1(f)\right|^2$$

En faisant le changement de variables $t = \frac{2\pi}{T}x \iff x = \frac{T}{2\pi}t$, nous avons $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{2\pi}{T} \iff \mathrm{d}t = \frac{2\pi}{T}\,\mathrm{d}x$
Donc :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |g(t)|^2 \,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^T \left|g\left(\frac{2\pi}{T}x\right)\right|^2 \frac{2\pi}{T}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{T}\int_0^T |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x$$

Et nous pouvons donc conclure que $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left|C_n^1(f)\right|^2 = \frac{1}{T}\int_0^T |f(u)|^2 \,\mathrm{d}u$

Exercice 18 :

Calculer le développement en série de Fourier des fonctions suivantes et écrire l'égalité de Parseval pour chacune de ces fonctions

1. *f est périodique et de période 2, et $f(t) = |t|$ si $|t| < 1$*

→ Commençons par faire un graphe *(figure 9.19)* :

→ D'après l'exercice précédent, nous avons $C_n(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(u)\, e^{-in\frac{2\pi u}{T}} \,\mathrm{d}u$, c'est à dire, ici :

$$C_n(f) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} |u|\, e^{-in\pi u} \,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int_{-1}^{0} -ue^{-in\pi u} \,\mathrm{d}u + \frac{1}{2}\int_0^{+1} ue^{-in\pi u} \,\mathrm{d}u$$

En faisant le changement de variables $u = -t$, nous avons $\int_{-1}^{0} -ue^{-in\pi u} \,\mathrm{d}u = \int_0^1 ue^{in\pi u} \,\mathrm{d}u$, et donc :

$$C_n(f) = \frac{1}{2}\int_0^1 ue^{in\pi u} \,\mathrm{d}u + \frac{1}{2}\int_0^{+1} ue^{-in\pi u} \,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int_0^{+1} u\left(e^{in\pi u} + e^{-in\pi u}\right) \mathrm{d}u = \int_0^{+1} u\cos(n\pi u) \,\mathrm{d}u$$

→ Calculons, maintenant $C_n(f) = \int_0^{+1} u\cos(n\pi u) \,\mathrm{d}u$

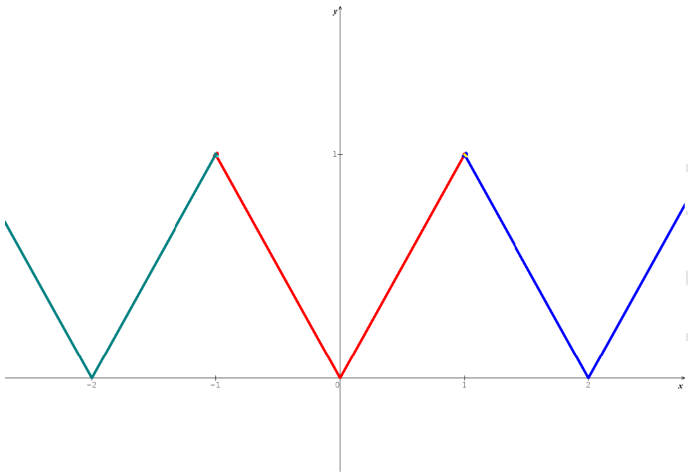

FIGURE 9.19 – Graphe de $f(t) = |t|$ où f périodique et de période 2

- ⋆ Pour $n = 0$, nous avons $C_0(f) = \int_0^{+1} u\cos(0\pi u)\,\mathrm{d}u = \int_0^{+1} u\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}$
- ⋆ Pour $n > 0$, nous pouvons remarquer que $C_n(f) = C_{-n}(f)$. Nous allons calculer $C_n(f)$ par parties.

$$\left\{\begin{array}{ll} u = u & u' = 1 \\ v' = \cos(n\pi u) & v = \dfrac{\sin(n\pi u)}{n\pi} \end{array}\right\}$$

Alors :

$$\begin{aligned} C_n(f) = \int_0^{+1} u\cos(n\pi u)\,\mathrm{d}u &= \left[u\frac{\sin(n\pi u)}{n\pi}\right]_0^1 - \int_0^{+1}\frac{\sin(n\pi u)}{n\pi}\,\mathrm{d}u \\ &= -\int_0^{+1}\frac{\sin(n\pi u)}{n\pi}\,\mathrm{d}u = -\frac{1}{n\pi}\left[\frac{-\cos(n\pi u)}{n\pi}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{n^2\pi^2}\left((-1)^n - 1\right) \end{aligned}$$

On remarque que $C_{2n}(f) = 0$ et que $C_{2n+1}(f) = \dfrac{-2}{(2n+1)^2\pi^2}$

Nous avons donc

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2} - \sum_{n\geqslant 0}\frac{2}{(2n+1)^2\pi^2}e^{i(2n+1)\pi x} - \sum_{n\geqslant 0}\frac{2}{(2n+1)^2\pi^2}e^{-i(2n+1)\pi x} \\ &= \frac{1}{2} - \sum_{n\geqslant 0}\frac{2}{(2n+1)^2\pi^2}\left(e^{i(2n+1)\pi x} + e^{-i(2n+1)\pi x}\right) \\ &= \frac{1}{2} - \sum_{n\geqslant 0}\frac{2}{(2n+1)^2\pi^2}\left(2\cos(2n+1)\pi x\right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{n\geqslant 0}\frac{\cos(2n+1)\pi x}{(2n+1)^2} \end{aligned}$$

Egalité de Parseval :

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}|t|^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}t^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4} - \frac{16}{\pi^4}\sum_{n\geqslant 0}\frac{\cos^2(2n+1)}{(2n+1)^4}$$

2. *f est périodique et de période $a > 0$, et $f(t) = \dfrac{t}{a}$ si $0 \leqslant t < a$*

$\Rightarrow$ Nous avons, comme pour le reste, $c_n(f) = \dfrac{1}{a}\displaystyle\int_0^a \frac{t}{a}e^{-\frac{2i\pi nt}{a}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a^2}\int_0^a te^{-\frac{2i\pi nt}{a}}\,\mathrm{d}t$

⇒ Pour $n = 0$, $c_0(f) = \dfrac{1}{a^2}\displaystyle\int_0^a t\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{a^2}\left[\dfrac{t^2}{2}\right]_0^a = \dfrac{1}{2}$

⇒ Si $n \neq 0$, nous calculons $c_n(f) = \dfrac{1}{a^2}\displaystyle\int_0^a te^{-\frac{2i\pi nt}{a}}\,\mathrm{d}t$ par parties.

$$\left\{\begin{array}{ll} u = t & u' = 1 \\ v' = e^{-\frac{2i\pi nt}{a}} & v = \dfrac{-a}{2i\pi n}e^{-\frac{2i\pi nt}{a}} \end{array}\right\}$$

Et donc :

$$\begin{aligned} c_n(f) = \frac{1}{a^2}\int_0^a te^{-\frac{2i\pi nt}{a}}\,\mathrm{d}t = & \left[\frac{-at}{2i\pi n}e^{-\frac{2i\pi nt}{a}}\right]_0^a + \frac{a}{2i\pi n}\int_0^a e^{-\frac{2i\pi nt}{a}}\,\mathrm{d}t \\ = & \left[\frac{-a^2}{2i\pi n}e^{-2i\pi n}\right] + \frac{a}{2i\pi n}\left[\frac{-a}{2i\pi n}e^{-\frac{2i\pi nt}{a}}\right]_0^a \\ = & \frac{-a^2}{2i\pi n} + \frac{a^2}{\pi^2 n^2}\left[e^{-\frac{2i\pi na}{a}} - 1\right] \\ = & \frac{-a^2}{2i\pi n} \end{aligned}$$

Et donc $c_n(f) = \dfrac{-a^2}{2i\pi n}$

⇒ Et donc,

$$\begin{aligned} f(t) = & \frac{1}{2} + \sum_{n\geqslant 1}\frac{-a^2}{2i\pi n}e^{\frac{2i\pi nt}{a}} + \sum_{n\geqslant 1}\frac{a^2}{2i\pi n}e^{\frac{-2i\pi nt}{a}} \\ = & \frac{1}{2} + \sum_{n\geqslant 1}\frac{a^2}{2i\pi n}\left(e^{\frac{-2i\pi nt}{a}} - e^{\frac{2i\pi nt}{a}}\right) \\ = & \frac{1}{2} + \frac{a^2}{2i\pi}\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}\left(2i\sin\tfrac{2\pi nt}{a}\right) \\ = & \frac{1}{2} + \frac{a^2}{\pi}\sum_{n\geqslant 1}\frac{\sin\frac{2\pi nt}{a}}{n} \end{aligned}$$

9.8.5 Problème

Exercice 19 :

Soit $\mathcal{C}^\infty(T)$ l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ et 2π-périodique.

Pour tout $f \in \mathcal{C}^\infty(T)$, et tout $p \in \mathbb{Z}$, on posera $c_p(f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\,e^{-ipt}\,\mathrm{d}t$.

On désignera par $\|f\|_\infty$ la borne supérieure de $|f(t)|$ quand t décrit $\mathbb{R}$, c'est à dire :

$$\|f\|_\infty = \sup_{t\in\mathbb{R}}|f(t)| = \sup_{t\in[0;2\pi]}|f(t)|$$

Enfin, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on désignera par E_k, l'ensemble des éléments $f \in \mathcal{C}^\infty(T)$ ayant la propriété suivante :

Il existe $M > 0$ et $A > 0$ (pouvant l'un et l'autre dépendre de f) *tels que* (avec la convention usuelle $f^{(0)} = f$) *on ait, pour tout $n \in \mathbb{N}$*

$$\left\|f^{(n)}\right\|_\infty \leqslant M(n!)^k A^n$$

On se propose, dans ce problème, d'étudier quelques propriétés de E_k, et notamment de caractériser par leurs coefficients de Fourier les éléments de E_k

Partie 1 : Généralités sur E_k et étude particulière de E_0

1. (a) *Montrer que, pour tout $f \in \mathcal{C}^\infty(T)$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}$ est bornée.*

   Pas grande difficulté : pour tout $n \in \mathbb{N}$ $f^{(n)}$ est continue et périodique, donc bornée

(b) *Soit $f \in \mathcal{C}^{\infty}(T)$; calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $p \in \mathbb{Z}$, $c_p\left(f^{(n)}\right)$, coefficient de Fourier d'indice p de f fonction de $c_p(f)$, de n et de p.*

Nous avons déjà démontré que $c_p\left(f^{(n)}\right) = (ip)^n c_p(f)$

(c) *Établir, pour $p \neq 0$, l'inégalité $|c_p(f)| \leqslant \dfrac{\left\|f^{(n)}\right\|_{\infty}}{|p|^n}$*

Nous avons

$$\left|c_p\left(f^{(n)}\right)\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f^{(n)}(t)\, e^{-ipt}\right| \mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\|f^{(n)}\right\|_{\infty} \mathrm{d}t = \left\|f^{(n)}\right\|_{\infty}$$

Donc, nous avons $|(ip)^n c_p(f)| \leqslant \left\|f^{(n)}\right\|_{\infty}$, c'est à dire $|p|^n |c_p(f)| \leqslant \left\|f^{(n)}\right\|_{\infty}$, autrement dit $|c_p(f)| \leqslant \dfrac{\left\|f^{(n)}\right\|_{\infty}}{|p|^n}$

2. *Montrer que, pour tout $f \in \mathcal{C}^{\infty}(T)$ et tout $n \in \mathbb{N}$: $\displaystyle\lim_{|p| \to +\infty} |p|^n |c_p(f)| = 0$*

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Nous avons démontré que $|c_p(f)| \leqslant \dfrac{\left\|f^{(n+1)}\right\|_{\infty}}{|p|^{n+1}}$, c'est à dire que nous avons :

$$|p|^n |c_p(f)| \leqslant \frac{\left\|f^{(n+1)}\right\|_{\infty}}{|p|}$$

Comme $\displaystyle\lim_{|p| \to +\infty} \frac{\left\|f^{(n+1)}\right\|_{\infty}}{|p|} = 0$, nous avons aussi $\displaystyle\lim_{|p| \to +\infty} |p|^n |c_p(f)| = 0$

3. *Soit $(c_p)_{p \in \mathbb{Z}}$ une suite de nombres complexes telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\lim_{|p| \to +\infty} |p|^k c_p = 0$*

(a) *Montrer que les séries de fonctions $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} c_p e^{ipt}$ et $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} c_{-p} e^{-ipt}$ où $t \in \mathbb{R}$, sont normalement convergentes dans $\mathbb{R}$.*

Sans difficulté, bien sûr.

→ Regardons $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} c_p e^{ipt}$

Comme, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\lim_{p \to +\infty} p^k |c_p| = 0$, en particulier $\displaystyle\lim_{p \to +\infty} p^2 |c_p| = 0$. Il existe donc $M > 0$ tel que $p^2 |c_p| \leqslant M$, c'est à dire $|c_p| \leqslant \dfrac{M}{p^2}$.

Comme la série $\displaystyle\sum_{p \geqslant 1} \frac{M}{p^2}$ est convergente, la série $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} c_p e^{ipt}$ est normalement convergente.

→ Maintenant, l'étude de $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} c_{-p} e^{-ipt}$ est identique puisque nous avons $\displaystyle\lim_{|p| \to +\infty} |p|^n |c_p(f)| = 0$ et donc $|c_p| \leqslant \dfrac{M}{p^2}$ et la série $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} c_p e^{ipt}$ est normalement convergente.

→ En synthèse, la série $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} c_p e^{ipt} + \sum_{p=1}^{+\infty} c_{-p} e^{-ipt}$ est normalement convergente.

(b) *Si l'on pose : $f(t) = \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} c_p e^{ipt} + \sum_{p=1}^{+\infty} c_{-p} e^{-ipt}$, montrer que $f \in \mathcal{C}^{\infty}(T)$*

→ De la convergence normale de f, on déduit la convergence uniforme de f.
Pour tout $p \in \mathbb{N}$, chaque fonction $c_p e^{ipt}$ et $c_{-p} e^{-ipt}$ est continue, donc f est continue.
De plus, chaque fonction $c_p e^{ipt}$ et $c_{-p} e^{-ipt}$ est périodique et de période 2π, f est donc aussi périodique et de période 2π.

→ Chaque fonction $c_p e^{ipt}$ et $c_{-p}e^{-ipt}$ est indéfiniment dérivable et la dérivée k-ième de $c_p e^{ipt}$ et $c_{-p}e^{-ipt}$ sont respectivement $(ip)^k c_p e^{ipt}$ et $(-ip)^k c_{-p}e^{-ipt}$.
De plus,
▷ Pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{|p|\to+\infty} |p|^{k+2} c_p = 0$ et donc, il existe $\Lambda \in \mathbb{R}^{*+}$ tel que $\left|p^{k+2}c_p\right| \leqslant \Lambda$, et donc $\left|p^k c_p\right| \leqslant \dfrac{\Lambda}{p^2}$.
La série numérique $\sum\limits_{p\geqslant 1} \dfrac{\Lambda}{p^2}$ étant convergente, la série $\sum\limits_{p\geqslant 0} (ip)^k c_p e^{ipt}$ est donc normalement convergente
▷ La réponse est la même pour la série $\sum\limits_{p\geqslant 0} (-ip)^k c_{-p}e^{-ipt}$

→ Ainsi, la série $\sum\limits_{p=0}^{+\infty} (ip)^k c_p e^{ipt} + \sum\limits_{p=1}^{+\infty} (-ip)^k c_{-p}e^{-ipt}$ est normalement convergente et donc f est de classe $\mathcal{C}^\infty$, et, pour tout $k \in \mathbb{N}$ $f^{(k)}(t) = \sum\limits_{p=0}^{+\infty} (ip)^k c_p e^{ipt} + \sum\limits_{p=1}^{+\infty} (-ip)^k c_{-p}e^{-ipt}$

(c) *Montrer que $c_p = c_p(f)$*

De la convergence normale, nous pouvons permuter les signes sommes et intégrales, et nous avons donc :

$$\begin{aligned}
c_p(f) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,e^{-ipt}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} c_n e^{int} + \sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n}e^{-int}\right) e^{-ipt}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} c_n e^{int}e^{-ipt}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n}e^{-int}e^{-ipt}\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} c_n e^{int}e^{-ipt}\,\mathrm{d}t + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} c_{-n}e^{-int}e^{-ipt}\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} c_n e^{-it(p-n)}\,\mathrm{d}t + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} c_{-n}e^{-it(n+p)}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Ainsi :
▷ Si $p \geqslant 0$ et $n \geqslant 1$, alors $\displaystyle\int_0^{2\pi} c_{-n}e^{-it(n+p)}\,\mathrm{d}t = 0$
▷ Si $p \geqslant 0$ et $n \geqslant 0$, alors $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} c_n e^{-it(p-n)}\,\mathrm{d}t = \begin{cases} 1 \text{ si } n = p \\ 0 \text{ sinon}\end{cases}$

Ainsi, si $p \geqslant 0$, alors $c_p(f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} c_p\,\mathrm{d}t = c_p$

Et
▷ Si $p \leqslant -1$ et $n \geqslant 1$, alors $\displaystyle\int_0^{2\pi} c_{-n}e^{-it(n+p)}\,\mathrm{d}t = \begin{cases} 1 \text{ si } n = -p \\ 0 \text{ sinon}\end{cases}$
▷ Si $p \leqslant -1$ et $n \geqslant 0$, alors $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} c_n e^{-it(p-n)}\,\mathrm{d}t = 0$

Ainsi, si $p \leqslant -1$, alors $c_p(f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} c_p\,\mathrm{d}t = c_p$

Donc, nous avons bien, pour tout $p \in \mathbb{Z}$ $c_p = c_p(f)$

4. *Etablir que, si f et g sont deux éléments de E_k, et μ une constante complexe, alors μf ,$f + g$ fg et f' sont éléments de E_k*

Soient $f \in E_k$ et $g \in E_k$.
Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons : $\left\|f^{(n)}\right\|_\infty \leqslant M_f\,(n!)^k A_f^n$ et $\left\|g^{(n)}\right\|_\infty \leqslant M_g\,(n!)^k A_g^n$

⇒ Soit $\mu \in \mathbb{C}$. Alors $(\mu f)^{(n)} = \mu f^{(n)}$ et donc $\left\|(\mu f)^{(n)}\right\|_\infty = \left\|\mu f^{(n)}\right\|_\infty = |\mu| \left\|f^{(n)}\right\|_\infty$
Dès lors, nous avons :

$$\left\|(\mu f)^{(n)}\right\|_\infty \leqslant |\mu| M_f (n!)^k A_f^n$$

Donc $\mu f \in E_k$
⇒ Montrons que $f + g \in E_k$.
Nous avons $(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$ et donc, en utilisant les propriétés des normes :

$$\left\|(f+g)^{(n)}\right\|_\infty \leqslant \left\|f^{(n)}\right\|_\infty + \left\|g^{(n)}\right\|_\infty \leqslant M_f (n!)^k A_f^n + M_g (n!)^k A_g^n$$

Posons $N = \sup(M_f, M_g)$ et $B = \sup(A_f, A_g)$. Alors, $M_f \leqslant N$ et $M_g \leqslant N$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $A_f^n \leqslant B^n$ et $A_g^n \leqslant B^n$ et donc

$$\left\|(f+g)^{(n)}\right\|_\infty \leqslant N (n!)^k B^n + N (n!)^k B^n = 2N (n!)^k B^n$$

Ainsi, $f + g \in E_k$
⇒ Montrons que $f \times g \in E_k$
D'après la formule de Leibniz, nous avons :

$$(f \times g)^{(n)} = \sum_{q=0}^{n} \mathrm{C}_n^q (f)^{(q)} \times (g)^{(n-q)}$$

ce qui signifie, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$(f \times g)^{(n)}(x) = \sum_{q=0}^{n} \mathrm{C}_n^q (f)^{(q)}(x) \times (g)^{(n-q)}(x)$$

Et, en passant aux valeurs absolues, puis à l'inégalité triangulaire, nous avons, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\left|(f \times g)^{(n)}(x)\right| \leqslant \sum_{q=0}^{n} \mathrm{C}_n^q \left|f^{(q)}(x)\right| \times \left|g^{(n-q)}(x)\right|$$

Et donc, en passant au sup, nous avons :

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left|(f \times g)^{(n)}(x)\right| \leqslant \sum_{q=0}^{n} \mathrm{C}_n^q \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|f^{(q)}(x)\right| \times \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|g^{(n-q)}(x)\right|$$

C'est à dire :

$$\left\|(f \times g)^{(n)}\right\|_\infty \leqslant \sum_{q=0}^{n} \mathrm{C}_n^q \left\|f^{(q)}\right\|_\infty \times \left\|g^{(n-q)}\right\|_\infty$$

⋆ Comme $f \in E_k$, nous avons $\left\|f^{(q)}\right\|_\infty \leqslant M_f (q!)^k A_f^q$
⋆ De même, comme $g \in E_k$, nous avons $\left\|g^{(n-q)}\right\|_\infty \leqslant M_g ((n-q)!)^k A_g^{n-q}$

Posons toujours $N = \sup(M_f, M_g)$ et $B = \sup(A_f, A_g)$. Alors, $M_f \leqslant N$ et $M_g \leqslant N$ et nous avons $A_f^q \leqslant B^q$ et $A_g^{n-q} \leqslant B^{n-q}$ et donc

$$\begin{aligned} \left\|f^{(q)}\right\|_\infty \times \left\|g^{(n-q)}\right\|_\infty &\leqslant \left(M_f (q!)^k A_f^q\right) \times \left(M_g ((n-q)!)^k A_g^{n-q}\right) \\ &\leqslant \left(N (q!)^k B^q\right) \times \left(N ((n-q)!)^k B^{n-q}\right) = N^2 (q!(n-q)!)^k B^n \end{aligned}$$

Nous avons donc $\left\|(f \times g)^{(n)}\right\|_\infty \leqslant \sum_{q=0}^{n} \mathrm{C}_n^q N^2 (q!(n-q)!)^k B^n$

Nous avons $\mathrm{C}_n^q = \dfrac{n!}{q!(n-q)!}$.

Comme $\mathrm{C}_n^q \geqslant 1$, nous avons $\dfrac{n!}{q!(n-q)!} \geqslant 1 \Longleftrightarrow n! \geqslant q!(n-q)!$

Et donc :

$$\begin{aligned}\left\|(f\times g)^{(n)}\right\|_\infty &\leqslant \sum_{q=0}^{n} \mathrm{C}_n^q N^2 \left(q!\,(n-q)!\right)^k B^n \\ &\leqslant \sum_{q=0}^{n} \mathrm{C}_n^q N^2 (n!)^k B^n = N^2 (n!)^k B^n \sum_{q=0}^{n} \mathrm{C}_n^q = N^2 (n!)^k B^n 2^n = N^2 (n!)^k (2B)^n\end{aligned}$$

Ce qui termine de montrer que $f\times g\in E_k$

Cette question démontre que E_k est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel , en fait un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(T)$. Mieux, avec le fait que si $f\in E_k$ et $g\in E_k$, nous ayions $f\times g\in E_k$, E_k est une algèbre.

5. *Soit $f\in E_0$.*

(a) *Déduire de la question 1 que $c_p(f)$ est nul sauf pour un nombre fini de valeurs de p*

Dire que $c_p(f)$ est nul sauf pour un nombre fini de valeurs de p, c'est dire qu'il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $p\in\mathbb{Z}$, si $|p|\geqslant N$, alors $c_p(f)=0$

Supposons le contraire

C'est à dire que nous supposons que pour tout $N\in\mathbb{N}$, il existe $p\in\mathbb{Z}$ tel que $|p|\geqslant N$ et $c_p(f)\neq 0$

Comme $f\in E_0$, il existe $M_f>0$ et $A_f>0$ tels que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\left\|f^{(n)}\right\|_\infty\leqslant M_f(A_f)^n$.

D'après la question 1, nous avons $|c_p(f)|\leqslant \dfrac{\left\|f^{(n)}\right\|_\infty}{|p|^n}\leqslant M_f\left(\dfrac{A_f}{|p|}\right)^n$

Soit $N>A_k$ et $p_0\in\mathbb{Z}$ tel que $|p_0|>N$ et $c_{p_0}(f)\neq 0$.

Nous avons alors $|c_{p_0}(f)|\leqslant M_f\left(\dfrac{A_f}{|p_0|}\right)^n$.

Comme $A_k<N<|p_0|$, nous avons $0<\dfrac{A_f}{|p_0|}<1$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{A_f}{|p_0|}\right)^n=0$

C'est là qu'intervient la contradiction puisque si $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{A_f}{|p_0|}\right)^n=0$, il existe un entier $P\in\mathbb{N}$ tel que si $n>P$, alors $M_f\left(\dfrac{A_f}{|p_0|}\right)^n<|c_{p_0}(f)|$

Donc, contradiction.

Il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $p\in\mathbb{Z}$, si $|p|\geqslant N$, alors $c_p(f)=0$, c'est à dire $c_p(f)$ est nul sauf pour un nombre fini de valeurs de p

On vient de montrer que si $f\in E_0$, alors f est un polynôme trigonométrique. La question suivante consiste à démontrer que si f est un polynôme trigonométrique, alors $f\in E_0$

(b) *Soit q un entier strictement positif; on définit f par $f(t)=\sum\limits_{p=-q}^{q}c_pe^{ipt}$ pour tout $t\in\mathbb{R}$, les c_p étant des constantes complexes et l'un au moins des deux nombres c_q et c_{-q} étant non nul. Montrer qu'il existe $M>0$ tel que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\left\|f^{(n)}\right\|_\infty\leqslant Mq^n$*

f est un polynôme trigonométrique de degré q et, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f^{(n)}(t)=\sum\limits_{p=-q}^{q}(ip)^nc_pe^{ipt}$

et donc $\left|f^{(n)}(t)\right|\leqslant\sum\limits_{p=-q}^{q}|p|^n|c_p|$.

Pour tout $p\in\mathbb{Z}$ tel que $-q\leqslant p\leqslant q$, nous avons $|p|^n\leqslant q^n$ et donc $\left|f^{(n)}(t)\right|\leqslant\left(\sum\limits_{p=-q}^{q}|c_p|\right)q^n$.

En particulier $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}}\left|f^{(n)}(t)\right|\leqslant\left(\sum\limits_{p=-q}^{q}|c_p|\right)q^n$, c'est à dire $\left\|f^{(n)}\right\|_\infty\leqslant Mq^n$ où $M=\left(\sum\limits_{p=-q}^{q}|c_p|\right)$

Donc, $f\in E_0$

Les seuls éléments de E_0 sont donc les polynômes trigonométriques

Montrer que, si M' et A sont deux constantes positives satisfaisant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, à l'inégalité : $\left\| f^{(n)} \right\|_\infty \leqslant M' A^n$, alors $A \geqslant q$

f étant un polynôme trigonométrique, alors $c_p(f) = c_p$ et d'après la question a, nous avons

$$|c_p(f)| \leqslant \frac{\left\| f^{(n)} \right\|_\infty}{|p|^n} \leqslant M' \left(\frac{A}{|p|} \right)^n$$

Nous avons démontré que si $|p| > A$, alors $c_p = 0$.
Or, si $A < q$, nous aurons alors $c_q = 0$ ou $c_{-q} = 0$, ce qui est impossible.
Donc $A \geqslant q$ et l'inégalité $\left\| f^{(n)} \right\|_\infty \leqslant M q^n$ est donc la meilleure.

6. *Soit q un entier strictement positif; on définit g_1 par : $g_1(\theta) = \cos^q \theta$ Établir la meilleure inégalité possible du type suivant : Pour tout $n \in \mathbb{N}$ nous avons $\left\| g_1^{(n)} \right\|_\infty \leqslant M_1 (n!)^k A_1^n$*

Comme d'habitude, nous écrivons $\cos^q \theta = \left(\dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right)^q = \dfrac{1}{2^q} \left(e^{i\theta} + e^{-i\theta} \right)^q$

Pour commencer, nous avons $\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta} \right)^q = \displaystyle\sum_{k=0}^{q} \mathrm{C}_q^k e^{ik\theta} e^{-i(q-k)\theta} = \sum_{k=0}^{q} \mathrm{C}_q^k e^{i\theta(2k-q)}$

En remarquant que si $0 \leqslant k \leqslant q$, alors $-q \leqslant 2k - q \leqslant q$, que $\mathrm{C}_q^{q-k} = \mathrm{C}_q^k$, nous pouvons alors écrire : $g_1(\theta) = \cos^q \theta = \displaystyle\sum_{k=-q}^{q} c_k e^{ik\theta}$ avec $c_k = c_{-k}$.

D'autre part, si q est pair alors c_{2k+1}, les termes d'ordre impair sont nuls, et, de même si q est impair alors c_{2k}, les termes d'ordre pair sont nuls,
Nous montrons ainsi que $g_1(\theta) = \cos^q \theta$ est un polynôme trigonométrique de degré q tel que $c_q = c_{-q} = \dfrac{1}{2^q}$

De l'expression $g_1(\theta) = \dfrac{1}{2^q} \displaystyle\sum_{k=0}^{q} \mathrm{C}_q^k e^{i\theta(2k-q)}$, nous tirons, sans difficulté aucune *(avec un raisonnement par récurrence, par exemple)* que

$$g_1^{(n)}(\theta) = \frac{1}{2^q} \sum_{k=0}^{q} (i(2k-q))^n \mathrm{C}_q^k e^{i\theta(2k-q)}$$

Et, en passant à la valeur absolue (ou aux modules), nous avons :

$$\left| g_1^{(n)}(\theta) \right| \leqslant \frac{1}{2^q} \sum_{k=0}^{q} |(2k-q)|^n \mathrm{C}_q^k$$

De la remarque ci-dessus : si $0 \leqslant k \leqslant q$, alors $-q \leqslant 2k - q \leqslant q$, nous avons $|(2k-q)|^n \leqslant q^n$, et donc :

$$\left| g_1^{(n)}(\theta) \right| \leqslant \frac{1}{2^q} \sum_{k=0}^{q} |(2k-q)|^n \mathrm{C}_q^k \leqslant \frac{q^n}{2^q} \sum_{k=0}^{q} \mathrm{C}_q^k = q^n$$

Puisque de façon bien connue, nous avons $\displaystyle\sum_{k=0}^{q} \mathrm{C}_q^k = 2^q$

Ainsi, nous avons $\left\| g_1^{(n)} \right\|_\infty \leqslant q^n$, et c'est la meilleure majoration possible pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour $n = 0$, cette majoration est atteinte; en effet : $\left\| g_1^{(0)} \right\|_\infty = \|g_1\|_\infty = 1 = q^0$

Partie 2 *(intermède ludique et reposant)* : étude de fonctions et de majorations

1. *Soient $a > 1$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Etudier les variations de la fonction f_n ainsi définie :*

$$\left\{\begin{array}{rcl} f_n : \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f_n(x) = x^n a^{-x} \end{array}\right.$$

Donner explicitement le maximum de cette fonction.

C'est une question qui ne doit poser aucune difficulté ; c'est tout L_0 tout cuit !!.
Comme $a > 1$ et $x > 0$, nous povons simplement écrire : $f_n(x) = x^n a^{-x} = x^n e^{-x \ln a}$.
Calculons-en la dérivée :

$$f_n'(x) = nx^{n-1}e^{-x\ln a} - \ln a e^{-x \ln a} x^n = x^{n-1}e^{-x\ln a}(n - x\ln a)$$

Clairement, le signe de $f_n'(x)$ est celui de $(n - x\ln a)$. Ainsi :
- ⋆ Si $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{n}{\ln a}$, alors $f_n'(x) \geqslant 0$ et f_n est croissante sur l'intervalle $\left[0; \dfrac{n}{\ln a}\right]$
- ⋆ Et si $x \geqslant \dfrac{n}{\ln a}$, alors $f_n'(x) \leqslant 0$ et f_n est décroissante sur l'intervalle $\left[\dfrac{n}{\ln a}; +\infty\right[$

Le maximum de f_n est donc atteint, sur $\mathbb{R}^+$ en $x_0 = \dfrac{n}{\ln a}$ et ce maximum est

$$f_n\left(\frac{n}{\ln a}\right) = \left(\frac{n}{\ln a}\right)^n e^{-\frac{n}{\ln a}\times \ln a} = \frac{n^n}{(\ln a)^n}e^{-n} = \left(\frac{n}{e}\right)^n \times \left(\frac{1}{\ln a}\right)^n$$

Ainsi donc, pour tout $x \geqslant 0$ et tout $a > 1$, nous avons $x^n a^{-x} \leqslant \left(\dfrac{n}{e}\right)^n \times \left(\dfrac{1}{\ln a}\right)^n$.

En particulier, si $a = e$, nous avons $x^n e^{-x} \leqslant \left(\dfrac{n}{e}\right)^n$

2. (a) *Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $u_n = \dfrac{1}{n!} \times \left(\dfrac{n}{e}\right)^n$*

Pour connaître cette monotonie, nous allons faire le rapport $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ et en faire la comparaison à 1.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{(n+1)!} \times \left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1} \times \left(\frac{e}{n}\right)^n n! = \frac{1}{n+1} \times (n+1) \times \frac{(n+1)^n}{e^{n+1}} \times \frac{e^n}{n^n} = \frac{1}{e} \times \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$$

Nous allons étudier un tout petit peu, la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ où $X_n = \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$

⇒ Déjà, nous savons que $\lim\limits_{n\to+\infty} X_n = e$

⇒ D'autre part, la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite croissante telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n < e$

Comment montrer que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite croissante ?
Il suffit, pour celà, d'utiliser la fonction auxiliaire $\varphi : \mathbb{R}^{*+} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$

Sa dérivée est donnée par $\varphi'(x) = \left(\ln(x+1) - \ln x - \dfrac{1}{x+1}\right)e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$ dont le signe ne dépend que que $\left(\ln(x+1) - \ln x - \dfrac{1}{x+1}\right)$.
Lorsque nous aurons remarqué que :

$$\frac{1}{x+1} \leqslant \int_x^{x+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \frac{1}{x} \Longleftrightarrow \frac{1}{x+1} \leqslant \ln(x+1) - \ln x \leqslant \frac{1}{x}$$

nous aurons alors démontré que $\left(\ln(x+1) - \ln x - \dfrac{1}{x+1}\right) \geqslant 0$ et donc que $\varphi'(x) \geqslant 0$. *(Voir la figure 9.20)*
La fonction φ est donc croissante et donc la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite croissante

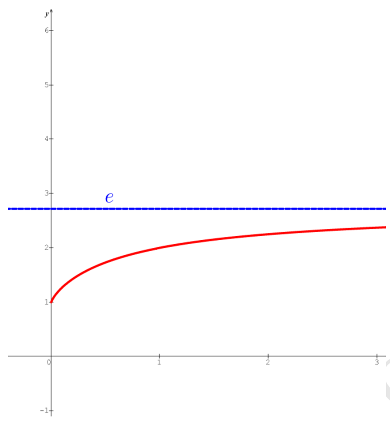

FIGURE 9.20 – La représentation graphique de $\varphi(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$

Donc, comme $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{1}{e} \times \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n = \dfrac{1}{e} \times X_n < \dfrac{1}{e} \times e = 1$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $u_n = \dfrac{1}{n!} \times \left(\dfrac{n}{e}\right)^n$ est donc décroissante

(b) *En déduire l'inégalité $n! \geqslant e\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$*

$\Rightarrow$ **Première méthode Bulldozer**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ étant décroissante, nous avons :

$$\frac{1}{n!} \times \left(\frac{n}{e}\right)^n \geqslant \frac{1}{(n+1)!} \times \left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1} \Longleftrightarrow \left(\frac{n}{e}\right)^n \geqslant \frac{1}{n+1} \times \left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}$$

Ainsi :

$$\begin{cases} \text{pour } n=1 & \dfrac{1}{e} \geqslant \dfrac{1}{2} \times \left(\dfrac{2}{e}\right)^2 \\ \text{pour } n=2 & \left(\dfrac{2}{e}\right)^2 \geqslant \dfrac{1}{3} \times \left(\dfrac{3}{e}\right)^3 \\ \text{pour } n=3 & \left(\dfrac{3}{e}\right)^3 \geqslant \dfrac{1}{4} \times \left(\dfrac{4}{e}\right)^4 \\ \quad\vdots & \quad\vdots \quad \vdots \\ & \left(\dfrac{n-2}{e}\right)^{n-2} \geqslant \dfrac{1}{n-1} \times \left(\dfrac{n-1}{e}\right)^{n-1} \\ & \left(\dfrac{n-1}{e}\right)^{n-1} \geqslant \dfrac{1}{n} \times \left(\dfrac{n}{e}\right)^n \end{cases}$$

En multipliant termes à termes, puis en simplifiant, nous obtenons :

$$\frac{1}{e} \geqslant \frac{1}{n!} \times \left(\frac{n}{e}\right)^n \Longleftrightarrow n! \geqslant e\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

$\Rightarrow$ **Seconde méthode, tellement plus subtile :**

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ étant décroissante, nous avons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_1 \geqslant u_n$, c'est à dire $\dfrac{1}{e} \geqslant \dfrac{1}{n!} \times \left(\dfrac{n}{e}\right)^n$, ou, ce qui est équivalent, $n! \geqslant e\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$

3. *On pose, pour tout $x > 0$, $\Phi(x) = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} (n!x^{-n})$*

(a) *Donner une expression explicite de $\Phi(x)$ lorsque $x \in \left]s, s+1\right]$, où $s \in \mathbb{N}$.*

Pour nous simplifier l'étude, nous appelons, pour $x \in \mathbb{R}$ fixé : $v_n = \dfrac{n!}{x^n}$. Nous allons étudier les variations de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Tout d'abord $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{(n+1)!}{x^{n+1}} \times \dfrac{x^n}{n!} = \dfrac{n+1}{x}$

$\Rightarrow$ Commençons par un peu de bricolages.

Si $x \in]0;1]$, alors $\dfrac{1}{x} \geqslant 1$, donc $\dfrac{n+1}{x} \geqslant n+1 \geqslant 1$ et alors $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} \geqslant 1$; ce qui veut dire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $v_0 \leqslant v_n$ et donc $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} (n!x^{-n}) = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} v_n = v_0 = \dfrac{0!}{x^0} = 1$.

Ainsi, si $x \in]0;1]$, alors $\Phi(x) = 1$

$\Rightarrow$ Jouons plus sérieux et soit $s \in \mathbb{N}$ et $x \in]s;s+1]$

De $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{n+1}{x}$ et de $\dfrac{1}{s+1} \leqslant \dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{1}{s}$, nous tirons $\dfrac{n+1}{s+1} \leqslant \dfrac{n+1}{x} \leqslant \dfrac{n+1}{s}$

- ⋆ Ainsi, si $n \geqslant s$, alors $\dfrac{n+1}{s+1} \geqslant 1$ et donc $\dfrac{n+1}{x} \geqslant 1$, c'est à dire $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} \geqslant 1$
- ⋆ Si $n < s$, c'est à dire $n+1 \leqslant s$ et donc $\dfrac{n+1}{s} \leqslant 1$ i.e. $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} \leqslant 1$

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante si $n < s$ et croissante si $n \geqslant s$ et donc $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} (n!x^{-n}) = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} v_n = v_s = \dfrac{s!}{x^s}$

$\Rightarrow$ Ainsi, sur les intervalles $]s;s+1]$ nous avons $\Phi(x) = \dfrac{s!}{x^s}$ et définition qui reste valable même pour $s = 0$

(b) $\rightarrow$ *Etudier la continuité de Φ*

Les points qui peuvent poser problème dans la continuité de Φ sont les points à valeurs entières $s \in \mathbb{N}$.

Nous avons donc $\Phi(s) = \dfrac{(s-1)!}{s^{s-1}}$

- ⋆ Bien entendue, la fonction Φ est continue à gauche de s
- ⋆ Etudions la continuité à droite de s.

  A droite de s, sur l'intervalle $]s;s+1]$ nous avons $\Phi(x) = \dfrac{s!}{x^s}$. Donc :

$$\lim_{\substack{x\to s \\ x>s}} \Phi(x) = \lim_{\substack{x\to s \\ x>s}} \frac{s!}{x^s} = \frac{(s-1)!}{s^{s-1}} = \Phi(s)$$

  Φ est donc bien continue à droite de s

Nous pouvons donc conclure que Φ est continue sur $\mathbb{R}^+$

$\rightarrow$ *Représenter graphiquement la restriction de Φ à l'intervalle $]0,4]$*

- ⋆ Il suffit de définir les différents intervalles :

$$\begin{array}{ll} \text{Si } x \in]0;1] & \text{alors } \Phi(x) = 1 \\ \text{Si } x \in]1;2] & \text{alors } \Phi(x) = \dfrac{1}{x} \\ \text{Si } x \in]2;3] & \text{alors } \Phi(x) = \dfrac{2}{x^2} \\ \text{Si } x \in]3;4] & \text{alors } \Phi(x) = \dfrac{6}{x^3} \end{array}$$

- ⋆ D'où le graphe :

(c) *Etablir l'existence d'une constante β telle que, pour tout $x > 0$: $\Phi(x) \leqslant \beta e^{\frac{-x}{2}}$*

Pour résoudre cette question, nous allons simplement étudier la fonction $\Psi(x) = \Phi(x) \times e^{\frac{x}{2}}$ et démontrer qu'elle est bornée sur $\mathbb{R}^+$

$\rightarrow$ Sur l'intervalle $]0;1]$, nous avons $\Psi(x) = e^{\frac{x}{2}}$. Ψ y est donc croissante et, pour tout $x \in]0;1]$, nous avons donc $\Psi(x) \leqslant e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$

$\rightarrow$ Soit $s \in \mathbb{N}^*$.

Alors, sur chaque intervalle $]s;s+1]$, nous avons

$$\Psi(x) = \Phi(x) \times e^{\frac{x}{2}} = \frac{s!}{x^s} \times e^{\frac{x}{2}} = \frac{s!}{x^s \times \left(\sqrt{e}\right)^{-x}}$$

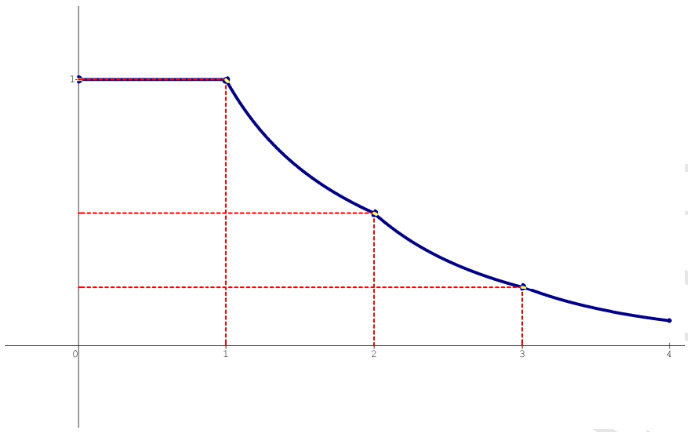

FIGURE 9.21 – Le graphe de la restriction de Φ à l'intervalle $]0,4]$

Nous avons démontré en question 1 que si $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{s}{\ln a}$, alors $x^s \times a^{-x}$ est croissante sur l'intervalle $\left[0; \dfrac{n}{\ln a}\right]$, et que si $x \geqslant \dfrac{s}{\ln a}$, alors $x^s \times a^{-x}$ est décroissante sur l'intervalle $\left[\dfrac{n}{\ln a}; +\infty\right[$.

Dans notre cas, $a = \sqrt{e}$, donc $\dfrac{s}{\ln a} = \dfrac{s}{\ln \sqrt{e}} = \dfrac{s}{\frac{1}{2}} = 2s$ et comme $2s \geqslant s+1$, la fonction $x^s \times \left(\sqrt{e}\right)^{-x}$ est croissante sur l'intervalle $]s; s+1]$.

De l'expression de $\Psi(x) = \dfrac{s!}{x^s \times \left(\sqrt{e}\right)^{-x}}$, nous déduisons que la fonction Ψ est continue et décroissante sur chaque intervalle $]s; s+1]$ avec $s \in \mathbb{N}^*$

C'est à dire que la fonction Ψ est continue et décroissante sur $[1; +\infty[$

→ Comme nous avons démontré que Ψ est croissante sur l'intervalle $]0;1]$, nous avons donc, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\Psi(x) \leqslant \Psi(1)$, c'est à dire

$$\Psi(x) \leqslant \Psi(1) \iff \Phi(x) \times e^{\frac{x}{2}} \leqslant \Phi(1) \times e^{\frac{1}{2}} \iff \Phi(x) \times e^{\frac{x}{2}} \leqslant e^{\frac{1}{2}} \iff \Phi(x) \leqslant e^{\frac{1}{2}} e^{\frac{-x}{2}}$$

Nous avons donc $\beta = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$.

En fait, nous venons de montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\Phi(x) \leqslant e^{\frac{1-x}{2}}$

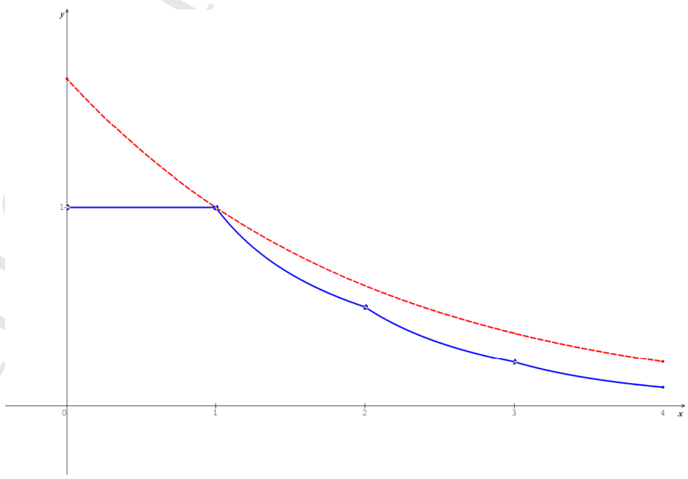

FIGURE 9.22 – Le graphe de la restriction de Φ à l'intervalle $]0,4]$ avec la majoration par la fonction $e^{\frac{1-x}{2}}$

Partie 3 : Etude du cas particulier des « fonctions rationnelles trigonométriques »

1. *Soit $a \in \mathbb{C}$, tel que $|a| > 1$. On pose, pour tout $t \in \mathbb{R}$: $h_a(t) = \sum_{p=1}^{+\infty} a^{-p} e^{ipt}$*

   (a) *Donner une expression explicite de $h_a(t)$*

   Ce n'est pas une question qui pose d'énormes difficultés.

   Pour tout $t \in \mathbb{R}$, nous avons $\left|a^{-p}e^{ipt}\right| = \left|\frac{e^{it}}{a}\right|^p = \left|\frac{1}{a}\right|^p$.

   Comme $\left|\frac{1}{a}\right| < 1$, la série $h_a(t) = \sum_{p=1}^{+\infty} a^{-p}e^{ipt}$ est normalement convergente, et nous avons :

$$h_a(t) = \frac{1}{1 - \frac{e^{it}}{a}} - 1 = \frac{a}{a - e^{it}} - 1 = \frac{e^{it}}{a - e^{it}}$$

   (b) i. *Etablir que $h_a \in \mathcal{C}^\infty(T)$*

   → h_a est évidemment continue sur $\mathbb{R}$ et ce, pour 2 raisons :

   ▷ D'une part par l'expression simplifiée de $h_a(t) = \frac{e^{it}}{a - e^{it}}$

   ▷ D'autre part par la convergence normale de $\sum_{p=1}^{+\infty} a^{-p}e^{ipt}$. En effet, chaque fonction $a^{-p}e^{ipt}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et de cette convergence normale, on déduit que la somme est continue sur $\mathbb{R}$

   → D'autre part, et sans difficulté, nous voyons que h_a est 2π-périodique.

   → La série entière $H(z) = \sum_{p=1}^{+\infty} a^{-p}z^p$ a un rayon de convergence ρ tel que $\rho > 1$.

   Sur ce domaine de convergence, H y est indéfiniment dérivable.

   La fonction $h_a(t) = \sum_{p=1}^{+\infty} a^{-p}e^{ipt} = H\left(e^{it}\right)$ est donc indéfiniment différentiable et

$$h_a^{(n)}(t) = \sum_{p=1}^{+\infty} a^{-p}(ip)^n e^{ipt}$$

   Et donc $h_a \in \mathcal{C}^\infty(T)$

   ii. *Donner, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le développement en série de Fourier de $h_a^{(n)}$*

   Si nous appelons $c_k\left(h_a^{(n)}\right)$ le coefficient de Fourier d'ordre k de $h_a^{(n)}$, nous avons :

$$\begin{aligned} c_k\left(h_a^{(n)}\right) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h_a^{(n)}(t)\, e^{-ikt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{p=1}^{+\infty} a^{-p}(ip)^n e^{ipt}e^{-ikt}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi}\sum_{p=1}^{+\infty} a^{-p}(ip)^n \int_0^{2\pi} e^{-i(k-p)t}\,\mathrm{d}t \\ &= a^{-k}(ik)^n \end{aligned}$$

   Et donc $h_a^{(n)}(t) = \sum_{p=1}^{+\infty} a^{-p}(ip)^n e^{ipt}$ est bien somme de sa série de Fourier

   (c) *Etablir l'inégalité, valable pour n et p entiers, $n \geqslant 0$ et $p > 0$: $p^n \times |a|^{-\frac{p}{2}} \leqslant \left(\frac{2}{\ln|a|}\right)^n \times n!$*

→ Nous avons démontré que, pour tout $x \geqslant 0$ et tout $a > 1$, nous avons

$$x^n a^{-x} \leqslant \left(\frac{n}{e}\right)^n \times \left(\frac{1}{\ln a}\right)^n$$

Puis, nous avons démontré que $n! \geqslant e\left(\frac{n}{e}\right)^n \iff \left(\frac{n}{e}\right)^n \leqslant \frac{n!}{e}$; et comme $\frac{n!}{e} \leqslant n!$, nous avons $\left(\frac{n}{e}\right)^n \leqslant n!$

→ Nous allons appliquer les inégalités rappelée ci-dessus à $a \in \mathbb{C}$ avec $|a| > 1$ et $p \in \mathbb{N}^*$.

Tout d'abord, nous avons $p^n \times |a|^{-\frac{p}{2}} = p^n \times \left(|a|^{\frac{1}{2}}\right)^{-p} = p^n \times \left(\sqrt{|a|}\right)^{-p}$, et donc :

$$\begin{aligned} p^n \times |a|^{-\frac{p}{2}} = & \ p^n \times \left(\sqrt{|a|}\right)^{-p} \\ \leqslant & \ \left(\frac{n}{e}\right)^n \left(\frac{1}{\ln\left(\sqrt{|a|}\right)}\right)^n = \left(\frac{n}{e}\right)^n \left(\frac{2}{\ln|a|}\right)^n \\ \leqslant & \ \frac{n!}{e}\left(\frac{2}{\ln|a|}\right)^n \leqslant n!\left(\frac{2}{\ln|a|}\right)^n \end{aligned}$$

D'où, nous avons bien pour pour n et p entiers, $n \geqslant 0$ et $p > 0$, $p^n \times |a|^{-\frac{p}{2}} \leqslant \left(\frac{2}{\ln|a|}\right)^n \times n!$

(d) *En déduire que $h_a \in E_1$*

Nous avons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p^n \times |a|^{-\frac{p}{2}} \leqslant \left(\frac{2}{\ln|a|}\right)^n \times n!$ et $h_a^{(n)}(t) = \sum_{p=1}^{+\infty} a^{-p}(ip)^n e^{ipt}$.

Donc :

$$\begin{aligned} \left|h_a^{(n)}(t)\right| \leqslant & \ \sum_{p=1}^{+\infty}\left|a^{-p}(ip)^n e^{ipt}\right| = \sum_{p=1}^{+\infty}|a|^{-p}p^n = \sum_{p=1}^{+\infty}|a|^{-\frac{p}{2}}|a|^{-\frac{p}{2}}p^n \\ \leqslant & \ \sum_{p=1}^{+\infty}|a|^{-\frac{p}{2}}\left(\frac{2}{\ln|a|}\right)^n \times n! = \left(\frac{2}{\ln|a|}\right)^n \times n!\sum_{p=1}^{+\infty}|a|^{-\frac{p}{2}} \end{aligned}$$

Il faut maintenant remarquer que $\sum_{p=1}^{+\infty}|a|^{-\frac{p}{2}} = \sum_{p=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{|a|}}\right)^p = \frac{1}{\sqrt{|a|}-1}$, et donc :

$$\left|h_a^{(n)}(t)\right| \leqslant \left(\frac{1}{\sqrt{|a|}-1}\right) n!\left(\frac{2}{\ln|a|}\right)^n$$

En particulier $\sup_{t\in\mathbb{R}}\left|h_a^{(n)}(t)\right| \leqslant \left(\frac{1}{\sqrt{|a|}-1}\right) n!\left(\frac{2}{\ln|a|}\right)^n$ et donc :

$$\left\|h_a^{(n)}\right\|_\infty \leqslant \left(\frac{1}{\sqrt{|a|}-1}\right) n!\left(\frac{2}{\ln|a|}\right)^n$$

Ce qui nous autorise à conclure que $h_a \in E_1$

2. *Soit $b \in \mathbb{C}$, avec $|b| \neq 1$.*

   (a) Donner les coefficients de Fourier de la fonction ψ_b, définie par $\psi_b(t) = \frac{1}{b - e^{it}}$

   (b) En déduire que $\psi_b \in E_1$

Comme $|b| \neq 1$, nous allons étudier 2 cas : $|b| > 1$ puis $|b| < 1$

⇒ Supposons donc $|b| > 1$

- ⋆ Alors, $\dfrac{1}{b-e^{it}} = \dfrac{1}{b\left(1-\frac{e^{it}}{b}\right)} = \dfrac{1}{b}\left(\dfrac{1}{1-\left(\frac{e^{it}}{b}\right)}\right)$

  Comme $|b|>1$, alors $\left|\dfrac{e^{it}}{b}\right| = \dfrac{1}{|b|} < 1$, et donc :

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-\left(\frac{e^{it}}{b}\right)} &= \sum_{n\geqslant 0}\frac{e^{int}}{b^n} = \sum_{n\geqslant 0} b^{-n}e^{int}\\ &= \sum_{n\geqslant 1} b^{-n}e^{int} + 1 = h_b(t) + 1\end{aligned}$$

  Ainsi, si $|b|>1$, alors $\psi_b(t) = \dfrac{1}{b}\left[h_b(t)+1\right] = \dfrac{1}{b}h_b(t) + \dfrac{1}{b}$

- ⋆ Nous avons démontré que si $\mu\in\mathbb{C}$ et $f\in E_k$ alors $\mu f\in E_k$ et donc, nous avons $\dfrac{1}{b}h_b\in E_1$.

  D'autre part, la fonction constante $\dfrac{1}{b}$ est un élément de E_1 et comme la somme de 2 fonctions de E_1 est encore un élément de E_1, nous avons $\psi_b\in E_1$

- ⋆ De l'identité $\psi_b(t) = \dfrac{1}{b}h_b(t) + \dfrac{1}{b}$, nous tirons :

$$\psi_b(t) = \frac{1}{b}\sum_{p=1}^{+\infty} b^{-p}e^{ipt} + \frac{1}{b} = \frac{1}{b} + \sum_{p=1}^{+\infty} b^{-p-1}e^{ipt} = \sum_{p=0}^{+\infty} b^{-(p+1)}e^{ipt}$$

  Un calcul simple montre que $c_p(\psi_b) = b^{-(p+1)}$ si $p\geqslant 0$ et que $c_p(\psi_b) = 0$ si $p<0$

  La série $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} b^{-(p+1)}e^{ipt}$ est donc la série de Fourier de ψ_b lorsque $|b|>1$

⇒ Supposons maintenant que $|b|<1$

- ⋆ Alors, $\dfrac{1}{b-e^{it}} = \dfrac{e^{-it}}{be^{-it}-1} = -e^{-it}\dfrac{1}{1-be^{-it}}$.

  Comme $|b|<1$, nous avons aussi $\left|be^{-it}\right|<1$, et donc, nous pouvons écrire, pour tout $t\in\mathbb{R}$:

$$\frac{1}{1-be^{-it}} = \sum_{p\geqslant 0} b^p e^{-ipt} = 1 + \sum_{p\geqslant 1} b^p e^{-ipt} = 1 + \sum_{p\geqslant 1}\left(\frac{1}{b}\right)^{-p} e^{-ipt} = 1 + h_{\frac{1}{b}}(-t)$$

  D'où $\psi_b(t) = \dfrac{1}{b-e^{it}} = -e^{-it}\left(1+h_{\frac{1}{b}}(-t)\right)$ et nous retrouvons les conditions pour que $\psi_b\in E_1$

- ⋆ Nous avons donc :

$$\psi_b(t) = -e^{-it}\sum_{p\geqslant 0} b^p e^{-ipt} = \sum_{p\geqslant 0} -b^p e^{-i(p+1)t} = \sum_{p\geqslant 1} -b^{p-1}e^{-ipt}$$

  La série de Fourier de ψ_b s'écrivant $\psi_b(t) = \displaystyle\sum_{p\geqslant 0} c_p e^{ipt} + \sum_{p\geqslant 1} c_p e^{-ipt}$ nous avons, pour $p\geqslant 0$, $c_p(\psi_b) = 0$ et si $p\leqslant -1$, $c_p(\psi_b) = -b^{p-1}$

Partie 4 : Caractérisation des éléments de E_k par leurs coefficients de Fourier

1. *Soit k un entier strictement positif, et soit $f\in E_k$; par définition des éléments de E_k, il existe alors $M>0$ et $A>0$ tels pour tout $n\in\mathbb{N}$:*

$$\left\|f^{(n)}\right\|_\infty \leqslant M\,(n!)^k A^n$$

(a) *Etablir que, pour tout entier relatif $p \neq 0$, nous avons l'inégalité $|c_p(f)| \leqslant M(n!)^k \left(\frac{A}{|p|}\right)^n$*

Nous avons déjà démontré, dans la partie 1 que pour $p \neq 0$, nous avons l'inégalité

$$|c_p(f)| \leqslant \frac{\left\|f^{(n)}\right\|_\infty}{|p|^n}$$

Donc : $|c_p(f)| \leqslant \frac{M(n!)^k A^n}{|p|^n} = M(n!)^k \left(\frac{A}{|p|}\right)^n$

(b) *A l'aide de la fonction Φ définie pour tout $x > 0$ par $\Phi(x) = \inf_{n\in\mathbb{N}} (n!x^{-n})$, montrer l'existence de deux constantes strictement positives, B et λ telles que, pour tout $p \in \mathbb{Z}$:*

$$|c_p(f)| \leqslant B \exp\left(-\lambda |p|^{\frac{1}{k}}\right)$$

Nous avons démontré que $|c_p(f)| \leqslant M(n!)^k \left(\frac{A}{|p|}\right)^n$.

Soit $X = \left(\frac{|p|}{A}\right)^{\frac{1}{k}}$. Donc $X^{-n} = \left(\frac{A}{|p|}\right)^{\frac{n}{k}}$ et donc $\left(\frac{A}{|p|}\right)^n = \left(X^{\frac{-n}{k}}\right)^k$.

Alors, $|c_p(f)| \leqslant M\left[(n!)X^{-n}\right]^k$.

Cette inégalité étant vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ est aussivraie pour $\inf_{n\in\mathbb{N}} (n!)X^{-n} = \Phi(X)$ et donc $|c_p(f)| \leqslant M\left[\Phi(X)\right]^k$.

Comme pour tout $X > 0$, nous avons $\Phi(X) \leqslant \beta e^{\frac{-X}{2}}$, nous avons

$$|c_p(f)| \leqslant M\beta^k e^{\frac{-kX}{2}} = M\beta^k e^{\frac{-k|p|^{\frac{1}{k}}}{2A^{\frac{1}{k}}}}$$

En conclusion, et en ayant posé $B = M\beta^k$ et $\lambda = \frac{k}{2}A^{\frac{-1}{k}}$, nous avons bien

$$|c_p(f)| \leqslant B \exp\left(-\lambda |p|^{\frac{1}{k}}\right)$$

2. *Inversement soit C une application de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{C}$, ainsi définie :*

$$\left\{\begin{array}{rcl} C:\mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ p & \longmapsto & C(p) = c_p \end{array}\right.$$

pour laquelle il existe deux constantes $B > 0$ et $\lambda > 0$ strictement positives telles que, pour tout $p \in \mathbb{Z}$, nous ayions

$$|c_p| \leqslant B \exp\left(-\lambda |p|^{\frac{1}{k}}\right)$$

(a) *Etablir qu'il existe un élément $f \in \mathcal{C}^\infty(T)$ tel que, pour tout $p \in \mathbb{Z}$ $c_p = c_p(f)$*

Comme $B > 0$ et $\lambda > 0$ et « l'exponentielle l'emportant sur la puissance »

$$\lim_{|p|\to+\infty} p^n \left(B \exp\left(-\lambda |p|^{\frac{1}{k}}\right)\right) = 0$$

C'est à dire $\lim_{|p|\to+\infty} p^n c_p = 0$.

Nous réutilisons, ici, la question 3 de la partie 1 :

Les séries $\sum_{p=0}^{+\infty} c_p e^{ipt}$ et $\sum_{p=1}^{+\infty} c_{-p} e^{-ipt}$ sont normalement convergentes.

D'autre part, la fonction $f(t) = \sum_{p=0}^{+\infty} c_p e^{ipt} + \sum_{p=1}^{+\infty} c_{-p} e^{-ipt}$ est un élément de $\mathcal{C}^\infty(T)$ et nous démontrons, facilement que $c_p(f) = c_p$

(b) *Déduire de la partie 2 l'inégalité, valable pour tout couple $(n,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ d'entiers strictement positifs :*

$$p^n \exp\left(-\frac{\lambda}{2} p^{\frac{1}{k}}\right) \leqslant (n!)^k \left(\frac{2k}{\lambda}\right)^{nk}$$

Il faut donc que nous majorions $p^n \exp\left(-\frac{\lambda}{2} p^{\frac{1}{k}}\right)$ et que nous mettions cette expression sous une forme intéressante et facile à majorer ; ce qui n'est pas gagné !

$\Rightarrow$ Tout d'abord :

$$p^n \exp\left(-\frac{\lambda}{2} p^{\frac{1}{k}}\right) = \left(p^{\frac{1}{k}}\right)^{kn} \left[\exp\left(-\frac{\lambda}{2}\right)\right]^{p^{\frac{1}{k}}} = \left(p^{\frac{1}{k}}\right)^{kn} \left[\exp\left(\frac{\lambda}{2}\right)\right]^{-p^{\frac{1}{k}}} = \left(p^{\frac{1}{k}}\right)^{kn} \left(e^{\frac{\lambda}{2}}\right)^{-p^{\frac{1}{k}}}$$

$\Rightarrow$ Comme $\lambda > 0$, nous avons $e^{\frac{\lambda}{2}} > 1$; posons $a = e^{\frac{\lambda}{2}}$

$\Rightarrow$ Posons, maintenant, $x = p^{\frac{1}{k}}$. Alors : $\left(p^{\frac{1}{k}}\right)^{kn} \left(e^{\frac{\lambda}{2}}\right)^{-p^{\frac{1}{k}}} = x^{kn} a^{-x}$

$\Rightarrow$ Nous avons montré, dans la question 1 de la partie 2 que $x^{kn} a^{-x} \leqslant \left(\frac{kn}{e}\right)^{kn} \left(\frac{1}{\ln a}\right)^{kn}$

- $\star$ Remarquons, dans un premier temps, que $\left(\frac{1}{\ln a}\right)^{kn} = \left(\frac{1}{\ln e^{\frac{\lambda}{2}}}\right)^{kn} = \left(\frac{2}{\lambda}\right)^{kn}$
- $\star$ Donc : $x^{kn} a^{-x} \leqslant \left(\frac{kn}{e}\right)^{kn} \left(\frac{2}{\lambda}\right)^{kn} = \left(\frac{2kn}{e\lambda}\right)^{kn} = \left(\frac{n}{e}\right)^{kn} \left(\frac{2k}{\lambda}\right)^{kn}$
- $\star$ Or, toujours d'après la partie 2 : $\left(\frac{n}{e}\right)^{kn} = \left[\left(\frac{n}{e}\right)^n\right]^k \leqslant \left(\frac{n!}{e}\right)^k \leqslant (n!)^k$

Et donc, nous avons $x^{kn} a^{-x} \leqslant (n!)^k \times \left(\frac{2k}{\lambda}\right)^{kn}$

$\Rightarrow$ Et donc, en synthèse, et en remplaçant x et a par leur valeur :

$$p^n \exp\left(-\frac{\lambda}{2} p^{\frac{1}{k}}\right) \leqslant (n!)^k \left(\frac{2k}{\lambda}\right)^{nk}$$

(c) *En déduire une majoration de $\left\|f^{(n)}\right\|_\infty$ et montrer que $f \in E_k$*

Classiquement, nous avons $f^{(n)}(t) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} (ip)^n c_p e^{ipt}$ et donc $\left|f^{(n)}(t)\right| \leqslant \sum_{p=-\infty}^{+\infty} |p|^n |c_p|$

Or, par hypothèses, nous avons $|c_p| \leqslant B \exp\left(-\lambda |p|^{\frac{1}{k}}\right)$ et donc $|p|^n |c_p| \leqslant B |p|^n \exp\left(-\lambda |p|^{\frac{1}{k}}\right)$

Or, $\exp\left(-\lambda |p|^{\frac{1}{k}}\right) = \left(\exp\left(-\frac{\lambda}{2} |p|^{\frac{1}{k}}\right)\right)^2 = \exp\left(-\lambda |p|^{\frac{1}{k}}\right) \times \exp\left(-\lambda |p|^{\frac{1}{k}}\right)$.

Et donc $|p|^n |c_p| \leqslant B |p|^n \exp\left(-\lambda |p|^{\frac{1}{k}}\right) = B |p|^n \exp\left(-\lambda |p|^{\frac{1}{k}}\right) \times \exp\left(-\lambda |p|^{\frac{1}{k}}\right)$.

Nous avons démontré que $p^n \exp\left(-\frac{\lambda}{2} p^{\frac{1}{k}}\right) \leqslant (n!)^k \left(\frac{2k}{\lambda}\right)^{nk}$ et donc :

$$|p|^n |c_p| \leqslant B (n!)^k \left(\frac{2k}{\lambda}\right)^{nk} \times \exp\left(-\frac{\lambda}{2} |p|^{\frac{1}{k}}\right)$$

Et donc :

$$\left|f^{(n)}(t)\right| \leqslant B(n!)^k \left(\frac{2k}{\lambda}\right)^{nk} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{\lambda}{2}|p|^{\frac{1}{k}}\right)$$

La série $\displaystyle\sum_{p=-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{\lambda}{2}|p|^{\frac{1}{k}}\right)$ est une série convergente ; en posant $S = \displaystyle\sum_{p=-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{\lambda}{2}|p|^{\frac{1}{k}}\right)$, nous avons :

$$\left|f^{(n)}(t)\right| \leqslant BS(n!)^k \left(\frac{2k}{\lambda}\right)^{nk} = M(n!)^k A^n$$

Où $M = BS$ et $A = \left(\dfrac{2k}{\lambda}\right)^k$.

Donc $f \in E_k$

On vient donc de montrer que $f \in E_k$ si et seulement si il existe $B > 0$ et $\lambda > 0$ tels que $|c_p(f)| \leqslant B\exp\left(-\lambda|p|^{\frac{1}{k}}\right)$

Chapitre 10

Fonctions analytiques d'une variable réelle ou complexe

Work in progress

Quatrième partie

Algèbre

Chapitre 11

Compléments sur les groupes

11.1 Premières définitions

11.1.1 Définition de groupe

Un ensemble non vide G est un groupe s'il est muni d'une loi de composition interne $\star$, c'est à dire telle que :

$$\begin{cases} f : G \times G & \longrightarrow & G \\ \quad (x, y) & \longmapsto & f[(x, y)] = x \star y \end{cases}$$

Avec les conditions suivantes :

1. La loi est associative, c'est à dire que pour tout $x \in G$, $y \in G$ et $z \in G$
$$x \star (y \star z) = (x \star y) \star z$$
2. La loi $\star$ admet un élément neutre, c'est à dire qu'il existe $e \in G$ tel que pour tout $x \in G$:
$$x \star e = e \star x = x$$
3. Chaque $x \in G$ admet un symétrique pour la loi $\star$, c'est à dire que pour tout $x \in G$, il existe $x' \in G$ tel que
$$x \star x' = x' \star x = e$$

Si, de plus la loi $\star$ est commutative, c'est à dure que pour tout $x \in G$ et tout $y \in G$:

$$x \star y = y \star x$$

Le groupe G est dit commutatif ou abélien

11.1.2 Définition de groupe fini

Soit $(G, \star)$ un groupe, on dit que le groupe est fini si l'ensemble G l'est.
L'ordre du groupe G est le cardinal $\text{Card}\, G$ de G , on le note aussi $\#(G)$ ou $|G|$.

Remarque 1 :

1. **Notation additive**
   Au lieu d'écrire $a * b$, on écrit aussi $a + b$; on dit alors que G est un groupe additif.
   (a) Le neutre e est alors noté 0
   (b) Le symétrique de a est alors appelé opposé de a et est noté $-a$
   (c) L'associativité devient, pour tout $x \in G$, $y \in G$ et $z \in G$
   $$x + (y + z) = (x + y) + z = x + y + z$$

2. **Notation multiplicative**
   Au lieu d'écrire $a * b$, on écrit aussi ab ; on dit alors que G est un groupe multiplicatif.
   (a) Le neutre e est alors noté 1
   (b) Le symétrique de a est alors appelé inverse de a et est noté a^{-1}
   (c) L'associativité devient, pour tout $x \in G$, $y \in G$ et $z \in G$
   $$x(yz) = (xy)z = xyz$$
3. Que les notations soient multiplicatives ou additives, les propriétés de groupe sont les mêmes

Exemple 1 :

Des exemples de groupes
1. Par construction, $\mathbb{Z}$, muni de l'addition est un groupe commutatif
2. $(\mathbb{R}, +)$ est un groupe, de même que $(\mathbb{R}^{*+}, \times)$
3. De même, $(\mathbb{C}, +)$ est un groupe et $(\mathbb{C}^{*+}, \times)$
4. On peut aussi définir explicitement un groupe en faisant sa table de multiplication :

$*$	e	a	b	ab
e	e	a	b	ab
a	a	e	ab	b
b	b	ab	e	a
ab	ab	b	a	e

   D'après la table, il est évident que $(G, *)$ est un groupe commutatif
5. On peut s'intéresser aux groupes liés à la géométrie.
   (a) **Le groupe orthogonal** $O(n, \mathbb{R})$
   On considère $\mathbb{R}^n$, muni du produit scalaire habituel. f est une transformation orthogonale si elle est linéaire, et si elle conserve le produit scalaire, c'est à dire :
   $$(\forall u \in \mathbb{R}^n)(\forall v \in \mathbb{R}^n)(\langle f(u)/f(v)\rangle = \langle u/v\rangle)$$
   $O(n, \mathbb{R})$ est l'ensemble des transformations orthogonales de $\mathbb{R}^n$. $O(n, \mathbb{R})$, muni de la composition des applications est un groupe.
   — Tout d'abord, $O(n, \mathbb{R}) \neq \emptyset$ puisque l'application identique $1_{\mathbb{R}^n} \in O(n, \mathbb{R})$ qui est l'élément neutre pour la composition des applications.
   — La composée de 2 transformations orthogonales est une transformation orthogonale.
   — *Une transformation orthogonale est une bijection, et la bijection réciproque est aussi une transformation orthogonale.*
   En effet, une transformation orthogonale f est une isométrie, car pour tout $u \in \mathbb{R}^n$:
   $$\|f(u)\|^2 = \langle f(u)/f(u)\rangle = \langle u/u\rangle = \|u\|^2$$
   f étant une isométrie, f est injective, car si $u \in \ker f$, $f(u) = 0$, et de $\|f(u)\| = \|u\| = 0$, on tire $u = 0$. f étant injective dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie est donc bijective.
   Montrons que la transformation réciproque f^{-1} est aussi une transformation orthogonale.
   Soient $u \in \mathbb{R}^n$, $v \in \mathbb{R}^n$
   On pose $u_1 = f^{-1}(u) \Longleftrightarrow u = f(u_1)$ et $v_1 = f^{-1}(v) \Longleftrightarrow v = f(v_1)$. Alors :
   $$\left\langle f^{-1}(u)/f^{-1}(v)\right\rangle = \langle u_1/v_1\rangle = \langle f(u)/f(v)\rangle = \langle u/v\rangle$$
   f^{-1} est donc bien une transformation orthogonale. $O(n, \mathbb{R})$ est donc bien un groupe pour la composition des applications.
   (b) On considère $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, ensemble des matrices carrées d'ordre n dont le déterminant est non nul. Ce sont, en fait, les matrices carrées inversibles. Muni de la multiplication des matrices, $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ est un groupe non commutatif.
   (c) On a le même résultat avec $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$

11.1.3 Définition de permutation

Soit X un ensemble quelconque.
On appelle permutation de X toute bijection de X dans X

Remarque 2 :

1. On appelle $\mathcal{S}(X)$ l'ensemble des permutations de X
   (a) La composition de deux permutations est une permutation
   (b) La composition est une loi associative
   (c) L'identité 1_X est une permutation
   (d) L'inverse d'une permutation est aussi une permutation
   Donc $\mathcal{S}(X)$, muni de la loi de composition est un groupe
2. De nombreux groupe sont formés des permutations d'ensembles

11.1.4 Le groupe symétrique

Soit $\mathbb{N}_n$ l'ensemble fini de cardinal n et $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des permutations de $\mathbb{N}_n$
$\mathcal{S}_n$ est appelé groupe symétrique d'ordre n. $\mathcal{S}_n$ contient $n!$ permutations distinctes

Remarque 3 :

1. Dire que $\mathbb{N}_n$ l'ensemble fini de cardinal n est correct puisque tous les ensembles finis de cardinal n sont en bijection avec $\mathbb{N}_n$. Ce sont donc tous les mêmes à une bijection près.
2. Que $\sharp(\mathcal{S}_n) = n!$ est un problème de dénombrement bien connu

Exemple 2 :

Choisissons comme premier exemple $\mathcal{S}_2$. $\mathcal{S}_2$ a donc 2 éléments :$1_{\mathbb{N}_2}$ et σ définis par :

$$1_{\mathbb{N}_2}\left\{\begin{array}{ccc} 1 & \longrightarrow & 1 \\ 2 & \longrightarrow & 2 \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \sigma\left\{\begin{array}{ccc} 1 & \longrightarrow & 2 \\ 2 & \longrightarrow & 1 \end{array}\right.$$

On peut alors construire la table de $\mathcal{S}_2$:

$\circ$	$1_{\mathbb{N}_2}$	σ
$1_{\mathbb{N}_2}$	$1_{\mathbb{N}_2}$	σ
σ	σ	$1_{\mathbb{N}_2}$

Exemple 3 :

On considère F un ensemble fini des points d'une figure du plan ; par exemple $F = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

— On appelle *isométrie* une transformation $f : F \longrightarrow F$ qui conserve les distances, c'est à dire telle que si $p \in F$ et $q \in F$, $d(p,q) = d(f(p), f(q))$

— Une isométrie de F dans F est une injection ; et comme F est un ensemble fini, c'est donc une bijection ; une isométrie de F est donc une permutation.

— On montre facilement que la composée de deux isométries est une isométrie et que l'identité 1_F est aussi une isométrie

— Par contre, il faut montrer que si f est une isométrie, f^{-1} en est une aussi, c'est à dire montrer que $d(p,q) = d\left(f^{-1}(p), f^{-1}(q)\right)$

Soient $p \in F$ et $q \in F$; f étant une bijection de F dans F, il existe $x \in F$ et $y \in F$ tels que $x = f^{-1}(p)$ et $y = f^{-1}(q)$. Nous avons :

$$\begin{array}{ccc} x = f^{-1}(p) & \Longleftrightarrow & p = f(x) \\ y = f^{-1}(q) & \Longleftrightarrow & q = f(y) \end{array}$$

D'où $d\left(f^{-1}(p), f^{-1}(q)\right) = d(x,y) = d(f(x), f(y)) = d(p,q)$. f^{-1} est donc une isométrie.

Exemple 4 :

Choisissons pour F l'ensemble des 3 sommets d'un triangle équilatéral.

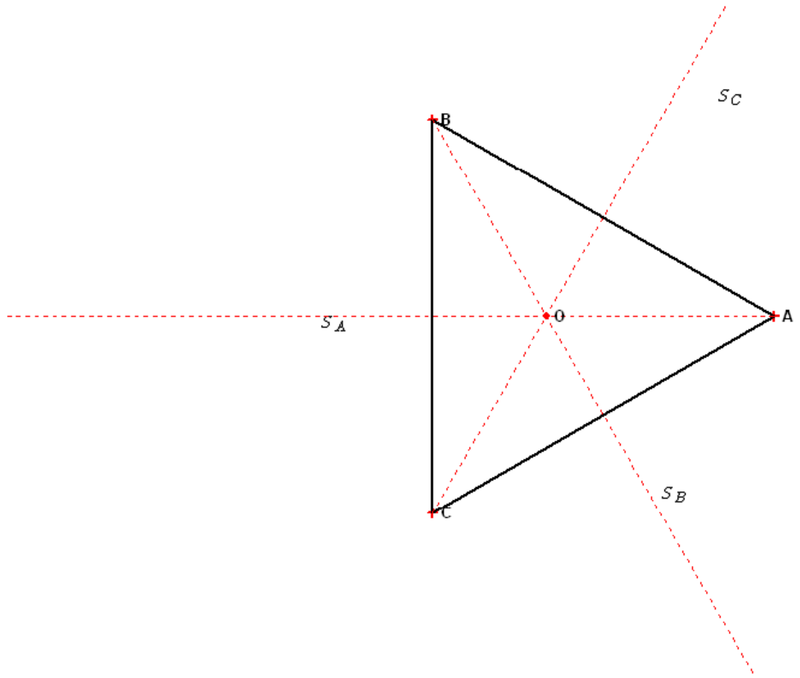

FIGURE 11.1 – Un triangle équilatéral, et $F = \{A, B, C\}$

Il existe trois isométries évidentes : les rotations $R\left(O, \dfrac{2\pi}{3}\right)$, $R\left(O, \dfrac{4\pi}{3}\right)$ de centre O et d'angles respectifs $\dfrac{2\pi}{3}$ et $\dfrac{4\pi}{3}$; la troisième étant l'application identique 1_F.
En fait, si $R = R\left(O, \dfrac{2\pi}{3}\right)$, nous avons $R^2 = R\left(O, \dfrac{4\pi}{3}\right)$ et $R^3 = 1_F$
Il y a aussi 3 autres isométries : S_A, S_B, S_C, les symétries orthogonales par rapport aux hauteurs issues de A, B ou C *(qui se rencontrent toutes en O)*; d'où, nous avons un ensemble de 6 isométries. Soit Δ_3, cet ensemble. Nous avons :

$$\Delta_3 = \left\{1_F, R, R^2, S_A, S_B, S_C\right\}$$

Δ_3 est le groupe diédral d'ordre 3.
Nous allons essayer de construire la table de multiplication de Δ_3

$$S_AR \left\{ \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & C \\ B & \longrightarrow & B \\ C & \longrightarrow & A \end{array} \right. \quad \text{donc } S_AR = S_B$$

$$RS_A \left\{ \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ B & \longrightarrow & A \\ C & \longrightarrow & C \end{array} \right. \quad \text{donc } RS_A = S_C$$

Le groupe Δ_3 n'est donc pas commutatif. En étudiant un peu plus, on voit que l'on ne peut considérer qu'une seule symétrie orthogonale et une seule rotation soient S_A et R; d'où

$$\Delta_3 = \left\{1_F, R, R^2, S_A, S_AR, RS_A\right\}$$

Il reste encore quelques calculs à faire :

$$RS_AR \left\{ \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & A \\ B & \longrightarrow & C \\ C & \longrightarrow & B \end{array} \right. \quad \text{donc } RS_AR = S_A$$

$$R^2S_A \left\{ \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & C \\ B & \longrightarrow & B \\ C & \longrightarrow & A \end{array} \right. \quad \text{donc } R^2S_A = S_AR$$

$$S_AR^2 \left\{ \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ B & \longrightarrow & A \\ C & \longrightarrow & C \end{array} \right. \quad \text{donc } S_AR^2 = RS_A = S_C$$

Nous pouvons ainsi faire la table de multiplication de Δ_3

$\Rsh \circ$	1_F	R	R^2	S_A	S_AR	RS_A
1_F	1_F	R	R^2	S_A	S_AR	RS_A
R	R	R^2	1_F	RS_A	S_A	S_AR
R^2	R^2	1_F	R	S_AR	RS_A	S_A
S_A	S_A	S_AR	RS_A	1_F	R	R^2
S_AR	S_AR	RS_A	D	R^2	1_F	R
RS_A	RS_A	D	S_AR	R	R^2	1_F

Nous aurions pu créer une autre table de multiplication, en ne tenant compte que des symétries. On peut remarquer, par exemple, que $S_CS_A = R^2$.

Exemple 5 :

1. Intéressons nous au carré et à quelques symétries du carré. La figure 11.2 représente les symétries qui vont nous intéresser Ces symétries sont : $S_{(AC)}$, la symétrie orthogonale par rapport à la

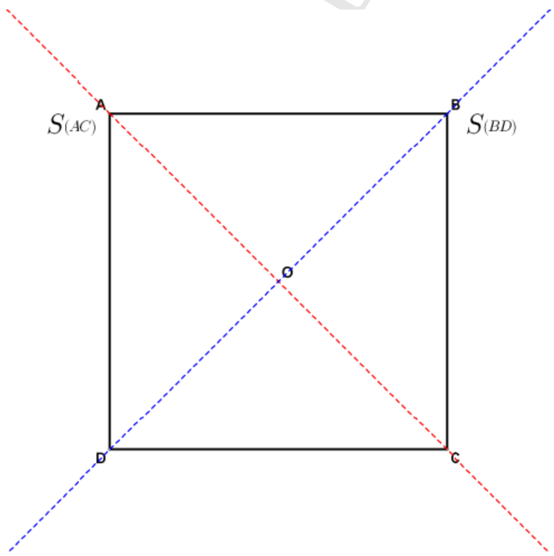

FIGURE 11.2 – Le carré avec ses axes de symétrie

droite (AC), $S_{(BD)}$, la symétrie orthogonale par rapport à la droite (BD) et S_O la symétrie centrale de centre O. La symétrie centrale de centre O S_O est, en fait, la rotation de centre O et d'angle π Nous avons :

$$S_{(AC)} = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ A & D & C & B \end{pmatrix} \quad S_{(BD)} = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ C & B & A & D \end{pmatrix} \quad S_O = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ C & D & A & B \end{pmatrix}$$

Faisons la table de Pythagorre *(ou table de multiplication)* liée à la composition des applications

$\circ$	Id	$S_{(AC)}$	$S_{(BD)}$	S_O
Id	Id	$S_{(AC)}$	$S_{(BD)}$	S_O
$S_{(AC)}$	$S_{(AC)}$	Id	S_O	$S_{(BD)}$
$S_{(BD)}$	$S_{(BD)}$	S_O	Id	$S_{(AC)}$
S_O	S_O	$S_{(BD)}$	$S_{(AC)}$	Id

C'est bien un groupe qui est commutatif *(il suffitt de constater la symétrie par rapport à la diagonale principale).*

On peut remarquer qu'il existe d'autres groupes dans ce groupe *(Ce sont des sous-groupes)*; par exemple : $\left(\left\{\mathrm{Id}, S_{(AC)}\right\}, \circ\right)$

2. Ce n'est pas le seul groupe des symétries du carré. Le groupe des isométries qui laissent le carré $ABCD$ invariant est donné par :

$$\left\{\mathrm{Id}, S_{(AC)}, S_{(BD)}, S_O, S_{(D_1)}, S_{(D_2)}, R, R^3\right\}$$

Où R est la rotation de centre O et d'angle $+\dfrac{\pi}{2}$; nous avons, en particulier $S_O = R^2$. La figure 11.3 montre ces différents axes de symétrie

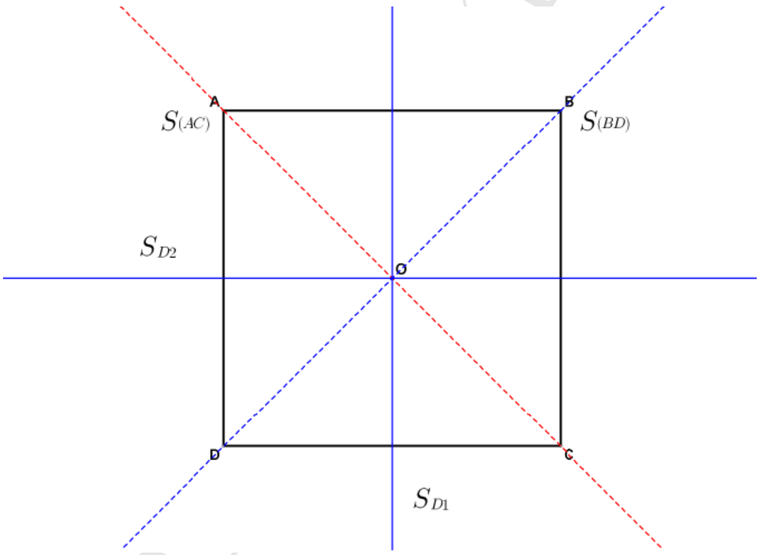

Figure 11.3 – Le carré avec les nouveaux axes de symétrie

$$S_{(D_1)} = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ B & A & D & V \end{pmatrix} \quad S_{(D_2)} = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ D & C & B & A \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ D & A & B & C \end{pmatrix} \quad R^3 = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ B & C & D & A \end{pmatrix}$$

On peut remarquer que $R^3 = R^{-1}$

Faisons la table liée à la composition des applications :

$\curvearrowright \circ$	Id	R	S_O	R^3	$S_{(AC)}$	$S_{(BD)}$	$S_{(D_1)}$	$S_{(D_2)}$
Id	Id	R	S_O	R^3	$S_{(AC)}$	$S_{(BD)}$	$S_{(D_1)}$	$S_{(D_2)}$
R	R	S_O	R^3	Id	$S_{(D_2)}$	$S_{(D_1)}$	$S_{(AC)}$	$S_{(BD)}$
S_0	S_O	R^3	Id	R	$S_{(BD)}$	$S_{(AC)}$	$S_{(D_2)}$	$S_{(D_1)}$
R^3	R^3	Id	R	S_O	$S_{(D_1)}$	$S_{(D_2)}$	$S_{(BD)}$	$S_{(AC)}$
$S_{(AC)}$	$S_{(AC)}$	$S_{(D_1)}$	$S_{(BD)}$	$S_{(D_2)}$	Id	S_O	R^3	R
$S_{(BD)}$	$S_{(BD)}$	$S_{(D_2)}$	$S_{(AC)}$	$S_{(D_1)}$	S_O	Id	R^3	R
$S_{(D_1)}$	$S_{(D_1)}$	$S_{(BD)}$	$S_{(D_2)}$	$S_{(AC)}$	R^3	R	Id	S_O
$S_{(D_2)}$	$S_{(D_2)}$	$S_{(AC)}$	$S_{(D_1)}$	$S_{(BD)}$	R	R^3	S_O	Id

3. L'ensemble $\left\{\text{Id}, R, S_O, R^3, S_{(AC)}, S_{(BD)}, S_{(D_1)}, S_{(D_2)}\right\}$ est l'ensemble des isométries laissant le carré $ABCD$ invariant ; ce n'est pas un groupe commutatif.
   C'est un sous-ensemble de S_4 groupe des permutations d'un ensemble à 4 éléments. S_4 contient $4! = 24$ éléments

Exemple 6 :

Des considérations anologues s'appliquent à un polygône régulier de n côtés ; les isométries qui laissent ce polygône invariant sont formées par n symétries et n rotations, c'est à dire $2n$ isométries.
Δ_n, groupe diédral d'ordre n a donc $2n$ éléments.
En appelant $F = \{x_1, \cdots, x_n\}$, à chaque isométrie $S \in \Delta_n$, correspond une permutation des sommets de F. On peut ainsi construire un morphisme injectif de Δ_n dans $\mathcal{S}_n$. Pour $n = 3$, cette correspondance est une surjection. On en déduit donc que Δ_3 est isomorphe à $\mathcal{S}_3$

Exercice 1 :

Les questions de cet exercice sont totalement liées à l'exemple ci-dessus *(Ah bon ? ? Et comment ?)*

1. On considère les 4 matrices :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   L'ensemble de ces 4 matrices, muni de la multiplication, forme-t-il un groupe ?

2. Dans cette question, j représente une racine cubique de 1 : $j = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$
   On considère les 4 matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & j^2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} j^2 & 0 \\ 0 & j \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   L'ensemble de ces 4 matrices, muni de la multiplication, forme-t-il un groupe ?

11.1.5 Le produit direct de groupes

Soient $(G, *)$ et $(G', \top)$ 2 groupes. On peut construire un nouveau groupe en considérant le produit cartésien $G \times G'$, et en introduisant une nouvelle loi $\perp$ dans ce produit cartésien, définie par :

$$(a, b) \perp (a', b') = (a * a', b \top b')$$

La loi $\perp$ confère à $G \times G'$ la structure de groupe.
— Si e_1 est le neutre pour $*$ dans G, et e_2 celui de G' pour $\top$, le neutre pour $\perp$ dans $G \times G'$ est donné par (e_1, e_2)
— Si, pour $x \in G$, le symétrique de x pour $*$ est x^s, et pour $y \in G'$, le symétrique de y pour $\top$ est y^s, le symétrique du couple (x, y) pour la loi $\perp$ est (x^s, y^s)

Démonstration

La démonstration de la structure de groupe de $(G \times G', \perp)$ est simple et laissée au lecteur en exercice.

Exercice 2 :

Soit G un groupe de neutre e, tel que pour tout $x \in G$, $x^2 = e$. Montrer que G est commutatif

11.2 Règles de calcul

On étudie, dans cette section, les conséquences des axiômes de groupe

11.2.1 Proposition

Dans tout groupe $(G, *)$, l'élément neutre est unique

Démonstration

Pour le démontrer, nous supposons qu'il y en a 2, e_1 et e_2
Alors, $e_1 * e_2 = e_1$, car e_2 est un élément neutre. De même, $e_1 * e_2 = e_2$, car e_1 est un élément neutre.
Nous avons donc

$$e_1 * e_2 = e_1 = e_2$$

11.2.2 Proposition : règles de simplification

Dans un groupe, tout élément est régulier c'est à dire :
Si $(G, *)$ est un groupe, alors, pour tout $a \in G$, tout $b \in G$ et tout $c \in G$,

$$a * b = a * c \Longrightarrow b = c \text{ et } b * a = c * a \Longrightarrow b = c$$

Démonstration

On ne montre qu'une seule de ces règles ; la démonstration de l'autre se fait de façon analogue.
Supposons donc que nous ayions $a * b = a * c$
Soit a^s le symétrique de a, et on multiplie à gauche par ce symétrique :

$$a * b = a * c \Longrightarrow a^s * (a * b) = a^s * (a * c)$$

D'après l'associativité de la loi $*$, nous avons :

$$a^s * (a * b) = a^s * (a * c) \Longleftrightarrow (a^s * a) * b = (a^s * a) * c$$

Or, $a^s * a = e$, c'est à dire $e * b = e * c$ et donc, $b = c$

11.2.3 Proposition

Dans tout groupe $(G, *)$, le symétrique d'un élément quelconque est unique

Démonstration

Soit $(G, *)$ un groupe et $a \in G$
Soient $a_1 \in G$ et $a_2 \in G$, deux symétriques de a.
Alors, nous avons $e = a_1 * a$ et $e = a_2 * a$, c'est à dire $a_1 * a = a_2 * a$.
Des règles de simplification, nous obtenons $a_1 = a_2$

Remarque 4 :

1. Dans un groupe, le symétrique est aussi appelé inverse et lorsque le groupe est noté multiplicativement, l'inverse de a est plutôt noté a^{-1}
2. Un groupe n'étant pas forcément commutatif, on peut penser que l'inverse à droite n'est pas l'inverse à gauche.

11.2.4 Proposition

Dans tout groupe $(G, *)$, l'inverse à droite est aussi l'inverse à gauche

Démonstration

Soit $a \in G$ et a_g l'inverse à gauche de a, et a_d l'inverse à droite de a.
Alors, $a_g * a = e$ et $a * a_d = e$. Considérons l'égalité $a_g * a = e$ et multiplions la à droite par a_d

$$(a_g * a) * a_d = e * a_d = a_d$$

En utilisant l'associativité, nous avons $(a_g * a) * a_d = a_g * (a * a_d) = a_g * e = a_g$
Ainsi, avons nous $a_g = a_d$

11.2.5 Proposition

Soit $(G, *)$ un groupe d'élément neutre e. Alors

1. $e^{-1} = e$
2. Pour tout $a \in G$, $\left(a^{-1}\right)^{-1} = a$, c'est à dire que l'inverse de a^{-1} est a
3. Pour tout $a \in G$, et tout $b \in G$, $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$

Démonstration

1. $e^{-1} = e$
   Comme e est élément neutre, nous avons $e * e = e$, ce qui établit que $e^{-1} = e$
2. Pour tout $a \in G$, $\left(a^{-1}\right)^{-1} = a$
   De même, $a * a^{-1} = e$, et donc ceci établit que $\left(a^{-1}\right)^{-1} = a$
3. Pour tout $a \in G$, et tout $b \in G$, $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$
   D'après les règles de l'associativité, nous avons :

$$(ab)\left(b^{-1}a^{-1}\right) = a\left(bb^{-1}\right)a^{-1} = a\,(e)\,a^{-1} = aa^{-1} = e$$

11.2.6 Proposition : équations dans un groupe

Soit $(G, *)$ un groupe et soient $a \in G$ et $b \in G$. Alors :
Les équations $x * a = b$ et $a * y = b$, ont, dans G, des solutions uniques qui sont

$$x = b * a^{-1} \text{ et } y = a^{-1} * b$$

Démonstration

Nous ne faisons la démonstration que pour l'équation $x * a = b$; pour l'autre, la démonstration est semblable.
Soient x_1 et x_2 2 solutions de l'équation $x * a = b$; alors $x_1 * a = x_2 * a = b$
De la régularité dans un groupe, on en déduit que $x_1 = x_2$
De plus, on vérifie facilement que, en composant à gauche que $x = b * a^{-1}$ est bien solution de $x * a = b$

11.3 Morphismes de groupes

11.3.1 Définition de morphisme

Soient $(G, *)$ et $(H, \top)$ 2 groupes
On appelle morphisme de groupes ou homomorphisme de groupes, une application de $\varphi : G \longrightarrow H$ telle que

$$(\forall a \in G)\,(\forall b \in G)\,(\varphi(a * b) = \varphi(a) \top \varphi(b))$$

Lorsque la notation des groupes est multiplicative, φ est un morphisme de groupe, si et seulement si :

$$(\forall a \in G)\,(\forall b \in G)\,(\varphi(ab) = \varphi(a)\,\varphi(b))$$

Exemple 7 :

Premiers exemples de morphismes de groupes

1. On doit remarquer que, pour tout groupe $(G, *)$, l'application identique 1_G est bien un morphisme de groupe.
2. La fonction logarithme $\ln : (\mathbb{R}^{*+}, \times) \longrightarrow (\mathbb{R}, +)$ est un morphisme de groupes, car, pour tout $a \in \mathbb{R}^{*+}$ et tout $b \in \mathbb{R}^{*+}$: $\ln ab = \ln a + \ln b$
3. De même, exp , la fonction réciproque de ln, est un morphisme de groupe de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathbb{R}^{*+}, \times)$
4. Autre exemple, l'exponentielle complexe :

$$\begin{cases} \exp : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \quad x & \longmapsto & \exp(x) = e^{ix} \end{cases}$$

Nous avons $\exp(x + y) = e^{i(x+y)} = e^{ix}e^{iy} = \exp(x)\exp(y)$

Remarque 5 :

Dans la suite, nous utiliserons de manière indifférenciée les mots de morphisme ou d'homomorphisme

11.3.2 Groupe des automorphismes

Soit $(G, *)$ un groupe
On appelle automorphisme d'un groupe $(G, *)$, un morphisme de groupe de $(G, *)$ dans $(G, *)$, bijectif.
L'ensemble des automorphismes de $(G, *)$ dans $(G, *)$ appelé $\mathrm{Aut}(G)$ est un groupe pour la composition des applications.

Démonstration

Il est facile de montrer que 1_G est un automorphisme, que si f et g sont des automorphismes, $f \circ g$ en est un aussi. Par contre, montrons que si f est un automorphisme, il en est de même de f^{-1}.
Soient $x \in G$ et $y \in G$; il existe alors $x' \in G$ et $y' \in G$ tels que $x = f(x')$ et $y = f(y')$. Nous avons alors :

$$x = f(x') \Longleftrightarrow x' = f^{-1}(x) \text{ et } y = f(y') \Longleftrightarrow y' = f^{-1}(y)$$

Donc :

$$\begin{aligned} f^{-1}(x * y) &= f^{-1}(f(x') * f(y')) \\ &= f^{-1}(f(x' * y')) && \text{car } f \text{ est un morphisme} \\ &= x' * y' && \text{car } f \text{ est une bijection} \\ &= f^{-1}(x) * f^{-1}(y) \end{aligned}$$

f^{-1} et donc un morphisme.

11.3.3 Définition

Soient $(G, *)$ et $(H, \top)$ 2 groupes et $\varphi : G \longrightarrow H$ un morphisme de groupe

1. φ est un monomorphisme si φ est injectif
2. φ est un épimorphisme si φ est surjectif
3. φ est un isomorphisme si φ est bijectif

11.3.4 Noyau et image d'un morphisme de groupe

Soient G et H deux groupes et $\varphi : G \longrightarrow H$ un morphisme de groupe

1. L'image de φ, notée $\text{Im}\varphi$ est l'ensemble

$$\text{Im}\varphi = \{y \in H \text{ tels que il existe } x \in G \text{ tel que } y = \varphi(x)\}$$

2. Le noyau de φ, notée $\ker\varphi$ est l'ensemble

$$\ker\varphi = \{x \in G \text{ tels que } \varphi(x) = e\}$$

Remarque 6 :

Le noyau $\ker\varphi$ est donc l'ensemble des antécédents de l'élément neutre $e \in H$

11.3.5 Proposition

Soit $(G_1, *)$, $(G_2, \top)$ et $(G_3, \perp)$ 3 groupes
Soient $\varphi : G_1 \longrightarrow G_2$ et $\psi : G_2 \longrightarrow G_3$, 2 morphismes de groupes.
Alors $\psi \circ \varphi : G_1 \longrightarrow G_3$ est un morphisme de groupe

Remarque 7 :

La composée de 2 morphismes de groupes est un morphisme de groupe

Démonstration

Il s'agit de montrer que, pour tout $x \in G_1$ et tout $y \in G_2$,

$$\psi \circ \varphi(x * y) = \psi \circ \varphi(x) \perp \psi \circ \varphi(y)$$

φ est un morphisme de groupe, donc,

$$\psi \circ \varphi(x * y) = \psi[\varphi(x * y)] = \psi[\varphi(x) \top \varphi(y)]$$

ψ est un morphisme de groupe, donc,

$$\psi[\varphi(x) \top \varphi(y)] = \psi[\varphi(x)] \perp \psi[\varphi(y)] = \psi \circ \varphi(x) \perp \psi \circ \varphi(y)$$

Donc, $\psi \circ \varphi(x * y) = \psi \circ \varphi(x) \perp \psi \circ \varphi(y)$. Ce que nous voulions

11.3.6 Proposition

Soient $(G_1, *)$, $(G_2, \top)$ 2 groupes d'éléments neutres respectifs e_1 et e_2
Soit :$\varphi : G_1 \longrightarrow G_2$ un morphisme de groupes. Alors,

1. $\varphi(e_1) = e_2$
2. Pour tout $x \in G_1$, $\varphi(x^{-1}) = \varphi(x)^{-1}$

Démonstration

1. Nous avons $e_1 * e_1 = e_1$. Donc, comme φ est un morphisme,
$$\varphi(e_1) = \varphi(e_1 * e_1) = \varphi(e_1) \top \varphi(e_1)$$
Or, $e_2 \top \varphi(e_1) = \varphi(e_1) \top \varphi(e_1)$, et, d'après les règles de simplification, nous avons
$$e_2 = \varphi(e_1)$$
2. Soit $x \in G_1$; alors, $e_1 = x * x^{-1}$. Donc, d'après les propriétés de morphisme de φ
$$\varphi(e_1) = \varphi\left(x * x^{-1}\right) = \varphi(x) \top \varphi\left(x^{-1}\right)$$
C'est à dire, $e_2 = \varphi(x) \top \varphi\left(x^{-1}\right)$. Comme nous avons aussi $e_2 = \varphi(x) \top \varphi(x)^{-1}$, Nous avons aussi, par les règles de simplification
$$\varphi\left(x^{-1}\right) = \varphi(x)^{-1}$$

11.3.7 Théorème

Soient $(G_1, *)$ et $(G_2, \top)$ 2 groupes d'éléments neutres respectifs e_1 et e_2
Soit :$\varphi : G_1 \longrightarrow G_2$ un homomorphisme de groupes. Alors :
φ est un morphisme injectif si et seulement si $\ker \varphi = \{e_1\}$

Démonstration

1. **Supposons φ injectif**
Nous allons démontrer que $\ker \varphi = \{e_1\}$
Soit $x \in \ker \varphi$; alors $\varphi(x) = e_2 = \varphi(e_1)$
De l'injectivité de φ, nous déduisons que $x = e_1$
2. **Réciproquement, supposons $\ker \varphi = \{e_1\}$**
Soient $x \in G_1$ et $y \in G_2$ tels que $\varphi(x) = \varphi(y)$.
Alors :
$$\varphi(x) = \varphi(y) \Longleftrightarrow \varphi(x)[\varphi(y)]^{-1} = e_2 \Longleftrightarrow \varphi(x)\varphi\left(y^{-1}\right) = e_2 \Longleftrightarrow \varphi\left(xy^{-1}\right) = e_2$$
De là, nous déduisons que $xy^{-1} \in \ker \varphi$ et donc que $xy^{-1} = e_1 \Longleftrightarrow x = y$
φ est donc injective.

Remarque 8 :

Nous avons, bien entendu φ surjective si et seulement si $\mathrm{Im}\varphi = G_2$

11.3.8 Définition

Soit $(G, *)$ un groupe et $g \in G$. On peut alors définir les puissances de cet élément :
Si $k \in \mathbb{N}$, $g^k = \underbrace{g * g * \cdots * g}_{k \text{ fois}}$ et $g^{-k} = \left(g^k\right)^{-1}$

Remarque 9 :

1. Les exposants ainsi définis vérifient l'équation $g^{m+n} = g^m * g^n$ *(démonstration évidente)*
2. C'est dans ces moments que nous utilisons la notation multiplicative $g^{m+n} = g^m g^n$.
3. Si ces exposants sont négatifs, pour $k \in \mathbb{N}$, $h \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$, les définitions donnent :
   — $g^{-k}g^{-h} = \left(g^k\right)^{-1}\left(g^h\right)^{-1} = \left(g^h g^k\right)^{-1} = \left(g^{h+k}\right)^{-1} = g^{-(h+k)} = g^{-h-k}$
   — $g^{-k}g^n = g^{n-h}$ et $\left(g^k\right)^n = g^{mn}$ et $g^0 = e$

11.3.9 Proposition

Soient $(G_1, *)$, $(G_2, \top)$ 2 groupes et $\varphi : G_1 \longrightarrow G_2$ un morphisme de groupe. Alors,
Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et tout $g \in G_1$, nous avons :

$$\varphi(g^n) = (\varphi(g))^n$$

Démonstration

La démonstration est évidente.
— Pour $n \in \mathbb{N}$, elle se fait par récurrence sur n
— Si n est un entier négatif, on utilise le fait que $g^n = \underbrace{g^{-1} \cdots g^{-1}}_{-n \text{ fois}}$ et que $\varphi(g^{-1}) = (\varphi(g))^{-1}$

11.3.10 Théorème

Soit G un groupe noté multiplicativement, de neutre e et $g \in G$.Alors,

1. L'application :
$$\begin{cases} \psi_g : \mathbb{Z} & \longrightarrow & G \\ \quad\; n & \longmapsto & \psi_g(n) = g^n \end{cases}$$
est un morphisme de groupe
2. De plus, ψ_g est le seul morphisme de groupe de $\mathbb{Z}$ dans G tel que $\psi_g(1) = g$

Démonstration

1. Que ψ_g soit un morphisme de groupe est évident.
2. Soit $\varphi : \mathbb{Z} \longrightarrow G$ un morphisme de groupe. Alors :
   — $\varphi(0) = e$
   — $\varphi(n+1) = \varphi(n)\varphi(1)$
   — $\varphi(-k) = (\varphi(k))^{-1}$
   — On montre facilement, par récurrence, que si $n \in \mathbb{Z}$ et si $n > 0$, alors $\varphi(n) = \varphi(1)^n$
   — Si $n \in \mathbb{Z}$ et $n < 0$, alors $\varphi(n) = \varphi(-(-n)) = [\varphi(-n)]^{-1}$
   Or, si $n < 0$, alors $-n > 0$, et $\varphi(-n) = \varphi(1)^{-n}$, et donc $\varphi(n) = \left[\varphi(1)^{-n}\right]^{-1} = \varphi(1)^n$
   — En posant $g = \varphi(1)$, le morphisme $\varphi : \mathbb{Z} \longrightarrow G$ s'écrit donc, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\varphi(n) = g^n$

Remarque 10 :

Dans un groupe noté additivement, l'exposant est remplacé par un multiplicateur, de sorte que l'on ait :

— $0a = 0$ — $(n+1)a = na + a$ — $(-k)(a) = -(ka)$

Exercice 3 :

On considère le groupe multiplicatif $\mathbb{C}^*$ et l'ensemble des matrices carrées $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Soit $f : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par :

$$\begin{cases} f : \mathbb{C}^* & \longrightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ z = a + ib & \longmapsto & f(z) = f(a+ib) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \end{cases}$$

Il faut montrer que f est un homomorphisme de groupes multiplicatifs

Exercice 4 :

Soient $(G_1, *)$, $(G_2, \top)$ 2 groupes; on suppose $(G_2, \top)$ commutatif. Soit $\mathrm{Hom}(G_1, G_2)$ l'ensemble des homomorphismes de groupes de G_1 dans G_2.
On définit, dans $\mathrm{Hom}(G_1, G_2)$, la loi $\diamond$ par $(f \diamond g)(x) = f(x) \top g(x)$
La loi $\diamond$ définit-elle une loi de groupe sur $\mathrm{Hom}(G_1, G_2)$? Comment la structure de $(G_2, \top)$ intervient-elle ?

Exercice 5 :

1. S_3 est le groupe des permutations d'un ensemble à 3 éléments. Avons nous $(S_3, \circ)$ isomorphe à $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +)$?
2. Dans $\mathbb{Z}/16\mathbb{Z}$, on considère l'ensemble $H = \{1, 3, 9, 11\}$. Vérifier que H est un groupe multiplicatif. Rechercher tous les homomorphismes de $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +)$ dans $(H, \times)$. Parmi ces homomorphismes, quels sont les isomorphismes ?

Exercice 6 :

Montrer qu'il n'y a pas de morphisme de groupes surjectif de $(\mathbb{Q}, +)$ dans $(\mathbb{Q}^{*+}, \times)$

11.4 Sous-groupe

11.4.1 Définition

Soit $(G, *)$ un groupe
On appelle sous groupe de $(G, *)$, tout sous ensemble $H \subset G$, non vide, tel que $(H, *)$ soit un groupe

Remarque 11 :

1. Si $(G, *)$ est un groupe, alors $(G, *)$ est un sous-groupe de lui même
2. Soit $e \in G$ le neutre de $(G, *)$; alors $(\{e\}, *)$ est un sous-groupe de $(G, *)$
3. Les sous groupe de $(G, *)$ autres que G et $\{e\}$ sont appelés sous-groupes non triviaux.
4. Si la loi est bien connue, il arrive de ne faire que "sous-entendre" la loi

Exemple 8 :

Exemple de sous-groupe

Re-intéressons nous au carré et à quelques symétries du carré. La figure 11.2 représente les symétries qui vont nous intéresser
Ces symétries sont : $S_{(AC)}$, la symétrie orthogonale par rapport à la droite (AC), $S_{(BD)}$, la symétrie orthogonale par rapport à la droite (BD) et S_O la symétrie centrale de centre O.
Le sous ensemble $\left(\left\{\mathrm{Id}, S_{(AC)}, S_{(BD)}, S_O\right\}, \circ\right)$ est un sous-groupe du groupe

$$\left(\left\{\mathrm{Id}, R, S_O, R^3, S_{(AC)}, S_{(BD)}, S_{(D_1)}, S_{(D_2)}\right\}, \circ\right)$$

des isométries laissant le carré invariant.

Exercice 7 :

1. Montrez que les entiers pairs forment un sous groupe de $(\mathbb{Z}, +)$
2. Que pensez vous de l'ensemble des entiers impairs ?

11.4.2 Proposition : caractérisation des sous-groupes

Soit G un groupe et $H \subset G$ une partie de G. Alors :
H est un sous-groupe de G si et seulement si

- $H \neq \emptyset$
- ET pour tout $x \in H$, pour tout $y \in H$, $xy^{-1} \in H$

Démonstration

1. Supposons H sous groupe de G
   Alors, H est non vide, puisque $e \in H$
   De plus,H étant un groupe, si $y \in H$ alors $y^{-1} \in H$
   Et comme la multiplication est interne, si $x \in H$ et $y \in H$ alors $xy^{-1} \in H$
2. Réciproquement
   Supposons que $H \neq \emptyset$ et que, pour tout $x \in H$, pour tout $y \in H$, $xy^{-1} \in H$
   — Si $H \neq \emptyset$, soit $t \in H$, en écrivant $x = y = t$, $tt^{-1} \in H$ et nous avons bien $e \in H$
   — Si $t \in H$, en faisant $x = e$ et $y = t$, nous avons $et^{-1} = t^{-1} \in H$
   — De plus, la loi est interne, puisque si $t \in H$ et $t' \in H$, $t'^{-1} \in H$, et d'après la propriété supposée de H ,$t\left(t'^{-1}\right)^{-1} = tt' \in H$

Remarque 12 :

Si $\mathcal{S}$ est l'ensemble des sous-groupes de G, l'inclusion ensembliste est une relation d'ordre partiel dans $\mathcal{S}$. C'est un cas particulier des relations d'ordre ensemblistes

11.4.3 Proposition

Soit G un groupe et S et T deux sous-groupes de G. Alors

1. $S \cap T$ est un sous-groupe de G
2. Tout sous-groupe de G contenu à la fois dans S et dans T est un sous groupe de $S \cap T$

Nous avons donc le schéma suivant :

$$\begin{tikzcd} & S \arrow[dr] & \\ S \cap T \arrow[ur] \arrow[dr] & & G \\ & T \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Démonstration

Soient S et T deux sous-groupes de G.

1. Démontrons que $S \cap T$ est un sous-groupe de G
   — Si e est élément neutre de G, alors $e \in S$ et $e \in T$ et donc $e \in S \cap T$, et donc $S \cap T \neq \emptyset$
   — Soient $x \in S \cap T$ et $y \in S \cap T$, alors $x \in S$ et $y \in S$, et donc $xy \in S$. De même, $x \in T$ et $y \in T$, et donc $xy \in T$
   Donc, $xy \in S \cap T$
   — De même, si $x \in S \cap T$, alors $x^{-1} \in T$ et $x^{-1} \in S$ et donc $x^{-1} \in S \cap T$
   Donc $S \cap T$ est un sous-groupe de G
2. Il est évident que si R sous-groupe de G est inclus dans T et S, alors R est inclus dans $S \cap T$

Remarque 13 :

1. On appelle $\mathcal{U}$ un ensemble quelconque de sous groupes de G. Alors $T = \left(\bigcap_{S \in \mathcal{U}} S\right)$ est un sous-groupe de G, et T se définit par :

$$T = \{x \in G \text{ tels que pour tout } S \in \mathcal{U} \text{ alors } x \in S\}$$

2. Cette construction nous permet de définir ce que sont les générateurs d'un groupe G

11.4.4 Définition de sous-groupe engendré

Soit X un sous-ensemble quelconque du groupe G et soit $\mathcal{U}_X$ l'ensemble des sous-groupes S de G tels que $X \subset S$, c'est à dire des sous-groupes de G qui contiennent X.
Alors, $T = \bigcap\limits_{S \in \mathcal{U}_X} S$ qui est l'intersection de tous les sous-groupes qui contiennent X est un sous-groupe de G ; c'est le plus petit sous-groupe de G contenant X.
On l'appelle sous-groupe engendré par X et on le note : $T = \Gamma(X)$

11.4.5 Proposition

Le sous-groupe de G engendré par le sous-ensemble X est l'ensemble $\Gamma(X)$ formé de l'élément neutre e et des produits $y_1 \cdots y_n$ d'un nombre quelconque $n > 0$ d'éléments $y_i \in X$, chacun d'eux étant un élément de X ou l'inverse d'un élément de X

Démonstration

1. Soit $S = \{y_1^{\alpha_1} y_2^{\alpha_2} \dots y_n^{\alpha_n}$ avec $y_i \in X$ et $\alpha_i \in \{+1; -1\}\}$. Nous allons montrer que S est un sous-groupe de G contenant X, et donc $\Gamma(X) \subset S$
   (a) Par construction, nous avons, bien entendu $X \subset S$
   (b) D'autre part, pour tout $y \in X$, nous avons $e = yy^{-1}$, et donc $e \in S$
   (c) Soient $u \in S$ et $v \in S$. Alors :
   — $u = y_1^{\alpha_1} y_2^{\alpha_2} \dots y_n^{\alpha_n}$ avec $y_i \in X$ et $\alpha_i \in \{+1; -1\}$
   — De même, $v = z_1^{\beta_1} z_2^{\beta_2} \dots z_n^{\beta_n}$ avec $z_i \in X$ et $\beta_i \in \{+1; -1\}$
   Donc, $v^{-1} = z_n^{-\beta_n} \dots z_2^{-\beta_2} z_1^{-\beta_1}$ et $uv^{-1} = y_1^{\alpha_1} y_2^{\alpha_2} \dots y_n^{\alpha_n} z_n^{-\beta_n} \dots z_2^{-\beta_2} z_1^{-\beta_1}$, ce qui montre bien que $uv^{-1} \in S$

   Donc S est bien un groupe
2. Réciproquement, $\Gamma(X)$ état un groupe, $e \in \Gamma(X)$ et tout élément $x \in X$, son inverse x^{-1} et tous les produits d'éléments de X et de leurs inverses. Donc $S \subset \Gamma(X)$
3. Donc $S = \Gamma(X)$ et le théorème est démontré.

11.4.6 Proposition

Soit G un groupe. S et T sont 2 sous-groupes quelconques de G. Alors,
Il existe un plus petit sous-groupe de G contenant les deux sous groupes. Autrement dit, il existe un sous groupe L de G, tel que :

$$(S \subset L \text{ et } T \subset L) \text{ tel que, pour tout sous groupe } R \subset G \text{ tel que } (S \subset R \text{ et } T \subset R) \Longrightarrow L \subset R$$

Démonstration

Soit $\mathcal{L}$ l'ensemble des sous groupes R de G, contenant à la fois S et T. Alors $L = \bigcap\limits_{R \in \mathcal{L}} R$ répond à la question.

11.4.7 Proposition

Soient G et H deux groupes et $\varphi : G \longrightarrow H$ un morphisme de groupe. Alors

1. L'image de φ, notée $\mathrm{Im}\,\varphi$ est un sous-groupe de H
2. Le noyau de φ, notée $\ker \varphi$ est un sous-groupe de G

Démonstration

1. Im φ est un sous-groupe de H
   — En appelant $e_G \in G$, l'élément neutre de G et $e_H \in H$, l'élément neutre de H,Im $\varphi \neq \emptyset$ puisque, comme $\varphi(e_G) = e_H$, $e_H \in \mathrm{Im}\varphi$
   — Soient $y_1 \in \mathrm{Im}\,\varphi$ et $y_2 \in \mathrm{Im}\varphi$, montrons que $y_1 \times y_2^{-1} \in \mathrm{Im}\varphi$.
   Il existe donc $x_1 \in G$ et $x_2 \in G$ tels que $\varphi(x_1) = y_1$ et $\varphi(x_2) = y_2$. Donc :

$$\begin{aligned} y_1 \times y_2^{-1} = &\quad \varphi(x_1) \times \varphi(x_2)^{-1} \\ = &\quad \varphi(x_1) \times \varphi\left(x_2^{-1}\right) \text{ parce que c'est un morphisme} \\ = &\quad \varphi\left(x_1 \times x_2^{-1}\right) \text{ parce que c'est un morphisme} \end{aligned}$$

   Donc, $y_1 \times y_2^{-1} = \varphi\left(x_1 \times x_2^{-1}\right)$. Comme G est un groupe, $x_1 \times x_2^{-1} \in G$, et donc $y_1 \times y_2^{-1} \in \mathrm{Im}\,\varphi$
   Im φ est donc un sous-groupe de H
2. $\ker\varphi$ est un sous-groupe de G
   Nous reprenons les items de la démonstration ci-desus
   — En appelant $e_G \in G$, l'élément neutre de G et $e_H \in H$, l'élément neutre de H,$\ker\varphi \neq \emptyset$ puisque, comme $\varphi(e_G) = e_H$, $e_g \in \ker\varphi$
   — Soient $x_1 \in \ker\varphi$ et $x_2 \in \ker\varphi$, montrons que $x_1 \times x_2^{-1} \in \mathrm{Im}\varphi$.
   Nous avons donc $\varphi(x_1) = e_H$ et $\varphi(x_2) = e_H$. Donc :

$$\begin{aligned} \varphi\left(x_1 \times x_2^{-1}\right) = &\quad \varphi(x_1) \times \varphi\left(x_2^{-1}\right) \text{ parce que c'est un morphisme} \\ = &\quad \varphi(x_1) \times \varphi(x_2)^{-1} \text{ toujours parce que c'est un morphisme} \\ = &\quad e_H \times e_H = e_H \end{aligned}$$

   Donc, $y\varphi\left(x_1 \times x_2^{-1}\right) = e_H$. et $x_1 \times x_2^{-1} \ker\varphi$.
   $\ker\varphi$ est donc un sous-groupe de H

Remarque 14 :

En particulier, si $\varphi : G \longrightarrow H$ est un morphisme de groupe, l'image d'un sous groupe $G' \subset G$ par φ est un sous groupe de H.
(La démonstration de cette remarque est un excellent exercice)

Exemple 9 :

Groupe spécial linéaire
On considère $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$, où $\mathbb{K}$ est mis pour $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, ensemble des matrices carrées d'ordre n dont le déterminant est non nul. L'application déterminant, notée det : $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}^*$ est un morphisme de groupe : pour toute matrice $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ et $B \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$, $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
Le noyau du morphisme déterminant det est constitué des matrices de déterminant 1. Les matrices de déterminant 1 forment donc un sous groupe de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$, appelé **Groupe spécial linéaire** et noté $\mathrm{SL}(n, \mathbb{K})$
Le groupe $\mathrm{SL}(n, \mathbb{K})$ est donc le groupe des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de déterminant 1

11.4.8 Exercices

Exercice 8 :

Soit $(G, *)$ un groupe. Le centre de $(G, *)$ est l'ensemble $Z(G)$ des éléments de G qui commutent avec tous les éléments de G, autrement dit :

$$Z(G) = \{x \in G \text{ tels que pour tout } y \in G \; x * y = y * x\}$$

Il faut montrer que $Z(G)$ est un sous-groupe de $(G, *)$

Exercice 9 :

$M_2(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels.
On considère les matrices $g(a,b) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$
Soit $G = \{g(a,b) \text{ avec } a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \text{ et } |a| \neq |b|\}$. Démontrer que G est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$

Exercice 10 :

1. Comment considérer $\mathcal{S}_3$ comme sous groupe de $\mathcal{S}_4$?
2. Plus généralement, soit X un sous-ensemble d'un ensemble Y fini. Pouvons nous considérer $\mathcal{S}_X$ comme sous groupe de $\mathcal{S}_Y$?

Exercice 11 :

1. Soit $H = \{2^n \text{ où } n \in \mathbb{Z}\}$. Montrer que $(H, \times)$ est un sous groupe de $(\mathbb{Q}^*, \times)$
2. Même question pour $H' = \left\{\dfrac{1+2m}{1+2n} \text{ où } n \in \mathbb{Z} \text{ et } m \in \mathbb{Z}\right\}$

Exercice 12 :

1. Montrer que $\Gamma_b = \left\{\dfrac{a}{b^n} \text{ où } a \in \mathbb{Z} \text{ et } n \in \mathbb{Z}\right\}$ est un sous groupe de $(\mathbb{Q}, +)$
2. On appelle **ensemble des nombres décimaux** le sous ensemble $\mathbb{D}$ de $\mathbb{Q}$ défini par :

$$\mathbb{D} = \left\{\frac{a}{10^n} \text{ où } a \in \mathbb{Z} \text{ et } n \in \mathbb{N}\right\}$$

   (a) $\mathbb{D}$ est-il un sous groupe du groupe additif $(\mathbb{Q}, +)$
   (b) $\mathbb{D}$ est-il un sous groupe du groupe multiplicatif $(\mathbb{Q}^*, \times)$

11.5 Relation d'équivalence modulo un sous-groupe

Dans cette section, nous reprenons et approfondissons des notions vues en L_1 ; nous allons commencer par travailler un exemple : les sous-groupes de $\mathbb{Z}$

Etude des sous-groupes de $\mathbb{Z}$
On sait que $(\mathbb{Z}, +)$ est un groupe additif. L'objet de ce qui suit est de s'intéresser aux sous groupes de $\mathbb{Z}$

11.5.1 Définition

Soit $m \in \mathbb{Z}$. L'ensemble des multiples de m est défini par :

$$m\mathbb{Z} = \{u \in \mathbb{Z} \text{ tel qu'il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } u = mk\}$$

Remarque 15 :

1. Nous avons, de manière évidente $m\mathbb{Z} = -m\mathbb{Z}$. Nous allons donc, désormais, ne considérer que des ensembles du type $m\mathbb{Z}$ avec $m \in \mathbb{N}$
2. Pour $b \in \mathbb{Z}$, on définit l'ensemble $m\mathbb{Z} + b$ par :

$$m\mathbb{Z} + b = \{u \in \mathbb{Z} \text{ tel qu'il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } u = mk + b\}$$

Exercice 13 :

Confirmez ou infirmez les égalités suivantes :

1. $3\mathbb{Z}+2=3\mathbb{Z}$
2. $2\mathbb{Z}+4=2\mathbb{Z}$
3. $5\mathbb{Z}+25=5\mathbb{Z}$
4. $7\mathbb{Z}+7\mathbb{Z}=7\mathbb{Z}$

11.5.2 Théorème

Les sous groupes de $(\mathbb{Z},+)$ sont tous de la forme $a\mathbb{Z}$ avec $a\in\mathbb{N}$
Les seuls sous groupes de $\mathbb{Z}$ sont donc les ensembles de multiples

Démonstration

1. Soit $a\in\mathbb{N}$ Montrons que $a\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z},+)$
   (a) Premièrement, $a\mathbb{Z}\neq\emptyset$, puisque $0\in a\mathbb{Z}$
   (b) Soient $x\in a\mathbb{Z}$ et $y\in a\mathbb{Z}$, alors, nous avons $x=ak$ et $y=ak'$, avec $k\in\mathbb{Z}$ et $k'\in\mathbb{Z}$ Donc :
   $$x-y=ak-ak'=a\,(k-k')$$
   Ce qui montre que $x-y$ est un multiple de a et que $x-y\in a\mathbb{Z}$
   Nous en concluons que $a\mathbb{Z}$ est un sous groupe de $(\mathbb{Z},+)$
2. Réciproquement, soit H un sous-groupe de $(\mathbb{Z},+)$
   Tout d'abord, $0\in H$.
   Soit $a\in H$; alors, de la structure de groupe de H, on déduit que $-a\in H$. Soit donc a le plus petit élément positif de H. Alors, tout multiple de a est dans H.
   Soit $k\in H$. Effectuons la division euclidienne de k par a :
   $$k=qa+r \text{ avec } 0\leqslant r<a$$
   Or, $r=k-qa$ est dans H, ce qui contredit le fait que si $r\neq 0$, a soit le plus petit élément positif de H ; donc $r=0$ et $k=qa$
   H est donc l'ensemble des multiples de a

11.5.3 Proposition

La relation $\equiv$ définie dans $\mathbb{Z}$ par
$$x\equiv y\,[n]\iff x-y\in n\mathbb{Z}$$
est une relation d'équivalence.
C'est la relation de congruence modulo n
Cette relation est compatible avec l'addition dans $\mathbb{Z}$, c'est à dire :
$$(\forall z\in\mathbb{Z})\,(x\equiv y\,[n]\Longrightarrow x+z\equiv y+z\,[n])$$

Démonstration

La démonstration est évidente

Remarque 16 :

$x\equiv y\,[n]\iff x-y\in n\mathbb{Z}$, c'est à dire qu'il existe $q\in\mathbb{Z}$ tel que $x-y=qn\iff x=qn+y$. On reconnaît là, la division euclidienne dans $\mathbb{Z}$ On appelle $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ l'ensemble quotient donc n éléments. Donc :
$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}=\{n\mathbb{Z}+0;n\mathbb{Z}+1;\dots;n\mathbb{Z}+(n-1)\}=\left\{\dot{0};\dot{1};\dots;\dot{\overline{(n-1)}}\right\}$$
$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ muni de l'addition est un groupe ; c'est un groupe fini à n éléments.

Exemple 10 :

1. Etudions la congruence modulo 6, en faisant la table d'addition.

$+$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$	$\dot{5}$
$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$	$\dot{5}$
$\dot{1}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$	$\dot{5}$	$\dot{0}$
$\dot{2}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$	$\dot{5}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$
$\dot{3}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$	$\dot{5}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$
$\dot{4}$	$\dot{4}$	$\dot{5}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$
$\dot{5}$	$\dot{5}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$

2. Il y a, dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, deux sous-groupes : $\{\dot{0}, \dot{2}, \dot{4}\}$ et $\{\dot{0}, \dot{3}\}$

Généralisation

11.5.4 Notations

Soit G un groupe *(non forcément commutatif)* et $H \subset G$ un sous-ensemble de G. Dans cette section nous noterons, pour $x \in G$:

$$xH = \{z \in G \text{ tel que } z = xy \text{ où } y \in H\} \text{ et } Hx = \{z \in G \text{ tel que } z = yx \text{ où } y \in H\}$$

Remarque 17 :

Que se passe-t-il dans $(\mathbb{Z}, +)$? En fait, si $p\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$ nous avons xH se traduit par

$$x + p\mathbb{Z} = \{z \in \mathbb{Z} \text{ tel que } z = x + py \text{ où } y \in \mathbb{Z}\}$$

11.5.5 Définition

Soit G un groupe et $\mathfrak{R}$ une relation d'équivalence sur G.

1. On dit que $\mathfrak{R}$ est régulière à gauche si

$$(\forall x \in G)\,(\forall y \in G)\,(\forall z \in G)\,((x\mathfrak{R}y) \Longrightarrow (zx\mathfrak{R}zy))$$

2. On dit que $\mathfrak{R}$ est régulière à droite si

$$(\forall x \in G)\,(\forall y \in G)\,(\forall z \in G)\,((x\mathfrak{R}y) \Longrightarrow (xz\mathfrak{R}yz))$$

$\mathfrak{R}$ est dite régulière si elle est à la fois régulière à droite et régulière à gauche

11.5.6 Proposition

Soit G un groupe d'élément neutre e et $\mathfrak{R}$ une relation d'équivalence régulière à gauche sur G
Alors $\dot{e}$ est un sous groupe de G

Démonstration

1. Tout d'abord, $\dot{e} \neq \emptyset$ puisque $e \in \dot{e}$
2. Soit $y \in \dot{e}$. Alors, nous avons $y\mathfrak{R}e$
   De la régularité à gauche de $\mathfrak{R}$, nous avons $y\mathfrak{R}e \Longrightarrow y^{-1}y\mathfrak{R}y^{-1}e$, c'est à dire $y^{-1}\mathfrak{R}e$ et donc $y^{-1} \in \dot{e}$.
   Ainsi, si $y \in \dot{e}$, alors $y^{-1} \in \dot{e}$

3. Soient $x \in \dot{e}$ et $y \in \dot{e}$; alors, nous avons $x\mathfrak{R}e$ et $y\mathfrak{R}e$
   De la régularité à gauche de $\mathfrak{R}$, nous avons $y\mathfrak{R}e \Longrightarrow y^{-1}x\mathfrak{R}y^{-1}e$, c'est à dire $y^{-1}x\mathfrak{R}y^{-1}$. Comme $y^{-1} \in \dot{e}$, c'est à dire $y^{-1}\mathfrak{R}e$, par transitivité de la relation d'équivalence $\mathfrak{R}$, nous avons $y^{-1}x\mathfrak{R}e$, c'est à dire $y^{-1}x \in \dot{e}$

Donc $\dot{e}$ est un sous groupe de G

Remarque 18 :

De la même manière, si $\mathfrak{R}$ une relation d'équivalence régulière à droite sur G, $\dot{e}$ est un sous groupe de G. *(Démonstration sans difficulté)*

11.5.7 Proposition

Soit G un groupe et $H \subset G$, un sous-groupe de G.
Soit $\mathfrak{R}$ la relation ainsi définie :

$$(\forall x \in G)\,(\forall y \in G)\,(x\mathfrak{R}y) \Longleftrightarrow \left(x^{-1}y \in H\right)$$

Alors, $\mathfrak{R}$ est une relation d'équivalence

Démonstration

1. **Réflexivité**
   Soit $x \in G$; alors $xx^{-1} = e \in G$ et donc $x\mathfrak{R}x$
2. **Symétrie**
   Soient $x \in G$ et $y \in G$ tels que $x\mathfrak{R}y$.
   Alors, par la définition de $\mathfrak{R}$, $x^{-1}y \in H$. H étant un sous groupe de G, alors l'inverse de $x^{-1}y$ est aussi dans H, et donc nous avons :

$$x\mathfrak{R}y \Longleftrightarrow x^{-1}y \in H \Longleftrightarrow \left(x^{-1}y\right)^{-1} \in H \Longleftrightarrow y^{-1}x \in H \Longleftrightarrow y\mathfrak{R}x$$

   Et donc, $\mathfrak{R}$ est symétrique
3. **Transitivité**
   Soient $x \in G$, $y \in G$ et $z \in G$ tels que $x\mathfrak{R}y$ et $y\mathfrak{R}z$. Alors :
   — $x\mathfrak{R}y$ est équivalent à $x^{-1}y \in H$
   — $y\mathfrak{R}z$ est équivalent à $y^{-1}z \in H$
   H étant un sous-groupe, le produit de 2 éléments de H est encore un élément de H, et donc $\left(x^{-1}y\right)\left(y^{-1}z\right) \in H$; c'est à dire $x^{-1}z \in H$, et donc, nous avons $x\mathfrak{R}z$.
   La relation $\mathfrak{R}$ est donc transitive

En conclusion, la relation $\mathfrak{R}$ est bien une relation d'équivalence.

Remarque 19 :

La définition de la relation définie en 11.5.7 est équivalente à $(x\mathfrak{R}y) \Longleftrightarrow \left(y^{-1}x \in H\right)$, puisque $y^{-1}x$ est l'inverse de $x^{-1}y$ et que H est un sous-groupe de G.

Exemple 11 :

Le premier exemple de telle relation est la relation d'équivalence dans $\mathbb{Z}$ liée à la congruence modulo n :

$$x \equiv y \quad [n] \Longleftrightarrow x - y \in n\mathbb{Z}$$

11.5.8 Proposition

Soit G un groupe et $H \subset G$, un sous-groupe de G. Soit $\mathfrak{R}$ la relation définie en 11.5.7.
Alors $\mathfrak{R}$ est régulière à gauche

Démonstration

Soient $x \in G$ et $y \in G$ tels que $x\mathfrak{R}y$; alors $x^{-1}y \in H$
Soit $z \in G$; alors $x^{-1}y = x^{-1}z^{-1}zy$ et donc $x^{-1}z^{-1}zy \in H$. Comme $x^{-1}z^{-1} = (zx)^{-1}$, nous avons alors $(zx)^{-1}zy \in H$, c'est à dire $zx\mathfrak{R}zy$
$\mathfrak{R}$ est donc régulière à gauche

Remarque 20 :

Soit G un groupe et $H \subset G$ sous-groupe de G ; on définit la relation $\mathfrak{S}$ par :

$$(\forall x \in G)\,(\forall y \in G)\,(x\mathfrak{S}y) \iff \left(xy^{-1} \in H\right)$$

Alors, $\mathfrak{S}$ est aussi **une relation d'équivalence**, mais régulière à droite.

11.5.9 Proposition

Soit G un groupe et $H \subset G$, un sous-groupe de G. Soit $\mathfrak{R}$ la relation définie en 11.5.7.
Alors H est la classe d'équivalence de l'élément neutre e

Démonstration

- Soit $\dot{e}$ la classe de e et $x \in \dot{e}$. Alors, $e\mathfrak{R}x$, c'est à dire $e^{-1}x \in H$; comme $e^{-1}x = x$, nous avons $x \in H$; nous en déduisons $\dot{e} \subset H$
- Soit $x \in H$; alors, comme H est un sous groupe, $x^{-1} \in H$; comme $x^{-1} = x^{-1}e$, nous avons $x^{-1}e \in H$ et donc $x\mathfrak{R}e$ et donc $x \in \dot{e}$; nous en déduisons $H \subset \dot{e}$

En conclusion, $H = \dot{e}$

Remarque 21 :

On démontrerait de même, que dans la relation d'équivalence $\mathfrak{S}$, H est aussi la classe d'équivalence de l'élément neutre e

11.5.10 Proposition

Soit G un groupe et $H \subset G$, un sous-groupe de G. Soit $\mathfrak{R}$ la relation définie en 11.5.7.
Alors la classe d'équivalence de $y \in G$ est yH

Démonstration

Soit $\dot{y}$ la classe de y.

1. Soit $x \in \dot{y}$; alors $x\mathfrak{R}y$ et donc $y^{-1}x \in H$, c'est à dire qu'il existe $z \in H$ tel que $y^{-1}x = z$ et donc $yy^{-1}x = yz$, c'est à dire $x = yz$ et donc $x \in yH$
   Nous avons donc $\dot{y} \subset yH$
2. Soit $u \in H$; alors $u\mathfrak{R}e$ et donc, par régularité à gauche de $\mathfrak{R}$, nous avons $yu\mathfrak{R}y$; et donc $yu \in \dot{y}$; c'est à dire $yH \subset \dot{y}$

Nous avons donc $\dot{y} = yH$

Remarque 22 :

1. Pour $\mathfrak{S}$ la relation d'équivalence, il est facile de démontrer que la classe d'équivalence de $y \in G$ est Hy
2. Il est évident que le plus souvent, les ensembles yH ou Hy ne sont pas des sous-groupes
3. $\Rightarrow$ Il y a une correspondance biunivoque entre les sous-groupes $H \subset G$ et les relations d'équivalence régulière à gauche.

- ⇒ De même, il y a une correspondance biunivoque entre les sous-groupes $H \subset G$ et les relations d'équivalence régulière à droite.
- ⇒ En définitive, à tout sous-groupe H, est attaché une relation d'équivalence régulière à gauche, et une relation d'équivalence régulière à droite. Elles sont, en général, différentes si G n'est pas abélien

11.5.11 Proposition

Soient G un groupe et $H \subset G$, un sous-groupe de G
Alors, il existe une bijection de l'ensemble des classes à droite modulo H sur l'ensemble des classes à gauche modulo H, et donc, si G est un groupe d'ordre fini :

$$\text{Card } G/\mathfrak{S} = \text{Card } G/\mathfrak{R}$$

Démonstration

Soit $\varphi : G/\mathfrak{R} \longrightarrow G/\mathfrak{S}$ définie par

$$\begin{cases} \varphi : G/\mathfrak{R} & \longrightarrow & G/\mathfrak{S} \\ \quad xH & \longmapsto & \varphi(xH) = Hx^{-1} \end{cases}$$

1. φ est injective
   Supposons que $\varphi(xH) = \varphi(yH)$, c'est à dire $Hx^{-1} = Hy^{-1}$; il faut montrer que $xH = yH$
   Si $Hx^{-1} = Hy^{-1}$, alors $x^{-1}\mathfrak{S}y^{-1}$ et donc, $x^{-1}\left(y^{-1}\right)^{-1} \in H$, c'est à dire $x^{-1}y \in H$.
   Nous avons donc $x\mathfrak{R}y$ et donc $xH = yH$
2. φ est surjective
   Soit $Hy \in G/\mathfrak{S}$; alors, $y^{-1}H$ est tel que $\varphi\left(y^{-1}H\right) = Hy$
   φ est donc surjective

φ étant injective et surjective, est donc bijective.
Si G est fini, $G/\mathfrak{S}$ et $G/\mathfrak{R}$ sont des ensembles finis qui sont en bijection et qui ont donc le même nombre d'éléments, c'est à dire $\text{Card } G/\mathfrak{S} = \text{Card } G/\mathfrak{R}$

11.5.12 Définition

Soit G un groupe fini et $H \subset G$ un sous groupe de G.
Le nombre de classes d'équivalence modulo H (c'est à dire $\text{Card } G/\mathfrak{R} = \text{Card } G/\mathfrak{S}$) s'appelle indice de H en G
On le note : $i(H) = [G : H]$

11.5.13 Théorème de Lagrange

1. L'ordre d'un groupe est le nombre d'éléments de ce groupe (cf 11.8.1)
2. Soit G un groupe d'ordre fini et $H \subset G$ un sous-groupe de G
   Alors, l'ordre du sous-groupe divise l'ordre du groupe

Démonstration

Soit $\mathfrak{R}$ la relation d'équivalence modulo H et $G/\mathfrak{R}$ l'ensemble des classes d'équivalence.

1. $G/\mathfrak{R}$ est un ensemble fini ; soit $i = [G : H]$ son cardinal *(c'est l'indice de H en G)*
2. $G/\mathfrak{R}$ forme une partition de G
3. Chaque élément de $G/\mathfrak{R}$ est de type xH, avec $x \in G$ et est un ensemble de même cardinal que H

4. Donc, si $G/\mathfrak{R} = \{x_1H, \cdots, x_iH\}$, nous avons :

$$G = \bigcup_{k=1}^{i} x_kH \text{ et si } k \neq k', x_kH \cap x'_kH = \emptyset$$

Donc, $\text{card}\, G = i \times \text{Card } H$

L'ordre de H divise donc l'ordre de G

Remarque 23 :

1. Nous avons donc : $\text{Card } G = [G : H] \times \text{Card } H$
2. On dit souvent, pour les groupes finis :

L'ordre d'un sous-groupe divise l'ordre du groupe

Exercice 14 :

Soient H et K deux sous-groupes finis d'un groupe G d'élément neutre e. Si H et K sont d'ordres premiers entre eux, montrer que $H \cap K = \{e\}$.

11.5.14 Applications du théorème de Lagrange

Soit G un groupe fini.

1. Soient $S \subset G$ et $T \subset G$, 2 sous groupes de G tels que $S \subset T$. Alors :

$$[G : S] = [G : T] \times [T : S]$$

2. Soient $H \subset G$ et $K \subset G$, 2 sous-groupes de G. Alors :

$$\text{Card } KH = \frac{\text{Card } H \times \text{Card } K}{\text{Card } H \cap K}$$

Où $KH = \{g \in G \text{ tel qu'il existe } h \in H \text{ et } k \in K \text{ tels que } g = hk\}$

Démonstration

Ces applications peuvent être considérées comme des exercices résolus

1. Montrons le premier point

En utilisant le théorème de Lagrange, nous avons :
- ⋆ $\text{Card } T = \text{Card } S \times [T : S]$
- ⋆ $\text{Card } G = \text{Card } T \times [G : T]$
- ⋆ $\text{Card } G = \text{Card } S \times [G : S]$

Ce qui nous donne :

$$\text{Card } S \times [G : S] = \text{Card } T \times [G : T] = \text{Card } S \times [T : S] \times [G : T]$$

On peut alors simplifier par Card S, qui est non nul, et nous obtenons : $[G : S] = [T : S] \times [G : T]$

Ce que nous voulions

2. Montrons que $\text{Card } KH = \dfrac{\text{Card } H \times \text{Card } K}{\text{Card } H \cap K}$

(a) G étant fini, il en est de même de H, de K et de $H \cap K$. Comme $(H \cap K) \subset K$, considérons les classes d'équivalence à gauche modulo $H \cap K$:

$$k_1 (H \cap K), k_2 (H \cap K), \cdots, k_n (H \cap K)$$

où $n = [K \cap K : H]$, et nous avons $\text{Card } K = \text{Card } (H \cap K) \times [K \cap K : H]$

(b) Nous allons montrer que les ensembles $k_1H, k_2H, \cdots, k_nH$ forme une partition de KH

Si nous montrons cela, alors Card $KH = n \times$ Card $H = [K \cap K : H] \times$ Card H. Comme $[K \cap K : H] = \dfrac{\text{Card } K}{\text{Card } (H \cap K)}$, nous avons :

$$\text{Card } KH = [K \cap K : H] \times \text{Card } H = \frac{\text{Card } K}{\text{Card } (H \cap K)} \times \text{Card } H = \frac{\text{Card } K \text{Card } H}{\text{Card } (H \cap K)}$$

Ce que nous voulons.

i. Montrons que $\bigcup_{j=1}^{n} k_j H = KH$

— Soit $u \in \bigcup_{j=1}^{n} k_j H$
Alors, il existe $j \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $u \in k_j H$; il existe donc $x \in H$ tel que $u = k_j x$. Donc $u \in KH$, et donc $\bigcup_{j=1}^{n} k_j H \subset KH$

— Réciproquement, soit $g \in KH$; alors, il existe $k \in K$ et $h \in H$ tels que $g = kh$. Comme les $k_1 (H \cap K), k_2 (H \cap K), \cdots, k_n (H \cap K)$ forment une partition de K, il existe $j \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $k = k_j \lambda$ où $\lambda \in H \cap K$, et donc $g = k_j \times \lambda \times h$. Comme $\lambda h \in H$, nous avons $g \in k_j H$ et donc $g \in \bigcup_{j=1}^{n} k_j H$, et ainsi, nous avons $KH \subset \bigcup_{j=1}^{n} k_j H$

Nous en déduisons que $\bigcup_{j=1}^{n} k_j H = KH$

ii. Démontrons, maintenant que si $i \neq j$, alors $k_i H \cap k_j H = \emptyset$
Soit $z \in k_i H \cap k_j H$. Il existe alors $h_1 \in H$ et $h_2 \in H$ tels que $z = k_i h_1 = k_j h_2$. Or :

$$k_i h_1 = k_j h_2 \Longleftrightarrow (k_j)^{-1} k_i = h_2 (h_1)^{-1}$$

Nous avons alors $(k_j)^{-1} k_i \in K \cap H$, ce qui qous-entend, que, dans la relation d'équivalence définie dans le groupe K, modulo $H \cap K$, nous avons $k_i \mathfrak{R} k_j$, c'est à dire $k_i (H \cap K) = k_j (H \cap K)$, ce qui est contradictoire.
Donc $k_i H \cap k_j H = \emptyset$

Donc, la famille d'ensembles $k_1 H, k_2 H, \cdots, k_n H$ forme une partition de KH

Et donc, Card $KH = \dfrac{\text{Card } H \times \text{Card } K}{\text{Card } H \cap K}$

Remarque 24 :

1. Attention ! ! Si $H \subset G$ et $K \subset G$, KH ou HK ne sont pas forcément des sous-groupes de G
2. Nous pourrions démontrer, de la même manière que Card $HK = \dfrac{\text{Card } H \times \text{Card } K}{\text{Card } H \cap K}$

Exercice 15 :

$\text{GL}_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices inversibles de dimension n et à coefficients réels. $\text{GL}_n^+(\mathbb{R})$ est le sous groupe des matrices de déterminants strictement positifs. Montrer que $\text{GL}_n^+(\mathbb{R})$ est d'indice 2 dans $\text{GL}_n(\mathbb{R})$

Exercice 16 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et on appelle $F_n = \left\{ q = \dfrac{a}{n} \text{ où } a \in \mathbb{Z} \right\}$

1. Démontrer que F_n est un sous-groupe de $(\mathbb{Q}, +)$ contenant $\mathbb{Z}$
2. Quel est l'indice $[F_n : \mathbb{Z}]$ de $\mathbb{Z}$ dans F_n

Exercice 17 :

1. $(2\pi\mathbb{Z},+)$ est un sous-groupe du groupe additif $(\mathbb{R},+)$. On considère la relation d'équivalence modulo $2\pi\mathbb{Z}$, vraie pour tout $x\in\mathbb{R}$ et tout $y\in\mathbb{R}$:
$$x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow x-y\in 2\pi\mathbb{Z} \Longleftrightarrow x=y+k\times 2\pi \text{ où } k\in\mathbb{Z}$$
L'ensemble des classes d'équivalence $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ est l'intervalle $[0;2\pi[$
La relation d'équivalence $x\mathcal{R}y$ s'écrit de préférence $x\equiv y \mod 2\pi$
On appelle $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1, c'est à dire :
$$\mathbb{U}=\{z\in\mathbb{C} \text{ tels que } |z|=1\}$$
$(\mathbb{U},\times)$ est un sous-groupe multiplicatif de $(\mathbb{C}^*,\times)$
Il faut montrer que $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z},+)$ et $(\mathbb{U},\times)$ sont isomorphes
2. $(\mathbb{Z},+)$ est un sous-groupe du groupe additif $(\mathbb{R},+)$. On considère la relation d'équivalence modulo $\mathbb{Z}$, vraie pour tout $x\in\mathbb{R}$ et tout $y\in\mathbb{R}$:
$$x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow x-y\in \mathbb{Z} \Longleftrightarrow x=y+k \text{ où } k\in\mathbb{Z}$$
L'ensemble des classes d'équivalence $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est l'intervalle $[0;1[$
Il faut montrer que $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z},+)$ et $(\mathbb{R}/\mathbb{Z},+)$ sont isomorphes
3. Montrer que $(\mathbb{R}/\mathbb{Z},+)$ et $(\mathbb{U},\times)$ sont isomorphes

Exercice 18 :

Pour reprendre les notations habituelles, nous avons, dans cet exercice, pour tout groupe multiplicatif $(G,\times)$ et tout $a\in G$:
$$aG=\{y\in G \text{ tel qu'il existe } g\in G \text{ tel que } y=ag\}$$
Avons nous $(2(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}),+)$ isomorphe à $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z},+)$?

Exercice 19 :

On considère $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ le sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ formé des matrices de déterminant $+1$
On considère les sous-groupes H et K de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ engendrés respectivement par
$$\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$$
Déterminer les éléments des espaces quotients $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/H$ et $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/K$

11.6 Sous-groupe distingué

11.6.1 Théorème et définition de sous-groupe distingué

Soit G un groupe et H un sous groupe de G

1. Les conditions suivantes sont équivalentes :
   (a) Pour tout $x\in G$, $x^{-1}Hx\subset H$
   (b) Pour tout $x\in G$, $x^{-1}Hx=H$
   (c) Pour tout $x\in G$, $xH=Hx$
2. Si les conditions ci-dessus sont vérifiées pour H, alors H est dit sous groupe distingué de G ou sous groupe normal de G et on note alors $H\rhd G$

Démonstration

1. Supposons que pour tout $x \in G$, $x^{-1}Hx \subset H$
   Démontrons que $H \subset x^{-1}Hx$; nous aurons ainsi montré que $x^{-1}Hx = H$
   Soit $y \in H$. Alors,
   $$y = \left(x^{-1}x\right) y \left(x^{-1}x\right) = x^{-1}\left(xyx^{-1}\right) x \text{ par associativité}$$
   Comme $x^{-1}Hx \subset H$, il existe $h \in H$ tel que $h = xyx^{-1} = \left(x^{-1}\right)^{-1} yx^{-1}$.
   Donc, $y = x^{-1}hx$, et donc $y \in x^{-1}Hx$. On vient donc de montrer que $H \subset x^{-1}Hx$ et ainsi que :
   $$\left[(\forall x \in G)\left(x^{-1}Hx \subset H\right)\right] \Longrightarrow \left[(\forall x \in G)\left(x^{-1}Hx = H\right)\right]$$
2. Supposons que pour tout $x \in G$, $x^{-1}Hx = H$
   Démontrons que $xH = Hx$
   — On montre que $xH \subset Hx$
     Soit $z \in xH$. Alors, il existe $h \in H$ tel que $z = xh$. Nous avons :
     $$z = xh = xh\left(x^{-1}x\right) \overset{\text{Associativité}}{=} \left(xhx^{-1}\right) x$$
     Comme $x^{-1}Hx = H$, il existe $h' \in H$ tel que $h' = xhx^{-1}$ et $z = h'x$ et $z \in Hx$.
     Nous avons donc $xH \subset Hx$
   — La démonstration que $Hx \subset xH$ est semblable ; nous ne la faisons pas
   Nous concluons donc que $xH = Hx$. Donc :
   $$\left[(\forall x \in G)\left(x^{-1}Hx = H\right)\right] \Longrightarrow \left[(\forall x \in G)\left(Hx = Hx\right)\right]$$
3. Supposons que pour tout $x \in G$, $xH = Hx$
   Démontrons que pour tout $x \in G$, $x^{-1}Hx \subset H$
   Soit $y \in x^{-1}Hx$; nous allons montrer que $y \in H$
   Il existe donc $h \in H$ tel que $y = x^{-1}hx$ et donc $y = x^{-1}hx \Longleftrightarrow xy = hx$. Comme $xH = Hx$, il existe $h' \in H$ tel que $hx = xh'$. Ainsi :
   $$xy = hx = xh' \Longrightarrow xy = xh'$$
   Et donc, par régularité, $y = h'$, et donc $y \in H$. Nous avons donc $x^{-1}Hx \subset H$ Ainsi,
   $$\left[(\forall x \in G)\left(Hx = Hx\right)\right] \Longrightarrow \left[(\forall x \in G)\left(x^{-1}Hx \subset H\right)\right]$$

Nous venons de montrer l'équivalence des 3 propositions.

Remarque 25 :

Revenons aux définitions de 11.5.7

1. Soit H un sous-groupe de G, et on considère la relation d'équivalence $\mathfrak{R}$ dans G définie par :
   $$x\mathfrak{R}y \Longleftrightarrow xy^{-1} \in H$$
   pour laquelle les classes d'équivalences sont du type Hx avec $x \in G$ *(classes à droite)*
   De même, pour la relations d'équivalence $\mathfrak{S}$ dans G définie par :
   $$x\mathfrak{S}y \Longleftrightarrow y^{-1}x \in H$$
   pour laquelle les classes d'équivalences sont du type xH avec $x \in G$ *(classes à gauche)*
2. Si H est distingué en G ($H \rhd G$), les classes à droites sont aussi les classes à gauches. On parle alors simplement, de classes suivant H
3. Si G est un groupe commutatif, alors, tout sous-groupe $H \subset G$ est distingué en G

Remarque 26 :

Bien entendu, tous les sous-groupes d'un groupe ne sont pas distingués.

Par exemple, dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ ensemble des matrices carrées inversibles d'ordre 2 à coefficients réels muni de la multiplication des matrices, on considère l'ensemble A des matrices de déterminant 1 à coefficients dans $\mathbb{Z}$; $(A, \times)$ est un sous groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$. Mais, A n'est pas un sous-groupe distingué de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$. Il suffit de prendre des contre-exemples :

— En prenant $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, nous avons $X^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$; nous avons $X \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$

— En prenant $U = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, nous avons $U \in A$

— Le produit $XUX^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas un élément de A, et A n'est donc pas distingué en $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$

11.6.2 Proposition

Soit G un groupe.
Tout sous-groupe d'indice 2 dans G est distingué en G

Démonstration

Soit $H \subset G$, un sous-groupe de G d'indice 2, c'est à dire $[G : H] = 2$ Alors, les classes à droites sont données par $\{H ; G \setminus H\}$; cet ensemble est aussi l'ensemble des classes à gauche. H est donc distingué en G

Exemple 12 :

Dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, nous avons démontré, en exercice que $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R}) = \{M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \text{ telles que } \det M > 0\}$ était un sous groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ d'indice 2 ; c'est donc un sous-groupe distingué de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$

11.6.3 Proposition

Soient G et G' 2 groupes et $f : G \longrightarrow G'$ un morphisme de groupe. Alors, $\ker f$, le noyau de f est distingué en G

Démonstration

Nous savons que $\ker f$ est un sous groupe de G
Nous allons donc démontrer que pour tout $x \in G$, $x(\ker f)x^{-1} \subset \ker f$, c'est à dire que pour tout $x \in G$, tout $y \in \ker f$, $xyx^{-1} \in \ker f$.
Soient donc $x \in G$ et $y \in \ker f$; on note e' l'élément neutre de G'

$$f\left(xyx^{-1}\right) = f(x) f(y) f\left(x^{-1}\right) = f(x) e' f\left(x^{-1}\right) = f(x) f\left(x^{-1}\right) = f(x) f(x)^{-1} = e'$$

Donc, pour tout $x \in G$, tout $y \in \ker f$, $xyx^{-1} \in \ker f$.
$\ker f$ est donc distingué en G

11.6.4 Définition de groupe simple

Soit G un groupe. G est dit <u>simple</u> s'il n'existe d'autres sous-groupes distingués que G lui même et $\{e\}$

11.6.5 Exercices

Exercice 20 :

1. Montrez que le cercle unité, $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \text{ tels que } |z| = 1\}$ est un sous-groupe distingué de $\mathbb{C}$ muni de la multiplication.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C} \text{ tels que } z^n = 1\}$, le groupe des racines n-ièmes de l'unité. Montrez que $\mathbb{U}_n$ est un sous-groupe distingué de $\mathbb{U}$

Exercice 21 :

Nous nous plaçons dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients complexes. Nous considérons l'ensemble H des matrices de la forme $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda \mathrm{Id}_2$. Démontrer que H est un sous-groupe distingué

Exercice 22 :

Montrer que l'ensemble $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ des matrices de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ de déterminant strictement positif est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ puis qu'il est distingué dans ce groupe. Vérifier que H est un sous-groupe distingué de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$

Exercice 23 :

Soit G un groupe ; $H_1 \triangleright G$ et $H_2 \triangleright G$ 2 sous-groupes distingués en G. Est-ce que $H_1 \cap H_2$ est un sous-groupe distingué en G ?

Exercice 24 :

Soient G et G' deux groupes et $f : G \longrightarrow G'$ un morphisme de groupes.

1. Soit $H' \triangleright G'$ un sous-groupe distingué en G'. Démontrer que $f^{-1}(H')$ est distingué en G
2. Démontrer que si f est surjective, alors, pour tout sous groupe $H \triangleright G$ distingué en G, alors, $f(H)$ est distingué en G'

Exercice 25 :

Soit G un groupe et $\mathfrak{R}$ une relation d'équivalence sur G.
On suppose que cette relation $\mathfrak{R}$ est compatible avec la loi de groupe, c'est à dire :

$$(\forall x \in G)(\forall y \in G)(\forall x_1 \in G)(\forall y_1 \in G)\left((x\mathfrak{R}y \text{ et } x_1\mathfrak{R}y_1) \Longrightarrow (xx_1\mathfrak{R}yy_1)\right)$$

1. On appelle H la classe de l'élément neutre. Montrer que H est un sous-groupe distingué de G
2. Montrer que $(\forall x \in G)(\forall y \in G)\left((x\mathfrak{R}y) \Longleftrightarrow \left(yx^{-1} \in H\right)\right)$
3. Plus généralement, pour H sous-groupe distingué de G, montrer que la relation d'équivalence sur G $x\mathfrak{R}y \Longleftrightarrow xy^{-1} \in H$ est compatible avec la loi de groupe de G

Dans cet exercice, on vient de montrer que le seul type de relation d'équivalence compatible avec la loi de groupe est une relation du type $x \simeq y \Longleftrightarrow xy^{-1} \in H$ où H est un sous-groupe distingué de G

Exercice 26 :

Soit G un groupe, H sous-groupe distingué de G et K sous-groupe de H

1. On appelle $HK = \{g \in G \text{ tel que } g = hk \text{ où } h \in H \text{ et } k \in K\}$
   (a) Montrer que $HK = KH$
   (b) Montrer que HK est un sous groupe de G
   (c) Montrer que si, de plus, K est distingué en G, alors HK est un sous groupe distingué de G
   (d) Montrer que H est un sous-groupe distingué de KH
2. Montrer que $K \cap H$ est distingué en K

Exercice 27 :

Soit G un groupe et soient $x \in G$ et $y \in G$. On appelle **commutateur** de x et de y, l'élément de G :

$$[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$$

On appelle **sous-groupe dérivé** de G le sous-groupe de G, noté $\mathcal{D}(G)$, engendré par les commutateurs.

1. Montrer que $\mathcal{D}(G)$ est un sous-groupe distingué de G
2. Démontrer que $G/\mathcal{D}(G)$ est un groupe abélien
3. Soit $H \rhd G$ un sous-groupe distingué de G. Montrer que G/H est abélien si et seulement si $\mathcal{D}(G) \subset H$
4. **Un exemple de sous-groupe dérivé**
   (a) Soit $G \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définit par :
   $$G = \left\{ M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \text{ où } M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \text{ tels que } a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R} \text{ et } ac \neq 0 \right\}$$
   (b) Montrer que G est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$
   (c) Montrer que le groupe dérivé $\mathcal{D}(G)$ est $\mathcal{D}(G) = \left\{ M = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ où } b \in \mathbb{R} \right\}$

Exercice 28 :

Soit G un groupe et $A \subset G$, une partie de G. On note :
— $N(A) = \{x \in G \text{ tels que } xA = Ax\}$. $N(A)$ est le **normalisateur** de A
— $C(A) = \{x \in G \text{ tels que pour tout } a \in A\ ax = xa\}$. $C(A)$ est le **centralisateur** de A

1. Montrer que $N(A)$ est un sous-groupe de G
2. Montrer que $C(A)$ est un sous-groupe distingué de $N(A)$
3. Démontrez que si $H \rhd G$ est un sous-groupe distingué de G, alors $C(H)$ est aussi un sous-groupe distingué de G

11.7 Décomposition canonique d'un morphisme

11.7.1 Introduction

Soit G un groupe et $H \rhd G$ un sous-groupe distingué en G.
On considère la relation $\mathcal{R}$ définie par :

$$(\forall x \in G)(\forall y \in G)\left(x\mathcal{R}y \iff x^{-1}y \in H\right)$$

C'est une relation d'équivalence, dont les classes d'équivalence sont du type $\dot{x} = xH = Hx$.
Soit $G/\mathcal{R}$ l'ensemble quotient formé par les classes d'équivalence modulo $\mathcal{R}$. Nous allons définir une loi de composition dans $G/\mathcal{R}$.

11.7.2 Proposition

Soit $\dot{x} \in G/\mathcal{R}$ et $\dot{y} \in G/\mathcal{R}$. On définit la multiplication dans $G/\mathcal{R}$ par :

$$\dot{x} \times \dot{y} = \overset{\bullet}{\overline{xy}}$$

Cette définition est indépendante du choix des représentants

Démonstration

Soient $x_1 \in \dot{x}$ et $y_1 \in \dot{y}$, c'est à dire que $\dot{x_1} = \dot{x}$ et $\dot{y_1} = \dot{y}$. Il faut montrer que $\overset{\cdot}{xy} = \overset{\cdot}{x_1y_1}$, c'est à dire que

$$(xy)^{-1}(x_1y_1) \in H$$

Il existe $s \in H$ tel que $x_1 = xs$. De même, il existe $t \in H$ tel que $y_1 = yt$. Alors :

$$(xy)^{-1}(x_1y_1) = y^{-1}x^{-1}x_1y_1 = y^{-1}x^{-1}xsyt = y^{-1}syt = \left(y^{-1}sy\right)t$$

H étant distingué en G, $y^{-1}sy \in H$ et comme H est un sous groupe, $\left(y^{-1}sy\right)t \in H$, et donc

$$(xy)^{-1}(x_1y_1) \in H$$

Ce que nous voulions

11.7.3 Théorème

Soit G un groupe et $H \rhd G$ un sous-groupe distingué en G. Pour la relation $\mathcal{R}$ définie en 11.7.1 ci-dessus, on considère la multiplication définie sur $G/\mathcal{R}$ en 11.7.2.

1. Muni de cette multiplication, $G/\mathcal{R}$ est un groupe
2. La projection canonique φ :
$$\begin{array}{rcl} \varphi : G & \longrightarrow & G/\mathcal{R} \\ x & \longmapsto & \varphi(x) = \dot{x} \end{array}$$
   est un morphisme de groupe de noyau H

$G/\mathcal{R}$ est alors noté G/H et est appelé groupe-quotient de G par H

Démonstration

1. $G/\mathcal{R}$ est un groupe
   (a) Par définition, la multiplication est interne
   (b) Elle est aussi associative. En effet, pour tout $\dot{x} \in G/\mathcal{R}$, tout $\dot{y} \in G/\mathcal{R}$ et tout $\dot{z} \in G/\mathcal{R}$:
   $$(\dot{x}\dot{y})\dot{z} = (\overset{\cdot}{xy})\dot{z} = (\overset{\cdot}{xyz}) = \dot{x}(\overset{\cdot}{yz}) = \dot{x}(\dot{y}\dot{z})$$
   (c) L'élément neutre est $\dot{e}$
   (d) Le symétrique de $\dot{x} \in G/\mathcal{R}$ est $\overset{\cdot}{x^{-1}} \in G/\mathcal{R}$
2. La projection canonique φ est un morphisme de groupe
   La démonstration est évidente :
   $$\varphi(xy) = \overset{\cdot}{xy} = \dot{x}\dot{y} = \varphi(x)\varphi(y)$$
   Si $x \in \ker\varphi$, alors, $\varphi(x) = \dot{e}$ et donc $x \in \dot{e} = H$

Remarque 27 :

Si G est commutatif, alors G/H est aussi commutatif.
En effet, pour $\dot{x} \in G/H$ et $\dot{y} \in G/H$:

$$\dot{x}\dot{y} = \overset{\bullet}{\overline{xy}} \overset{\text{Commutativité}}{=} \overset{\bullet}{\overline{yx}} = \dot{y}\dot{x}$$

11.7.4 Proposition

Soient G et G' 2 groupes et $f : G \longrightarrow G'$ un morphisme de groupe. Alors, la relation $\mathcal{S}$ définie sur G par :

$$(\forall x \in G)(\forall y \in G)\,(x\mathcal{S}y \iff f(x) = f(y))$$

est une relation d'équivalence
Une définition équivalente pour $\mathcal{S}$ est :

$$(\forall x \in G)(\forall y \in G)\left(x\mathcal{S}y \iff xy^{-1} \in \ker f\right)$$

Démonstration

Que $\mathcal{S}$ soit une relation d'équivalence est évident.
Montrons que nous pouvons avoir une autre définition, équivalente.
En posant e' l'élément neutre de G' :

$$x\mathcal{S}y \Longleftrightarrow f(x) = f(y) \Longleftrightarrow f(x)[f(y)]^{-1} = e' \Longleftrightarrow f\left(xy^{-1}\right) = e' \Longleftrightarrow xy^{-1} \in \ker f$$

11.7.5 Proposition

Soient G et G' deux groupes et $f : G \longrightarrow G'$ un morphisme de groupe.
Alors, l'application h :

$$\begin{array}{rcl} h : G/\ker f & \longrightarrow & f(G) \\ \dot{x} & \longmapsto & h(\dot{x}) = f(x) \end{array}$$

est un isomorphisme

Démonstration

Il faut d'abord dire que $f(G)$ *(parfois aussi noté* $\operatorname{Im} f$*)* est un sous-groupe de G' de neutre e'

1. Tout d'abord, h est un morphisme. En effet, pour tout $\dot{x} \in G/\ker f$ et tout $\dot{y} \in G/\ker f$:
$$h(\dot{x}\dot{y}) = h(\dot{xy}) = f(xy) = f(x)f(y) = h(\dot{x}) \times h(\dot{y})$$
2. Ensuite, h est injective :
$$h(\dot{x}) = e' \Longleftrightarrow f(x) = e' \Longleftrightarrow x \in \ker f \Longleftrightarrow x \in \dot{e} \Longleftrightarrow \dot{x} = \dot{e}$$
3. Et, pour finir, h est surjective :
En effet, soit $y \in f(G)$, il existe $x \in G$ tel que $y = f(x)$, et nous avons donc :
$$h(\dot{x}) = f(x) = y$$
Donc, pour tout $y \in f(G)$, il existe $\dot{x} \in G/\ker f$ tel que $h(\dot{x}) = y$

11.7.6 Décomposition canonique d'un morphisme $f : G \longrightarrow G'$

1. On considère la projection canonique φ :
$$\begin{array}{rcl} \varphi : G & \longrightarrow & G/\ker f \\ x & \longmapsto & \varphi(x) = \dot{x} \end{array}$$
2. De même, considérons l'insertion i définie par :
$$\begin{array}{rcl} i : f(G) & \longrightarrow & G' \\ y & \longmapsto & i(y) = y \end{array}$$
C'est l'application identique restreinte à $f(G)$
3. Pour terminer, considérons h :
$$\begin{array}{rcl} h : G/\ker f & \longrightarrow & f(G) \\ \dot{x} & \longmapsto & h(\dot{x}) = f(x) \end{array}$$
4. Alors, pour tout $x \in G$, nous avons $f(x) = i \circ h \circ \varphi(x)$ qu'il est possible de résumer dans le diagramme suivant. On dit qu'il est commutatif.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"'] & G' \\ G/\ker f \arrow[r, "h"'] & f(G) \arrow[u, "i"'] \end{tikzcd}$$

Exemple 13 :

On considère un corps $\mathbb{K}$ *($\mathbb{K}$ étant mis pour $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)*, et le $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n $\mathbb{K}^n$.

1. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est le groupe linéaire de $\mathbb{K}$. C'est le groupe des matrices inversibles de dimension n à coefficients dans $\mathbb{K}$, c'est à dire que, pour tout $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, le déterminant de M noté $\det M$ est non nul
2. $(\mathbb{K}^*, \times)$ est un groupe multiplicatif de neutre 1
3. Soit :
$$\left\{\begin{array}{rcl} \det : \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K}^* \\ M & \longmapsto & \det M \end{array}\right.$$
Par les propriétés du déterminant, det est un morphisme de groupe
4. Le noyau de det est l'ensemble des matrices de déterminant 1. C'est le groupe spécial linéaire $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$
5. En fait, l'application déterminant det est un morphisme surjectif, c'est à dire que nous avons $\det(\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})) = \mathbb{K}^*$.
En effet, soient $\lambda \in \mathbb{K}^*$ et $\{e_1, \cdots, e_n\}$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$.
Soit $u : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n$ une application linéaire telle que $u(e_1) = \lambda e_1$ et pour $2 \leqslant i \leqslant n$, $u(e_i) = e_i$.
Si M est la matrice de u dans la base canonique $\{e_1, \cdots, e_n\}$, nous avons :
$$M = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$
Le déterminant de M est $\det M = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{vmatrix} = \lambda \neq 0$. Donc $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$
6. D'après le théorème de décomposition 11.7.6, nous avons le schéma :
$$\begin{tikzcd} \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \arrow[r, "\det"] \arrow[d, "\varphi"'] & \mathbb{K}^* \\ (\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) / \mathrm{SL}_n(\mathbb{K})) \arrow[r] & \mathbb{K}^* \arrow[u, "\mathrm{Id}_{\mathbb{K}^*}"'] \end{tikzcd}$$
D'après ce même théorème, le quotient $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) / \mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ est isomorphe à $\mathbb{K}^*$

11.7.7 Quelques exercices

Exercice 29 :

On considère une groupe G tel qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $(\forall (x, y) \in G \times G) \left((xy)^n = x^n y^n\right)$

— On note $G^{(n)} = \{y \in G \text{ tels que } \exists g \in G \text{ tel que } y = g^n\}$

— Et on note $G_{(n)} = \{x \in G \text{ tels que } x^n = e\}$ où e est le neutre de G. En fait, $G_{(n)}$ est l'ensemble des éléments d'ordre n

Vérifier que $G_{(n)}$ et $G^{(n)}$ sont des sous groupes distingués de G. Puis, démontrez que $G/G_{(n)}$ est isomorphe à $G^{(n)}$

11.8 Groupes cycliques, Groupes monogène

11.8.1 Ordre d'un groupe, Ordre d'un élément

Soit G un groupe d'élément neutre e

1. L'ordre du groupe G est le nombre d'éléments de ce groupe (cf 11.8.1)
2. L'ordre d'un élément $x \in G$, est le plus petit entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x^n = e$

11.8.2 Définition

Soit G un groupe

1. G est dit monogène s'il existe $a \in G$ tel que, pour tout $x \in G$, il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $x = a^n$
2. G est dit cyclique s'il est monogène et d'ordre fini

Remarque 28 :

Un groupe monogène G est un groupe engendré par un seul élément $a \in G$. Nous avons : $G = \{x \text{ tel que } x = a^n \text{ avec } n \in \mathbb{Z}\}$

11.8.3 Proposition

Tout groupe monogène est abélien

Démonstration

Soit $G = \{x \text{ tel que} x = a^n \text{ avec } n \in \mathbb{Z}\}$ un groupe monogène, $x \in G$ et $y \in G$.
Alors, $xy = a^n \times a^p = a^{n+p} = a^{p+n} = a^p \times a^n = yx$
G est bien abélien

Remarque 29 :

Tout groupe cyclique est aussi abélien ; la réciproque est évidemment fausse

Exemple 14 :

1. $\mathbb{Z}$ muni de l'addition est un groupe monogène de générateur 1 ou -1
2. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $n \geqslant 2$, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ muni de l'addition est un groupe cyclique d'ordre n et de générateur 1
3. Toujours pour $n \in \mathbb{N}$ et $n \geqslant 2$, $\mathbb{U}_n$, l'ensemble des racines n-ièmes de 1 muni de la multiplication est un groupe cyclique d'ordre n ; rappel : $\mathbb{U}_n = \left\{e^{\frac{2ik\pi}{n}} \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\right\}$ et le générateur est donc $\omega_n = e^{\frac{2i\pi}{n}}$

11.8.4 Théorème

Soit G un groupe et $a \in G$ un élément de G d'ordre m.
On appelle $\langle a \rangle = \{a^n \text{ où } n \in \mathbb{Z}\}$ l'ensemble des puissances de a

1. $\langle a \rangle$ est un sous-groupe de G
2. Nous avons $\langle a \rangle = \{e, a, a^2, \cdots, a^{m-1}\}$
3. Nous avons $\text{Card } \langle a \rangle = m$, c'est à dire que pour $0 \leqslant i < m$ et $0 \leqslant j < m$, $i \neq j \Longrightarrow a^i \neq a^j$
4. m, l'ordre de a divise l'ordre de G

Démonstration

1. On montre que $\langle a \rangle$ est un sous-groupe de G
   — Tout d'abord $\langle a \rangle \neq \emptyset$ car $a \in \langle a \rangle$ ou $e = a^0 \in \langle a \rangle$
   — D'autre part, soient $x \in \langle a \rangle$ et $y \in \langle a \rangle$.
   Il existe $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}$ tels que $x = a^p$ et $y = a^q$, et nous avons $y^{-1} = a^{-q}$.
   Donc, $xy^{-1} = a^p \times a^{-q} = a^{p-q}$ et donc, $xy^{-1} \in \langle a \rangle$
   Donc $\langle a \rangle$ est un sous-groupe de G
2. On démontre que $\langle a \rangle = \{e, a, a^2, \cdots, a^{m-1}\}$
   On appelle $A = \{e, a, a^2, \cdots, a^{m-1}\}$, et nous allons donc montrer que $\langle a \rangle = A$
   — Il est évident que, par construction, $A \subset \langle a \rangle$

— Démontrons maintenant que $\langle a\rangle \subset A$
Soit $x \in \langle a\rangle$. Il existe alors $p \in \mathbb{Z}$ tel que $x = a^p$.
Effectuons la division euclidenne de p par m :

$$p = km + r \text{ avec } 0 \leqslant r < m$$

Et donc, $a^p = a^{km+r} = a^r \times a^{km} = a^r \times (a^m)^k = a^r \times e = a^r$
Et donc, $x \in A$
En conclusion, $\langle a\rangle = \{e, a, a^2, \cdots, a^{m-1}\}$

3. On montre que Card $\langle a\rangle = m$
En fait, il faut montrer que pour tout $0 \leqslant i < m$ et tout $0 \leqslant j < m$, $i \neq j \Longrightarrow a^i \neq a^j$
Supposons le contraire, c'est à dire qu'il existe $0 \leqslant i < m$ et $0 \leqslant j < m$ avec $i \neq j$ (supposons $i < j$) tels que $a^i = a^j$.
Alors, $a^{j-i} = e$ de $0 \leqslant i < m$ et $0 \leqslant j < m$ et $j > i$, nous avons $1 \leqslant j - i < m$. Ce qui contredit la définition de m comme étant le plus petit entier tel que $a^m = 1$
Il y a donc une contradiction et on en déduit que pour tout $0 \leqslant i < m$ et tout $0 \leqslant j < m$, $i \neq j \Longrightarrow a^i \neq a^j$, c'est à dire Card $\langle a\rangle = m$
4. C'est une simple application du théorème de Lagrange *(cf 11.5.13)*

Remarque 30 :

Soit G un groupe ; le théorème 11.8.4 précise que l'ordre d'un élément $a \in G$ est l'ordre du sous-groupe $\langle a\rangle \subset G$ généré par a.

11.8.5 Corollaire

1. Soit G un groupe d'ordre n ; alors, pour tout $x \in G$, $x^n = e$
2. Tout groupe G d'ordre un nombre premier est cyclique. Il est engendré par l'un quelconque de ses éléments distincts de e
3. Soit G un groupe fini et $a \in G$. Soit m l'ordre de a. Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$a^k = e \Longleftrightarrow m \text{ divise } k$$

Démonstration

1. On montre que si G est un groupe d'ordre n, alors, pour tout $x \in G$, $x^n = e$
Soit $x \in G$, et on considère le sous-groupe $\langle x\rangle = \{x^k ; k \in \mathbb{N}\}$.
Comme $\langle x\rangle \subset G$, $\langle x\rangle$ est forcément d'ordre fini et d'ordre m, tel que $x^m = e$.
Alors m divise n, ce qui veut dire qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = km$. Alors :

$$x^n = x^{km} = (x^m)^k = e^k = e$$

Ce que nous voulions
2. Tout groupe G d'ordre premier est cyclique
Soit G un groupe d'ordre p où p est un nombre premier. Soit $x \in G$ tel que $x \neq e$ et on considère $\langle x\rangle = \{x^k ; k \in \mathbb{N}\}$.
L'une des premières choses que nous pouvons voir est que Card $\langle x\rangle \geqslant 2$. Soit m l'ordre de x, c'est à dire Card $\langle x\rangle = m$
Alors, m divise p ; or, les seuls diviseurs entiers positifs de p sont 1 et p. Comme $m \neq 1$, $m = p$ et $G = \langle x\rangle$
G est bien cyclique
3. Montrons que $a^k = e \Longleftrightarrow m$ divise k
Soit $a \in G$, d'ordre m, c'est à dire tel que $a^m = e$

— Commençons par le plus facile !! Supposons que m divise k, c'est à dire qu'il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $k = qm$. Donc
$$a^k = a^{qm} = (a^m)^q = e^q = e$$

— Réciproquement, soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $a^k = e$.
Faisons la division euclidienne de k par m : $k = qm + r$ avec $0 \leqslant r < m$.
Et donc, $a^k = a^{qm+r} = a^{qm} \times a^r = (a^m)^q \times a^r = e \times a^r = a^r = e$; comme $0 \leqslant r < m$, $r = 0$ et donc, $k = qm$, c'est à dire que k divise m.

Exercice 30 :

1. Soit G un groupe commutatif.
   Pour $r \in \mathbb{N}$, on note :
   $$H_r = \{x \in G \text{ tels que } x^r = e\} = \{x \in G \text{ tels que ordre}(x) \text{ divise } r\}$$
   Il faut montrer que H_r est un sous-groupe de G
2. Soit G un groupe commutatif d'ordre n. On appelle $\mathcal{R}$ la relation :
   $$(\forall x \in G)\,(\forall y \in G)\,(x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow x \text{ et } y \text{ ont le même ordre})$$
   (a) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence
   (b) On appelle $\psi(d)$ le nombre d'éléments d'ordre d de G. Montrer qu'alors on a :
   $$n = \sum_{d|n} \psi(d)$$

11.8.6 Définition et théorème

Soit G un groupe quelconque et $u \in G$

1. Si $(\forall h \in \mathbb{Z})\,(\forall k \in \mathbb{Z})\,\left(h \neq k \Longrightarrow u^h \neq u^k\right)$, Alors, u est dit d'ordre infini
2. Tout groupe monogène infini G est isomorphe à $(\mathbb{Z}, +)$
3. Plus généralement, si G est un groupe et $g \in G$ un élément d'ordre infini, alors le morphisme $\Psi_g : \mathbb{Z} \longrightarrow G$ tel que $\Psi_g(1) = g$ est un monomorphisme, dont l'image est le sous-groupe cyclique engendré par g

Démonstration

Soit G un groupe monogène infini engendré par g, et doit Ψ_g ainsi défini :
$$\left\{\begin{array}{rcl} \Psi_g : \mathbb{Z} & \longrightarrow & G \\ n & \longmapsto & \Psi_g(n) = g^n \end{array}\right.$$

1. Alors Ψ_g est injective
   En effet, si $\Psi_g(m) = \Psi_g(n)$, nous avons $g^m = g^n$, ce qui est équivalent à $g^{m-n} = e$, c'est à dire, comme G est monogène infini, $m - n = 0 \Longleftrightarrow m = n$
   Ψ_g est donc injective
2. Ψ_g est surjective
   Soit $x \in G$; alors, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = g^k$ et alors $\Psi_g(k) = g^k$, et Ψ_g est donc surjective

Ψ_g est donc bijective, et dans le cas des groupes monogènes infini, Ψ_g est donc un isomorphisme

11.8.7 Définition et théorème

1. S'il existe un entier m strictement positif, $(m \in \mathbb{N}^*)$, tel que $u^m = e$, en considérant le plus petit entier positif n tel que $u^n = e$, alors, on dit que u est d'ordre n
2. Tout groupe cyclique d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ est isomorphe à $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$
3. Plus généralement, si G est un groupe et $g \in G$ un élément d'ordre infini, alors le morphisme $\Psi_g : \mathbb{Z} \longrightarrow G$ tel que $\Psi_g(1) = g$ est un monomorphisme, dont l'image est le sous-groupe cyclique engendré par g

Démonstration

On suppose G cyclique d'ordre n de générateur g ; alors $g^n = e$. Soit Ψ_g ainsi défini :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \Psi_g : \mathbb{Z} & \longrightarrow & G \\ n & \longmapsto & \Psi_g(n) = g^n \end{array} \right.$$

Nous allons démontrer que le noyau de Ψ_g est $\ker \Psi_g = n\mathbb{Z}$, et alors, d'après le théorème d'isomorphisme 11.7.5 et le paragraphe 11.7.6 nous avons alors $\mathbb{Z}/\ker\varphi = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ isomorphe à $\Psi_g(\mathbb{Z}) = G$

1. On montre que $\ker \Psi_g \subset n\mathbb{Z}$
   Soit $p \in \ker \Psi_g$; alors $\Psi_g(p) = g^p = e$; donc, d'après les résultats précédents n divise p et donc il existe $q \in \mathbb{Z}$ tel que $p = qn$; c'est à dire $p \in n\mathbb{Z}$. Nous avons donc $\ker \Psi_g \subset n\mathbb{Z}$
2. Réciproquement, soit $p \in n\mathbb{Z}$; alors, p peut s'écrire $p = kn$, et donc

   $$\Psi_g(p) = \Psi_g(kn) = g^{kn} = (g^n)^k = e^k = e$$

   et donc $p \in \ker \Psi_g$.
   Nous avons donc $n\mathbb{Z} \subset \ker \Psi_g$

Nous avons donc $\ker \Psi_g = n\mathbb{Z}$ et donc $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est isomorphe à G

Remarque 31 :

Ce résultats permet aussi de préciser lorsque 2 puissances d'un élément g d'ordre n sont égales :

$$g^k = g^m \Longleftrightarrow k \equiv m\,[n]$$

11.8.8 Proposition

Soit C un groupe cyclique de générateur $c \in C$. Soit G un groupe quelconque et $\Psi : C \longrightarrow G$ un homomorphisme surjectif. Alors
G est un groupe cyclique et l'ordre de G est un diviseur de l'ordre de C

Démonstration

Soit C un groupe cyclique de générateur $c \in C$, G un groupe quelconque et $\Psi : C \longrightarrow G$ un homorphisme surjectif.
Alors, soit $y \in G$; il existe $x \in C$ tel que $\Psi(x) = y$ et, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = c^k$, et donc :

$$y = \Psi(x) = \Psi\left(c^k\right) = (\Psi(c))^k$$

Ce qui montre que tout élément $y \in G$ peut s'écrire comme puissance d'un élément $\Psi(c)$. G est donc cyclique de générateur $\Psi(c)$
D'autre part, si n est l'ordre de C, nous avons $c^n = e$, $\Psi(c^n) = (\Psi(c))^n = (e)^n = e$, de telle sorte que l'ordre de G divise n, l'ordre de C.

11.8.9 Corollaire

L'image, par un morphisme de groupe, d'un groupe cyclique est un groupe cyclique

Démonstration

Soit G un groupe cyclique de générateur g, H un groupe quelconque et $\varphi : G \longrightarrow H$ un homomorphisme de groupe.
Soit $y \in \mathrm{Im}\varphi = \varphi(G)$. il existe donc $x \in G$ tel que $\varphi(x) = y$ et il existe aussi $p \in \mathbb{Z}$ tel que $x = g^p$, et dès lors :

$$y = \varphi(x) = \varphi(g^p) = (\varphi(g))^p$$

Ainsi $\mathrm{Im}\varphi = \varphi(G)$ est un sous-groupe cyclique de H de générateur $\varphi(g)$

11.8.10 Théorème

Tout sous-groupe d'un groupe cyclique est cyclique

Démonstration

Soit G un groupe cyclique.
Nous allons envisager 2 cas :

- ⋆ G est un groupe cyclique d'ordre infini
- ⋆ G est un groupe d'ordre fini n

1. **Supposons G groupe cyclique d'ordre infini**
   C'est à dire $G = \{q^n \text{ où } n \in \mathbb{Z}\}$.
   Nous allons montrer que les ensembles du type $\mathcal{C}_n = \left\{q^{nk} \text{ où } k \in \mathbb{Z}\right\}$ sont les seuls sous-groupes de G. La démonstration est tout à fait semblable à celle de 11.5.2
   - ⇒ Premièrement, il est clair que les ensembles du type $\mathcal{C}_n$ sont des sous groupes
     En effet, $\mathcal{C}_n \neq \emptyset$ puisque $q^{n\times 0} = q^0 = e$ est un élément de $\mathcal{C}_n$
     Puis, si $x \in \mathcal{C}_n$, $y \in \mathcal{C}_n$, avons nous $xy^{-1} \in \mathcal{C}_n$?
     Or, $xy^{-1} = q^{nk} \times \left(q^{nk'}\right)^{-1} = q^{nk} \times q^{-nk'} = q^{n(k-k')}$ et, comme $k - k' \in \mathbb{Z}$, nous avons bien $q^{n(k-k')} \in \mathcal{C}_n$, et donc $xy^{-1} \in \mathcal{C}_n$.
     Ce qui montre que $\mathcal{C}_n$ est un sous- groupe de G
   - ⇒ Réciproquement, soit S un sous-groupe de G ; montrons qu'il est du type $\mathcal{C}_n$
     Soit $x \in S$; alors, x est du type q^p avec $p \in \mathbb{Z}$
     Soit n le plus petit entier positif tel que $q^n \in S$ et effectuons la division euclidienne de p par n :
     $$p = an + b \text{ avec } 0 \leqslant b \leqslant n-1$$
     Alors,
     $$q^p = q^{an+b} = q^{an} \times q^b \Longleftrightarrow q^b = q^{-an} \times q^p$$
     Comme $q^n \in S$, il en est de même de q^{an} et de q^{-an} qui est son inverse. Donc $q^b \in S$, ce qui est en contradiction avec le fait que n est le plus petit entier tel que $q^n \in S$, sauf si $b = 0$. On en conclue donc que $p = an$. Ainsi, $S = \{q^{na} \text{ où } a \in \mathbb{Z}\}$. S est donc du type $\mathcal{C}_n$
2. **Supposons G groupe cyclique d'ordre fini n**
   Soit c le générateur d'ordre n de G.
   Nous allons démontrer que tous les sous-groupes $S \subset G$, sont du type :
   $$S = \left\{c^{kj} \text{ où } k \text{ est un diviseur de } n \text{ tel que } n = mk \text{ et } 0 \leqslant j \leqslant m-1\right\}$$
   - ⇒ Les ensembles du type S sont des sous-groupes de G
     - ⋆ En premier lieu, $S \neq \emptyset$, car $\left(c^k\right)^0 = \left(c^k\right)^m = e$, et donc $e \in S$
     - ⋆ Ensuite, si $y \in S$ et $x \in S$, alors $x = \left(c^k\right)^j$ et $y = \left(c^k\right)^i$, donc $xy = \left(c^k\right)^j \times \left(c^k\right)^i = \left(c^k\right)^{i+j}$ et donc, $xy \in S$
     - ⋆ Soit $y \in S$; alors $y = c^{kj}$ et l'inverse de y est donc $y^{-1} = \left(c^{kj}\right)^{-1} = c^{-kj} = \left(c^k\right)^{m-j}$. Donc $y^{-1} \in S$

     S est donc un sous groupe de G, d'ordre m où m divise n.

$\Rightarrow$ Réciproquement, soit H un sous-groupe de G
Alors, tous les éléments de H sont du type c^p. Soit k le plus petit entier positif $0 \leqslant k \leqslant n-1$ tel que $c^k \in H$, et divisons n par k.

$$n = ak + r \text{ avec } 0 \leqslant r \leqslant k-1$$

Et donc, comme $c^n = e$, nous avons $c^{ak+r} = e$. Or, $c^{ak+r} = c^{ak} \times c^r$. Comme $c^{ak} = \left(c^k\right)^a$, nous avons $c^{ak} \in H$. et donc, par composition interne, $c^r \in H$, ce qui contredit, sauf pour $r = 0$, le fait que k soit le plus petit entier tel que $c^k \in H$. Donc, $r = 0$ et le sous groupe H est du type $S = \left\{c^{kj} \text{ où } k \text{ est un diviseur de } n \text{ tel que } n = mk \text{ et } 0 \leqslant j \leqslant m-1\right\}$

Remarque 32 :

1. On peut appliquer la démonstration du point 1 au groupe additif $(\mathbb{Z}, +)$ qui est aussi un groupe cyclique : les seuls sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$ sont donc du type : $\mathcal{C}_n = \{nk \text{ où } k \in \mathbb{Z}\} = n\mathbb{Z}$.
   On retrouve donc le résultats sur les seuls sous groupes de $\mathbb{Z}$ qui sont les multiples d'un entier positif $n \geqslant 1$
2. Dans le groupe additif $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ qui est un groupe cyclique de générateur 1, les groupes sont engendrés par les diviseurs de 6. On retrouve donc comme sous-groupe :

   - $\star$ $H_1 = \left\{\dot{0}, \dot{2}, \dot{4}\right\}$
   - $\star$ $H_2 = \left\{\dot{0}, \dot{3}\right\}$

Exercice 31 :

Soit G un groupe cyclique d'ordre n, de générateur $g \in G$ et d'élément neutre $e \in G$.

1. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, nous avons Card $\left\langle g^k \right\rangle = \dfrac{n}{\text{pgcd}\,(n, k)}$
2. En déduire que si k et n sont premiers entre eux, alors $\left\langle g^k \right\rangle = G$

11.9 Relations de définition

Soient $(G, \star)$ et $(H, \top)$ 2 groupes ; alors le produit direct $G \times H$ est aussi un groupe, non forcément commutatif.
Par contre, nous avons, pour tout $g \in G$ et tout $h \in H$:

- $$(g, e) \times (e, h) = (g, h) = (e, h) \times (g, e)$$

Soient $\varphi : G \longrightarrow G \times H$ tel que $\varphi(g) = (g, e)$ et $\psi : H \longrightarrow G \times H$ tel que $\psi(h) = (e, h)$, alors, pour tout $g \in G$, et tout $h \in H$, nous avons : $\varphi(g) \times \psi(h) = \psi(h) \times \varphi(g)$.
Nous avons le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[dr, "\varphi"] & \\
& G \times H \\
H \arrow[ur, "\psi"] &
\end{tikzcd}$$

11.9.1 Proposition

Soient G, H et K, trois groupes.
Soient $\alpha : G \longrightarrow K$ et $\beta : H \longrightarrow K$ 2 morphismes de groupe tels que :

$$(\forall g \in G)\,(\forall h \in H)\,(\alpha(g) \times \beta(h) = \beta(h) \times \alpha(g))$$

Alors, il existe un unique morphisme $\eta : G \times H \longrightarrow K$ tel que :

$$\begin{array}{l} \eta \circ \varphi = \alpha \\ \eta \circ \psi = \beta \end{array}$$

Nous avons alors le schéma suivant :

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[dr, "\varphi"'] \arrow[drr, "\alpha"] & & \\
& G \times H \arrow[r, "\eta"] & K \\
H \arrow[ur, "\psi"] \arrow[urr, "\beta"'] & &
\end{tikzcd}$$

Remarque 33 :

1. Les morphismes φ et ψ, sont ceux définis dans l'introduction : $\varphi(g) = (g, e)$ et $\psi(h) = (e, h)$
2. Si un tel morphisme η existe, nous devons avoir :

$$\begin{array}{rcl} \eta[(g,h)] & = & \eta[(g,e) \times (e,h)] \\ & = & \eta[(g,e)] \times \eta[(e,h)] \\ & = & \eta[\varphi(g)] \times \eta[\psi(h)] \\ & = & \alpha(g) \times \beta(h) \end{array}$$

3. Ainsi, α et β étant donnés, η sera forcément unique

Démonstration

Soient donc $\alpha : G \longrightarrow K$ et $\beta : H \longrightarrow K$ 2 morphismes de groupe tels que :

$$(\forall g \in G)\,(\forall h \in H)\,(\alpha(g) \times \beta(h) = \beta(h) \times \alpha(g))$$

On construit donc une application η de $G \times H$ dans K définie par :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \eta : G \times H & \longrightarrow & K \\ (g,h) & \longmapsto & \eta[(g,h)] = \alpha(g) \times \beta(h) \end{array} \right.$$

On montre que η est un morphisme de groupe

$$\begin{array}{rcl} \eta[(g,h) \star (g_1,h_1)] & = & \eta[(gg_1, hh_1)] \\ & = & \alpha(gg_1) \times \beta(hh_1) \text{ Par définition de } \eta \\ & = & \alpha(g) \times \alpha(g_1) \times \beta(h) \times \beta(h_1) \text{ car } \alpha \text{ et } \beta \text{ sont des morphismes} \\ & = & \alpha(g) \times \beta(h) \times \alpha(g_1) \times \beta(h_1) \text{ car } \alpha \text{ et } \beta \text{ commutent dans } K \\ & = & \eta[(g,h)] \times \eta[(g_1,h_1)] \text{ par définition de } \eta \end{array}$$

η est donc un morphisme de groupe

Remarque 34 :

1. Le groupe $G \times H$ a aussi des sous-groupes remarquables :

(a) $G' = \{(g, e) \text{ où } g \in G\}$ est un sous groupe de $G \times H$, isomorphe à G par l'isomorphisme φ défini au-dessus.

(b) De même, $H' = \{(e, h) \text{ où } h \in H\}$ est un sous groupe de $G \times H$, isomorphe à H par l'isomorphisme ψ défini au-dessus.

(c) De plus, $G' \cap H' = \{(e, e)\}$

2. $G' \vee H'$ désigne le plus petit sous-groupe de $G \times H$ contenant à la fois G' et H'.
   On montre que $G' \vee H' = G \times H$

   En effet, par définition, nous avons $G' \vee H' \subset G \times H$
   Réciproquement, montrons que $G \times H \subset G' \vee H'$.
   Tout d'abord, il faut faire remarquer que comme $G' \vee H'$ contient à la fois G' et H', il contient les éléments de G' et H' ainsi que les produits d'éléments de G' et de H' ; donc si $A \in G'$ et $B \in H'$, alors,$A \times B \in G' \vee H'$.
   Soit donc $(g, h) \in G \times H$, alors $(g, h) = (g, e) \times (e, h)$, et donc, comme $(g, e) \in G'$ et $(e, h) \in H'$, alors, le couple $(g, h) \in G' \vee H'$, et donc $G \times H \subset G' \vee H'$
   Ce qui termine de montrer que $G \times H = G' \vee H'$

3. Le résultat suivant peut être considéré comme un corollaire de 11.9.1

11.9.2 Corollaire

Soit D un groupe
On considère G et D 2 sous-groupes de D tels que :

$$\begin{cases} G \cap H = \{e\} \\ G \vee H = D \text{ ce qui veut dire que } D \text{ est le sous groupe engendré par } G \text{ et } H \\ (\forall g \in G)\,(\forall h \in H)\,(gh = hg) \end{cases}$$

Alors, $G \times H$ est isomorphe à D
C'est à dire qu'il existe un isomorphisme η de $G \times H$ dans D, tel que $\eta\,[(g, 1)] = g$ et $\eta\,[(1, h)] = h$
On dit que D est le produit direct de G et de H

Démonstration

On peut considérer les deux injections canoniques $\alpha : G \longrightarrow D$ et $\beta : H \longrightarrow D$ telles que :

$$\begin{cases} \alpha : G & \longrightarrow & D \\ \quad g & \longmapsto & \alpha\,(g) = g \end{cases} \qquad \begin{cases} \beta : H & \longrightarrow & D \\ \quad h & \longmapsto & \beta\,(h) = h \end{cases}$$

$_alpha$ et β sont deux morphismes de groupes évidents.
De l'hypothèse $(\forall g \in G)\,(\forall h \in H)\,(gh = hg)$, nous avons aussi

$$(\forall g \in G)\,(\forall h \in H)\,(\alpha\,(g)\,\beta\,(h) = \beta\,(h)\,\alpha\,(g))$$

Nous sommes donc dans les hypothèses de la proposition 11.9.1. Il existe donc un morphisme η de $G \times H$ dans D tel que

$$\eta \circ \varphi = \alpha$$
$$\eta \circ \psi = \beta$$

1. Nous allons montrer que $\eta\,[(g, h)] = gh$
   — Nous montrons tout d'abord que $\eta\,[(g, 1)] = g$
     $g = \alpha\,(g) = \eta \circ \varphi\,(g) = \eta\,[(g, 1)]$
     Nous avons donc bien $\eta\,[(g, 1)] = g$
   — On démontrerait de même que $\eta\,[(1, h)] = h$ puisque $\eta \circ \psi = \beta$
   — Nous avons $(g, h) = (g, 1) \star (1, h)$; or, $\eta\,[(g, h)] = \eta\,[(g, 1)] \star \eta\,[(1, h)] = gh$
2. Montrons que η est une bijection

— On montre que η est injectif.
Soient $(g,h) \in G \times H$ et $(g',h') \in G \times H$ tels que $\eta[(g,h)] = \eta[(g',h')]$
Alors, nous avons $gh = g'h'$. Donc :

$$\begin{array}{lcl} gh = g'h' & \Longleftrightarrow & ghh^{-1} = g'h'h^{-1} \text{ Composition à droite par } h^{-1} \\ gh = g'h' & \Longleftrightarrow & g = g'h'h^{-1} \\ gh = g'h' & \Longleftrightarrow & g'^{-1}g = g'^{-1}g'h'h^{-1} \text{ Composition à gauche par } g'^{-1} \\ gh = g'h' & \Longleftrightarrow & g'^{-1}g = h'h^{-1} \end{array}$$

Or, $g'^{-1}g \in G$ et $h'^{-1}h \in H$, donc, par l'égalité $g'^{-1}g = h'h^{-1}$, nous avons $g'^{-1}g \in G \cap H$ et $h'h^{-1} \in G \cap H$; comme $G \cap H = \{e\}$, alors $g'^{-1}g = e \Longleftrightarrow g = g'$ et $hh'^{-1} = e \Longleftrightarrow h = h'$ et donc, $(g,h) = (g',h')$
η est donc injectif.

— On montre que η est surjectif.
Soit $d \in D$; il faut donc trouver un couple $(g,h) \in G \times H$ tel que $\eta[(g,h)] = d$.
De l'hypothèse $G \vee H = D$, il existe donc des éléments $g \in G$ et $h \in H$ tels que $d = gh = hg$.
Or, $\eta[(g,h)] = gh = d$
η est donc une surjection

η est donc une bijection, et un isomorphisme de $G \times H$ dans D. D et $G \times H$ sont donc isomorphes.

Remarque 35 :

Dire que D est le produit direct de G par H, est dire que D est isomorphe à $G \times H$

Exercice 32 :

Démontrer que le produit direct de deux groupes abéliens est abélien.

11.10 Groupe symétrique et groupe alterné

11.10.1 Introduction

Comme exemple de groupes, nous avons donné dans 11.1.4 le groupe symétrique $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des permutations de $\mathbb{N}_n$

Exemple pour $n = 5$

On considère les permutations σ et τ définies par :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \qquad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Alors, nous avons :

$$\sigma \circ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 4 & 5 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \tau \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

— Nous avons, clairement $\sigma \circ \tau \neq \tau \circ \sigma$, ce qui montre que $\mathcal{S}_5$ n'est certainement pas un groupe commutatif.
— σ est une permutation circulaire ; il est évident que $\sigma^5 = \mathrm{Id}_5$; σ est donc d'ordre 5

Exercice 33 :

Quel est l'ordre de la permutation τ ?

11.10.2 Définition

Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$ une permutation de $\mathbb{N}_n$

1. Un élément $x \in \mathbb{N}_n$ est dit fixe ou invariant par σ si et seument si $\sigma(x) = x$
2. Le support de σ est l'ensemble des éléments $x \in \mathbb{N}_n$ tels que $\sigma(x) \neq x$ et on note

$$\operatorname{supp}(\sigma) = \{x \in \mathbb{N}_n \text{ tels que } \sigma(x) \neq x\}$$

Exemple 15 :

Ainsi, si

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 4 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Nous avons $\operatorname{supp}(\tau_1) = \{1, 3\}$ et $\operatorname{supp}(\tau_2) = \{2, 4, 5\}$

11.10.3 Notion de cycle

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$, et on considère $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des permutations de $\mathbb{N}_n$; soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$

1. Soit $l \in \mathbb{N}^*$ $(l \geqslant 1)$. Nous notons σ^l la permutation de $\mathcal{S}_n$ définie par : $\sigma^l = \underbrace{\sigma \circ \sigma \circ \cdots \sigma}_{l \text{ fois}}$

   On pose, en particulier $\sigma^0 = \mathrm{Id}_n$, l'identité de $\mathbb{N}_n$
2. Si $l \in \mathbb{Z}$ et $l < 0$, on note σ^l la permutation de $\mathcal{S}_n$ définie par : $\sigma^l = \left(\sigma^{-1}\right)^{-l} = \underbrace{\sigma^{-1} \circ \sigma^{-1} \circ \cdots \sigma^{-1}}_{-l \text{ fois}}$
3. Soit $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geqslant 2$. Une permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$ est appelée cycle de longueur k, s'il existe k éléments deux à deux distincts $\{a_1, \ldots, a_k\}$ dans $\mathbb{N}_n$ tels que $\sigma(a_1) = a_2$, $\sigma(a_2) = a_3$, $\cdots$, $\sigma(a_{k-1}) = a_k$, $\sigma(a_k) = a_1$ et si tout élément de $\mathbb{N}_n$ distinct de $a_1, \ldots, a_k$ est fixe par σ

Remarque 36 :

1. On dit qu'un cycle, ou permutation circulaire, de k lettres *(ou k chiffres)* est d'ordre k. Le nombre de lettres *(ou de chiffres)* du cycle est appelé longueur du cycle
2. Il est clair que si $\sigma \in \mathcal{S}_n$ est un cycle de longueur k, alors $\sigma^k = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}_n}$, l'identité de $\mathbb{N}_n$
3. **Convention d'écriture**

   On note $\sigma = (a_1, a_2, \cdots, a_k)$ le k-cycle de la définition 11.10.3, les points fixes étant omis de l'écriture. Cette notation veut dire

   $$\sigma(a_1) = a_2 \quad \sigma(a_2) = a_3 \cdots \sigma(a_i) = a_{i+1} \cdots \sigma(a_k) = a_1$$

   Cette notation a le mérite d'être plus compacte que celle vue dans le tableau à deux lignes mais elle existe uniquement pour les cycles. Le support du k-cycle $(a_1, a_2, \cdots, a_k)$ est donc $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$

   Ainsi, par exemple, dans $\mathcal{S}_5$ le cycle $c = (2, 4, 5)$ signifie :

   $$c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 4 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

4. La notation $\sigma = (a_1, a_2, \cdots, a_k)$ n'est pas unique puisque nous pourrions aussi l'écrire $\sigma = (a_2, a_3, \cdots, a_k, a_1)$ ou $\sigma = (a_4, a_5, \cdots, a_k, a_1, a_2, a_3)$ etc ...

11.10.4 Définition de transposition

On appelle transposition de $\mathcal{S}_n$, toute permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$ telle que :

$$\sigma(i) = j \text{ et } \sigma(j) = i$$

et si, pour tout $k \in \mathbb{N}_n$, $k \neq i$ et $k \neq j$, $\sigma(k) = k$

Exemple 16 :

Exemple de transposition de $\mathcal{S}_5$:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Nous avons $T(2) = 3$ et $T(3) = 2$, et si $i = 1$, $i = 4$ et $i = 5$, nous avons $T(i) = i$.
Une autre écriture de T est donc $T = (2, 3)$

Remarque 37 :

1. Une transposition est un cycle de longueur 2 qui peut être notée $\tau = (i, j)$
2. Une transposition est une permutation qui échange 2 nombres.

Exemple 17 :

1. Revenons dans $\mathcal{S}_5$. La permutation circulaire R ainsi définie :

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 2 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

   R est une permutation ou cycle de longueur 3 qui peut aussi s'écrire $R = (3, 5, 4)$
2. Retour sur la permutation τ de $\mathcal{S}_5$ définie en 11.10.1
   — La permutation τ échange *(ou transpose)* les chiffres 1 et 3
   — La permutation τ permute circulairement 2, 4 et 5.
   On peut donc dire que τ est la composée de 2 autres permutations τ_1 et τ_2 définies par :

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} = (1, 3) \qquad \tau_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 4 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} = (2, 4, 5)$$

   τ_1 est donc un cycle de longueur 2, et τ_2 un cycle de longueur 3
   Nous avons $\tau = \tau_1 \circ \tau_2 = \tau_2 \circ \tau_1$
   Remarquons que τ_2 laisse invariant l'ensemble $\{1, 3\}$, alors que τ_1 laisse invariant l'ensemble $\{2, 4, 5\}$.
   On dit que τ_1 et τ_2 sont disjointes, c'est à dire $\operatorname{supp}(\tau_1) \cap \operatorname{supp}(\tau_2) = \emptyset$

11.10.5 Définition de permutations disjointes

Soient $\alpha \in \mathcal{S}_n$ et $\beta \in \mathcal{S}_n$ 2 permutations de $\mathbb{N}_n$.
α et β sont dites disjointes si et seulement si :

$$(\forall i \in \mathbb{N}_n)\, (\alpha(i) \neq i \Longrightarrow \beta(i) = i)$$

C'est à dire si $\operatorname{supp}(\alpha) \cap \operatorname{supp}(\beta) = \emptyset$

Exemple 18 :

τ_1 et τ_2 sont donc 2 permutations disjointes

11.10.6 Proposition

Deux permutations disjointes commutent, c'est à dire :
Soient $\alpha \in \mathcal{S}_n$ et $\beta \in \mathcal{S}_n$ 2 permutations de $\mathbb{N}_n$ disjointes, c'est à dire telles que $\operatorname{supp}(\alpha) \cap \operatorname{supp}(\beta) = \emptyset$.
Alors :

$$\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha$$

Démonstration

Soit $i \in \mathbb{N}_n$

1. Suppososons que i n'appartienne ni au support de α, ni à celui de β ; alors, $\alpha(i) = \beta(i) = i$, et nous avons bien $\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha$
2. Supposons que i appartienne au support de α ; il existe alors $j \in \mathbb{N}_n$, $j \neq i$, tel que $\alpha(i) = j$. Nous avons $j \in \operatorname{supp}(\alpha)$ puisque si, au contraire, $\alpha(j) = j$, α n'est plus une permutation et il y a donc contradiction.
   Puisque les supports sont disjoints, nous avons $\beta(i) = i$. Alors :
   $$\begin{aligned} \beta(\alpha(i)) &= \beta(j) = j \\ \alpha(\beta(i)) &= \alpha(i) = j \end{aligned}$$
   Et nous avons donc $\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha$
3. La démonstration serait semblable si i appartenait au cycle de β.

Exercice 34 :

Nous nous plaçons dans $\mathcal{S}_9$. Nous considérons les permutations suivantes :

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 7 & 6 & 5 & 4 & 8 & 9 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 5 & 6 & 7 & 2 & 4 & 1 & 9 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $\sigma_1 \circ \sigma_2$, $\sigma_2 \circ \sigma_1$, σ_1^{-1} et σ_2^{-1}
2. Décomposer σ_1 et σ_2 en produit de cycles à supports deux à deux disjoints
3. Donner une factorisation de σ_1 en produit de transpositions. Même question pour σ_2

Exercice 35 :

Nous nous plaçons, cette fois ci dans $\mathcal{S}_7$. Nous considérons les cycles suivants :

$$c_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 7 & 6 & 1 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad c_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 5 & 6 & 3 & 4 & 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $c_1 \circ c_2$ et $c_2 \circ c_1$.
2. Calculer le carré $c_1^2 = c_1 \circ c_1$ de c_1. Est-ce un cycle ?

Exercice 36 :

On appelle centre de $\mathcal{S}_n$ l'ensemble $Z(\mathcal{S}_n)$ des permutations qui commutent avec toutes les permutations de $\mathcal{S}_n$:

$$Z(\mathcal{S}_n) = \{\sigma \in \mathcal{S}_n \text{ tels que pour tout } s \in \mathcal{S}_n \text{ tel que } s \circ \sigma = \sigma \circ s\}$$

L'objet de cet exercice est de montrer que $Z(\mathcal{S}_n) = \{\mathrm{Id}_{\mathbb{N}_n}\}$ si $n \geqslant 3$.
Supposons donc $n \geqslant 3$ et soient $\sigma \in Z(\mathcal{S}_n)$, $i \in \mathbb{N}_n$, $j \in \mathbb{N}_n$ tels que $i \neq j$. On pose τ la transposition telle que $\tau(i) = j$

1. Montrer que $(\tau\sigma)(i) = \sigma(j)$
2. En déduire $\sigma(i) \in \{i, j\}$
3. Démontrer que $\sigma(i) = i$*(Indication : on pourra faire intervenir un entier $k \notin \{i, j\}$ et la transposition $\tau_1(i) = k$).* Conclure.
4. Que se passe-t-il si $n = 2$?

11.10.7 Proposition

Soit σ une permutation d'un ensemble fini X de cardinal n (X est en bijection avec $\mathbb{N}_n$ et peut donc être assimilé à $\mathbb{N}_n$)
Soit $\mathcal{R}$ la relation définie sur X par :

$$(\forall x \in X)(\forall y \in X)(x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow (\exists m \in \mathbb{Z})(y = \sigma^m(x)))$$

$\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur X
On appelle orbite une classe d'équivalence pour cette relation $\mathcal{R}$

Démonstration

Nous allons démontrer que $\mathcal{R}$ vérifie les axiômes des relations d'équivalence

1. **Cette relation est réflexive**
   Soit $x \in X$; nous avons $x = \mathrm{Id}_X(x)$. Or, $\sigma^0 = \mathrm{Id}_X$, et donc $x = \sigma^0(x)$
   Ainsi, il existe $m \in \mathbb{Z}$, et $m = 0$ tel que $x = \sigma^m(x)$, et nous avons $x\mathcal{R}x$
   La relation $\mathcal{R}$ est donc réflexive.
2. **Cette relation est symétrique**
   Soient $x \in X$ et $y \in X$ tels que $x\mathcal{R}y$. Ceci veut donc dire qu'il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que $y = \sigma^m(x)$.
   σ étant une bijection, par les théorèmes de composition, il en va de même de σ^m ; il existe donc une bijection réciproque $(\sigma^m)^{-1} = \sigma^{-m}$, telle que que nous avons $x = \sigma^{-m}(y)$ et donc nous avons $y\mathcal{R}x$
   La relation $\mathcal{R}$ est donc symétrique
3. **Cette relation est transitive**
   Soient $x \in X$, $y \in X$ et $z \in X$ tels que $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$.
   Ceci veut donc dire qu'il existe $m \in \mathbb{Z}$ et $p \in \mathbb{Z}$ tel que $y = \sigma^m(x)$ et $z = \sigma^p(y)$
   Donc, $z = \sigma^p(y) = \sigma^p(\sigma^m(x)) = \sigma^{m+p}(x)$. Il existe donc $k \in \mathbb{Z}$, et $k = m+p$ tels que $z = \sigma^k(x)$, et nous avons donc $x\mathcal{R}z$
   La relation $\mathcal{R}$ est donc transitive

La relation $\mathcal{R}$ est donc une relation d'équivalence.

Remarque 38 :

Soit $x \in X$; quelle est la classe d'équivalence de x pour la relation $\mathcal{R}$. L'orbite de x, notée $\mathcal{O}(x)$ est donnée par :

$$\mathcal{O}(x) = \{x, \sigma(x), \sigma^2(x), \ldots, \sigma^m(x), \ldots\}$$

Et si X est un ensemble fini, il existe sûrement $m \in \mathbb{Z}$ tel que $\sigma^m(x) = x$.
Cette remarque est utile dans le théorème qui suit

11.10.8 Théorème

Soit X un ensemble fini, et $\mathcal{S}_X$ son groupe de permutations.
Toute permutation $\sigma \in \mathcal{S}_X$ telle que $\sigma \neq \mathrm{Id}_X$ résulte de la décomposition $\sigma = \gamma_1 \circ \gamma_2 \circ \cdots \gamma_k$ de cycles disjoints γ_i, chacune ayant un cycle de longueur 2 ou plus.

Démonstration

Soit $\sigma \in \mathcal{S}_X$ une permutation de X. On considère la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ définie dans 11.10.7.
Soit $x \in X$

1. Alors, il existe une seule orbite C telle que $x \in C$, et nous pouvons écrire C par :

$$C = \{y \in X \text{ tels que } y = \sigma^m(x) \text{ où } m \in \mathbb{Z}\} = \{x, \sigma(x), \ldots \sigma^m(x), \ldots\}$$

X étant un ensemble fini, et comme $C \subset X$, C est forcément fini ; il existe donc $r \in \mathbb{Z}$ tel que $x = \sigma^r(x)$.
Soit $m \in \mathbb{N}$ le plus petit entier positif tel que $x = \sigma^m(x)$. Alors, C contient exactement m éléments, c'est à dire :
$$C = \left\{x, \sigma(x), \dots \sigma^{m-1}(x)\right\}$$

2. Soit γ, la permutation circulaire suivante, de longueur m :
$$\gamma = \begin{pmatrix} x & \sigma(x) & \sigma^2(x) & \cdots & \sigma^{m-1}(x) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \dots & \downarrow \\ \sigma(x) & \sigma^2(x) & \sigma^3(x) & \cdots & x \end{pmatrix}$$
γ laisse inchangé les points n'appartenant pas à l'orbite C. nous avons donc, si $x \in C$, $\gamma(x) = \sigma(x)$, et si $y \notin C$, $\gamma(y) = y$

3. X étant un ensemble fini, les orbites étant des classes d'équivalence, donc disjointes, elles sont en nombre fini. Supposons donc qu'il y ait k orbites. Nous avons, bien entendu :
$$X = \bigcup_{i=1}^{k} C_i \text{ et } \bigcap_{i=1}^{k} C_i = \emptyset$$
On appelle γ_i la permutation circulaire définie comme ci-dessus et appliquée à l'orbite C_i, c'est à dire que γ_i est la permutation égale à σ sur C_i et à l'dentité en dehors de C_i
Si $i \neq j$, γ_i laisse inchangé tout élément de C_j, et donc tout élément déplacé par γ_j. γ_i et γ_j sont donc disjointes, et d'après 11.10.6 commutent.

4. Montrons, maintenant, que $\sigma = \gamma_1 \circ \gamma_2 \circ \ldots \circ \gamma_k$
Soit $y \in X$
Alors, si $\sigma(y) = z$, y et z appartiennent à la même orbite. Il existe donc $1 \leqslant i \leqslant k$ tel que $y \in C_i$ et $z \in C_i$, et donc tel que $z = \gamma_i(y)$ et tel que, pour tout $j \neq i$, $\gamma_j(y) = y$ et $\gamma_j(z) = z$
Par suite, nous avons bien $\gamma_1 \circ \gamma_2 \circ \ldots \circ \gamma_k \gamma_j(y) = z = \sigma(y)$, et ceci étant vrai pour tout $y \in X$, nous avons $\sigma = \gamma_1 \circ \gamma_2 \circ \ldots \circ \gamma_k$.

Ce que nous voulions

Exercice 37 :

Soit $\sigma \in \mathcal{S}_5$ défini par
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Ecrire la décomposition de σ en produit de cycles de supports disjoints.
2. Donner la liste des éléments de $\Gamma(\sigma)$ le sous-groupe engendré par σ

11.10.9 Corollaire

Soit X un ensemble fini.
L'ordre d'une permutation $\sigma \in \mathcal{S}_X$ est égal au ppcm des longueurs de ses cycles disjoints

Démonstration

Soit X un ensemble fini et $\sigma \in \mathcal{S}_X$
On peut représenter σ comme la composée de k cycles disjoints $(\gamma_i)_{i=1,\cdots,k}$. Nous avons donc, pour tout i et j $\gamma_i \circ \gamma_j = \gamma_j \circ \gamma_i$ et $\sigma = \gamma_1 \circ \gamma_2 \circ \cdots \circ \gamma_k$
Pour tout entier $m \in \mathbb{N}$, nous avons $\sigma^m = \gamma_1^m \circ \gamma_2^m \circ \cdots \circ \gamma_k^m$, d'où, $\sigma^m = \mathrm{Id}_X$ si et seulement si, parce que les cycles sont disjoints, $\gamma_i^m = \mathrm{Id}_X$ pour tout $i = 1, \dots, k$
m est donc un multiple commun des longueurs de tous les cycles.
L'ordre de σ est donc la plus petite valeur de ces multiples communs ; c'est donc le ppcm.

Exemple 19 :

On revient à la transformation τ

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

qui se décompose en deux cycles τ_1 et τ_2 $\tau = \tau_1 \circ \tau_2 = \tau_2 \circ \tau_1$

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} = (1,3) \qquad \tau_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 4 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} = (2,4,5)$$

où τ_1 est un cycle de longueur 2, et τ_2 un cycle de longueur 3.
L'ordre de τ est donc 6 *(A vérifier en exercice)*

Exercice 38 :

Donner, si c'est possible, un exemple d'élément d'ordre 30 dans le groupe symétrique $\mathcal{S}_{10}$.

11.10.10 Proposition

Soit X un ensemble fini de cardinal n et $\mathcal{S}_n = \mathcal{S}_X$ son groupe de permutation.
On considère $\gamma \in \mathcal{S}_n$ un cycle de longueur m.
Alors, pour tout permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$, la permutation $\sigma \circ \gamma \circ \sigma^{-1}$ est aussi un cycle de longueur m

Démonstration

On note $X = \{x_1, \cdots, x_n\}$, et pour simplifier les choses, nous posons $\gamma = (x_1, \cdots, x_m)$, ce qui veut dire :
- Si $1 \leqslant i \leqslant m-1$, alors $\gamma(x_i) = x_{i+1}$ et $\gamma(x_m) = x_1$
- Si $m+1 \leqslant i \leqslant n$, alors $\gamma(x_i) = x_i$

Soit $y \in X$. σ étant une permutation, il existe un unique $x \in X$ tel que $y = \sigma(x) \iff x = \sigma^{-1}(y)$

1. On suppose que x n'appartienne pas au cycle de γ
   Alors, $\gamma(x) = x$ et
   $$\sigma \circ \gamma \circ \sigma^{-1}(y) = \sigma \circ \gamma(x) = \sigma(x) = y$$
   y n'est donc pas dans le support de $\sigma \circ \gamma \circ \sigma^{-1}$, et dans la mesure où σ est une bijection, on peut dire qu'il y a $n-m$ éléments de X qui ne sont pas dans le support de $\sigma \circ \gamma \circ \sigma^{-1}$.
   On ne sait pas encore si $\sigma \circ \gamma \circ \sigma^{-1}$ est un cycle.
2. On suppose maintenant que x appartienne au cycle de γ
   Il existe donc i_0, avec $1 \leqslant i_0 \leqslant m$ tel que $x = x_{i_0}$
   ⋆ Si $1 \leqslant i_0 \leqslant m-1$, alors $\gamma(x) = \gamma(x_{i_0}) = x_{i_0+1}$ et
   $$\sigma \circ \gamma \circ \sigma^{-1}(y) = \sigma \circ \gamma(x_{i_0}) = \sigma(x_{i_0+1})$$
   ⋆ Et si $i_0 = m$, $\sigma \circ \gamma \circ \sigma^{-1}(y) = \sigma \circ \gamma(x_m) = \sigma(x_1)$
   Donc, $\sigma \circ \gamma \circ \sigma^{-1}(y) = \sigma \circ \gamma(x) = \sigma \circ \gamma(x_{i_0}) = \sigma(x_{i_0+1})$

Ce qui veut dire que $\sigma \circ \gamma \circ \sigma^{-1}$ est un cycle de longueur m.

Exemple 20 :

L'exemple ci après est toujours pris dans $\mathcal{S}_5$. On considère γ et σ deux permutations de $\mathcal{S}_5$

$$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 5 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} = (2,5,4)$$

γ est donc un cycle de longueur 3

Considérons, maintenant, la permutation σ :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et donc } \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Et nous pouvons alors trouver $\sigma \circ \gamma \circ \sigma^{-1}$:

$$\sigma \circ \gamma \circ \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 4 & 1 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} = (1,4,2)$$

$\sigma \circ \gamma \circ \sigma^{-1}$ est donc un cycle de longueur 3. Si $\mathcal{C}$ est le support de γ, nous avons $\mathcal{C} = \{2,4,5\}$, alors $\mathcal{C}'$, support de $\sigma \circ \gamma \circ \sigma^{-1}$ est donné par

$$\mathcal{C}' = \sigma(\mathcal{C}) = \{\sigma(2), \sigma(4), \sigma(5)\} = \{4,1,2\}$$

Exercice 39 :

Montrer que si c et c_1 sont deux cycles dans $\mathcal{S}_n$ de même longueur k, il existe $\sigma \in \mathcal{S}_n$ tel que $c_1 = \sigma \circ c \circ \sigma^{-1}$ *(on dit que c_1 et c sont conjugués dans $\mathcal{S}_n$).*

11.10.11 Théorème

Toute permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$ est un produit de transpositions
En particulier, un cycle γ de longueur m est un produit de $m-1$ transpositions

Démonstration

Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$
Alors, σ est le produit de k permutations circulaires disjointes γ_i, c'est à dire : $\sigma = \gamma_1 \circ \gamma_2 \circ \cdots \circ \gamma_k$
Si on réussit à montrer que toute permutation circulaire de $\mathcal{S}_n$ est le produit de transpositions, on pourra le généraliser à σ
Soit donc γ une permutation circulaire, et on montre que γ est le produit de transpositions
On appelle $\mathcal{C} = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ le cycle de la permutation γ, c'est à dire :

$$\gamma \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_m & x_{m+1} & \cdots & x_n \\ \downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow \\ x_m & x_1 & \cdots & x_{m-1} & x_{m+1} & \cdots & x_n \end{pmatrix}$$

On considère les transpositions τ_i, $2 \leqslant i \leqslant m$ définies par : $\tau_i(x_1) = x_i$, $\tau_i(x_i) = x_1$ et $\tau_i(x_k) = x_k$ si $k \neq i$
Alors, nous avons $\gamma = \tau_2 \circ \tau_3 \circ \cdots \circ \tau_m$. En effet,
Si $k \geqslant m+1$, nous avons $\gamma(x_k) = x_k$, et, pour tout i, $\tau_i(x_k) = x_k$, donc, si $k \geqslant m+1$, nous avons $\gamma(x_k) = \tau_2 \circ \tau_3 \circ \cdots \circ \tau_m(x_k)$
Pour $2 \leqslant i \leqslant m$, $\gamma(x_i) = x_{i-1}$, et

$$\begin{aligned} \tau_2 \circ \tau_3 \circ \cdots \circ \tau_m(x_i) &= \tau_2 \circ \tau_3 \circ \cdots \circ \tau_i(x_i) \\ &= \tau_2 \circ \tau_3 \circ \cdots \circ \tau_{i-1}(x_1) \\ &= \tau_2 \circ \tau_3 \circ \cdots \circ \tau_{i-2}(x_{i-1}) \\ &= x_{i-1} \end{aligned}$$

Donc, si $2 \leqslant i \leqslant m$, nous avons $\gamma(x_i) = \tau_2 \circ \tau_3 \circ \cdots \circ \tau_m(x_i)$
D'autre part,$\gamma(x_1) = x_m$ et

$$\begin{aligned} \tau_2 \circ \tau_3 \circ \cdots \circ \tau_m(x_1) &= \tau_1 \circ \tau_2 \circ \cdots \circ \tau_{m-1}(x_m) \\ &= x_m \end{aligned}$$

Donc, pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, nous avons $\gamma(x_i) = \tau_2 \circ \tau_3 \circ \cdots \circ \tau_m(x_i)$ et nous avons montré qu'un cycle de longueur m est le produit de $m-1$ transpositions.

Exercice 40 :

Montrer que le produit de deux transpositions distinctes est un cycle de longueur 3 ou un produit de deux cycles de longueur 3.

11.10.12 Signature d'une permutation

Soit σ une permutation de $\mathcal{S}_n$

1. On dit qu'un couple (x_i, x_j) est une inversion pour σ, lorsque nous avons $i < j$ et $\sigma(x_i) > \sigma(x_j)$
2. Nous notons $I(\sigma)$ le nombre de d'inversions de σ
3. On appelle signature de la permutation σ que l'on note $sgn\ \sigma$ le nombre $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{I(\sigma)}$

Remarque 39 :

On définit ainsi l'application « signature » : $\varepsilon : \mathcal{S}_n \longrightarrow \{-1; +1\}$. Elle dépend de n, mais on ne fait pas apparaître cette dépendance dans la notation ε

11.10.13 Définition de la parité d'une permutation

Soit σ une permutation de $\mathcal{S}_n$

1. On dit que la permutation σ est paire si $\varepsilon(\sigma) = 1$
2. On dit que la permutation σ est impaire si $\varepsilon(\sigma) = -1$

Remarque 40 :

Ceci veut simplement dire que si la permutation est paire, alors le nombre d'inversions de la permutation est un nombre pair, et donc que la permutation est impaire, si le nombre d'inversions de la permutation est un nombre impair

Exemple 21 :

Intéressons nous à $\mathbb{N}_5$ et à $\mathcal{S}_5$ son groupe de permutations. Soit $\sigma \in \mathcal{S}_5$ définie par

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 5 & 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Regardons le nombre d'inversions
On peut, tout de suite dire que le couple $(1, 2)$ est une inversion, car $\sigma(1) > \sigma(2)$. Plus généralement, comme $\sigma(1) = 5$, nous avons aussi comme inversion les couples $(1, 3)$, $(1, 4)$ et $(1, 5)$
Le couple $(2, 3)$ n'est pas une inversion, car $\sigma(2) < \sigma(3)$.
$(2, 5)$, $(3, 5)$, $(4, 5)$ sont des inversions. Il y a donc en tout 7 inversions, et on en déduit que σ est une permutation impaire.

11.10.14 Proposition

Toute transposition est impaire

Démonstration

On considère l'ensemble fini $\mathbb{N}_n$ et σ une transposition de $\mathcal{S}_n$ telle que :

$$\begin{cases} \sigma(h) = k \text{ et } \sigma(k) = h \\ \text{Pour tout } i \in \mathbb{N}_n,\ i \neq h \text{ et } i \neq k\ \sigma(i) = i \end{cases}$$

On suppose $h < k$

Il est alors évident que si $h < i < k$, les couples (h, i) et (i, k) forment des inversions ; de même, le couple (h, k) forme une inversion, et ce sont les seuls qui forment des inversions.

→ Tous les couples (h, i) avec $h+1 \leqslant i \leqslant k$ sont donc des inversions, et il y en a $k-(h+1)+1 = k-h$ telles inversions

→ De même, tous les couples (i, k) avec $h+1 \leqslant i \leqslant k-1$ sont donc des inversions, et il y en a $k-1-(h+1)+1 = k-h-1$ telles inversions

Il y a donc, en tout $2(k-h)-1$ couples d'inversion, c'est à dire un nombre impair d'inversions et donc $\varepsilon(\sigma) = -1$

Remarque 41 :

Calculer la signature à partir du nombre d'inversions s'avère fastidieux dès que n est un tant soit peu grand. Nous allons voir ci-après, une méthode de calcul beaucoup plus aisée qui repose sur des propriétés fondamentales de la signature.

11.10.15 Proposition

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $\mathcal{S}_n$ le groupe de permations de $\mathbb{N}_n$. Alors, pour tout $\sigma \in \mathcal{S}_n$, nous avons :

$$\varepsilon(\sigma) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j}$$

Démonstration

1. σ est une permutation et donc une bijection. Comme $i < j$, c'est à dire $i \neq j$, nous avons $\sigma(i) \neq \sigma(j)$ et donc $\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (\sigma(i) - \sigma(j)) \neq 0$

   De la même manière, comme $i < j$, $i - j < 0$ et $\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (i - j) \neq 0$

2. Pour $1 \leqslant i < j \leqslant n$, il existe h et k uniques, avec $1 \leqslant h \leqslant n$, $1 \leqslant k \leqslant n$ et $h \neq k$ tels que $\sigma(h) = i$ et $\sigma(k) = j$

   Et donc $\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (i - j) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (\sigma(i) - \sigma(j))$, c'est à dire que

$$\left| \frac{\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (\sigma(i) - \sigma(j))}{\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (i - j)} \right| = 1$$

3. D'autre part, nous avons

$$\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j} = \prod_{\substack{1 \leqslant i < j \leqslant n \\ \sigma(i) > \sigma(j)}} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j} \times \prod_{\substack{1 \leqslant i < j \leqslant n \\ \sigma(i) < \sigma(j)}} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j}$$

   Lorsque $\sigma(i) > \sigma(j)$, le rapport $\frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j} < 0$ et donc, le nombre de couples (i, j) avec $1 \leqslant i < j \leqslant n$ tels que $\sigma(i) > \sigma(j)$ est $I(\sigma)$ le nombre de d'inversions de σ et le signe de $\left(\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j} \right)$ est celui de $(-1)^{I(\sigma)}$ et donc :

$$\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j} = (-1)^{I(\sigma)} = \varepsilon(\sigma)$$

11.10.16 Proposition

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $\mathcal{S}_n$ le groupe de permations de $\mathbb{N}_n$. Alors, pour tout $\sigma_1 \in \mathcal{S}_n$ et tout $\sigma_2 \in \mathcal{S}_n$, nous avons :

$$\varepsilon(\sigma_1 \circ \sigma_2) = \varepsilon(\sigma_1) \times \varepsilon(\sigma_2)$$

Démonstration

En utilisant 11.10.15, nous avons :

$$\varepsilon(\sigma_1 \circ \sigma_2) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{\sigma_1 \circ \sigma_2(i) - \sigma_1 \circ \sigma_2(j)}{i - j}$$

Nous allons modifier cette expression :

$$\varepsilon(\sigma_1 \circ \sigma_2) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{\sigma_1 \circ \sigma_2(i) - \sigma_1 \circ \sigma_2(j)}{i - j} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{\sigma_1 \circ \sigma_2(i) - \sigma_1 \circ \sigma_2(j)}{\sigma_2(i) - \sigma_2(j)} \times \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{\sigma_2(i) - \sigma_2(j)}{i - j}$$

Nous reconnaissons déjà en $\displaystyle\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{\sigma_2(i) - \sigma_2(j)}{i - j}$, $\varepsilon(\sigma_2)$, la signature de σ_2

Il nous faut donc, maintenant, regarder de manière plus précise $\displaystyle\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{\sigma_1 \circ \sigma_2(i) - \sigma_1 \circ \sigma_2(j)}{\sigma_2(i) - \sigma_2(j)}$

σ_2 est une bijection de $\mathbb{N}_n$, et donc, pour chaque $x \in \mathbb{N}_n$ il existe un unique $i \in \mathbb{N}_n$ tel que $\sigma_2(i) = x$ et donc :

$$\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{\sigma_1 \circ \sigma_2(i) - \sigma_1 \circ \sigma_2(j)}{\sigma_2(i) - \sigma_2(j)} = \prod_{1 \leqslant x < y \leqslant n} \frac{\sigma_1(x) - \sigma_2(y)}{x - y}$$

Où nous avons posé :
- → $\sigma_2(i) = x$ et $\sigma_2(j) = y$ lorsque $\sigma_2(i) < \sigma_2(j)$
- → $\sigma_2(i) = y$ et $\sigma_2(j) = x$ lorsque $\sigma_2(i) > \sigma_2(j)$

Et donc

$$\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{\sigma_1 \circ \sigma_2(i) - \sigma_1 \circ \sigma_2(j)}{\sigma_2(i) - \sigma_2(j)} = \prod_{1 \leqslant x < y \leqslant n} \frac{\sigma_1(x) - \sigma_2(y)}{x - y} = \varepsilon(\sigma_1)$$

Ainsi $\varepsilon(\sigma_1 \circ \sigma_2) = \varepsilon(\sigma_1) \times \varepsilon(\sigma_2)$, ce que nous voulions démontrer

Remarque 42 :

1. La proposition 11.10.16 signifie que la signature d'une permutation **est un morphisme de groupe**

   En effet, $(\{-1; +1\}, \times)$ est un groupe multiplicatif de neutre $+1$ et la relation

   $$\varepsilon(\sigma_1 \circ \sigma_2) = \varepsilon(\sigma_1) \times \varepsilon(\sigma_2)$$

   pour tout $\sigma_1 \in \mathcal{S}_n$ et tout $\sigma_2 \in \mathcal{S}_n$ définit bien un homomorphisme de groupe.
2. Il est très facile de montrer que, si σ est une permutation de $\mathcal{S}_n$, l'application Φ ainsi définie :

   $$\begin{cases} \Phi : \mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_n & \longrightarrow & \mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_n \\ \qquad (i, j) & \longmapsto & \Phi[(i, j)] = (\sigma(i), \sigma(j)) \end{cases}$$

   est une bijection
3. Rappelons que la signature d'une transposition est -1 *(Cf 11.10.14)*

11.10.17 Proposition

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $\mathcal{S}_n$ le groupe de permations de $\mathbb{N}_n$.

1. La signature d'une permutation circulaire (ou cycle) de longueur k (ou d'ordre k est $(-1)^{k-1}$
2. Pour $\sigma \in \mathcal{S}_n$, si r est le nombre d'orbites dans la relation d'équivalence modulo σ (comme définie en 11.10.7), alors $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{n-r}$

Démonstration

1. D'après le théorème 11.10.11 un cycle de longueur k est le produit de $k-1$ transpositions. Ainsi, si γ est un cycle de longueur k, nous avons :

$$\gamma = \tau_1 \circ \tau_2 \circ \cdots \circ \tau_{k-1} \text{ et donc } \varepsilon(\gamma) = \prod_{j=1}^{k-1} \varepsilon(\tau_i) = (-1)^{k-1}$$

2. Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$. Nous considérons donc la relation d'équivalence définie en 11.10.7 à l'aide de σ
   (a) Notons $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \cdots, \mathcal{C}_r$ les r classes d'équivalence *(ou orbites)* modulo cette relation d'équivalence.
   Alors $\bigcup\limits_{k=1}^{r} \mathcal{C}_k = \mathbb{N}_n$ et si $i \neq j$, alors $\mathcal{C}_i \cap \mathcal{C}_j = \emptyset$
   (b) Dans ces orbites, il y a des singletons $\mathcal{C}_j = \{x\}$, c'est à dire des éléments qui sont en fait des points fixes par σ.
   Nous appelons donc $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \cdots, \mathcal{C}_s$ les orbites qui ne sont pas des singletons et $\mathcal{C}_{s+1}, \mathcal{C}_{s+2}, \cdots, \mathcal{C}_r$ les orbites qui sont des singletons
   (c) Pour $\mathcal{C}_j = \left\{x_1^j, x_2^j, \ldots, x_p^j\right\}$, nous notons c_j le cycle $c_j = \left(x_1^j, x_2^j, \ldots, x_p^j\right)$ et $l(c_j)$ la longueur de ce cycle. Notons que $l(c_j) = \text{Card } \mathcal{C}_j$.
   Nous avons donc $n = l(c_1) + l(c_2) + \cdots + l(c_s) + (r-s)$
   Les c_j ainsi construits sont des cycles disjoints tels que $\sigma = c_1 \circ c_2 \circ \cdots \circ c_s$
   (d) En utilisant le résultat 11.10.16, nous avons :

$$\begin{aligned} \varepsilon(\sigma) = & \ \varepsilon(c_1) \times \varepsilon(c_2) \times \cdots \times \varepsilon(c_s) \\ = & \ (-1)^{l(c_1)-1} \times (-1)^{l(c_2)-1} \times \cdots \times (-1)^{l(c_s)-1} \\ = & \ (-1)^{l(c_1)+l(c_2)+\cdots+l(c_s)-s} \\ = & \ (-1)^{n-r} \text{ puisque } n = l(c_1) + l(c_2) + \cdots + l(c_s) + (r-s) \end{aligned}$$

11.10.18 Théorème

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > 1$ et A_n est l'ensemble des permutations paires de $\mathbb{N}_n$

1. A_n est un sous groupe distingué de $\mathcal{S}_n$ contenant $\dfrac{n!}{2}$ éléments
2. A_n s'appelle sous-groupe alterné d'ordre n

Démonstration

1. A_n est un sous-groupe distingué de $\mathcal{S}_n$
   Si nous considérons

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \varepsilon : \mathcal{S}_n & \longrightarrow & \{-1;+1\} \\ \sigma & \longmapsto & \varepsilon(\sigma) \end{array} \right.$$

   ε est un homomorphisme de groupe de noyau $\ker \varepsilon = A_n$. Comme le noyau d'un homomorphisme est un sous-groupe distingué, A_n est un sous groupe distingué de $\mathcal{S}_n$
2. Card $A_n = \dfrac{n!}{2}$
   Dans la relation d'équivalence modulo A_n, toutes les classes d'équivalence ont même nombre d'éléments ; et dans cette relation, les 2 classes sont définies par A_n et τA_n où τ est une transposition de $\mathcal{S}_n$.
   Comme $A_n \cup \tau A_n = \mathcal{S}_n$ et que $A_n \cap \tau A_n = \emptyset$, 2Card $A_n = n!$, c'est à dire Card $A_n = \dfrac{n!}{2}$
   Une autre démonstration, ou idée de démonstration qui rejoint ce qui a été écrit ci-dessus, est de considérer l'application Ψ de A_n dans $\mathcal{S}_n \setminus A_n$ définie par :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \Psi : A_n & \longrightarrow & \mathcal{S}_n \setminus A_n \\ \sigma & \longmapsto & \Psi(\sigma) = \tau\sigma \end{array} \right.$$

Où τ est une transposition de $\mathcal{S}_n$. Il est facile de démontrer que Ψ est bijective (donc Card $A_n =$ Card $(\mathcal{S}_n \setminus A_n))$ et que $\mathcal{S}_n = A_n \cup (\mathcal{S}_n \setminus A_n)$ et donc Card $A_n = \dfrac{n!}{2}$

(En fait, c'est une recopie de la démonstration du théorème de Lagrange et A_n est un sous-groupe distingué d'indice 2)

11.11 Automorphisme d'un groupe

11.11.1 Rappel

Soit G un groupe. On appelle automorphisme du groupe G un isomorphisme de G sur lui-même

Remarque 43 :

1. L'ensemble des automorphismes de G est noté : $\mathrm{Aut}\,(G)$
2. La composée de 2 automorphismes de G est un automorphisme de G
3. L'application réciproque d'un automorphisme de G est aussi un automorphisme de G
4. L'application identique de G notée Id_G est aussi un automorphisme de groupe
5. Donc $\mathrm{Aut}\,(G)$ muni de la composition des applications est un groupe ; c'est un sous-groupe du groupe de toutes les permutations de G

11.11.2 Théorème de Cayley

Tout groupe G est isomorphe à un groupe de permutations

Démonstration

Soit $a \in G$ et considérons $f_a : G \longrightarrow G$ telle que pour tout $x \in G$, $f_a(x) = ax$

1. Pour tout $a \in G$, f_a est une bijection
   La démonstration s'appuie sur 11.2.2 et sur 11.2.6.
   (a) **f_a est injective.**
   En effet, soient $x \in G$ et $y \in G$ tels que $f_a(x) = f_a(y)$; ceci veut donc dire que $ax = ay$, et donc par les règles de simplifications dans un groupe, nous avons $x = y$.
   f_a est donc injective.
   (b) **f_a est surjective.**
   En effet, soit $y \in G$; existe-t-il $x \in G$ tels que $f_a(x) = y$? Ceci veut donc dire que $ax = y$, et donc par les règles de simplifications et d'équations dans un groupe, nous avons $x = a^{-1}y$.
   f_a est donc surjective.
   Donc, pour tout $a \in G$, f_a est une bijection et $(f_a)^{-1} = f_{a^{-1}}$
2. Soit T l'ensemble des fonctions f_a.
   Autrement dit,
   $$T = \{g \in \mathcal{S}_G \text{ telles que il existe } a \in G \text{ tel que } g = f_a\}$$
   $\mathcal{S}_G$ étant le groupe des permutations *(ou bijections)* de G, on montre que T est un sous groupe de $\mathcal{S}_G$
   (a) $T \neq \emptyset$, puisque $\mathrm{Id}_G \in T$; en effet, si $e \in G$ est l'élément neutre de G, alors, pour tout $x \in G$, $f_e(x) = ex = x$, et nous avons bien $f_e = \mathrm{Id}_G$, et donc $\mathrm{Id}_G \in T$
   (b) D'autre part, $f_a \circ f_b(x) = f_a(bx) = abx = f_{ab}(x)$, et donc $f_a \circ f_b = f_{ab}$ et la loi de composition des applications est une loi interne.
   (c) Donc $f_a \circ (f_b)^{-1} = f_a \circ f_{b^{-1}} = f_{ab^{-1}}$ et donc $f_a \circ (f_b)^{-1} \in T$
   T est donc un sous groupe de $\mathcal{S}_G$

3. On montre que G et T sont isomorphes
   Soit $\varphi : G \longrightarrow T$ telle que $\varphi(a) = f_a$
   (a) φ **est un morphisme**
   En effet, soient $a \in G$ et $b \in G$, alors $\varphi(ab) = f_{ab} = f_a \circ f_b = \varphi(a) \circ \varphi(b)$
   (b) φ **est injective**
   En effet, soient $a \in G$ et $b \in G$ tels que $\varphi(a) = \varphi(b)$; alors, nous avons, $f_a = f_b$, et donc, pour tout $x \in G$, $f_a(x) = f_b(x)$, ou, ce qui est équivalent, $ax = bx$. Par régularité des éléments dans un groupe (cf 11.2.2), nous avons $a = b$, et donc φ est injective
   (c) φ **est surjective**
   Voilà une question beaucoup plus simple !
   Soit $g \in T$; il existe alors $a \in G$ tel que $g = f_a$, et alors, comme $f_a = \varphi(a)$, on peut écrire qu'il existe $a \in G$ tel que $\varphi(a) = g$
   Et donc, φ est surjective
   φ est donc un isomorphisme et G est isomorphe à T

Remarque 44 :

Si G est un groupe fini, alors, f_a, qui est une permutation de G est définie par :

$$f_a \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ ax_1 & ax_2 & ax_3 & \cdots & ax_n \end{pmatrix}$$

f_a est une translation à gauche

11.11.3 Définition

On appelle représentation d'un groupe G, tout morphisme du groupe G dans un groupe de permutations

Remarque 45 :

1. Un groupe peut avoir plusieurs représentations.
2. **Par exemple,** le groupe diédral Δ_n est, par définition, un groupe de transformations de tous les points des n sommets d'un polygône P_n. La fonction qui associe à toute isométrie de P_n la permutation induite sur les n sommets qui est un élément de $\mathcal{S}_n$ est un isomorphisme de Δ_n sur un sous-groupe de $\mathcal{S}_n$
   C'est donc une représentaton de Δ_n
   Une autre représentation pourrait être donnée en représentant Δ_n comme isomorphe à un sous groupe T de $\mathcal{S}_{2n}$. C'est le théorème de Cayley qui nous montre cette possibilité en faisant une translation à gauche.

11.11.4 Théorème

Soit G un groupe et $\mathrm{Aut}(G)$ le groupe des automorphismes de G.
Pour tout $x \in G$, nous notons α_x l'application suivante :

$$\begin{cases} \alpha_x : G & \longrightarrow & G \\ \quad y & \longmapsto & \alpha_x(y) = xyx^{-1} \end{cases}$$

Alors :

1. Pour tout $x \in G$, $\alpha_x \in \mathrm{Aut}(G)$
2. L'application $x \longmapsto \alpha_x$ est un morphisme de G dans $\mathrm{Aut}(G)$

Démonstration

La démonstration de ces résultats ne pose aucune difficulté.

1. Montrons que pour tout $x \in G$, $\alpha_x \in \mathrm{Aut}(G)$
   Soit $x \in G$.
   - On montre que α_x est un morphisme de groupe.
     Soient $g \in G$ et $g' \in G$. Alors :
     $$\alpha_x(gg') = xgg'x^{-1} = xgx^{-1}xg'x^{-1} = \alpha_x(g)\,\alpha_x(g')$$
   - On montre que α_x est injective.
     Soit $g \in \ker \alpha_x$; alors :
     $$\alpha_x(g) = e \Longleftrightarrow xgx^{-1} = e \Longleftrightarrow xg = x \Longleftrightarrow g = e$$
     Donc $\ker \alpha_x = \{e\}$ et α_x est injective.
   - Soit $g' \in G$. Montrons qu'il existe $g \in G$ tel que $\alpha_x(g) = g'$, c'est à dire tel que $xgx^{-1} = g'$; il est clair que $g = x^{-1}g'x$ convient.

   α_x est donc un automorphisme du groupe G, c'est à dire $\alpha_x \in \mathrm{Aut}(G)$.
2. Montrons que l'application $x \longmapsto \alpha_x$ est un morphisme de G dans $\mathrm{Aut}(G)$
   On appelle φ l'application définie par :
   $$\left\{\begin{array}{rcl} \varphi : G & \longrightarrow & \mathrm{Aut}(G) \\ x & \longmapsto & \varphi(x) = \alpha_x \end{array}\right.$$
   Il faut donc démontrer que $\varphi(xy) = \alpha_{xy} = \alpha_x \circ \alpha_y = \varphi(x) \circ \varphi(y) = \alpha_x \circ \alpha_y$.
   Pour tout $g \in G$,
   $$\alpha_{xy}(g) = xyg(xy)^{-1} = xygy^{-1}x^{-1} = x\left(ygy^{-1}\right)x^{-1} = \alpha_x\left(ygy^{-1}\right) = \alpha_x(\alpha_y(g)) = \alpha_x \circ \alpha_y(g)$$
   Nous avons donc $\alpha_{xy} = \alpha_x \circ \alpha_y$, c'est à dire $\varphi(xy) = \varphi(x) \circ \varphi(y)$

Remarque 46 :

1. Les automorphismes de G du type α_x sont appelés les automorphismes intérieurs de G, et on note cet ensemble $\mathrm{Int}(G)$
2. L'ensemble des automorphismes intérieurs $\mathrm{Int}(G)$ est un sous-groupe de $\mathrm{Aut}(G)$
3. Si G est un groupe commutatif et $x \in G$, alors, pour tout $g \in G$,
   $$\alpha_x(g) = xgx^{-1} = xx^{-1}g = g$$
   Le seul automorphisme intérieur d'un groupe commutatif est l'identité.
4. **Attention !!** Un groupe commutatif peut avoir d'autre automorphismes que l'identité. On en déduit que l'ensemble des automorphismes intérieurs est bien distinct de $\mathrm{Aut}(G)$, l'ensemble de tous les automorphismes de G
   Par exemple, dans un groupe G commutatif, l'application $h : G \longrightarrow G$ tel que $h(x) = x^{-1}$ est un automorphisme de G qui n'est pas un automorphisme intérieur.

11.11.5 Proposition

Soit G un groupe

1. On appelle centre de G, l'ensemble $\mathrm{Z}(G)$ des éléments de G qui commutent avec tous les éléments de G, c'est à dire :
   $$\mathrm{Z}(G) = \{z \in G \text{ tels que } \forall g \in G\ ,\ zg = gz\}$$
2. On appelle φ l'application définie par :
   $$\left\{\begin{array}{rcl} \varphi : G & \longrightarrow & \mathrm{Int}(G) \\ x & \longmapsto & \varphi(x) = \alpha_x \end{array}\right.$$
   Alors $\ker \varphi = \mathrm{Z}(G)$

Démonstration

Soit $x \in \ker\varphi$, alors $\varphi(x) = \alpha_x = \mathrm{Id}_G$; ceci veut donc dire que, pour tout $g \in G$:

$$\alpha_x(g) = g \Longleftrightarrow xgx^{-1} = g \Longleftrightarrow xg = gx \Longleftrightarrow x \in \mathrm{Z}(G)$$

On a bien $\ker\varphi = \mathrm{Z}(G)$

Remarque 47 :

1. En particulier, $\mathrm{Z}(G)$ est un sous-groupe de G ; c'est un sous-groupe commutatif et distingué en G
2. D'après 11.7.6 le groupe quotient $G/\mathrm{Z}(G)$ est isomorphe à $\mathrm{Int}(G)$ groupe des automorphismes intérieurs de G.

11.11.6 Théorème

Soient G un groupe et $H \subset G$ un sous-groupe de G.
H est distingué en G si et seulement si H est invariant par tout automorphisme intérieur de G

Démonstration

C'est assez évident. En résumé :

$$H \text{ distingué en } G \Longleftrightarrow \text{pour tout } x \in G\ xHx^{-1} = H \Longleftrightarrow \text{pour tout } x \in G\ \alpha_x(H) = H$$

Remarque 48 :

C'est pour cette raison, que les sous-groupes distingués sont aussi appelés sous-groupes invariants

Exercice 41 :

Soit G un groupe. Démontrer que $\mathrm{Int}(G)$ est un sous-groupe distingué de $\mathrm{Aut}(G)$

11.12 Groupe opérant sur un ensemble

11.12.1 Groupe opérant sur un ensemble : première définition

Soit G un groupe et X un ensemble. On appelle $\mathcal{S}_X$ le groupe des permutations de X.
On dit que G opère dans X lorsque l'on s'est donné un morphisme de groupe de G dans $\mathcal{S}_X$

Remarque 49 :

Soit Φ le morphisme de G dans $\mathcal{S}_X$

1. Si e est l'élément neutre de G, alors $\Phi(e) = \mathrm{Id}_X$ et, pour tout $x \in X$, nous avons
$$\Phi(e)(x) = \mathrm{Id}_X(x) = x$$
2. Si $g_1 \in G$ et $g_2 \in G$ sont 2 éléments de G, alors $\Phi(g_1g_2) = \Phi(g_1) \circ \Phi(g_2)$, et pour tout $x \in X$,
$$\Phi(g_1g_2)(x) = \Phi(g_1) \circ \Phi(g_2)(x)$$

11.12.2 Groupe opérant sur un ensemble : seconde définition

On dit qu'un groupe G opère sur un ensemble X lorsqu'on a défini une application f :

$$\begin{array}{rcl} f : G \times X & \longrightarrow & X \\ (g, x) & \longmapsto & f[(g, x)] = gx \end{array}$$

Cette application f est appelée action de $g \in G$ sur $x \in X$ telle que l'on ait, pour tout $x \in X$ et tout $g \in G$:

- $ex = x$
- $(g_1g_2)x = g_1(g_2x)$

Remarque 50 :

Voici une seconde définition, équivalente à la première qui me semble cependant bien moins claire.

Exemple 22 :

1. Si T est un groupe de transformations formé de permutations de l'ensemble X, alors :
$$\begin{array}{rcl} f : T \times X & \longrightarrow & X \\ (t,x) & \longmapsto & f\left[(t,x)\right] = t(x) \end{array}$$
définit une action de T sur X
2. Plus généralement, toute représentation $h : G \longrightarrow T$ où T est un sous-groupe de $\mathcal{S}_X$ permet de définir une action de G dans X par :
$$\begin{array}{rcl} f : G \times X & \longrightarrow & X \\ (g,x) & \longmapsto & f\left[(g,x)\right] = h(g)\left[x\right] \end{array}$$
3. Le groupe symétrique $\mathcal{S}_n$ opère sur $\mathbb{N}_n$
4. **Exemples issus de l'algèbre linéaire**
Soient $\mathbb{K}$ un corps *(en général,* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$*)*, $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'anneau des matrices carrées à coefficients dans $\mathbb{K}$ et $\mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$ le groupe des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
   (a) $\mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$ opère sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par conjugaison ou similitude, en posant pour tout $P \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$:
$$\left\{ \begin{array}{rcl} S_P : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ M & \longmapsto & S_P(M) = PMP^{-1} \end{array} \right.$$
   (b) $\mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$ opère sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par congruence, en posant pour tout $P \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$:
$$\left\{ \begin{array}{rcl} S_P : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ M & \longmapsto & S_P(M) = PMP^t \end{array} \right.$$
   où P^t désigne la transposée de P
   (c) $\mathrm{GL}(n,\mathbb{K}) \times \mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$ opère sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, en posant pour tout $P \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$ et tout $Q \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$:
$$\left\{ \begin{array}{rcl} S_P : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ M & \longmapsto & S_P(M) = PMQ^{-1} \end{array} \right.$$
5. **L'application conjugaison ou automorphisme intérieur** φ_g défini pour tout $x \in G$ par $\varphi_g(x) = gxg^{-1}$ définit une action de G sur lui même. On dit que G agit sur lui même par conjugaison.
6. Soit S un sous groupe quelconque de G et $g \in G$; alors, $\varphi_g(S) = gSg^{-1}$ est un sous groupe de G comme image de'un sous-groupe par un automorphisme. En appelant $\mathcal{H}$ l'ensemble des sous-groupes de G, l'application
$$\left\{ \begin{array}{rcl} (G \times \mathcal{H}) & \longrightarrow & \mathcal{H} \\ (g,S) & \longmapsto & gSg^{-1} \end{array} \right.$$
est une action de G sur $\mathcal{H}$; on dit que G opère dans l'ensemble de ses sous-groupes par conjugaison.

11.12.3 Proposition

Soit G un groupe opérant dans un ensemble X
Soit, dans X, la relation $\mathcal{R}$ définie par :
$$x\mathcal{R}y \iff \exists g \in G \text{ tel que } y = gx$$
Alors, $\mathcal{R}$ est une classe d'équivalence
Les classes d'équivalence pour cete relation $\mathcal{R}$ sont appelées orbites de G dans X

Démonstration

On vérifie donc que $\mathcal{R}$ vérifie les axiômes de classe d'équivalence.

1. **Elle est réflexive**
   En effet, si $x \in X$, nous avons $ex = x$ et donc $x\mathcal{R}x$
2. **Elle est symétrique**
   En effet, soient $x \in X$ et $y \in X$ tels que $x\mathcal{R}y$; alors, il existe $g \in G$ tel que $y = gx$ ou encore tel que $y = \varphi(g)(x)$ ou $\varphi(g) \in \mathcal{S}_X$; donc $x = (\varphi(g))^{-1}(y)$; comme $\varphi(g)^{-1} = \varphi(g^{-1})$, il existe donc $g' = g^{-1}$ tel que $x = g'x$;, et donc $y\mathcal{R}x$
3. **Elle est transitive**
   Soient $x \in X$, $y \in X$ et $z \in X$ tels que $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$
   Il existe donc $g \in X$ tel que $y = \varphi(g)(x)$ et $g_1 \in X$ tel que $z = \varphi(g_1)(y)$. Donc,
   $$\begin{aligned} z = & \ \varphi(g_1)(y) \\ = & \ \varphi(g_1)(\varphi(g)(x)) \\ = & \ \varphi(g_1) \circ \varphi(g)(x) \\ = & \ \varphi(g_1 g)(x) \end{aligned}$$
   Il existe donc $g' = g_1 g$ tels que $z = g_1 g x$. et nous avons donc $x\mathcal{R}z$. La relation est donc transitive.

Remarque 51 :

1. Soit $x_0 \in X$; alors, l'orbite de x_0 est l'ensemble $\{\varphi(g)(x_0)$ où $g \in G\}$, parfois noté Gx_0
2. (a) Lorsqu'un groupe G agit sur lui-même par conjugaison, une orbite est appelée **Classe de conjugaison**.
   (b) Deux éléments de G sont dits **conjugués** lorsqu'ils sont dans la même orbite
   (c) C'est à dire que deux éléments g et g_1 sont conjugués s'il existe un élément $h \in G$ tels que $g_1 = hgh^{-1}$

Exercice 42 :

Montrer que 2 éléments conjugués ont même ordre.

11.12.4 Définition

Soit G un groupe et X un ensemble.
Soit $\varphi : G \times X \longrightarrow X$ une action de G sur X.

1. On dit qu'un point $x \in X$ est fixe pour un élément $g \in G$ si $\varphi(g)(x) = x$
2. L'ensemble F_x des éléments $h \in G$ laissant fixe x, est appelé stabilisateur de x
   $$F_x = \{h \in G \text{ tels que } \varphi(h)(x) = x\}$$

11.12.5 Proposition

Soit $x \in X$ et F_x le stabilisateur de x. Alors, F_x est un sous-groupe de G

Démonstration

1. Premièrement, $F_x \neq \emptyset$, puisque, comme $\varphi(e) = \mathrm{Id}_X$, nous avons $\varphi(e)(x) = x$
2. Soient $g \in F_x$ et $g' \in F_x$ et montrons que $gg' \in F_x$.
   Nous avons :
   $$\begin{aligned} \varphi(gg')(x) = & \ \varphi(g) \circ \varphi(g')(x) \\ = & \ \varphi(g)[\varphi(g')(x)] \\ = & \ \varphi(g)(x) \text{ car } g' \in F_x \\ = & \ x \text{ car } g \in F_x \end{aligned}$$
   Donc, $\varphi(gg')(x) = x$ et $gg' \in F_x$

3. Soit $g \in F_x$, et montrons que $g^{-1} \in F_x$
   En effet, $x = \varphi(e)(x) = \varphi\left(g^{-1}g\right)(x) = \varphi\left(g^{-1}\right)[\varphi(g)(x)] = \varphi\left(g^{-1}\right)(x)$, d'où $x = \varphi\left(g^{-1}\right)(x)$ et donc $g^{-1} \in F_x$

F_x est donc un sous-groupe de G

11.12.6 Proposition : lien entre stabilisateur et orbites

Soit G un groupe opérant sur un ensemble X dont l'action est notée Φ.
Soit $x \in X$ et F_x le stabilisateur de x. On appelle $\mathcal{O}_x$ l'orbite de x
Soit Ψ l'application ainsi définie :

$$\begin{cases} \Psi : G/F_x & \longrightarrow & \mathcal{O}_x \\ \dot{g} & \longmapsto & \Psi(\dot{g}) = \Phi(g)(x) \end{cases}$$

Ψ est une bijection entre l'ensemble des classes à gauche modulo le stabilisateur F_x et l'orbite $\mathcal{O}_x$.
En particulier si F_x est d'indice fini dans G, l'orbite $\mathcal{O}_x$ est finie et de cardinal $[G : F_x]$, l'indice de F_x dans G.

<u>**Démonstration**</u>

1. **Commençons par une remarque**

   Il faut faire attention au fait que l'application Ψ n'est pas un morphisme de groupes : en effet, nous avons $\mathcal{O}_x \subset X$, et, à priori, X n'est pas muni d'une structure algébrique. Par ailleurs le sous-groupe F_x n'est pas supposé distingué dans G.

2. **L'application Ψ est bien définie**
   Il faut, pour cela, montrer que, pour tout $g \in G$ et tout $g_1 \in G$, $\dot{g} = \dot{g_1} \Longrightarrow \Psi(\dot{g}) = \Psi(\dot{g_1})$
   Soient donc $g \in G$ et $g_1 \in G$ tels que $\dot{g} = \dot{g_1}$. Il existe donc $u \in F_x$ tel que $g = g_1 u$ et donc :

$$\Phi(g)(x) = \Phi(g_1 u)(x) = \Phi(g_1)[\Phi(u)(x)] = \Phi(g_1)(x)$$

   Et donc, $\Psi(\dot{g}) = \Psi(\dot{g_1})$

3. **L'application Ψ est bijective**
   → <u>Elle est injective</u>
   Soient donc $\dot{g} \in G/F_x$ et $\dot{g_1} \in G/F_x$ tels que $\Psi(\dot{g}) = \Psi(\dot{g_1})$.
   Nous avons alors $\Phi(g)(x) = \Phi(g_1)(x) \Longleftrightarrow \Phi\left(g g_1^{-1}\right)(x) = x$, ce qui se traduit par $g g_1^{-1} \in F_x$, et donc, dans G/F_x, nous avons $\overset{\bullet}{\overline{g g_1^{-1}}} = \dot{e}$. Or :

$$\overset{\bullet}{\overline{g g_1^{-1}}} = \dot{e} \Longleftrightarrow \dot{g}\ \overset{\bullet}{\overline{g_1^{-1}}} = \dot{g}\left(\dot{g_1}\right)^{-1} = \dot{e} \Longleftrightarrow \dot{g} = \dot{g_1}$$

   L'application Ψ est donc bien injective.
   → <u>Elle est surjective</u>
   Soit $y \in \mathcal{O}_x$; il existe alors $g \in G$ tel que $y = \Phi(g)(x)$, c'est à dire tel que $y = \Phi(g)(x) = \Psi(\dot{g})$ l'application Ψ est donc surjective
   Comme Ψ est à la fois injective et surjective, elle est donc bijective

Exercice 43 :

Soit G un groupe d'ordre 21 agissant sur un ensemble E à $n \geqslant 1$ éléments.

1. Quel est le cardinal possible de chaque orbite ?
2. Notons N_i le nombre d'orbites à i éléments, pour $i \geqslant 1$. En utilisant la partition de E en orbites, trouver une relation entre les N_i.

11.12.7 Définition

Soit G un groupe et X un ensemble.
On dit que G opère transitivement sur X quand, pour tout couple de points $(x, y) \in X \times X$, il existe au moins un élément $g \in G$ tel que $y = gx$

Remarque 52 :

Ceci veut donc dire que pour tout $x \in X$, l'orbite de x est X entier. C'est à dire qu'il n'y a qu'une seule orbite laquelle est X

Exercice 44 :

Considérons le groupe spécial linéaire $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ des matrices de déterminant 1, c'est à dire :

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) = \{M \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \ \text{tel que} \ \det M = 1\}$$

On considère le **demi-plan de Poincaré** :

$$\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que} \operatorname{Im}(z) > 0\}$$

$\mathbb{C}^{\mathcal{H}}$ désigne les applications de $\mathcal{H}$ dans $\mathbb{C}$

1. On considère l'application $\Phi : \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) :\longrightarrow \mathbb{C}^{\mathcal{H}}$ définie par :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \Phi : \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) : & \longrightarrow & \mathbb{C}^{\mathcal{H}} \\ M & \longmapsto & \Phi(M) \end{array} \right.$$

où, si $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\Phi(M)$ est l'application définie par :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \Phi(M) : \mathcal{H} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \Phi(M)(z) = \dfrac{az+b}{cz+d} \end{array} \right.$$

Démontrer que Φ définit une action de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{H}$.

2. Quel est le stabilisateur F_i du nombre complexe i de $\mathcal{H}$?
3. Montrer que l'action est transitive

Exercice 45 :

Soit G un groupe opérant dans un ensemble quelconque X. Soient $x \in X$ et $y \in X$, 2 éléments de X dans la même orbite.
Montrer que leurs stabilisateurs F_x et F_y sont conjugués dans G, c'est à dire qu'il existe $g \in G$ tel que $F_y = gF_xg^{-1}$

11.13 Quelques exercices complémentaires

Commençons par quelque chose de simple !!

Exercice 46 :

On considère le groupe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ muni de la multiplication matricielle.

1. L'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $a \in \mathbb{R}$ est-il un sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$
2. Même question pour l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 1 \end{pmatrix}$ avec $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ et $ab \neq 1$

Exercice 47 :

Soient G_1 et G_2, 2 groupes notés multiplicativement et $f : G_1 \longrightarrow G_2$ un morphisme de groupe.
Soit $x \in G_1$ d'ordre fini. Montrer que l'ordre de $f(x)$ divise celui de x

Exercice 48 :

Soit G un groupe noté multiplicativement. On appelle $Z(G)$ le centre de G.
On suppose que $G/Z(G)$ est monogène. Démontrer que G est abélien

Exercice 49 :

Nous considérons les permutations suivantes :

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 5 & 6 & 4 & 7 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 7 & 8 & 6 & 5 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 7 & 8 & 9 & 4 & 5 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

1. Décomposer les permutations a, b et c en produits de cycles et donner leur ordre
2. En plongeant a, b et c dans $\mathcal{S}_9$, calculez a^{201}, b^{198} et c^{1000}

Exercice 50 :

Cet exercice travaille beaucoup plus sur les structures. Les résultats présentés ici pourraient très bien figurer dans un cours
Soient n un entier plus grand ou égal à 2 et $\mathcal{S}_n$, le groupe symétrique de degré n.

1. Démontrer que $\mathcal{S}_n$ est engendré par les transpositions
$$(1\,2)\,,(2\,3)\,,\ldots,(n-1\,n)$$
(On montrera d'abord que toute transposition $\tau = (i\,j)$, avec $i \neq j$, est décomposable en produit de transpositions de la forme $(k\,k+1)$ avec $1 \leqslant k \leqslant n-1$)
2. En déduire que $\mathcal{S}_n$ est engendré par les transpositions
$$(1\,2)\,,(1\,3)\,,\ldots,(1\,n)$$
3. On pose $t = (1\,2)$ et $c = (1\,2\,3\cdots n)$; calculer c^k et $c^k t c^{-k}$ lorsque $1 \leqslant k \leqslant n-2$ et en déduire que t et c engendrent $\mathcal{S}_n$

Exercice 51 :

Une étude du sous-groupe alterné A_n
Pour $n > 3$ on désigne par $\mathcal{B}_n$ le sous-groupe de A_n engendré par les cycles
$$(1\ 2\ 3)\,,(1\ 2\ 4)\,,\ldots,(1\ 2\ n)$$

1. Montrer que $\mathcal{B}_n$ est un sous-groupe du groupe alterné A_n
2. Démontrer que si i et j sont deux entiers distincts $(i \neq j)$ tels que $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant n$, les permutations $(1\ 2)\,(i\ j)$ et $(i\ j)\,(1\ 2)$ appartiennent à $\mathcal{B}_n$
3. Montrer que $\mathcal{B}_n = A_n$

Exercice 52 :

Soient G_1 et G_2 deux groupes et $G_1 \times G_2$, le groupe produit de G_1 et G_2.
Nous appelons ϖ_1 et ϖ_2 les projections de $G_1 \times G_2$ sur G_1 et G_2 respectivement, c'est à dire :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \varpi_1 : G_1 \times G_2 & \longrightarrow & G_1 \\ (g_1, g_2) & \longmapsto & \varpi_1\left[(g_1, g_2)\right] = g_1 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \varpi_2 : G_1 \times G_2 & \longrightarrow & G_2 \\ (g_1, g_2) & \longmapsto & \varpi_2\left[(g_1, g_2)\right] = g_2 \end{array} \right.$$

On se donne deux homomorphismes de groupes $u_1 : G \longrightarrow G_1$ et $u_2 : G \longrightarrow G_2$ définis tous deux sur un groupe G, à valeurs dans G_1 et G_2 respectivement.
Montrer qu'il existe un homomorphisme h défini sur G à valeurs dans $G_1 \times G_2$, et un seul, tel que l'on ait $\varpi_1 \circ h = u_1$ et $\varpi_2 \circ h = u_2$.

Exercice 53 :

On considère deux groupes $(G_1, \star)$ et $(G_2, \top)$, deux homomorphismes de groupes f et g définis sur G_1 à valeurs dans G_2 et on appelle H l'ensemble des éléments $x \in G_1$ tels que $f(x) = g(x)$.

1. Montrer que H est un sous-groupe de $(G_1, \star)$.
2. On désigne par h l'injection canonique de H dans G_1
   (a) Montrer que $f \circ h = g \circ h$.
   (b) Montrer que si $(G_3, \diamond)$ est un groupe et h' un homomorphisme défini sur $(G_3, \diamond)$ à valeurs dans $(G_1, \star)$, tel que $f \circ h' = g \circ h'$, alors il existe un homomorphisme $\theta : G_3 \longrightarrow H$ défini sur G_3 à valeurs dans H, et un seul, tel que $h' = h \circ \theta$.

Exercice 54 :

Soient $(G, \star)$ un groupe abélien, G_1 et G_2 deux sous-groupes de G tels que $G_1 \subset G_2$.
Soient $\varpi_1 : G \longrightarrow G/G_1$ et $\varpi_2 : G \longrightarrow G/G_2$ les homomorphismes canoniques de G sur G/G_1 et de G sur G/G_2

1. Montrer qu'il existe un homomorphisme ρ défini sur G/G_1 à valeurs dans G/G_2 et un seul, tel que $\rho \circ \varpi_1 = \varpi_2$
2. Montrer que ρ est surjectif et que son noyau est G_2/G_1

Exercice 55 :

Soient G_0, G_1, G_2 des groupes, $f_1 : G_0 \longrightarrow G_1$, un homomorphisme surjectif de G_0 sur G_1, et $f_2 : G_0 \longrightarrow G_2$, un homomorphisme de G_0 sur G_2, tels que $\ker f_1 \subset \ker f_2$

1. Montrer qu'il existe un homomorphisme $g : G_1 \longrightarrow G_2$ défini sur G_1, à valeurs dans G_2, et un seul, tel que $f_2 = g \circ f_1$
2. Montrer que $\ker g = f_1(\ker f_2)$

Exercice 56 :

Si $(G, +)$ est un groupe abélien, nous désignerons par $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, G)$ l'ensemble des homomorphismes de $\mathbb{Z}$ dans G.

1. Montrer que tout homomorphisme f de $\mathbb{Z}$ dans G est complètement déterminé par la donnée de $f(1)$.
2. On munit $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, G)$ de la loi de composition suivante :
   Si $f \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, G)$ et $g \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, G)$, alors $f \oplus g$ est l'application de $\mathbb{Z}$ dans G définie en posant pour chaque entier rationnel $n \in \mathbb{Z}$,
   $$(f \oplus g)(n) = f(n) + g(n)$$
   Montrer que $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, G)$ devient ainsi un groupe abélien.
3. Soient G_1, G_2 et G_3, trois groupes abéliens, $f_1 : G_1 \longrightarrow G_2$ un homomorphisme de G_1 dans G_2 et $f_2 : G_2 \longrightarrow G_3$ un homomorphisme de G_2 dans G_3.
   On note f_1^* l'application de $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, G_1)$ dans $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, G_2)$ ainsi définie :
   $$\left\{ \begin{array}{rcl} f_1^* : \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, G_1) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, G_2) \\ g & \longmapsto & f_1^*(g) = f_1 \circ g \end{array} \right.$$
   On définit de manière analogue f_2^* par
   $$\left\{ \begin{array}{rcl} f_2^* : \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, G_2) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, G_3) \\ g & \longmapsto & f_2^*(g) = f_2 \circ g \end{array} \right.$$
   (a) Montrer que f_1^* et f_2^* sont des homomorphismes.
   (b) Montrer que si $G_1 = G_2$,et si f_1 est l'identité de G_1 alors f_1^* est l'identité de $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, G_1)$.
   (c) Montrer que $(f_2 \circ f_1)^* = f_2^* \circ f_1^*$
   (d) Montrer que si f_1 est injectif alors f_1^* est injectif.
   (e) Montrer que si f_1 est surjectif alors f_1^* est surjectif.

Exercice 57 :

Déterminer tous les morphismes de groupes de $(\mathbb{Q}, +)$ dans lui-même.

Exercice 58 :

Soient G un groupe abélien et $H \subset G$ un sous-groupe de G tel que le quotient G/H soit un groupe monogène infini.
Montrer qu'il existe un isomorphisme de $H \times (G/H)$ sur G.

Exercice 59 :

Voilà un exercice qui n'a rien de facile et qui nécessite une réelle attention
Soient G un groupe d'élément neutre e.
On appelle **sous-groupe dérivé** de G, que l'on note $\mathcal{D}(G)$ le sous-groupe engendré par les éléments de la forme $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$ où x et y sont des éléments de G.
Nous avons déjà démontré que $\mathcal{D}(G)$ est un sous-groupe distingué de G et que $G/\mathcal{D}(G)$ est un groupe abélien.

1. Montrer que si f est un homomorphisme de G dans un groupe commutatif H, il existe un homomorphisme $\overline{f}$ de $G/\mathcal{D}(G)$ dans H, et un seul, tel que $f = \overline{f} \circ p$ où p désigne la surjection canonique de G sur $G/\mathcal{D}(G)$
2. En déduire que si K est un sous-groupe distingué de G tel que G/K soit commutatif, alors $K \supset \mathcal{D}(G)$
3. On définit par récurrence le sous-groupe $\mathcal{D}^n(G)$ en posant $\mathcal{D}^0(G) = G$ et pour tout entier naturel n, $\mathcal{D}^{n+1}(G) = \mathcal{D}(\mathcal{D}^n(G))$.
   Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
   (a) Il existe un entier naturel k tel que $\mathcal{D}^k(G) = \{e\}$
   (b) Il existe p sous-groupes $G_1, \dots G_p$ de G tels que
   $$G_0 = G \supset G_1 \supset \cdots \supset G_p \supset G_{p+1} = \{e\}$$
   et pour tout entier q tel que $0 \leqslant q \leqslant p$,G_{q+1} est un sous-groupe distingué de G_q et G_q/G_{q+1} est un groupe commutatif.

   Un groupe G vérifiant ces conditions est appelé un **groupe résoluble.**

Exercice 60 :

Soit G un groupe d'élément neutre e, ayant au moins deux éléments et dont les seuls sous-groupes sont $\{e\}$ et G. Montrer que G est cyclique d'ordre premier.

Exercice 61 :

L'objectif de cet exercice est de démontrer que les seuls groupes d'ordre 6 à isomorphisme près sont $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +)$ et $\mathcal{S}_3$.
Soit donc G un groupe d'ordre 6.

1. Montrer que G possède au moins un élément d'ordre 3. On note x un tel élément.
2. Montrer que G possède au moins un élément d'ordre 2. On note y un tel élément.
3. Montrer que $G = \langle x, y \rangle$
4. Montrer que si G est abélien, alors G est cyclique d'ordre 6.
5. Si G n'est pas abélien, montrer que $yx = x^2y$. Ecrire la table de multiplication de G. Conclure que $G \cong \mathcal{S}_3$
6. Justifier que les groupes $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +)$ et $\mathcal{S}_3$ ne sont pas isomorphes

Exercice 62 :

Exercice où nous montrons que le fait d'être un sous-groupe distingué n'est pas une propriété transitive
Soit Δ_4 un groupe diédral à 8 éléments, de générateurs r et s avec r d'ordre 4, s d'ordre 2 et $rsrs = e$.
On pose $K = \langle s \rangle$ et $H = \langle s, r^2 \rangle$
Montrer que K est distingué dans H, H est distingué dans Δ_4 mais K n'est pas distingué dans Δ_4.

Exercice 63 :

Soient G un groupe d'ordre $n = pq$, avec $n \geqslant 2$, où p et q sont des nombres premiers, et e son élément neutre.

1. Montrer que G a au moins un sous-groupe distinct de $\{e\}$ et de G.
2. Si H et H' sont deux sous-groupes propres de G tels que $H \neq H'$, montrer que $H \cap H' = \{e\}$.
3. Soit H un sous-groupe de G. On appelle **normalisateur** de H l'ensemble $N(H)$ des éléments $x \in G$ tels que $xHx^{-1} = H$. Montrer que $N(H)$ est un sous-groupe de G.
4. Déterminer $N(H)$ si H est un sous-groupe distingué de G, et montrer que si H n'est pas un sous-groupe distingué de G alors $N(H) = H$.
5. On dit que deux sous-groupes H' et $H"$ de G sont conjugués, et on note $H'\mathcal{C}H"$, si et seulement si il existe un élément $x \in G$ tel que $H" = xH'x^{-1}$. Montrer que $\mathcal{C}$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble des sous-groupes de G.
6. Soit H un sous-groupe de G d'ordre p. Déterminer le nombre d'éléments de la classe d'équivalence de H modulo $\mathcal{C}$
7. Démontrer que G a au moins un sous-groupe distingué différent de $\{e\}$ et de G.

Exercice 64 :

Exercice où nous retrouvons le demi-plan de Poincaré
$\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients dans $\mathbb{R}$ et $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^+$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices dont le déterminant est strictement positif, c'est à dire :

$$(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^+ = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \text{ telles que } \det M > 0\}$$

1. $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ est le groupe des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui sont inversibles. Démontrer que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^+$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$
2. H est le sous ensemble de $\mathbb{C}$ des nombres complexes dont la partie imaginaire est strictement positive, c'est à dire :

   $$H = \{z \in \mathbb{C} \text{ telles que si } z = x + iy \text{ alors } y > 0\}$$

   Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$ et $d \in \mathbb{R}$ tels que $ad - bc > 0$. Soit $\varphi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par :

   $$\begin{cases} \varphi : \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \quad z & \longmapsto & \varphi(z) = \dfrac{az+b}{cz+d} \end{cases}$$

   Démontrer que si $z \in H$, alors $\varphi(z) \in H$.
3. On appelle $\mathcal{T}(H)$, l'ensemble des transformations φ de H dans H telles que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$, $d \in \mathbb{R}$ et $ad - bc > 0$ tels que nous ayions, pour tout $z \in H$, $\varphi(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$
   (a) Démontrer que φ est bijective et donner φ^{-1}
   (b) Démontrer que $\mathcal{T}(H)$ est un groupe.
4. Soit $\Phi : (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^+ \longrightarrow \mathcal{T}(H)$ définie par :

   $$\begin{cases} \Phi : (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^+ & \longrightarrow & \mathcal{T}(H) \\ \quad M & \longmapsto & \Phi(M) = \varphi_M \end{cases}$$

   Où, si $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^+$ alors $\Phi(M)(z) = \varphi_M(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$
   Démontrer que Φ est un homomorphisme de groupe

5. $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ est l'ensemble des matrice de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^+$ <u>à coefficients dans $\mathbb{Z}$</u> et de déterminant 1.
   (a) Vérifier que $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ est un sous-groupe de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^+$
   (b) Donner des exemples de matrices de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ sans élément nul
   (c) Soit $T \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ telle que $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   → Quelle est la forme de T^n pour $n \in \mathbb{Z}$?
   → Soit $\mathcal{T}$ l'ensemble $\mathcal{T} = \{T^n \text{ où } n \in \mathbb{Z}\}$. Démontrer que $\mathcal{T}$ est un sous-groupe de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$
   → Donner l'ensemble $\Phi(\mathcal{T})$
   (d) Soit $S \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ telle que $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   → Quelle est la forme de S^n pour $n \in \mathbb{Z}$?
   → Soit $\mathcal{N}$ l'ensemble $\mathcal{N} = \{S^n \text{ où } n \in \mathbb{Z}\}$. Démontrer que $\mathcal{N}$ est un sous-groupe de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$
   → Donner l'ensemble $\Phi(\mathcal{N})$
   (e) Pour $z \in H$, calculer $\varphi_S(z)$, $\varphi_T(z)$, $\varphi_{ST}(z)$ $\varphi_{(ST)^2}(z)$ et $\varphi_{(ST)^3}(z)$
6. Nous appelons G' le sous-groupe de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ engendré par S et T. Nous appelons aussi

$$K = \left\{ z \in H \text{ tel que } |z| \geqslant 1 \text{ et } -\frac{1}{2} \leqslant \mathrm{Re}(z) \leqslant \frac{1}{2} \right\}$$

   Soit $z \in H$
   (a) Soit $A > 0$ est un nombre réel donné. Démontrer que le nombre de couples $(c, d) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $|cz + d| \leqslant A$ est fini.
   (b) En déduire qu'il existe $g_0 \in G'$ tel que $\mathrm{Im}(\varphi_{g_0}(z))$ soit maximale, c'est à dire que pour tout $g \in G'$, $\mathrm{Im}(\varphi_g(z)) \leqslant \mathrm{Im}(\varphi_{g_0}(z))$
   (c) Montrer qu'il existe un entier $n_0 \in \mathbb{Z}$ tel que, pour tout $g \in G'$, $\varphi_{T^{n_0}g}(z)$ ait une partie réelle comprise entre $\dfrac{-1}{2}$ et $\dfrac{1}{2}$
   (d) Montrer que, pour le n_0 correspondant à g_0, si $z' = \varphi_{T^{n_0}g_0}(z)$ alors $z' \in K$
   (e) Démontrer que, pour tout $z \in H$, il existe $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ tel que $\Phi(M)(z) \in K$

11.14 Quelques exercices corrigés

11.14.1 Premières définitions

Exercice 1 :

1. *On considère les 4 matrices :*

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}$$

L'ensemble de ces 4 matrices, muni de la multiplication, forme-t-il un groupe ?

Nous appelons $\mathrm{I}_2 = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$; c'est la matrice identité et, clairement $\begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix} = -\mathrm{I}_2$.

Si $R_1 = \begin{pmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{pmatrix}$ et $R_2 = \begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}$, nous avons $R_1 = -R_2$ et $R_1R_2 = \mathrm{I}_2$, $R_1^2 = R_2^2 = -\mathrm{I}_2$.

D'où le tableau :

$\times$	I_2	$-\mathrm{I}_2$	R_1	R_2
I_2	I_2	$-\mathrm{I}_2$	R_1	R_2
$-\mathrm{I}_2$	$-\mathrm{I}_2$	I_2	R_2	R_1
R_1	R_1	R_2	$-\mathrm{I}_2$	I_2
R_2	R_2	R_1	I_2	$-\mathrm{I}_2$

L'ensemble de ces 4 matrices muni de la multiplication des matrices est donc un groupe fini. Ce groupe est même commutatif.

R_1 est une rotation du plan d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$, alors que R_2 est une rotation du plan d'angle $\dfrac{\pi}{2}$

2. *Dans cette question, j représente une racine cubique de 1 : $j = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$*
On considère les 4 matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}j & 0\\0 & j^2\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}j^2 & 0\\0 & j\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$$

L'ensemble de ces 4 matrices, muni de la multiplication, forme-t-il un groupe ?

Pour commencer, il faut remarquer que $1 + j + j^2 = 0$

Pour nous simplifier la vie, nous posons $\mathrm{I}_2 = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix}j & 0\\0 & j^2\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}j^2 & 0\\0 & j\end{pmatrix}$ et $S = \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$

Comme tout à l'heure, I_2 est l'élément neutre de la multiplication des matrices, et nous avons $S^2 = \mathrm{I}_2$

Par calcul, nous montrons que $AB = BA = \mathrm{I}_2$, $A^2 = B$ et $B^2 = A$, mais nous avons $AS = \begin{pmatrix}0 & j\\j^2 & 0\end{pmatrix}$ qui n'est pas un élément de l'ensemble considéré.

Ce n'est donc pas un groupe puisque la multiplication n'est pas interne.

Exercice 2 :

Soit G un groupe de neutre e, tel que pour tout $x \in G$, $x^2 = e$. Montrer que G est commutatif

Soient $x \in G$ et $y \in G$; il faut donc montrer que $xy = yx$.
La seule hypothèse que nous ayions est : $(xy)^2 = e$. Or, $(xy)^2 = xyxy = e$
En composant à droite par y, nous obtenons :

$$xyxyy = ey \iff xyxy^2 = y \iff xyx = y$$

En composant maintenant à gauche par x, nous obtenons :

$$xyx = y \iff xxyx = xy \iff x^2yx = xy \iff yx = xy$$

On vient donc de montrer que si, pour tout $x \in G$, $x^2 = e$, alors $xy = yx$

Exercice 4 :

Soient $(G_1, *)$, $(G_2, \top)$ 2 groupes ; on suppose $(G_2, \top)$ commutatif. Soit $\mathrm{Hom}(G_1, G_2)$ l'ensemble des homomorphismes de groupes de G_1 dans G_2.
On définit, dans $\mathrm{Hom}(G_1, G_2)$, la loi $\diamond$ par $(f \diamond g)(x) = f(x) \top g(x)$
La loi $\diamond$ définit-elle une loi de groupe sur $\mathrm{Hom}(G_1, G_2)$? Comment la structure de $(G_2, \top)$ intervient-elle ?

1. **Montrons que c'est une loi de composition interne**
   Il faut donc montrer que si $f \in \mathrm{Hom}(G_1, G_2)$ et $g \in \mathrm{Hom}(G_1, G_2)$, alors $f \diamond g \in \mathrm{Hom}(G_1, G_2)$
   Il faut donc démontrer que, pour tout $x \in G_1$ et tout $y \in G_2$, $f \diamond g(x * y) = (f \diamond g)(x) \top (f \diamond g)(y)$.
   Soient donc $x \in G_1$ et $y \in G_1$:
   $$\begin{aligned} f \diamond g(x * y) = &\ f(x * y) \top g(x * y) \\ = &\ (f(x) \top f(y)) \top (g(x) \top g(y)) \\ = &\ (f(x) \top g(x)) \top (f(y) \top g(y)) \text{ (associativité dans } (G_2, \top) \text{ et commutativité de } (G_2, \top)) \\ = &\ ((f \diamond g)(x)) \top ((f \diamond g)(y)) \end{aligned}$$
   $f \diamond g$ est donc un homomorphisme et $f \diamond g \in \mathrm{Hom}(G_1, G_2)$
   La structure de $(G_2, \top)$ intervient dans le fait où c'est un groupe commutatif
2. **Montrons que l'opération $\diamond$ est associative**
   Il faut donc montrer que, pour tout $f \in \mathrm{Hom}(G_1, G_2)$, tout $g \in \mathrm{Hom}(G_1, G_2)$ et tout $h \in \mathrm{Hom}(G_1, G_2)$, nous avons
   $$f \diamond (g \diamond h) = (f \diamond g) \diamond h$$
   Soit donc $x \in G_1$:
   $$\begin{aligned} f \diamond (g \diamond h)(x) = &\ f(x) \top (g \diamond h)(x) \\ = &\ f(x) \top (g(x) \top h(x)) \\ = &\ (f(x) \top g(x)) \top h(x) \text{ (associativité dans } (G_2, \top)) \\ = &\ (f \diamond g)(x) \top h(x) \\ = &\ ((f \diamond g) \diamond h)(x) \end{aligned}$$
   Nous avons donc, pour tout $x \in G$, $f \diamond (g \diamond h)(x) = ((f \diamond g) \diamond h)(x)$, c'est à dire que nous avons $f \diamond (g \diamond h) = (f \diamond g) \diamond h$
   La loi $\diamond$ est donc associative.
3. **Recherche d'un élément neutre pour la loi $\diamond$**
   Il faut donc trouver $\mathcal{N} \in \mathrm{Hom}(G_1, G_2)$ tel que, pour tout $f \in \mathrm{Hom}(G_1, G_2)$, $f \diamond \mathcal{N} = \mathcal{N} \diamond f = f$.
   Si cet homomorphisme $\mathcal{N}$ existe, alors, pour tout $x \in G_1$, nous avons :
   $$f \diamond \mathcal{N}(x) = f(x) \top \mathcal{N}(x) = f(x)$$
   Ainsi, pour tout $x \in G_1$, nous avons $\mathcal{N}(x) = e_2$ où e_2 est le neutre de $(G_2, \top)$.
   Il est facile de démontrer que $\mathcal{N} \in \mathrm{Hom}(G_1, G_2)$.
   La loi $\diamond$ admet donc un élément neutre qui est l'homomorphisme constant $\mathcal{N}$ défini par :
   $$\begin{cases} \mathcal{N} : G_1 & \longrightarrow & G_2 \\ \quad x & \longmapsto & \mathcal{N}(x) = e_2 \end{cases}$$
4. **Recherche de symétrique**
   Soit $f \in \mathrm{Hom}(G_1, G_2)$. Existe-t-il $f_s \in \mathrm{Hom}(G_1, G_2)$ telle que $f \diamond f_s = f_s \diamond f = \mathcal{N}$?
   C'est à dire que nous devrions avoir, pour tout $x \in G_1$ $f \diamond f_s(x) = \mathcal{N}(x) = e_2$.
   En ré-écrivant cette égalité, nous avons :
   $$f \diamond f_s(x) = f(x) \top f_s(x) = e_2$$
   Ainsi, $f_s(x) = [f(x)]^{-1} = f(x^{-1})$, puisque f est un homomorphisme de groupe
   Démontrons que f_s est un homomorphisme, c'est à dire $f_s \in \mathrm{Hom}(G_1, G_2)$.

Pour tout $x \in G_1$ et tout $y \in G_2$, nous avons :

$$\begin{array}{rl} f_s\left(x * y\right) = & f\left(\left(x * y\right)^{-1}\right) \\ = & f\left(y^{-1} * x^{-1}\right) \\ = & f\left(y^{-1}\right) \top f\left(x^{-1}\right) \\ = & f\left(x^{-1}\right) \top f\left(y^{-1}\right) \text{ par commutativité dans } \left(G_2, \top\right) \\ = & f_s\left(x\right) \top f_s\left(y\right) \end{array}$$

Donc $f_s \in \operatorname{Hom}\left(G_1, G_2\right)$

5. **L'opération $\diamond$ est-elle commutative ?**
   Autrement dit, est ce que, pour tout $f \in \operatorname{Hom}\left(G_1, G_2\right)$ et tout $g \in \operatorname{Hom}\left(G_1, G_2\right)$, avons nous $f \diamond g = g \diamond f$?
   Soit $x \in G_1$; alors :

$$\begin{array}{rl} f \diamond g\left(x\right) = & f\left(x\right) \top g\left(x\right) \\ = & g\left(x\right) \top f\left(x\right) \text{ (commutativité de } \left(G_2, \top\right)\text{)} \\ = & g \diamond f\left(x\right) \end{array}$$

   Ainsi, pour tout $x \in G_1$, $f \diamond g\left(x\right) = g \diamond f\left(x\right)$ et donc $f \diamond g = g \diamond f$

Il est évident que la structure du groupe $\left(G_2, \top\right)$ joue un rôle majeur, et en particulier la commutativité de ce groupe

Exercice 5 :

1. *S_3 est le groupe des permutations d'un ensemble à 3 éléments. Avons nous $\left(S_3, \circ\right)$ isomorphe à $\left(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +\right)$?*

   Il est clair que $\left(S_3, \circ\right)$ ne peut être isomorphe à $\left(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +\right)$. En effet, $\left(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +\right)$ est un groupe commutatif, alors que $\left(S_3, \circ\right)$ ne l'est pas.

   En effet, soient $\sigma_1 \in S_3$ et $\sigma_2 \in S_3$ définies par :

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

   Regardons maintenant les compositions $\sigma_1 \circ \sigma_2$ et $\sigma_2 \circ \sigma_1$:

$$\sigma_1 \circ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \sigma_2 \circ \sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

   Nous avons donc $\sigma_1 \circ \sigma_2 \neq \sigma_2 \circ \sigma_1$

2. *Dans $\mathbb{Z}/16\mathbb{Z}$, on considère l'ensemble $H = \{1, 3, 9, 11\}$. Vérifier que H est un groupe multiplicatif. Rechercher tous les homomorphismes de $\left(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +\right)$ dans $\left(H, \times\right)$. Parmi ces homomorphismes, quels sont les isomorphismes ?*

   $\Rightarrow$ **Faisons la table de multiplication de** $\left(H, \times\right)$

$\times$	1	3	9	11
1	1	3	9	11
3	3	9	11	1
9	9	11	1	3
11	11	1	3	9

   $\Rightarrow$ **Recherchons les homomorphismes de** $\left(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +\right)$ **dans** $\left(H, \times\right)$
   Nous appellerons φ un homomorphisme quelconque
   - ⋆ Tout d'abord, l'image du neutre de $\left(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +\right)$ est le neutre de $\left(H, \times\right)$, nous devons avoir $\varphi\left(0\right) = 1$

- ⋆ Puis, $\varphi(2) = \varphi(1+1) = (\varphi(1))^2$, ainsi que $\varphi(3) = (\varphi(1))^3$. Le choix de $\varphi(1)$ est donc important

⇒ Les homomorphismes sont donc :

- ⋆ L'homomorphisme constant, qui à tout $n \in (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +)$ fait correspondre $\varphi(n) = 1$; de manière claire, ce n'est pas un isomorphisme.
- ⋆ Soit $\varphi_1 : (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +) \longrightarrow (H, \times)$ défini par :

$$\varphi_1(0) = 1 \quad \varphi_1(1) = 3 \quad \varphi_1(2) = 9 \quad \varphi_1(3) = 11$$

  C'est un isomorphisme
- ⋆ Soit $\varphi_2 : (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +) \longrightarrow (H, \times)$ défini par :

$$\varphi_2(0) = 1 \quad \varphi_2(1) = 9 \quad \varphi_2(2) = 1 \quad \varphi_2(3) = 9$$

  Ce n'est clairement pas un isomorphisme, mais l'image de φ_2 est $\{1, 9\}$ qui est un sous-groupe de $(H, \times)$
- ⋆ Soit $\varphi_3 : (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +) \longrightarrow (H, \times)$ défini par :

$$\varphi_3(0) = 1 \quad \varphi_3(1) = 11 \quad \varphi_3(2) = 9 \quad \varphi_3(3) = 3$$

  C'est un isomorphisme

Exercice 6 :

Montrer qu'il n'y a pas de morphisme de groupes surjectif de $(\mathbb{Q}, +)$ dans $(\mathbb{Q}^{*+}, \times)$

Soit $\Phi : (\mathbb{Q}, +) \longrightarrow (\mathbb{Q}^{*+}, \times)$ un homomorphisme de groupes surjectif.
Comme $2 \in \mathbb{Q}^{*+}$, il existe $x \in \mathbb{Q}$ tel que $\Phi(x) = 2$. Soit $y = \dfrac{x}{2}$; comme $x \in \mathbb{Q}$, $y \in \mathbb{Q}$ et $x = 2y$. Ainsi,

$$\Phi(x) = \Phi(2y) = \Phi(y+y) = (\Phi(y))^2 = 2$$

Or, $\Phi(y) \in \mathbb{Q}^{*+}$. Nous avons donc trouvé un rationnel, $\Phi(y)$ tel que $(\Phi(y))^2 = 2$, ce qui est impossible, puisque contredisant l'irrationnalité de $\sqrt{2}$
IL n'y a donc pas de morphisme de groupes surjectif de $(\mathbb{Q}, +)$ dans $(\mathbb{Q}^{*+}, \times)$

11.14.2 Sous-groupes

Exercice 8 :

Soit $(G, *)$ un groupe. Le centre de $(G, *)$ est l'ensemble $Z(G)$ des éléments de G qui commutent avec tous les éléments de G, autrement dit : $Z(G) = \{x \in G$ tels que pour tout $y \in G$ $x * y = y * x\}$
Il faut montrer que $Z(G)$ est un sous-groupe de $(G, *)$

1. Premièrement, $Z(G) \neq \emptyset$, puisque si $e \in G$ est le neutre, pour tout $x \in G$, nous avons $x * e = e * x$, et donc, $e \in Z(G)$
2. Secondement, montrons que si $x \in Z(G)$ et $y \in Z(G)$, alors $x * y \in Z(G)$

   Comme $x \in Z(G)$, alors, pour tout $T \in G$, nous avons $x * T = T * x$; de même pour y. Il faut donc montrer que, pour tout $T \in G$, $(x * y) * T = T * (x * y)$

$$\begin{aligned}(x*y)*T = \;& x*(y*T) \text{ par associativité de la loi } * \\ =\;& x*(T*y) \text{ car } y \in Z(G) \\ =\;& (x*T)*y \text{ par associativité de la loi } * \\ =\;& (T*x)*y \text{ car } x \in Z(G) \\ =\;& T*(x*y) \text{ par associativité de la loi } *\end{aligned}$$

   Nous avons donc $(x * y) * T = T * (x * y)$
3. En troisième lieu, montrons, maintenant, que si $x \in Z(G)$, alors $x^{-1} \in Z(G)$

Il faut donc montrer que, pour tout $T \in G$, nous avons $x^{-1} * T = T * x^{-1}$
Posons $z = x^{-1} * T$; en composant à gauche par x, nous avons : $x * z = x * \left(x^{-1} * T\right)$.
Par associativité, nous avons : $x * z = \left(x * x^{-1}\right) * T = e * T = T$
Comme $x \in Z(G)$, nous avons $x * z = z * x$, ce qui fait que $T = z * x$
Maintenant, en composant à droite par x^{-1}, nous obtenons : $T * x^{-1} = (z * x) * x^{-1} = z * \left(x * x^{-1}\right) = z * e = z$
Nous avons donc $x^{-1} * T = z = T * x^{-1}$, ce qui montre que $x^{-1} \in Z(G)$
Ce que nous voulions

$Z(G)$ est donc un sous-groupe de $(G, *)$

Exercice 9 :

$\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels.
On considère les matrices $g(a,b) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$
Soit $G = \{g(a,b)$ avec $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$ et $|a| \neq |b|\}$. Démontrer que G est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$

1. Tout d'abord, on démontre que $G \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$
   Il suffit, pour cela de calculer le déterminant de $g(a,b)$. Clairement, $\det g(a,b) = a^2 - b^2 \neq 0$
2. D'autre part, la multiplication est interne ; nous avons, en effet :

$$g(a,b) \times g(c,d) = g(ac + bd, ad + bc)$$

3. D'autre part, l'inverse de $g(a,b)$ est aussi un élément de G. En effet :

$$(g(a,b))^{-1} = \frac{1}{a^2 - b^2} \begin{pmatrix} a & -b \\ -b & a \end{pmatrix} = g\left(\frac{a}{a^2 - b^2}, \frac{-b}{a^2 - b^2}\right)$$

Exercice 10 :

1. *Comment considérer $\mathcal{S}_3$ comme sous groupe de $\mathcal{S}_4$?*

   Soit $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ un ensemble à 4 éléments et $\mathcal{S}_4$ son groupe de permutations.
   Soit $X_3 = \{x_1, x_2, x_3\}$ un sous-ensemble de X à 3 éléments. On peut écrire $X = X_3 \cup \{x_4\}$ et nous considérons les permutations de $\mathcal{S}_4$ qui laissent $\{x_4\}$ invariant. Soit $\mathcal{U} \subset \mathcal{S}_4$ cet ensemble. Il est facile de montrer que $(\mathcal{U}, \circ)$ est un sous-groupe de $(\mathcal{S}_4, \circ)$ de cardinal 6, et donc isomorphe à $\mathcal{S}_3$
   Donc, considérer $\mathcal{S}_3$ comme sous groupe de $\mathcal{S}_4$, c'est plutôt considérer que $\mathcal{S}_3$ est isomorphe à un sous groupe de $\mathcal{S}_4$.
2. *Plus généralement, soit X un sous-ensemble d'un ensemble Y fini. Pouvons nous considérer $\mathcal{S}_X$ comme sous groupe de $\mathcal{S}_Y$?*

   La méthode est la même.
   Si $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ et $X_m = \{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$ avec $m \leqslant n$, nous avons $X = X_m \cap \{x_{m+1}, x_{m+2}, \cdots, x_n\}$, et nous considérons l'ensemble $\mathcal{U}$ des permutations laissant $\{x_{m+1}, x_{m+2}, \cdots, x_n\}$ invariant.
   Comme précédemment, $(\mathcal{U}, \circ)$ est un sous-groupe de $(\mathcal{S}_n, \circ)$ de cardinal $m!$, et donc isomorphe à $\mathcal{S}_m$
   Donc, considérer $\mathcal{S}_m$ comme sous groupe de $\mathcal{S}_n$, c'est plutôt considérer que $\mathcal{S}_m$ est isomorphe à un sous groupe $(\mathcal{U}, \circ)$ de $\mathcal{S}_n$

11.14.3 Relations d'équivalence

Exercice 13 :

Soient H et K deux sous-groupes finis d'un groupe G d'élément neutre e. Si H et K sont d'ordres premiers entre eux, montrer que $H \cap K = \{e\}$.

Soient H et K deux sous-groupes d'un groupe G, d'ordres premiers entre eux.
Alors $H \cap K$ est un sous-groupe de H, et aussi un sous-groupe de K.
Par le théorème de Lagrange, l'ordre de $H \cap K$ divise à la fois l'ordre de H et celui de K.
C'est donc un diviseur commun à l'ordre de H et à l'ordre de K. Comme ils sont premiers entre eux, on en déduit que $H \cap K$ est d'ordre 1, c'est-à-dire $H \cap K = \{e\}$.

Exercice 14 :

$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices inversibles de dimension n et à coefficients réels. $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ est le sous groupe des matrices de déterminants strictement positifs. Montrer que $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ est d'indice 2 dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$

Si nous considérons la relation d'équivalence modulo $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$, il est évident qu'il n'y a que 2 classes d'équivalences : $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ et $\mathrm{GL}_n^-(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ de déterminant négatif.
L'indice de $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est donc 2

Exercice 15 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et on appelle $F_n = \left\{q = \dfrac{a}{n} \text{ où } a \in \mathbb{Z}\right\}$. Quel est l'indice $[F_n : \mathbb{Z}]$ de $\mathbb{Z}$ dans F_n

⇒ Il est évident que F_n est un sous-groupe de $(\mathbb{Q}, +)$

⇒ Montrons que $\mathbb{Z} \subset F_n$

Soit $m \in \mathbb{Z}$; alors $m = \dfrac{m \times n}{n}$, et en posant $a = mn$, nous avons bien $m \in F_n$ et donc $\mathbb{Z} \subset F_n$.
De plus, $(\mathbb{Z}, +)$ est un sous-groupe de $(F_n, +)$

⇒ Pour connaitre l'indice $[F_n : \mathbb{Z}]$, il faut connaître le nombre de classes d'équivalences modulo $\mathbb{Z}$ dans F_n.
Or, si $\mathfrak{R}$ est cette relation d'équivalence, nous avons :

$$\frac{a}{n}\mathfrak{R}\frac{b}{n} \iff \frac{a}{n} - \frac{b}{n} \in \mathbb{Z} \iff (\exists k \in \mathbb{Z})\left(\frac{a}{n} - \frac{b}{n} = k\right)$$

Ainsi $\dfrac{\dot{a}}{n} = \left\{\dfrac{a}{n} + k \text{ où } k \in \mathbb{Z}\right\}$

Il n'y a que n classes d'équivalence dans cette relation d'équivalence ; elle sont du type $\dfrac{\dot{a}}{n}$ avec $0 \leqslant a \leqslant n-1$

- ⋆ Soient $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}$ tels que $0 \leqslant a < b \leqslant n-1$ alors $\dfrac{\dot{a}}{n} \cap \dfrac{\dot{b}}{n} = \emptyset$

  En effet, nous n'avons pas $\dfrac{a}{n}\mathfrak{R}\dfrac{b}{n}$.

  Si nous avions $\dfrac{a}{n}\mathfrak{R}\dfrac{b}{n}$, nous arriverions à une contradiction puisque $\dfrac{a}{n} - \dfrac{b}{n} = \dfrac{a-b}{n}$ et des inégalités $0 \leqslant a < b \leqslant n-1$, nous tirons $\dfrac{1-n}{n} \leqslant \dfrac{a-b}{n} \leqslant \dfrac{n-1}{n}$; ceci montre que $\dfrac{a}{n} - \dfrac{b}{n} \notin \mathbb{Z}$, ce qui est impossible sauf si $a - b = 0$, c'est à dire si $a = b$. Il y a donc contradiction.
- ⋆ Supposons $a \geqslant n$; faisons maintenant la division euclidienne de a par n.
  Nous avons $a = un + v$ avec $0 \leqslant v \leqslant n-1$ et donc $\dfrac{a}{n} = u + \dfrac{v}{n}$, et nous avons $\dfrac{a}{n}\mathfrak{R}\dfrac{v}{n}$
- ⋆ Il n'y a donc que n classes d'équivalence qui sont du type $\dfrac{\dot{a}}{n}$ où $0 \leqslant a \leqslant n-1$

L'indice $[F_n : \mathbb{Z}]$ de $\mathbb{Z}$ dans F_n est donc n

Exercice 16 :

1. *Montrer que $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, +)$ et $(\mathbb{U}, \times)$ sont isomorphes*

   Nous allons construire cet isomorphisme, et cet isomorphisme est immédiat. On l'appelle donc φ.
   Nous le définissons ainsi :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \varphi : (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, +) & \longrightarrow & (\mathbb{U}, \times) \\ \dot{x} & \longmapsto & \varphi(\dot{x}) = e^{ix} \end{array}\right.$$

$\Rightarrow$ <u>φ est un homomorphisme</u>
En effet, soient $\dot{x} \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ et $\dot{y} \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$; alors :

$$\varphi\left(\dot{x}+\dot{y}\right) = \varphi\left(\overset{\cdot}{x+y}\right) = e^{i(x+y)} = e^{ix} \times e^{iy} = \varphi\left(\dot{x}\right) \times \varphi\left(\dot{y}\right)$$

φ est donc un homomorphisme

$\Rightarrow$ <u>φ est injective</u>
Nous allons utiliser 2 modes de démonstrations

- $\star$ Tout d'abord, soit $\dot{x} \in \ker\varphi$; alors $\varphi\left(\dot{x}\right) = 1$ et donc $e^{ix} = 1$, c'est à dire $x = 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$, c'est à dire que $x \in \dot{0}$; ainsi, $\ker\varphi = \left\{\dot{0}\right\}$ et φ est injective.
- $\star$ Autre façon de faire qui est très proche en termes de démonstration :
Soient $\dot{x}$ et $\dot{y}$ tels que $\varphi\left(\dot{x}\right) = \varphi\left(\dot{y}\right)$. Alors :

$$\varphi\left(\dot{x}\right) = \varphi\left(\dot{y}\right) \Longleftrightarrow e^{ix} = e^{iy} \Longleftrightarrow e^{i(x-y)} = 1 \Longleftrightarrow x - y = 2k\pi \Longleftrightarrow \dot{x} = \dot{y}$$

φ est donc bien injective

$\Rightarrow$ <u>φ est surjective</u>
Soit $z \in \mathbb{U}$, alors $z = e^{i\arg z}$, et il existe donc dans $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ $\dot{x} = \dot{\arg} z$ tel que $\varphi\left(\dot{x}\right) = z$

φ est donc un isomorphisme et les deux groupes $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, +)$ et $(\mathbb{U}, \times)$ sont isomorphes. Il est possible de définir φ^{-1} par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \varphi^{-1} : (\mathbb{U}, \times) & \longrightarrow & (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, +) \\ z & \longmapsto & \varphi^{-1}(z) = \dot{\arg} z \end{array}\right.$$

2. *Montrer que $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, +)$ et $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, +)$ sont isomorphes*

Dans un premier temps, on peut remarquer que si $x \in [0; 2\pi[$, alors $\dfrac{x}{2\pi} \in [0; 1[$ d'où une idée d'homomorphisme ψ :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \psi : (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, +) & \longrightarrow & (\mathbb{R}/\mathbb{Z}, +) \\ x & \longmapsto & \psi(x) = \dfrac{\dot{x}}{2\pi} \end{array}\right.$$

$\Rightarrow$ <u>ψ est un homomorphisme</u>
En effet, soient $\dot{x} \in (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, +)$ et $\dot{y} \in (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, +)$, alors :

$$\psi\left(\dot{x}+\dot{y}\right) = \psi\left(\overset{\cdot}{x+y}\right) = \frac{\overset{\cdot}{x+y}}{2\pi} = \frac{\dot{x}}{2\pi} + \frac{\dot{y}}{2\pi} = \psi\left(\dot{x}\right) + \psi\left(\dot{y}\right)$$

ψ est donc un homomorphisme

$\Rightarrow$ <u>ψ est un homomorphisme injectif</u>
En effet, soient $\dot{x} \in (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, +)$ et $\dot{y} \in (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, +)$ tels que $\psi\left(\dot{x}\right) = \psi\left(\dot{y}\right)$, alors :

$$\psi\left(\dot{x}\right) = \psi\left(\dot{y}\right) \Longleftrightarrow \frac{\dot{x}}{2\pi} = \frac{\dot{y}}{2\pi} \Longleftrightarrow \frac{x}{2\pi} = \frac{y}{2\pi} + k \text{ où } k \in \mathbb{Z} \Longleftrightarrow x = y + 2k\pi \Longleftrightarrow \dot{x} = \dot{y} \text{ dans } (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, +)$$

Et donc ψ est bien un homomorphisme injectif

$\Rightarrow$ <u>ψ est un homomorphisme surjectif</u>
Soit $\dot{y} \in (\mathbb{R}/\mathbb{Z}, +)$; existe-t-il $\dot{x} \in (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, +)$ tel que $\psi(x) = \dot{y}$

Il suffit donc de poser $\dot{x} = \overset{\cdot}{2\pi y}$ et alors $\psi(x) = \psi\left(\overset{\cdot}{2\pi y}\right) = \dfrac{\overset{\cdot}{2\pi y}}{2\pi} = \dot{y}$

ψ est donc un isomorphisme et les groupes $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, +)$ et $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, +)$ sont isomorphes.

3. *Montrer que $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, +)$ et $(\mathbb{U}, \times)$ sont isomorphes*

Il suffit de faire les compositions $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, +) \xrightarrow{\psi^{-1}} (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, +) \xrightarrow{\varphi} (\mathbb{U}, \times)$.
Nous composons ainsi 2 isomorphimes et donc $\varphi \circ \psi^{-1} : (\mathbb{R}/\mathbb{Z}, +) \longrightarrow (\mathbb{U}, \times)$ est un isomorphisme de groupes.
Il est possible d'expliciter clairement $\varphi \circ \psi^{-1}$:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \varphi \circ \psi^{-1} : (\mathbb{R}/\mathbb{Z}, +) & \longrightarrow & (\mathbb{U}, \times) \\ x & \longmapsto & \varphi \circ \psi^{-1}(x) = e^{2i\pi x} \end{array}\right.$$

Les groupes $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, +)$ et $(\mathbb{U}, \times)$ sont bien isomorphes

Exercice 17 :

Avons nous $(2(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}),+)$ isomorphe à $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z},+)$?

Dans un premier temps, nous allons étudier $(2(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}),+)$, et surtout en faire sa table d'addition.
Tout d'abord $2(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}) = \{0,2,4,6,8,10\}$

$+$	0	2	4	6	8	10
0	0	2	4	6	8	10
2	2	4	6	8	10	0
4	4	6	8	10	0	2
6	6	8	10	0	2	4
8	8	10	0	2	4	6
10	10	0	2	4	6	8

S'il existe un isomorphisme $\varphi : (2(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}),+) \longrightarrow (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z},+)$, alors $\varphi(0) = 0$, et φ est entièrement déterminé par $\varphi(1)$

- ⋆ Premier homomorphisme :

$$\varphi(0) = 0 \quad \varphi(1) = 2 \quad \varphi(2) = 4 \quad \varphi(3) = 6 \quad \varphi(4) = 8 \quad \varphi(5) = 10$$

Cet homomorphisme est bien un isomorphisme

- ⋆ Second homomorphisme :

$$\varphi(0) = 0 \quad \varphi(1) = 4 \quad \varphi(2) = 8 \quad \varphi(3) = 0 \quad \varphi(4) = 4 \quad \varphi(5) = 8$$

Cet homomorphisme n'est pas un isomorphisme, et $\mathrm{Im}\varphi = \{0,4,8,\}$ qui est un sous-groupe de $(2(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}),+)$

- ⋆ Troisième homomorphisme :

$$\varphi(0) = 0 \quad \varphi(1) = 6 \quad \varphi(2) = 0 \quad \varphi(3) = 6 \quad \varphi(4) = 0 \quad \varphi(5) = 6$$

Cet homomorphisme n'est pas un isomorphisme, et $\mathrm{Im}\varphi = \{0,6\}$ qui est un sous-groupe de $(2(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}),+)$

- ⋆ Quatrième homomorphisme :

$$\varphi(0) = 0 \quad \varphi(1) = 8 \quad \varphi(2) = 4 \quad \varphi(3) = 0 \quad \varphi(4) = 8 \quad \varphi(5) = 4$$

Cet homomorphisme n'est pas un isomorphisme, et $\mathrm{Im}\varphi = \{0,4,8\}$ qui est un sous-groupe de $(2(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}),+)$

Nous avons 4 homomorphismes dont un seul est un isomorphisme.
En conclusion, $(2(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}),+)$ est isomorphe à $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z},+)$

Exercice 18 :

On considère $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ le sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ formé des matrices de déterminant $+1$
On considère les sous-groupes H et K de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ engendrés respectivement par

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Déterminer les éléments des espaces quotients $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/H$ et $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/K$

⇒ **Détermination de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/H$**

Appelons C la matrice $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ Par calculs, nous obtenons $C^2 = -\mathrm{Id}_2$, $C^3 = -C$ et $C^4 = \mathrm{Id}_2$, de telle sorte que nous montrons que H est un groupe à 4 éléments :

$$H = \{\mathrm{Id}_2, C, -\mathrm{Id}_2, -C\}$$

Pour une matrice $A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ avec $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $ad - bc = 1$,

⋆ La classe à gauche de A notée AH est donnée par :

$$AH = \{A, AC, -A, -AC\} \text{ avec } AC = \begin{pmatrix} -b & a \\ -d & c \end{pmatrix}$$

⋆ La classe à droite de A notée HA est donnée par :

$$AH = \{A, CA, -A, -CA\} \text{ avec } CA = \begin{pmatrix} c & d \\ -a & -b \end{pmatrix}$$

⇒ **Détermination de** $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/K$

Appelons D la matrice $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Par calculs, et avec une démonstration par récurrence, nous démontrons que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, nous avons $D^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et donc, le groupe K est défini par :

$$K = \{D^n \text{ avec } n \in \mathbb{Z}\}$$

⋆ La classe à gauche de A notée AK est donnée par :

$$AK = \{AD^n \text{ avec } n \in \mathbb{Z}\} \text{ et } AD^n = \begin{pmatrix} a & an+b \\ c & cn+d \end{pmatrix}$$

⋆ La classe à droite de A notée KA est donnée par :

$$AK = \{D^nA \text{ avec } n \in \mathbb{Z}\} \text{ avec } D^nA = \begin{pmatrix} a+nc & b+nd \\ c & d \end{pmatrix}$$

11.14.4 Sous-groupes distingués

Exercice 21 :

Montrer que l'ensemble $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ des matrices de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ de déterminant strictement positif est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ puis qu'il est distingué dans ce groupe.

Soit donc $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ de déterminant strictement positif.

⇒ $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ **est un sous-groupe de** $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$

⋆ Il est évident que $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R}) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et que $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R}) \neq \emptyset$ puisque la matrice identité d'ordre n notée Id_n est un élément de $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ puisque $\det \mathrm{Id}_n = 1$

⋆ D'autre part, pour $M \in \mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ et $N \in \mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$, nous avons $MN^{-1} \in \mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$; en effet :

$$\det\left(MN^{-1}\right) = \det M \times \det\left(N^{-1}\right) = \det M \times (\det N)^{-1} = \frac{\det M}{\det N}$$

Comme $\det M > 0$ et $\det N > 0$, nous avons $\det\left(MN^{-1}\right) > 0$ et donc $MN^{-1} \in \mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$

Cela prouve que $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$

⇒ **Montrons que** $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ **est distingué en** $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$

Il faut donc montrer que pour tout $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et tout $N \in \mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$, nous avons $MNM^{-1} \in \mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$, c'est à dire qu'il faut démontrer que $\det MNM^{-1} > 0$; or :

$$\det MNM^{-1} = \det M \det N \det M^{-1} = \det M \det N (\det M)^{-1} = \det N > 0$$

$\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ est donc distingué en $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$

Exercice 22 :

Soit G un groupe ; $H_1 \triangleright G$ et $H_2 \triangleright G$ 2 sous-groupes distingués en G. Est-ce que $H_1 \cap H_2$ est un sous-groupe distingué en G ?

On appelle $H = H_1 \cap H_2$.

Soit $x \in H$; alors $x \in H_1$ et $x \in H_2$. Pour tout $z \in G$, $zxz^{-1} \in H_1$ car H_1 est distingué ; de même, et pour les mêmes raisons, $zxz^{-1} \in H_2$, et donc $zxz^{-1} \in H$ et H est donc distingué en G

Exercice 23 :

Soient G et G' deux groupes et $f : G \longrightarrow G'$ un morphisme de groupes.

1. *Soit $H' \triangleright G'$ un sous-groupe distingué en G'. Démontrer que $f^{-1}(H')$ est distingué en G*

   Soient $g \in G$ et $u \in f^{-1}(H')$; il faut que nous démontrions que $gug^{-1} \in f^{-1}(H')$
   Soit $z = gug^{-1}$; alors, $f(z) = f\left(gug^{-1}\right) = f(g)\, f(u)\, f(g)^{-1}$. Par construction, $f(u) \in H'$, et H' étant distingué en G', nous avons $f(g)\, f(u)\, f(g)^{-1} \in H'$, c'est à dire $f(z) \in H'$, et donc $z \in f^{-1}(H')$.
   Ce que nous voulions

2. *Démontrer que si f est surjective, alors, pour tout sous groupe $H \triangleright G$ distingué en G, alors, $f(H)$ est distingué en G'*

   Il faut donc démontrer que, pour tout $x \in G'$ et tout $y \in f(H)$, nous avons $xyx^{-1} \in f(H)$
   Soit donc $x \in G'$ et $y \in f(H)$
   — f étant surjective, il existe $g \in G$ tel que $f(g) = x$, et donc $f\left(g^{-1}\right) = f(g)^{-1} = x^{-1}$
   — Il existe aussi $h \in H$ tel que $f(h) = y$
   — Donc : $xyx^{-1} = f(g)\, f(h)\, f(g)^{-1} = f\left(ghg^{-1}\right)$
   H étant distingué, $ghg^{-1} \in H$, et donc $f\left(ghg^{-1}\right) \in f(H)$, c'est à dire $xyx^{-1} \in f(H)$
   $f(H)$ est bien distingué en G'

Exercice 24 :

Soit G un groupe et $\mathfrak{R}$ une relation d'équivalence sur G.
On suppose que cette relation $\mathfrak{R}$ est compatible avec la loi de groupe, c'est à dire :

$$(\forall x \in G)\,(\forall y \in G)\,(\forall x_1 \in G)\,(\forall y_1 \in G)\,\left((x \mathfrak{R} y \text{ et } x_1 \mathfrak{R} y_1) \Longrightarrow (x x_1 \mathfrak{R} y y_1)\right)$$

Pour nous simplifier la vie, nous appelons e l'élément neutre de G

1. *On appelle H la classe de l'élément neutre. Montrer que H est un sous-groupe distingué de G*

   Nous avons donc $H = \{x \in G \text{ tels que } x \mathfrak{R} e\}$
   — H est un sous-groupe de G
   - Tout d'abord, H est non vide puisque $e \in H$
   - Soit $x \in H$ et $y \in H$; alors, par définition, $x \mathfrak{R} e$ et $y \mathfrak{R} e$; par compatibilité de la relation $\mathfrak{R}$ avec l'opération de groupe nous avons $xy \mathfrak{R} e$
     La multiplication est donc interne dans H
   - Soit $x \in H$, alors $x \mathfrak{R} e$; de la réflexivité de la relation d'équivalence $\mathfrak{R}$, nous avons $x^{-1} \mathfrak{R} x^{-1}$, et maintenant, par compatibilité de la relation $\mathfrak{R}$ avec l'opération de groupe nous avons $xx^{-1} \mathfrak{R} ex^{-1} \Longleftrightarrow x^{-1} \mathfrak{R} e$, c'est à dire que $x^{-1} \in H$

   H est donc un sous groupe de G
   — H est un sous-groupe distingué de G
   Soient $x \in G$ et $h \in H$; il faut donc montrer que $xhx^{-1} \in H$.
   Pour commencer, $h \in H \Longleftrightarrow h \mathfrak{R} e$ et, par réflexivité de $\mathfrak{R}$, nous avons $x \mathfrak{R} x$ et $x^{-1} \mathfrak{R} x^{-1}$.
   Doinc :

   $$\begin{aligned} h \mathfrak{R} e &\Longrightarrow xh \mathfrak{R} xe \Longleftrightarrow xh \mathfrak{R} x \text{ Par compatibilité de la relation avec les opérations de groupe} \\ &\Longrightarrow xhx^{-1} \mathfrak{R} xx^{-1} \Longleftrightarrow xhx^{-1} \mathfrak{R} \text{ Par compatibilité de la relation avec les opérations de groupe} \end{aligned}$$

   Nous avons donc $xhx^{-1} \in H$
   $H = \dot{e}$ est donc un sous-groupe distingué en G

2. *Montrer que $(\forall x \in G)\,(\forall y \in G)\,\left((x \mathfrak{R} y) \Longleftrightarrow \left(yx^{-1} \in H\right)\right)$*

   La démonstration est évidente, et nous procédons par équivalence.
   Soient donc $x \in G$ et $y \in G$ tels que $x \mathfrak{R} y$. Alors :

   $$\left((x \mathfrak{R} y) \text{ et } \left(x^{-1} \mathfrak{R} x^{-1}\right) \Longleftrightarrow \left(yx^{-1} \mathfrak{R} xx^{-1}\right) \Longleftrightarrow \left(yx^{-1} \mathfrak{R} e\right) \Longleftrightarrow \left(yx^{-1} \in H\right)\right)$$

3. *Plus généralement, pour H sous-groupe distingué de G, montrer que la relation d'équivalence sur G $x\mathfrak{R}y \Longleftrightarrow xy^{-1} \in H$ est compatible avec la loi de groupe de G*

   Soient $x \in G$, $y \in G$, $z \in G$ et $t \in G$ tels que $x\mathfrak{R}y$ et $z\mathfrak{R}t$; montrons que $zx\mathfrak{R}ty$
   - Premièrement, $x\mathfrak{R}y \Longleftrightarrow xy^{-1} \in H$ et $z\mathfrak{R}t \Longleftrightarrow zt^{-1} \in H$
   - Ensuite, H étant distingué en G, nous avons $zxy^{-1}z^{-1} \in H$
   - Le produit étant interne, $\left(zxy^{-1}z^{-1}\right)\left(zt^{-1}\right) \in H$. Or :

   $$\left(zxy^{-1}z^{-1}\right)\left(zt^{-1}\right) = zxy^{-1}\left(z^{-1}z\right)t^{-1} = zxy^{-1}t^{-1} = zx\,(ty)^{-1}$$

     Donc $= zx\,(ty)^{-1} \in H$ et nous avons donc $zx\mathfrak{R}ty$

   Ce que nous voulions

Exercice 25 :

Soit G un groupe, H sous-groupe distingué de G et K sous-groupe de H

1. *On appelle $HK = \{g \in G$ tel que $g = hk$ où $h \in H$ et $k \in K\}$*

   (a) *Montrer que $HK = KH$*

   - On montre que $HK \subset KH$

     Soit $x \in HK$; il existe alors $h \in H$ et $k \in K$ tels que $x = hk$. Or, $x = kk^{-1}hk$ et le groupe H étant distingué, $k^{-1}hk = h' \in H$. Donc, $x = kh' \in KH$.

     Ainsi, $HK \subset KH$
   - On montre que $KH \subset HK$

     On démontre, avec les mêmes arguments que $KH \subset HK$ en évrivant $y = kh = khk^{-1}k$

   Donc, $HK = KH$

   (b) *Montrer que HK est un sous groupe de G*

   - HK est clairement non vide puisque $e \in HK$
   - Soient $x \in HK$ et $y \in HK$.

     Alors, il existe $h \in H$ et $k \in K$ tels que $x = hk$; de même,il existe $h' \in H$ et $k' \in K$ tels que $y = h'k'$.

     $$xy = (hk)(h'k') = h\left(kh'k^{-1}\right)kk'$$

     H étant distingué, nous avons $kh'k^{-1} \in H$ et donc $h\left(kh'k^{-1}\right) \in H$.

     K étant un groupe, $kk' \in K$ et nous en déduisons que $xy \in HK$

     D'autre part, $x^{-1} = k^{-1}h^{-1} = \left(k^{-1}h^{-1}\right)kk^{-1} = \left(k^{-1}h^{-1}k\right)k^{-1}$.

     Comme H est distingué, $k^{-1}h^{-1}k \in H$ et K étant un groupe, $k^{-1} \in K$, et donc $x^{-1} \in HK$

   (c) *Montrer que si, de plus, K est distingué en G, alors HK est un sous groupe distingué de G*

   Soit $z \in HK$. Alors, il existe $h \in H$ et $k \in K$ tels que $z = hk$. Soit $u \in G$; alors : $uzu^{-1} = uhku^{-1} = uhu^{-1}uku^{-1}$

   H étant distingué, $uhu^{-1} \in H$ et $uku^{-1} \in K$ et donc $uzu^{-1} \in HK$ et HK est bien distingé

   (d) *Montrer que H est un sous-groupe distingué de KH*

   Soit $u \in KH$ et $h \in H$. Il faut montrer que $uhu^{-1} \in H$.

   Il existe $k \in H$ et $h \in H$ tels que $u = kh'$; et alors :

   $$uhu^{-1} = (kh')\,h\,(kh')^{-1} = (kh')\,hh'^{-1}k^{-1} = k\left(h'hh'^{-1}\right)k^{-1}$$

   De la structure de groupe de H, $h'hh'^{-1} \in H$, et du fait que H soit distingué en G, $k\left(h'hh'^{-1}\right)k^{-1} \in H$.

   Donc, H est un sous-groupe distingué de KH

2. *Montrer que $K \cap H$ est distingué en K*

   Soit $u \in K \cap H$ et $k \in K$. Alors : $kuk^{-1} \in K$

   H étant distingué en G, alors, comme $u \in H$, $kuk^{-1} \in H$ et donc $kuk^{-1} \in K \cap H$.

   Ce que nous voulions.

Exercice 26 :

Soit G un groupe et soient $x \in G$ et $y \in G$. On appelle commutateur de x et de y, l'élément de G :

$$[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$$

On appelle sous-groupe dérivé de G le sous-groupe de G, noté $\mathcal{D}(G)$, engendré par les commutateurs.

1. *Montrer que $\mathcal{D}(G)$ est un sous-groupe distingué de G*

   On peut vérifier que $e = [e, e] \in \mathcal{D}(G)$ et que $([x, y])^{-1} = [y, x]$
   Il suffit en suite de démontrer que pour tout $x \in G$, $y \in G$ et $z \in G$, $z[x, y]z^{-1} \in \mathcal{D}(G)$. Nous avons :

   $$\begin{aligned} z[x,y]z^{-1} = &\ zxyx^{-1}y^{-1}z^{-1} \\ = &\ \left(zxz^{-1}\right)\left(zyz^{-1}\right)\left(zx^{-1}z^{-1}\right)\left(zy^{-1}z^{-1}\right) \end{aligned}$$

   Il faut remarquer, ici, que :

   $$\left(zxz^{-1}\right)^{-1} = \left(z\left(xz^{-1}\right)\right)^{-1} = \left(xz^{-1}\right)^{-1}z^{-1} = \left(zx^{-1}\right)z^{-1} = zx^{-1}z^{-1}$$

   De la même manière, nous démontrerions que $\left(zyz^{-1}\right)^{-1} = zy^{-1}z^{-1}$. Et donc :

   $$\begin{aligned} z[x,y]z^{-1} = &\ \left(zxz^{-1}\right)\left(zyz^{-1}\right)\left[\left(zxz^{-1}\right)\right]^{-1}\left[\left(zyz^{-1}\right)\right]^{-1} \\ = &\ \left[zxz^{-1}, zyz^{-1}\right] \end{aligned}$$

   Ce que nous voulions

2. *Démontrer que $G/\mathcal{D}(G)$ est un groupe abélien*

   Soient $x \in G$ et $y \in G$; alors, $[x, y] \in \mathcal{D}(G)$, et donc $\dot{\overline{[x,y]}} = \dot{e}$
   Or, $\dot{\overline{[x,y]}} = \dot{\overline{(xy)(yx)^{-1}}}$, et donc :

   $$\dot{\overline{(xy)(yx)^{-1}}} = \dot{e} \Longleftrightarrow \dot{\overline{(xy)}}\,\dot{\overline{(yx)^{-1}}} = \dot{e} \Longleftrightarrow \dot{\overline{(xy)}} = \dot{\overline{(yx)}}$$

   Et, pour finir :

   $$\dot{x}\dot{y} = \dot{\overline{(xy)}} = \dot{\overline{(yx)}} = \dot{y}\dot{x}$$

   $G/\mathcal{D}(G)$ est donc un groupe abélien

3. *Soit $H \triangleright G$ un sous-groupe distingué de G. Montrer que G/H est abélien si et seulement si $\mathcal{D}(G) \subset H$*

   Nous allons procéder par équivalence. Soient $\dot{x} \in G/H$ et $\dot{y} \in G/H$.

   $$\begin{aligned} G/H \text{ abélien} &\Longleftrightarrow \dot{x}\dot{y} = \dot{y}\dot{x} \\ &\Longleftrightarrow \dot{\overline{xy}} = \dot{\overline{yx}} \\ &\Longleftrightarrow xy(yx)^{-1} \in H \\ &\Longleftrightarrow xyx^{-1}y^{-1} \in H \\ &\Longleftrightarrow [x,y] \in H \\ &\Longleftrightarrow \mathcal{D}(G) \subset H \end{aligned}$$

   Ce que nous voulions

4. *Un exemple de sous-groupe dérivé*

   (a) *Soit $G \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définit par :*

   $$G = \left\{ M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \text{ où } M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \text{ tels que } a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R} \text{ et } ac \neq 0 \right\}$$

(b) *Montrer que G est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$*

Première remarque *(et non des moindres!!)*, c'est que de $ac \neq 0$, nous déduisons $a \neq 0$ et $c \neq 0$ et que, surtout, $\mathrm{Id}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$; donc $G \neq \emptyset$

$\Rightarrow$ Nous allons tout d'abord démontrer que la multiplication des matrices est une loi interne. Soient $M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ et $M(x,y,z) = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & s \end{pmatrix}$ 2 matrices de G. Alors :

$$M(a,b,c) \times M(x,y,z) = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax & ay+bz \\ 0 & cz \end{pmatrix} = M(ax, ay+bz, cz)$$

De $ac \neq 0$ et $xz \neq 0$, nous déduisons $axcz \neq 0$ et donc le produit est interne

Remarque : Du calcul précédent, nous déduisons que le produit des matrices n'est pas commutatif ; nous avons par exemple *(à vérifier par le calcul ; trouvez d'autres exemples)* :

$$M(1,0,3) \times M(4,5,6) = M(4,5,18) \text{ alors que } M(4,5,6) \times M(1,0,3) = M(4,15,18)$$

$\Rightarrow$ Le neutre $\mathrm{Id}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = M(1,0,1)$ est bien élément de G

$\Rightarrow$ L'inverse d'une matrice $M(a,b,c) \in G$ est donnée par :

$$(M(a,b,c))^{-1} = \frac{1}{ac} \begin{pmatrix} c & -b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & \frac{-b}{ac} \\ 0 & \frac{1}{c} \end{pmatrix} = M\left(\frac{1}{a}, \frac{-b}{ac}, \frac{1}{c}\right)$$

Puisque $ac \neq 0$, nous avons, bien entendu $\dfrac{1}{a} \times \dfrac{1}{a} \neq 0$ et donc $(M(a,b,c))^{-1} \in G$

G est donc un sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$

(c) *Montrer que le groupe dérivé de G, $\mathcal{D}(G)$ est $\mathcal{D}(G) = \left\{ M = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ où } b \in \mathbb{R} \right\}$*

C'est une simple question calculatoire. Comme nous savons que $\mathcal{D}(G)$ est engendré par les produits du type $XYX^{-1}Y^{-1}$ où $X \in G$ et $Y \in G$, nous allons recher cher de quelle forme sont ces produits.

Soient donc $X = M(a,b,c) \in G$ et $Y = M(x,y,z) \in G$.

- ▷ Alors $XY = M(a,b,c) \times M(x,y,z) = M(ax, ay+bz, cz)$
- ▷ Nous avons $X^{-1} = M\left(\frac{1}{a}, \frac{-b}{ac}, \frac{1}{c}\right)$ et $Y^{-1} = M\left(\frac{1}{x}, \frac{-y}{xz}, \frac{1}{z}\right)$ et

$$X^{-1} \times Y^{-1} = M\left(\tfrac{1}{a}, \tfrac{-b}{ac}, \tfrac{1}{c}\right) \times M\left(\tfrac{1}{x}, \tfrac{-y}{xz}, \tfrac{1}{z}\right) = M\left(\tfrac{1}{ax}, \tfrac{-(yc+bx)}{acxz}, \tfrac{1}{cz}\right)$$

- ▷ D'où le calcul de $XYX^{-1}Y^{-1}$ est donné par :

$$XYX^{-1}Y^{-1} = M(ax, ay+bz, cz) \times M\left(\tfrac{1}{ax}, \tfrac{-(yc+bx)}{acxz}, \tfrac{1}{cz}\right) = M\left(1, \tfrac{ay+bz-(yc+bx)}{cz}, 1\right)$$

Nous avons bien $XYX^{-1}Y^{-1}$ du type $XYX^{-1}Y^{-1} = M(1, \lambda, 1)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$

Le groupe dérivé de G, $\mathcal{D}(G)$ est bien $\mathcal{D}(G) = \left\{ M = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ où } b \in \mathbb{R} \right\}$

Exercice 27 :

Soit G un groupe et $A \subset G$, une partie de G. On note :

- *$N(A) = \{x \in G$ tels que $xA = Ax\}$. $N(A)$ est le* ***normalisateur*** *de A*
- *$C(A) = \{x \in G$ tels que pour tout $a \in A$ $ax = xa\}$. $C(A)$ est le* ***centralisateur*** *de A*

Pour simplifier, nous appelons e l'élément neutre de G

1. *Montrer que $N(A)$ est un sous-groupe de G*

— Tout d'abord, $N(A) \neq \emptyset$ puisque $e \in N(A)$: nous avons $A = eA = Ae$

— Soient $x \in N(A)$ et $y \in N(A)$; Il faut montrer que $xy \in N(A)$.
Nous avons $xA = Ax$ et $yA = Ay$; il faut donc montrer que $xyA = Axy$.
Soit $z \in xyA$; il existe donc $a \in A$ tel que $z = (xy)a$.
De l'associativité, nous avons : $z = (xy)a = x(ya)$. Comme $yA = Ay$, il existe $a_1 \in A$ tel que $ya = a_1 y$, et donc
$$z = (xy)a = x(ya) = x(a_1 y) = (xa_1)y$$
Toujours, parce que $xA = Ax$, il existe $a_2 \in A$ tel que $xa_1 = a_2 x$, et donc
$$z = (xy)a = x(ya) = x(a_1 y) = (xa_1)y = (a_2 x)y = a_2(xy)$$
On démontre ainsi que $z \in Axy$ et que donc $xyA \subset Axy$
On démontrerait, de même que $Axy \subset xyA$, et que donc $xyA = Axy$ et donc $xy \in N(A)$

— Soit $x \in N(A)$; il faut montrer que $x^{-1} \in N(A)$.
Nous avons $xA = Ax$; il faut donc montrer que $x^{-1}A = Ax^{-1}$.
Soit $z \in x^{-1}A$; il existe donc $a \in A$ tel que $z = x^{-1}a$. Or :
$$z = x^{-1}a = x^{-1}a\left(xx^{-1}\right) = x^{-1}(ax)x^{-1}$$
Comme $xA = Ax$, il existe $a_1 \in A$ tel que $ax = xa_1$, et donc :
$$z = x^{-1}a = x^{-1}a\left(xx^{-1}\right) = x^{-1}(ax)x^{-1} = x^{-1}(xa_1)x^{-1} = \left(x^{-1}x\right)a_1x^{-1} = a_1x^{-1}$$
Donc, $z \in Ax^{-1}$, et nous venons de montrer que $x^{-1}A \subset Ax^{-1}$
Nous démontrerions de la même manière que $Ax^{-1} \subset x^{-1}A$, et donc, si $x \in N(A)$, alors $x^{-1}A = Ax^{-1}$ et $x^{-1} \in N(A)$

On vient de montrer que $N(A)$ est un sous-groupe de G

2. *Montrer que $C(A)$ est un sous-groupe distingué de $N(A)$*

— <u>On montre, tout d'abord que $C(A)$ est un sous-groupe de G</u>
- Premièrement, $C(A) \neq \emptyset$ puisque $e \in C(A)$
- Soient $x \in C(A)$ et $y \in C(A)$; il faut montrer que $xy \in C(A)$
Soit $a \in A$; alors,
$$(xy)a = x(ya) = x(ay) = (xa)y = (ax)y = a(xy)$$
Donc xy commute avec tous les éléments de A, et donc $xy \in C(A)$
- Soient $x \in C(A)$; il faut montrer que $x^{-1} \in C(A)$
Soit $a \in A$; alors,
$$x^{-1}a = \left(x^{-1}a\right)\left(xx^{-1}\right) = x^{-1}(ax)x^{-1} = x^{-1}(xa)x^{-1} = \left(x^{-1}x\right)ax^{-1} = ax^{-1}$$
Donc $x^{-1} \in C(A)$

On vient donc de montrer que $C(A)$ est un sous-groupe de G

— <u>On termine, par montrer que $C(A)$ est un sous-groupe distingué de $N(A)$</u>
Soit $y \in N(A)$ et $c \in C(A)$; il faut donc montrer que $ycy^{-1} \in C(A)$
Soit $a \in A$; nous avons $\left(ycy^{-1}\right)a = (yc)\left(y^{-1}a\right)$.
Comme $y \in N(A)$, nous avons aussi $y^{-1} \in N(A)$ et il existe donc $a_1 \in A$ tel que $y^{-1}a = a_1y^{-1}$.
A ce moment, il faut faure remarquer que :
$$y^{-1}a = a_1y^{-1} \iff a = ya_1y^{-1} \iff ay = ya_1$$
En repremant $\left(ycy^{-1}\right)a = (yc)\left(y^{-1}a\right)$, nous avons :
$$\left(ycy^{-1}\right)a = (yc)\left(y^{-1}a\right) = (yc)\left(a_1y^{-1}\right) = y(ca_1)y^{-1} = y(a_1c)y^{-1} = (ya_1)cy^{-1} = aycy^{-1}$$
Donc $ycy^{-1} \in C(A)$ et $C(A)$ est un sous-groupe distingué de $N(A)$

3. *Démontrez que si $H \triangleright G$ est un sous-groupe distingué de G, alors $C(H)$ est aussi un sous-groupe distingué de G*

   D'après la question précédente, on sait que $C(H)$ est un sous-groupe de G. La différence avec la question précédente est de montrer que $C(H)$ est aussi un sous-groupe distingué de G avec l'hypothèse supplémentaire que $H \triangleright G$ est un sous-groupe distingué de G
   Soit $g \in G$ et $c \in C(H)$; il faut donc démontrer que $gcg^{-1} \in C(H)$.
   Soit donc $h \in H$. Alors :
   $$\left(gcg^{-1}\right)h = \left(gcg^{-1}\right)h\left(gg^{-1}\right) = gc\left(g^{-1}hg\right)g^{-1}$$
   H est distingué en G, et donc $g^{-1}hg \in H$, et comme $c \in C(H)$, nous avons $c\left(g^{-1}hg\right) = \left(g^{-1}hg\right)c$.
   En remplaçant, nous avons :
   $$\left(gcg^{-1}\right)h = gc\left(g^{-1}hg\right)g^{-1} = g\left(g^{-1}hg\right)cg^{-1} = \left(gg^{-1}\right)hgcg^{-1} = h\left(gcg^{-1}\right)$$
   Nous avons donc bien $gcg^{-1} \in C(H)$ et $C(H)$ est un sous-groupe distingué de G

11.14.5 Décomposition canonique d'un morphisme

Exercice 28 :

On considère une groupe G tel qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $(\forall (x,y) \in G \times G)\left((xy)^n = x^n y^n\right)$
— *On note $G^{(n)} = \{y \in G$ tels que $\exists g \in G$ tel que $y = g^n\}$*
— *Et on note $G_{(n)} = \{x \in G$ tels que $x^n = e\}$ où e est le neutre de G.*

Vérifier que $G_{(n)}$ et $G^{(n)}$ sous des sous groupes distingués de G. Démontrez que $G/G_{(n)}$ est isomorphe à $G^{(n)}$

1. <u>On montre que $G_{(n)}$ est un sous groupe distingué de G</u>
   - $G_{(n)}$ est un sous groupe de G
     — $G_{(n)}$ est non vide puisque $e \in G_{(n)}$; en effet, $e^n = e$
     — Soit $x \in G_{(n)}$ et $y \in G_{(n)}$. Montrons que $xy^{-1} \in G_{(n)}$
     $$\left(xy^{-1}\right)^n = x^n\left(y^{-1}\right)^n = \left(y^{-1}\right)^n = \left(y^n\right)^{-1} = e$$
     $G_{(n)}$ est donc un sous groupe de G
   - $G_{(n)}$ est distingué en G
     Soit $g \in G$ et $x \in G_{(n)}$. Montrons que $gxg^{-1} \in G_{(n)}$
     $$\left(gxg^{-1}\right)^n = g^n\left(xg^{-1}\right)^n = g^n x^n\left(g^{-1}\right)^n = g^n\left(g^{-1}\right)^n = \left(gg^{-1}\right)^n = e$$
     Donc $gxg^{-1} \in G_{(n)}$

   $G_{(n)}$ est donc un sous groupe distingué de G
2. <u>On montre que $G^{(n)}$ est un sous groupes distingués de G</u>
   - $G^{(n)}$ est un sous groupe de G
     — $G^{(n)}$ est non vide puisque $e \in G_{(n)}$; en effet, $e^n = e$
     — Soit $x \in G^{(n)}$ et $y \in G^{(n)}$. Montrons que $xy^{-1} \in G^{(n)}$
     Il existe donc $g \in G$ et $g_1 \in G$ tels que $x = g^n$ et $y = g_1^n$. Donc :
     $$xy^{-1} = g^n\left(g_1^{-1}\right)^n = \left(gg_1^{-1}\right)^n$$
     Il existe donc $u \in G$, $u = gg_1^{-1}$ tel que $xy^{-1} = u^n$. Donc, $xy^{-1} \in G^{(n)}$
     $G^{(n)}$ est donc un sous groupe de G
   - $G^{(n)}$ est distingué en G
     Soit $g \in G$ et $u \in G^{(n)}$. Montrons que $gug^{-1} \in G^{(n)}$
     Il existe $x \in G$ tel que $u = x^n$ et $gug^{-1} = gx^n g^{-1}$. Or,
     $$\begin{array}{rcll} \left(gxg^{-1}\right)^n & = & \left(gxg^{-1}\right)\left(gxg^{-1}\right)\cdots\left(gxg^{-1}\right) & n\text{fois} \\ & = & gx\left(g^{-1}g\right)x\left(g^{-1}g\right)x\cdots\left(g^{-1}g\right)xg^{-1} & n\text{fois} \\ & = & gx^n g^{-1} & \end{array}$$

Donc, $gug^{-1} = gx^n g^{-1} = \left(gxg^{-1}\right)^n$, et $gug^{-1} \in G^{(n)}$
$G^{(n)}$ est donc un sous groupe distingué de G

3. On montre que $G/G_{(n)}$ est isomorphe à $G^{(n)}$
On considère l'homomorphisme $f : G \longrightarrow G$ tel que $f(x) = x^n$. D'après le théorème de décomposition, $G/\ker f$ est isomorphe à $f(G)$. Or, ici :
— $\ker f = G_{(n)}$
— $f(G) = \mathrm{Im} f = G^{(n)}$
Nous avons donc bien $G/G_{(n)}$ isomorphe à $G^{(n)}$

11.14.6 Groupes cycliques

Exercice 29 :

Soit G un groupe commutatif d'ordre n. On appelle $\mathcal{R}$ la relation :

$$(\forall x \in G)\,(\forall y \in G)\,(x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow x \text{ et } y \text{ ont le même ordre})$$

$\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence
On appelle $\psi(d)$ le nombre d'éléments d'ordre d de G. Montrer qu'alors on a : $n = \sum_{d|n} \psi(d)$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence ne pose aucune difficulté. L'ensemble des classes d'équivalences $G/\mathcal{R}$ forme une partition de G. Si C_d est la classe d'équivalence :

$$C_d = \{x \in G \text{ tel que } x \text{ est d'ordre } d\}$$

Nous avons $\bigcup_{d|n} C_d = G$, et si $\psi(d) = \mathrm{Card}\ C_d$, nous avons $\mathrm{Card}\ G = n = \sum_{d|n} \psi(d)$

Exercice 30 :

Soit G un groupe cyclique d'ordre n, de générateur $g \in G$ et d'élément neutre $e \in G$.

1. *Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, nous avons $\mathrm{Card}\ \left\langle g^k \right\rangle = \dfrac{n}{\mathrm{pgcd}(n,k)}$* Nous allons procéder par petits pas.
   (a) Premier pas, c'est que $\left\langle g^k \right\rangle$ est le sous-groupe de G engendré par les puissances de g^k
   (b) Soit q le pgcd de n et k ; autrement dit $q = \mathrm{pgcd}(n,k)$; nous avons $q \leqslant k$ et nous allons montrer que $\left\langle g^k \right\rangle = \langle g^q \rangle$
   $\rightarrow$ Il existe $q_1 \in \mathbb{N}$ tel que $k = qq_1$ et $q_2 \in \mathbb{N}$ tel que $n = qq_2$
   Alors $g^k = g^{qq_1} = (g^q)^{q_1}$ et donc g^k apparaît comme une puissance de de g^q et donc $g^k \in \langle g^q \rangle$ et donc $\left\langle g^k \right\rangle \subset \langle g^q \rangle$
   $\rightarrow$ D'après le théorème de Bezout, il existe $u \in \mathbb{Z}$ et $v \in \mathbb{Z}$ tels que $q = ku + nv$, et donc :
   $$g^q = g^{ku+nv} = g^{ku} \times g^{nv} = \left(g^k\right)^u \times (g^n)^v = \left(g^k\right)^u \text{ puisque } g^n = e$$
   Ainsi, nous avons $g^q = \left(g^k\right)^u$ et g^q apparaît donc comme une puissance de g^k.
   Nous en tirons donc $g^q \in \left\langle g^k \right\rangle$ et donc $\langle g^q \rangle \subset \left\langle g^k \right\rangle$
   $\rightarrow$ Ainsi, finalement $\langle g^q \rangle = \left\langle g^k \right\rangle$
   (c) Ainsi, $\left\langle g^k \right\rangle$ est d'ordre q_2 et nous avons donc :
   $$\mathrm{Card}\ \left\langle g^k \right\rangle = q_2 = \frac{qq_2}{q} = \frac{n}{\mathrm{pgcd}(n,k)}$$
2. *En déduire que si k et n sont premiers entre eux, alors $\left\langle g^k \right\rangle = G$*
   (a) Supposons que $\mathrm{pgcd}(n,k) = 1$, alors $\mathrm{Card}\ \left\langle g^k \right\rangle = \dfrac{n}{1} = n$ et donc $\left\langle g^k \right\rangle = G$
   (b) Réciproquement, supposons que k et n ne soient pas premiers entre eux, et soit $q = \mathrm{pgcd}(n,k)$; alors, $q > 1$ et d'après la formule $\mathrm{Card}\ \left\langle g^k \right\rangle = \dfrac{n}{\mathrm{pgcd}(n,k)}$, nous avons $\mathrm{Card}\ \left\langle g^k \right\rangle < n$ et donc, sûrement $\left\langle g^k \right\rangle \neq G$
   D'où le résultat

11.14.7 Groupes de permutations

Exercice 33 :

Cet exercice est très simple et d'applications directes vues en cours

Nous nous plaçons dans $\mathcal{S}_9$. Nous considérons les permutations suivantes :

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 7 & 6 & 5 & 4 & 8 & 9 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 5 & 6 & 7 & 2 & 4 & 1 & 9 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$

1. $\Rightarrow$ *Calculer $\sigma_1 \circ \sigma_2$,*

   On donne simplement le résultat :

$$\sigma_1 \circ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 4 & 8 & 9 & 7 & 5 & 2 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

   $\Rightarrow$ *Calculer $\sigma_2 \circ \sigma_1$,*

   A nouveau, un simple résultat :

$$\sigma_2 \circ \sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 6 & 9 & 1 & 4 & 2 & 8 & 3 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

   $\Rightarrow$ *Calculer σ_1^{-1}*

   Tout de suite, donc :

$$\sigma_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 9 & 1 & 8 & 5 & 4 & 3 & 2 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

   $\Rightarrow$ *Calculer σ_2^{-1}*

$$\sigma_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 6 & 4 & 9 & 5 & 1 & 2 & 3 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

2. *Décomposer σ_1 et σ_2 en produit de cycles à supports deux à deux disjoints*

   Très simple :
   $\Rightarrow$ $\sigma_1 = (1\,2\,7\,9)\,(3\,6\,8)\,(4\,5)$
   $\Rightarrow$ $\sigma_2 = (1\,5\,4\,2\,6)\,(3\,7\,9)$

3. *Donner une factorisation de σ_1 en produit de transpositions. Même question pour σ_2*

   $\Rightarrow$ $\sigma_1 = (1\,9)\,(1\,7)\,(1\,2)\,(3\,8)\,(3\,6)\,(4\,5)$
   $\Rightarrow$ $\sigma_2 = (1\,6)\,(1\,2)\,(1\,4)\,(1\,5)\,(3\,9)\,(3\,7)$

Exercice 34 :

Encore un exercice d'applications directes

Nous nous plaçons, cette fois ci dans $\mathcal{S}_7$. Nous considérons les cycles suivants :

$$c_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 7 & 6 & 1 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad c_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 5 & 6 & 3 & 4 & 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

1. *Calculer $c_1 \circ c_2$ et $c_2 \circ c_1$*

$$c_1 \circ c_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 5 & 4 & 6 & 1 & 7 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad c_2 \circ c_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 6 & 7 & 1 & 5 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

On vérifie ici, la non-commutativité de la composition dans $\mathcal{S}_n$

2. *Calculer le carré $c_1^2 = c_1 \circ c_1$ de c_1. Est-ce un cycle ?*

$$c_1 \circ c_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 7 & 3 & 4 & 2 & 5 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

c_1^2 n'est pas un cycle, mais un produit de cycles ; nous avons : $c_1^2 = (1\,7\,6)\,(2\,3\,4)$

Exercice 35 :

On appelle centre de $\mathcal{S}_n$ l'ensemble $Z(\mathcal{S}_n)$ des permutations qui commutent avec toutes les permutations de $\mathcal{S}_n$:

$$Z(\mathcal{S}_n) = \{\sigma \in \mathcal{S}_n \text{ tels que pour tout } s \in \mathcal{S}_n \text{ tel que } s \circ \sigma = \sigma \circ s\}$$

L'objet de cet exercice est de montrer que $Z(\mathcal{S}_n) = \{\mathrm{Id}_{\mathbb{N}_n}\}$ si $n \geqslant 3$.
Supposons donc $n \geqslant 3$ et soient $\sigma \in Z(\mathcal{S}_n)$, $i \in \mathbb{N}_n$, $j \in \mathbb{N}_n$ tels que $i \neq j$. On pose τ la transposition telle que $\tau(i) = j$

1. *Montrer que $(\tau\sigma)(i) = \sigma(j)$*

Pas très difficile !!
Comme $\sigma \in Z(\mathcal{S}_n)$, σ commute avec τ et nous avons alors $\sigma \circ \tau = \tau \circ \sigma$ et donc :

$$\tau[\sigma(i)] = (\tau\sigma)(i) = (\sigma\tau)(i) = \sigma[\tau(i)] = \sigma(j)$$

Par la même démonstration, nous avons $\tau[\sigma(j)] = (\tau\sigma)(j) = \sigma(i)$

2. *En déduire $\sigma(i) \in \{i, j\}$*

Par la question précédente,nous avons démontré que τ « échangeait » $\sigma(i)$ et $\sigma(j)$.
D'autre part, σ est une bijection de $\mathcal{S}_n$ et est, entre autres, une injection, c'est à dire que, comme $i \neq j$, nous avons $\sigma(i) \neq \sigma(j)$, ce qui veut dire que $\sigma(i)$ et $\sigma(j)$ sont dans le support de τ et que donc $\sigma(i) \in \{i, j\}$

3. *Démontrer que $\sigma(i) = i$. Conclure.*

Comme $n \geqslant 3$, il existe $k \in \mathbb{N}_n \setminus \{i, j\}$; c'est à dire que $k \neq i$ et $k \neq j$.
Considérons la transposition $\tau_{i,k} = (i\,k)$ qui « échange » i et k.
Par la question précédente, nous avons, à nouveau, $\sigma(i) \in \{i, k\}$ et donc $\sigma(i) \in \{i, j\} \cap \{i, k\}$.
Comme les nombres i, j et k sont tous différents, alors $\sigma(i) = i$
Ainsi, pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, $\sigma(i) = i$, nous avons donc $\sigma = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}_n}$ et donc $Z(\mathcal{S}_n) = \{\mathrm{Id}_{\mathbb{N}_n}\}$

4. *Que se passe-t-il si $n = 2$?*

Nous venons de résoudre la question pour $n \geqslant 3$. $\mathcal{S}_2$ n'est composé que de 2 permutations : $\mathrm{Id}_{\mathbb{N}_2}$ et de la transposition $\tau_{1,2} = (1\,2)$.
Bien entendu, ces permutations commutent et nous avons $Z(\mathcal{S}_2) = \{\mathrm{Id}_{\mathbb{N}_2}, \tau_{1,2}\}$

Exercice 36 :

Soit $\sigma \in \mathcal{S}_5$ défini par

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

1. *Ecrire la décomposition de σ en produit de cycles de supports disjoints.*

   Pas difficile ; $\sigma = (1\,5\,3)\,(2\,4)$
   Dans la suite, nous appellerons $c = (1\,5\,3)$ et $\tau = (2\,4)$, et donc $\sigma = c\tau = \tau c$
   c est un cycle de longueur 3 et τ, un cycle de longueur 2

2. *Donner la liste des éléments de $\Gamma(\sigma)$ le sous-groupe engendré par σ*

   L'ordre de σ est le ppcm de l'ordre de c et de τ ; l'ordre de σ est donc de 6. Nous avons donc :

   $$\Gamma(\sigma) = \left\{\mathrm{Id}_{\mathbb{N}_5}\sigma, \sigma^2, \sigma^3, \sigma^4, \sigma^5\right\}$$

   Plus précisément :

   - ⋆ $\sigma = c\tau$
   - ⋆ $\sigma^2 = c^2\tau^2 = c^2$
   - ⋆ $\sigma^3 = c^3\tau^3 = \tau$
   - ⋆ $\sigma^4 = c^4\tau^4 = c$
   - ⋆ $\sigma^5 = c^5\tau^5 = c^2\tau$
   - ⋆ $\sigma^6 = c^6\tau^6 = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}_5}$

Exercice 37 :

Donner, si c'est possible, un exemple d'élément d'ordre 30 dans le groupe symétrique $\mathcal{S}_{10}$

Voilà un nouvel exercice d'application directe.
$\sigma = (1\,2\,3\,4\,5)\,(6\,7\,8)\,(9\,10)$ convient, car σ est de type 2, 3, 5, et donc son ordre est $\mathrm{PPCM}(2,3,5) = 30$

Exercice 38 :

Montrer que si c et c_1 sont deux cycles dans $\mathcal{S}_n$ de même longueur k, il existe $\sigma \in \mathcal{S}_n$ tel que $c_1 = \sigma \circ c \circ \sigma^{-1}$

La démonstration va se faire en 2 temps ; le premier est une redite de démonstrations ou d'exemple nécessaire pour le second temps qui répond à laq uestion posée

Nous nous situons toujours dans $\mathbb{N}_n$ et nous considérons toujours $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des permutations de $\mathbb{N}_n$

1. Soit $c = (a_1\,a_2\,\cdots\,a_k)$ un cycle de longueur k. Pour chaque j tel que $1 \leqslant j \leqslant k$, nous avons $a_j \in \mathbb{N}_n$

   Nous allons montrer que, pour toute permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$, nous avons $\sigma \circ c \circ \sigma^{-1} = (\sigma(a_1)\ \sigma(a_2)\ \cdots \sigma(a_k))$ qui est une permutation circulaire de longueur k aussi.

   Commençons par traiter un exemple pour $n = 7$

   ⋆ Soit $c = (2\,4\,6)$ qui peut aussi s'exprimer par :

   $$c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 4 & 3 & 6 & 5 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

   c est un cycle de longueur 3

   ⋆ Soit $\sigma \in \mathcal{S}_7$ la permutation suivante : $\sigma = (2\,3\,4)\,(5\,6)$ qui peut aussi s'écrire :

   $$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 6 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

   Alors :

   $$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 4 & 2 & 3 & 6 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

   Et :

   $$\sigma \circ c \circ \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 5 & 2 & 4 & 3 & 6 & 7 \end{pmatrix} = (2\,5\,3)$$

   $\sigma \circ c \circ \sigma^{-1}$ est donc un cycle de longueur 3

   ⋆ Nous avons $\sigma \circ c \circ \sigma^{-1} = (2\,5\,3) = (\sigma(4)\ \sigma(6)\ \sigma(2)) = (\sigma(2)\ \sigma(4)\ \sigma(6))$

Retour à la démonstration

Soit donc $\sigma \in \mathcal{S}_n$ une permutation de $\mathbb{N}_n$

$\Rightarrow$ Soit $i \in \mathbb{N}_n$ tel que $i \notin \{\sigma(a_1), \sigma(a_2), \cdots \sigma(a_k)\}$.

Alors, $\sigma^{-1}(i) \notin \{a_1, a_2, \cdots, a_k\}$, puisque, sinon, $i = \sigma \circ \sigma^{-1}(i) \in \{\sigma(a_1), \sigma(a_2), \cdots \sigma(a_k)\}$, ce qui est contradictoire.

Ainsi, $\sigma^{-1}(i)$ n'appartient pas au support de c et donc $c\left(\sigma^{-1}(i)\right) = \sigma^{-1}(i)$ et donc

$$\sigma\left[c\left(\sigma^{-1}(i)\right)\right] = \sigma\left[\sigma^{-1}(i)\right] = i$$

Et donc i est invariant par $\sigma c \sigma^{-1}$

$\Rightarrow$ Soit, maintenant, $i \in \mathbb{N}_n$ tel que $i \in \{\sigma(a_1), \sigma(a_2), \cdots \sigma(a_k)\}$.

Il existe donc $j_0 \in \{1, 2, \cdots, k\}$ tel que $i = \sigma(a_{j_0})$, et σ étant une bijection, nous avons $i = \sigma(a_{j_0}) \Longleftrightarrow \sigma^{-1}(i) = a_{j_0}$.

Ainsi, si $1 \leqslant j_0 \leqslant k-1$:

$$\sigma \circ c \circ \sigma^{-1}(i) = \sigma\left[c(a_{j_0})\right] = \sigma(a_{j_0+1})$$

Et si $j_0 = k$,

$$\sigma \circ c \circ \sigma^{-1}(i) = \sigma\left[c(a_k)\right] = \sigma(a_1)$$

Et donc $\sigma \circ c \circ \sigma^{-1}$ est le cycle $\sigma \circ c \circ \sigma^{-1} = (\sigma(a_1)\ \sigma(a_2) \cdots \sigma(a_{k-1})\ \sigma(a_k))$

2. Soit, maintenant $c_1 = (b_1\, b_2\, \cdots\, b_k)$ un cycle de longueur k où, pour tout i tel que $1 \leqslant i \leqslant k$, $b_i \in \mathbb{N}_n$. Il nous faut donc trouver $\sigma \in \mathcal{S}_n$ tel que $c_1 = \sigma \circ c \circ \sigma^{-1}$

   $\Rightarrow$ Nous avons $c = (a_1\, a_2\, \cdots\, a_k)$, et d'après la question précédente,

   $$\sigma \circ c \circ \sigma^{-1} = (\sigma(a_1)\ \sigma(a_2) \cdots \sigma(a_{k-1})\ \sigma(a_k))$$

   $\Rightarrow$ Nous construisons donc une permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$ telle que :

   $$\begin{cases} \sigma(a_i) = b_i \text{ si } 1 \leqslant i \leqslant k \\ \sigma(x) = x \text{ si } x \in \mathbb{N}_n \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_k\} \end{cases}$$

   σ est bien une permutation de $\mathbb{N}_n$ (i.e. $\sigma \in \mathcal{S}_n$) et nous avons bien $c_1 = \sigma \circ c \circ \sigma^{-1}$

   De plus nous avons support $(c_1) = \{b_1, \ldots, b_k\} = \{\sigma(a_1)\ \sigma(a_2) \cdots \sigma(a_{k-1})\ \sigma(a_k)\} = \sigma(\text{support}(c))$.

Exercice 39 :

Montrer que le produit de deux transpositions distinctes est un cycle de longueur 3 ou un produit de deux cycles de longueur 3.

1. Soit τ_1 la transposition $\tau_1 = (a\, b)$ et τ_2 la transposition $\tau_2 = (b\, c)$. Alors :
   - ⋆ Evaluons $\tau_1 \circ \tau_2$:
     - $\rightarrow$ $\tau_1 \circ \tau_2(a) = \tau_1(a) = b$
     - $\rightarrow$ $\tau_1 \circ \tau_2(b) = \tau_1(c) = c$
     - $\rightarrow$ $\tau_1 \circ \tau_2(c) = \tau_1(b) = a$

     Et donc $\tau_1 \circ \tau_2 = (a\, b\, c)$
   - ⋆ Pour aller plus loin, nous évaluons $\tau_2 \circ \tau_1$:
     - $\rightarrow$ $\tau_2 \circ \tau_1(a) = \tau_2(b) = c$
     - $\rightarrow$ $\tau_2 \circ \tau_1(b) = \tau_2(a) = a$
     - $\rightarrow$ $\tau_2 \circ \tau_1(c) = \tau_2(c) = b$

     Et donc $\tau_2 \circ \tau_1 = (a\, c\, b)$
2. Nous continuons, maintenant, en supposant que τ_1 et τ_2 n'aient aucun élément en commun.

   Soit donc τ_1 la transposition $\tau_1 = (a\, b)$ et τ_2 la transposition $\tau_2 = (c\, d)$.

   On considère la transposition $\mathcal{T} = (c\, b)$; remarquons que nous prenons un élément dans chaque support des tanspositions τ_1 et τ_2. En remarquant, en outre que $\mathcal{T}^2 = \mathcal{T} \circ \mathcal{T} = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}_n}$, nous avons :

   $$\tau_1 \circ \tau_2 = \tau_1 \circ \mathcal{T} \circ \mathcal{T} \circ \tau_2 = (\tau_1 \circ \mathcal{T}) \circ (\mathcal{T} \circ \tau_2) = ((a\, b)\, (c\, b))\, ((c\, b)\, (c\, d)) = (a\, b\, c)\, (c\, d\, b)$$

   Ainsi $\tau_1 \tau_2 = (a\, b)\, (c\, d)$ est-il le produit de deux cycles de longueur 3.

11.14.8 Automorphisme d'un groupe

Exercice 40 :

Soit G un groupe. Démontrer que $\mathrm{Int}(G)$ est un sous-groupe distingué de $\mathrm{Aut}(G)$

Soit $f \in \mathrm{Aut}(G)$. Il faut donc démontrer que, pour tout $\alpha_x \in \mathrm{Int}(G)$, nous avons $f \circ \alpha_x \circ f^{-1} \in \mathrm{Int}(G)$,
Soit $g \in G$, alors :

$$\begin{aligned}
f \circ \alpha_x \circ f^{-1}(g) = & \ f\left[\alpha_x\left(f^{-1}(g)\right)\right] \\
= & \ f\left[x f^{-1}(g) x^{-1}\right] \text{ par définition de } \alpha_x \\
= & \ f(x) f\left(f^{-1}(g)\right) f\left(x^{-1}\right) \text{ parce que } f \text{ est un morphisme} \\
= & \ f(x) f\left(f^{-1}(g)\right) f(x)^{-1} \text{ toujours parce que } f \text{ est un morphisme} \\
= & \ f(x) g f(x)^{-1} \text{ parce que } f \text{ est un automorphisme} \\
= & \ \alpha_{f(x)}(g)
\end{aligned}$$

On vient donc de démontrer que pour tout $f \in \mathrm{Aut}(G)$ et tout $\alpha_x \in \mathrm{Int}(G)$, nous avons $f \circ \alpha_x \circ f^{-1} = \alpha_{f(x)}$ et que donc, $f \circ \alpha_x \circ f^{-1} \in \mathrm{Int}(G)$
$\mathrm{Int}(G)$ est donc un sous-groupe distingué de $\mathrm{Aut}(G)$

11.14.9 Groupe opérant dans un ensemble

Exercice 42 :

Soit G un groupe d'ordre 21 agissant sur un ensemble E à $n \geqslant 1$ éléments.

1. *Quel est le cardinal possible de chaque orbite ?*

   Ici, c'est une application directe de 11.12.6.
   Le cardinal est donc un diviseur de l'ordre de G. Les diviseurs de 21 étant $1, 3, 7, 21$, le carinal possible de chaque orbite est donc $1, 3, 7, 21$

2. *Notons N_i le nombre d'orbites à i éléments, pour $i \geqslant 1$. En utilisant la partition de E en orbites, trouver une relation entre les N_i.*

   La question était posée de telle manière que, par l'énoncé, l'étudiant ne devine pas le résultat de la question 1 ! !
   Ainsi, il y a N_1 orbites à 1 élément, N_3 orbites à 3 éléments, N_7 orbites à 7 éléments et N_{21} orbites à 21 éléments.
   Les orbites formant une partition de E, nous avons :

$$n = N_1 + 3N_3 + 7N_7 + 21N_{21}$$

Exercice 43 :

Considérons le groupe spécial linéaire $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ des matrices de déterminant 1, c'est à dire :

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) = \{M \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \ \textit{tel que} \ \det M = 1\}$$

On considère le ***demi-plan de Poincaré*** *:*

$$\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} \ \textit{tel que} \, \mathrm{Im}(z) > 0\}$$

$\mathbb{C}^{\mathcal{H}}$ désigne les applications de $\mathcal{H}$ dans $\mathbb{C}$

1. *On considère l'application $\Phi : \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) :\longrightarrow \mathbb{C}^{\mathcal{H}}$ définie par :*

$$\left\{\begin{array}{rcl} \Phi : \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) : & \longrightarrow & \mathbb{C}^{\mathcal{H}} \\ M & \longmapsto & \Phi(M) \end{array}\right.$$

où, si $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\Phi(M)$ *est l'application définie par :*

$$\begin{cases} \Phi(M) : \mathcal{H} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \qquad\quad z & \longmapsto & \Phi(M)(z) = \dfrac{az+b}{cz+d} \end{cases}$$

Démontrer que Φ *définit une action de* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ *sur* $\mathcal{H}$.

$\Rightarrow$ **Nous allons commencer par montrer que si $z \in \mathcal{H}$, alors $\Phi(M)(z) \in \mathcal{H}$**

Nous allons utiliser le fait que pour tout $a \in \mathbb{C}$, $a - \overline{a} = 2i\,\mathrm{Im}(a)$ qui est un imaginaire pur. Soit donc $z \in \mathcal{H}$. Alors :

$$\begin{aligned} 2i\,\mathrm{Im}(\Phi(M)(z)) = {} & \Phi(M)(z) - \overline{\Phi(M)(z)} \\ = {} & \frac{az+b}{cz+d} - \frac{a\overline{z}+b}{c\overline{z}+d} \\ = {} & \frac{(az+b)(c\overline{z}+d) - (a\overline{z}+b)(cz+d)}{(cz+d)(c\overline{z}+d)} \\ = {} & \frac{\left(ac|z|^2 + adz + bc\overline{z} + bd\right) - \left(ac|z|^2 + bcz + da\overline{z} + db\right)}{|cz+d|^2} \\ = {} & \frac{(ad-bc)z - (ad-bc)\overline{z}}{|cz+d|^2} \\ = {} & \frac{z-\overline{z}}{|cz+d|^2} \text{ car } ad - bc = \det M = 1 \\ = {} & \frac{2i\,\mathrm{Im}\,z}{|cz+d|^2} \end{aligned}$$

Comme $\mathrm{Im}\,z > 0$, nous avons aussi $\mathrm{Im}(\Phi(M)(z)) > 0$, ce qui veut dire que si $z \in \mathcal{H}$, alors $\Phi(M)(z) \in \mathcal{H}$

$\Rightarrow$ **Nous allons montrer que, pour tout $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, $\Phi(M)$ est une bijection de $\mathcal{H}$**

- $\star$ $\Phi(M)$ est une injection

  Soient donc, $z_1 \in \mathcal{H}$ et $z_2 \in \mathcal{H}$ tels que $\Phi(M)(z_1) = \Phi(M)(z_2)$. Alors :

$$\begin{aligned} \Phi(M)(z_1) = \Phi(M)(z_2) & \iff \frac{az_1+b}{cz_1+d} = \frac{az_2+b}{cz_2+d} \\ & \iff (az_1+b)(cz_2+d) = (az_2+b)(cz_1+d) \\ & \iff acz_1z_2 + adz_1 + bcz_2 + bd = acz_1z_2adz_2 + bcz_1 + bd \\ & \iff adz_1 + bcz_2 = adz_2 + bcz_1 \\ & \iff (ad-bc)z_1 = (ad-bc)z_2 \\ & \iff z_1 = z_2 \end{aligned}$$

  $\Phi(M)$ est donc bien injective

- $\star$ $\Phi(M)$ est une surjection

  Soit $z_1 \in \mathcal{H}$; existe-t-il $z \in \mathcal{H}$ tel que $\Phi(M)(z) = z_1$

  Si ce z existe, nous avons $z_1 = \dfrac{az+b}{cz+d}$ et donc :

$$\begin{aligned} z_1 = \frac{az+b}{cz+d} & \iff z_1(cz+d) = az+b \\ & \iff czz_1 + dz_1 = az+b \\ & \iff dz_1 - b = az - czz_1 \\ & \iff dz_1 - b = z(a - cz_1) \\ & \iff z = \frac{dz_1 - b}{-cz_1 + a} \end{aligned}$$

  Nous avons $z = \Phi\left(\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\right)(z_1)$ et nous pouvons voir que

$$\det \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} d & -b \\ -c & a \end{vmatrix} = ad - bc = 1$$

Donc si $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, alors $M^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ et donc

$$z = \Phi\left(M^{-1}\right)(z_1)$$

Ce qui montre qu'en particulier, $z \in \mathcal{H}$
Ainsi $\Phi(M)$ est surjective.
$\Phi(M)$ étant injective et surjective, est donc bijective, et d'après les développements précédents, nous avons :

$$(\Phi(M))^{-1} = \Phi\left(M^{-1}\right)$$

$\Rightarrow$ **Si $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ est l'ensemble des bijections de $\mathcal{H}$, on montre que $\Phi : \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) :\longrightarrow \mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ est un morphisme de groupe**
Il faut donc montrer que pour tout $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ et tout $N \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, $\Phi(MN) = \Phi(M) \circ \Phi(N)$

$\rightarrow$ On pose $M = \begin{pmatrix} a_M & b_M \\ c_M & d_M \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} a_N & b_N \\ c_N & d_N \end{pmatrix}$.

Soit $z \in \mathcal{H}$; alors $\Phi(N)(z) = \dfrac{a_N z + b_N}{c_N z + d_N}$

Puis :

$$\begin{aligned} \Phi(M)[\Phi(N)(z)] &= \frac{a_M \Phi(N)(z) + b_M}{c_M \Phi(N)(z) + d_M} \\ &= \frac{a_M\left(\frac{a_N z + b_N}{c_N z + d_N}\right) + b_M}{c_M\left(\frac{a_N z + b_N}{c_N z + d_N}\right) + d_M} \\ &= \frac{a_M(a_N z + b_N) + b_M(c_N z + d_N)}{c_M(a_N z + b_N) + d_M(c_N z + d_N)} \\ &= \frac{(a_M a_N + b_M c_N) z + (a_M b_N + b_M d_N)}{(a_N c_M + d_M c_N) z + (c_M b_N + d_M d_N)} \end{aligned}$$

$\rightarrow$ Remarquons que $MN = \begin{pmatrix} a_M & b_M \\ c_M & d_M \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_N & b_N \\ c_N & d_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_M a_N + b_M c_N & a_M b_N + b_M d_N \\ a_N c_M + d_N c_N & c_M b_N + d_M d_N \end{pmatrix}$

Nous avons donc, pour tout $z \in \mathcal{H}$ $\Phi(M) \circ \Phi(N)(z) = \Phi(MN)(z)$
C'est à dire $\Phi(MN) = \Phi(M) \circ \Phi(N)$ et Φ est un homomorphisme du groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ dans le groupe $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ des premutations de $\mathcal{H}$

$\rightarrow$ Nous avons donc, en particulier $(\Phi(M))^{-1} = \Phi\left(M^{-1}\right)$ et $\Phi(\mathrm{Id}_2) = \mathrm{Id}_{\mathcal{H}}$

2. *Quel est le stabilisateur F_i du nombre complexe i de $\mathcal{H}$?*

$\Rightarrow$ D'après la définition 11.12.4 de stabilisateur, nous devons rechercher les matrices $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ telles que $\Phi(M)(i) = i$.
Dans le cours, il a été démontré que le stabilisateur est un sous-groupe de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. Nous le vérifierons.

$\Rightarrow$ Nous avons donc :

$$\begin{aligned} \Phi(M)(i) = i &\iff \frac{ai + b}{ci + d} = i \\ &\iff ai + b = -c + id \\ &\iff (d - a)\, i = b + c \\ &\iff d - a = 0 \text{ et } b + c = 0 \\ &\iff a = d \text{ et } b = -c \end{aligned}$$

Et donc $F_i = \left\{ M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \text{ tel que } M = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \text{ avec } a^2 + b^2 = 1 \right\} = \mathrm{O}_2^+(\mathbb{R})$, c'est à dire que F_i est le groupe de rotations du plan.

3. *Montrer que l'action est transitive*

D'après la définition 11.12.7l faut donc démontrer que, pour tout $z \in \mathcal{H}$ et tout $z_1 \in \mathcal{H}$, il existe $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ telles que $\Phi(M)(z) = z_1$

$\rightarrow$ Nous allons commencer par démontrer que pour tout $z \in \mathcal{H}$, il existe une matrice $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ telles que $\Phi(M)(i) = z$

En posant $z = x + iy$ avec $y > 0$, nous devrions avoir $x + iy = \dfrac{ai+b}{ci+d}$. Il est clair que $a = y$, $b = x$, $c = 0$ et $d = 1$ sont des valeurs qui conviennent ; la matrice $M_1 = \begin{pmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice candidate sauf que sont déterminant est $y > 0$.

En divisant par $\sqrt{y}$ *(possible parce que $y > 0$)* la matrice $M = \begin{pmatrix} \frac{y}{\sqrt{y}} & \frac{x}{\sqrt{y}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{y}} \end{pmatrix}$ dont le déterminant est 1 convient

→ Soit maintenant $z_1 \in \mathcal{H}$, il existe une matrice $N \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ telles que $\Phi(N)(i) = z_1$

→ Soient $z \in \mathcal{H}$ et $z_1 \in \mathcal{H}$, alors :

$$z_1 = \Phi(N)(i) \iff z_1 = \Phi(N)\left(\Phi\left(M^{-1}\right)(z)\right) = \Phi\left(NM^{-1}\right)(z)$$

Donc pour tout $z \in \mathcal{H}$, il existe une matrice $A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ telles que $\Phi(A)(z) = z_1$

Exercice 44 :

Soit G un groupe opérant dans un ensemble quelconque X. Soient $x \in X$ et $y \in X$, 2 éléments de X dans la même orbite. Montrer que leurs stabilisateurs F_x et F_y sont conjugués dans G, c'est à dire qu'il existe $g \in G$ tel que $F_y = gF_xg^{-1}$

Nous appelons Φ l'action de G sur X

Comme $x \in X$ et $y \in X$ sont dans la même orbite, il existe $h \in G$ tel que $\Phi(h)(x) = y$

Soit maintenant $g \in G$. On a alors :

$$\begin{aligned} g \in F_y \iff & \Phi(g)(y) = y \\ \iff & \Phi(g)(\Phi(h)(x)) = \Phi(h)(x) \\ \iff & \Phi(gh)(x) = \Phi(h)(x) \\ \iff & [\Phi(h)]^{-1} \circ \Phi(gh)(x) = x \\ \iff & \Phi\left(h^{-1}gh\right)(x) = x \\ \iff & h^{-1}gh \in F_x \end{aligned}$$

Nous venons de démontrer qu'il existe $g \in G$ tel que $F_y = gF_xg^{-1}$ en ayant posé $g = h^{-1}$

11.14.10 Miscelleanous : pour aller plus loin

Exercice 47 :

Soient G_1 et G_2, 2 groupes notés multiplicativement et $f : G_1 \longrightarrow G_2$ un morphisme de groupe.
Soit $x \in G_1$ d'ordre fini. Montrer que l'ordre de $f(x)$ divise celui de x

Nous noterons e_1 le neutre de G_1 et e_2 le neutre de G_2

Soit $x \in G_1$ et n l'ordre de x. C'est donc le plus petit entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $x^n = e_1$. Alors :

$$f(x^n) = (f(x))^n = f(e_1) = e_2$$

Ce qui montre que l'ordre de $f(x)$ divise n, et donc que l'ordre de $f(x)$ divise celui de x

Exercice 48 :

Soit G un groupe noté multiplicativement. On appelle $Z(G)$ le centre de G.
On suppose que $G/Z(G)$ est monogène. Démontrer que G est abélien

Rappelons que $Z(G)$ est un sous-groupe de G, forcément commutatif et donc distingué.

Considérons, maintenant $G/Z(G)$. Comme il est monogène, nous avons :

$$G/Z(G) = \{(z_0)^n \text{ où } n \in \mathbb{Z}\}$$

Considérons, maintenant, la projection canonique $\varpi : G \longrightarrow G/Z(G)$ définie par :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \varpi : G & \longrightarrow & G/Z(G) \\ g & \longmapsto & \varpi(g) = \dot{g} \end{array} \right.$$

Cette projection canonique étant surjective, il existe donc $z \in G$ tel que $\varpi(z) = \dot{z} = z_0$
Soient $g \in G$ et $h \in G$.
Il existe des entiers $m \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{Z}$ tels que $\varpi(g) = \dot{g} = (z_0)^n$ et $\varpi(h) = \dot{h} = (z_0)^m$
Alors : $\varpi(g \times z^{-n}) = \varpi(g) \times \varpi(z^{-n}) = z_0^n \times z_0^{-n} = \dot{e}$, ce qui montre que $g \times z^{-n} \in Z(G)$.
Nous démontrerions de même que $h \times z^{-m} \in Z(G)$.
En utilisant le fait que $g \times z^{-n} \in Z(G)$ et $h \times z^{-m} \in Z(G)$, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}
g \times h = & \ (g \times z^{-n}) \times z^n \times (h \times z^{-m}) \times z^m \\
= & \ (g \times z^{-n}) \times (h \times z^{-m}) \times z^n \times z^m \\
= & \ (g \times z^{-n}) \times (h \times z^{-m}) \times z^{m+n} \\
= & \ (h \times z^{-m}) \times (g \times z^{-n}) \times z^m \times z^n \\
= & \ (h \times z^{-m}) \times z^m \times (g \times z^{-n}) \times z^n \\
= & \ h \times (z^{-m} \times z^m) \times g \times (z^{-n} \times z^n) \\
= & \ h \times g
\end{aligned}$$

G est donc commutatif

Exercice 49 :

Nous considérons les permutations suivantes :

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 5 & 6 & 4 & 7 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 7 & 8 & 6 & 5 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 7 & 8 & 9 & 4 & 5 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

1. *Décomposer les permutations a, b et c en produits de cycles et donner leur ordre*

   Assez simplement, nous avons :
   - ⋆ $a = (1\,5\,3\,4\,7)\,(2\,6)$
     a est le produit d'un cycle de longueur 5 et d'une transposition qui est un cycle de longueur 2. L'ordre de a est donc donné par le ppcm de 5 et 2, c'est à dire 10
   - ⋆ $b = (2\,4)\,(5\,7\,6\,8)$
     Par un raisonnement anologue à celui donné ci dessus, l'ordre de b est le ppcm de 2 et 4, c'est à dire 4
   - ⋆ $c = (1\,3\,8)\,(2\,7)\,(4\,9\,6\,5)$
     L'ordre de c est donc le ppcm de 3, 2 et 4, c'est à dire 12

2. *En plongeant a, b et c dans $\mathcal{S}_9$, calculez a^{201}, b^{198} et c^{1000}*

   - ⋆ Pour connaître a^{201}, il suffit de connaître la congruence de 201 modulo 10. Or, $201 \equiv 1\,[10]$ et donc $a^{201} = a$
   - ⋆ De la même manière, $198 \equiv 2\,[4]$ et donc $b^{198} = b^2$.
     Nous pouvons même aller plus loin. En effet :

     $$b^2 = (2\,4)^2\,(5\,7\,6\,8)^2 = (5\,7\,6\,8)^2 = (5\,6)\,(7\,8)$$

   - ⋆ Pour le calcul de c^{1000}, nous avons $1000 \equiv 4\,[12]$ et donc $c^{1000} = c^4$

     $$c^4 = (1\,3\,8)^4\,(2\,7)^4\,(4\,9\,6\,5)^4 = (1\,3\,8)^4 = (1\,3\,8)$$

     Car $(4\,9\,6\,5)$ étant d'ordre 4, $(4\,9\,6\,5)^4 = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}_9}$ et $(1\,3\,8)$ est d'ordre 3 donc $(1\,3\,8)^4 = (1\,3\,8)$

Exercice 50 :

Soient n un entier plus grand ou égal à 2 et $\mathcal{S}_n$, le groupe symétrique de degré n.

1. *Démontrer que $\mathcal{S}_n$ est engendré par les transpositions $(1\,2)\,,(2\,3)\,,\ldots,(n-1\,n)$*

   Nous avons démontré en 11.10.11 que toute permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$ peut s'écrire sous forme de produit de transpositions.

Il suffira donc de démontrer que toute transposition $\tau = (i\ j)$ avec $i \neq j$ peut s'écrire sous la forme de produit de transpositions de type $\tau_k = (k\ k+1)$ avec $1 \leqslant k \leqslant n-1$.
Comme $\tau = (i\ j) = (j\ i)$, nous allons supposer $i < j$. Nous avons alors :

$$(i\ j) = (i\ i+1)\,(i+1\ i+2)\cdots(j-2\ j-1)\,(j-1\ j)\,(j-2\ j-1)\cdots(i+1\ i+2)\,(i\ i+1)$$

Pour bien comprendre ce qui a été écrit ci-dessus, vérifier par un cas pratique :

$$(2\ 7) = (2\ 3)\,(3\ 4)\,(4\ 5)\,(5\ 6)\,(6\ 7)\,(5\ 6)\,(4\ 5)\,(3\ 4)\,(2\ 3)$$

2. *En déduire que $\mathcal{S}_n$ est engendré par les transpositions $(1\,2)\,,(1\,3)\,,\ldots,(1\,n)$*

D'après la question précédente, si nous démontrons que toute transformation du type $\tau_k = (k\ k+1)$ avec $1 \leqslant k \leqslant n-1$ peut être engendrée par des transpositions du type $(1\,2)\,,(1\,3)\,,\ldots,(1\,n)$, nous aurons gagné. Or :

$$(k\ k+1) = (1\ k)\,(1\ k+1)\,(1\ k)$$

Nous avons donc gagné

3. *On pose $t = (1\,2)$ et $c = (1\,2\,3\cdots n)$; calculer c^k et $c^k t c^{-k}$ lorsque $1 \leqslant k \leqslant n-2$ et en déduire que t et c engendrent $\mathcal{S}_n$*

$\Rightarrow$ Si $n = 2$, alors $t = c = (1\,2)$ et nous avons $t^2 = c^2 = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}_n}$

$\Rightarrow$ Supposons $n \geqslant 3$, et considérons donc $t = (1\,2)$ et $c = (1\,2\,3\cdots n)$ Soit k tel que $1 \leqslant k \leqslant n-1$

$\star$ Nous avons :

$$c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \qquad c^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 & n \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & n & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Et donc, plus généralement :

$$c^k = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-k & n-k+1 & \cdots & n \\ \downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow \\ k+1 & k+2 & \cdots & n & 1 & \cdots & k \end{pmatrix}$$

$\star$ Nous avons, pour le calcul de c^{-1} :

$$c^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-1 \end{pmatrix} \qquad c^{-2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 & n \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-4 & n-3 & n-2 \end{pmatrix}$$

Et donc, plus généralement :

$$c^{-k} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & k & k+1 & \cdots & n \\ \downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow \\ n-k+1 & n-k+2 & \cdots & n & 1 & \cdots & n-kk \end{pmatrix}$$

Nous remarquons, très facilement que si $i \notin \{k+1, k+2\}$, alors $c^k t c^{-k}\,(i) = i$, que $c^k t c^{-k}\,(k+1) = k+2$ et $c^k t c^{-k}\,(k+2) = k+1$.
Nous avons donc $c^k t c^{-k} = (k+1\ k+2)$

Comme toutes les transpositions $\tau_k = (k+1\ k+2)$ s'expriment comme un produit de c, t et c^{-1}, et que les transpositions $(1\,2)\,,(1\,3)\,,\ldots,(1\,n)$ engendrent $\mathcal{S}_n$, il résulte que les transformations c et t engendrent $\mathcal{S}_n$

Exercice 51 :

Pour $n > 3$ on désigne par $\mathcal{B}_n$ le sous-groupe de A_n engendré par les cycles

$$(1\ 2\ 3)\,,(1\ 2\ 4)\,,\ldots,(1\ 2\ n)$$

Pour nous simplifier la vie, nous posons $c_k = (1\ 2\ k)$ avec $1 \leqslant k \leqslant n$

1. *Montrer que $\mathcal{B}_n$ est un sous-groupe du groupe alterné A_n*

   Nous allons démontrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant k \leqslant n$ le cycle c_k est un élément de A_n, c'est à dire a une signature positive.

   ⋆ Nous avons donc $c_k = (1\ 2\ k) = (1\ 2)\,(2\ k)$, c'est à dire que chaque cycle c_k est le produit de 2 transpositions

   ⋆ Si $\varepsilon\,(c_k)$ est la signature du cycle c_k, la signature de chaque transposition est -1. Ainsi :

   $$\varepsilon\,(c_k) = \varepsilon\,((1\ 2)) \times \varepsilon\,((2\ k)) = (-1)^2 = 1$$

   Ainsi, pour tout k tel que $1 \leqslant k \leqslant n$ $c_k \in A_n$

   A_n étant un sous-groupe de $\mathcal{S}_n$, la composition des c_k, pour $1 \leqslant k \leqslant n$ est toujours dans A_n.

   Et donc $\mathcal{B}_n$ est un sous-groupe du groupe alterné A_n.

2. *Démontrer que si i et j sont deux entiers distincts $(i \neq j)$ tels que $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant n$, les permutations $(1\ 2)\,(i\ j)$ et $(i\ j)\,(1\ 2)$ appartiennent à $\mathcal{B}_n$*

   Comme $i \neq j$, nous supposons $i < j$

   → Supposons que $i = 1$ et $j = 2$
   Alors $(1\ 2)\,(i\ j) = (1\ 2)\,(1\ 2) = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}_n}$.
   De même, $(i\ j)\,(1\ 2) = (1\ 2)\,(1\ 2) = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}_n}$
   Et donc les permutations $(1\ 2)\,(i\ j)$ et $(i\ j)\,(1\ 2)$ appartiennent à $\mathcal{B}_n$

   → Supposons maintenant $i = 1$ et $j > 2$
   Alors $(i\ j)\,(1\ 2) = (1\ j)\,(1\ 2) = (1\ 2\ j)$ et par définition, $(1\ 2\,j) \in \mathcal{B}_n$.
   Ensuite, $(1\ 2)\,(i\ j) = (1\ 2)\,(1\ j) = (1\ j\ 2)$. Or, $(1\ j\ 2) = (1\ 2\,j) \circ (1\ 2\,j) = (1\ 2\,j)^2$, et donc $(1\ j\ 2) \in \mathcal{B}_n$
   Nous en concluons que $(1\ 2)\,(1\ j)$ et $(1\ j)\,(1\ 2)$ appartiennent à $\mathcal{B}_n$

   → Supposons maintenant que $i > 1$, et donc $j > 2$; alors, comme les 2 permutations $(1\ 2)$ et $(i\ j)$ ont des supports d'intersection vide et commutent :

   $$(1\ 2)\,(i\ j) = (i\ j)\,(1\ 2)$$

   D'après des exercices précédents :

   $$(1\ 2)\,(i\ j) = (1\ 2\ i)\,(i\ j\ 2)$$

   Et nous avons :

   $$(i\ j\ 2) = (1\ 2\ j)\,(1\ 2\ j)\,(1\ 2\ i)$$

   D'où

   $$(1\ 2)\,(i\ j) = (1\ 2\ i)\,(1\ 2\ j)\,(1\ 2\ j)\,(1\ 2\ i) = c_i \circ c_j^2 \circ c_i$$

   Ce qui montre que si $1 < i < j$, alors les permutations $(1\ 2)\,(i\ j)$ et $(i\ j)\,(1\ 2)$ appartiennent à $\mathcal{B}_n$ comme composée de cycles de type c_k

3. *Montrer que $\mathcal{B}_n = A_n$*

   Soit $\sigma \in A_n$; alors la signature de σ est $\varepsilon\,(\sigma) = +1$.

   σ est la composition de transpositions *(cf théorème 11.10.11)* ; la signature d'une transposition étant -1, le nombre de ces transpositions est donc forcément pair, donc :

   $$\sigma = \tau_1 \circ \tau_2 \circ \cdots \circ \tau_{2p-1} \circ \tau_{2p}$$

   Soit τ_0 la transposition $\tau_0 = (1\ 2)$; alors, comme $\tau_0 \circ \tau_0 = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}_n}$, nous pouvons écrire :

   $$\begin{aligned}\sigma &= \tau_1 \circ \tau_2 \circ \cdots \circ \tau_{2p-1} \circ \tau_{2p} \\ &= \tau_1 \circ (\tau_0 \circ \tau_0) \circ \tau_2 \circ \tau_3 \circ (\tau_0 \circ \tau_0) \circ \tau_4 \circ \cdots \circ \tau_{2p-1} \circ (\tau_0 \circ \tau_0) \circ \tau_{2p} \\ &= (\tau_1 \circ \tau_0) \circ (\tau_0 \circ \tau_2) \circ (\tau_3 \circ \tau_0) \circ \cdots \circ (\tau_{2p-1} \circ \tau_0) \circ (\tau_0) \circ \tau_{2p})\end{aligned}$$

   D'après la question précédente, toutes les transpositions du type $\tau_0 \circ \tau_{2i}$ ou $\tau_{2i-1} \circ \tau_0$ avec $i \leqslant i \leqslant p$ sont des éléments de $\mathcal{B}_n$ et donc $\sigma \in \mathcal{B}_n$ comme composée d'éléments de $\mathcal{B}_n$

Exercice 50 :

On considère deux groupes $(G_1,\star)$ et $(G_2,\top)$, deux homomorphismes de groupes f et g définis sur G_1 à valeurs dans G_2 et on appelle H l'ensemble des éléments $x\in G_1$ tels que $f(x)=g(x)$.

1. *Montrer que H est un sous-groupe de $(G_1,\star)$.*

   $\Rightarrow$ Tout d'abord $H\neq\emptyset$ puisque si e_1 est l'élément neutre de $(G_1,\star)$ et e_2, celui de $(G_2,\top)$, nous avons, propriété des homomorphismes, $f(e_1)=g(e_1)=e_2$

   $\Rightarrow$ Soient $x\in H$ et $y\in H$, avons nous $x\star y^{-1}\in H$?
   Nous avons :
   $$\begin{aligned} f\left(x\star y^{-1}\right) &= f(x)\top f\left(y^{-1}\right)\\ &= f(x)\top (f(y))^{-1}\\ &= g(x)\top (g(y))^{-1}\\ &= g(x)\top (g(y))^{-1}\\ &= g(x)\top g\left(y^{-1}\right)\\ &= g\left(x\star y^{-1}\right)\end{aligned}$$
   Ainsi $x\star y^{-1}\in H$

   Et donc H est un sous-groupe de $(G_1,\star)$

2. *On désigne par h l'injection canonique de H dans G_1*

   (a) *Montrer que $f\circ h=g\circ h$.*

   Soit $x\in H$. L'injection canonique de H dans G_1 est telle que, pour tout $x\in H$, $h(x)=x$. Ainsi, pour tout $x\in H$,
   $$f\circ h(x)=f[h(x)]=f(x)=g(x)=g[h(x)]=g\circ h(x)$$
   Et nous avons bien $f\circ h=g\circ h$

   (b) *Montrer que si $(G_3,\diamond)$ est un groupe et h' un homomorphisme défini sur G_3 à valeurs dans G_1, tel que $f\circ h'=g\circ h'$, alors il existe un homomorphisme $\theta:G_3\longrightarrow H$ défini sur G_3 à valeurs dans H, et un seul, tel que $h'=h\circ\theta$.*

   Si nous avons, par hypothèse $f\circ h'=g\circ h$, nous avons, pour tout $x\in G_3$,
   $$f\circ h'(x)=g\circ h'(x)\Longleftrightarrow f\left[h'(x)\right]=g\left[h'(x)\right]$$
   Et donc $h'(x)\in H$
   Soit donc $\theta:G_3\longrightarrow H$ ainsi définie :
   $$\begin{cases}\theta:G_3 & \longrightarrow & H\\ \quad x & \longmapsto & \theta(x)=h'(x)\end{cases}$$
   θ, définie par h' est clairement un homomorphisme, et nous avons, pour tout $x\in G_3$, $h(\theta(x))=\theta(x)=h'(x)$, et donc $h'=h\circ\theta$

Exercice 51 :

Soient $(G,\star)$ un groupe abélien, G_1 et G_2 deux sous-groupes de G tels que $G_1\subset G_2$.
Soient $\varpi_1:G\longrightarrow G/G_1$ et $\varpi_2:G\longrightarrow G/G_2$ les homomorphismes canoniques de G sur G/G_1 et de G sur G/G_2

1. *Montrer qu'il existe un homomorphisme ρ défini sur G/G_1 à valeurs dans G/G_2 et un seul, tel que $\rho\circ\varpi_1=\varpi_2$*

   $\rightarrow$ Soit $\dot{x}\in G/G_1$; il existe alors $x\in G$ tel que $\varpi_1(x)=\dot{x}$

   $\rightarrow$ Soit $x'\in G$ tel que $\varpi_1(x)=\varpi_1(x')=\dot{x}$. Ceci signifie donc que $x'\in\dot{x}$, c'est à dire, par la relation d'équivalence canonique, $x-x'\in G_1$, et comme $G_1\subset G_2$, nous avons $x-x'\in G_2$ et donc $\varpi_1(x'-x)=\dot{e}$, c'est à dire $\varpi_2(x)=\varpi_2(x')$

→ Soit $\rho : G/G_1 \longrightarrow G/G_2$ définie par :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \rho : G/G_1 & \longrightarrow & G/G_2 \\ \dot{x} & \longmapsto & \rho\left(\dot{x}\right) = \varpi_2\left(x\right) \end{array} \right.$$

Alors $\rho \circ \varpi_1\left(x\right) = \rho\left(\dot{x}\right) = \varpi_2\left(x\right)$ et donc $\rho \circ \varpi_1 = \varpi_2$

→ ρ est un homomorphisme de groupe

En effet, soient $\dot{x} \in G/G_1$ et $\dot{y} \in G/G_1$. Il existe $x \in G$ et $y \in G$ tels que $\varpi_1\left(x\right) = \dot{x}$ et $\varpi_1\left(y\right) = \dot{y}$, et donc :

$$\rho\left(\dot{x} \star \dot{y}\right) = \rho\left(\varpi_1\left(x\right) \star \varpi_1\left(y\right)\right) = \rho\left(\varpi_1\left(x \star y\right)\right) = \varpi_2\left(x \star y\right) = \varpi_2\left(x\right) \star \varpi_2\left(y\right) = \rho\left(\dot{x}\right) \star \rho\left(\dot{y}\right)$$

ρ est donc bien un homomorphisme

→ ρ est unique

Soit ρ' un second homomorphisme de groupe tel que $\rho' \circ \varpi_1 = \varpi_2$.
Nous avons alors $\rho' \circ \varpi_1 = \rho \circ \varpi_1$
Soit $\dot{x} \in G/G_1$; il existe alors $x \in G$ tel que $\varpi_1\left(x\right) = \dot{x}$. Alors :

$$\rho\left(\dot{x}\right) = \rho\left(\varpi_1\left(x\right)\right) = \rho'\left(\varpi_1\left(x\right)\right) = \rho'\left(\dot{x}\right)$$

Et donc $\rho = \rho'$. Il y a donc unicité

Nons avons donc le schéma :

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\varpi_1"] \arrow[d, "\varpi_2"'] & G/G_1 \arrow[dl, "\rho"] \\ G/G_2 & \end{tikzcd}$$

2. *Montrer que ρ est surjectif et que son noyau est G_2/G_1*

→ ρ est surjective

En effet, soit $\dot{y} \in G/G_2$; il existe donc $y \in G$ tel que $\varpi_2\left(y\right) = \dot{y}$.
De l'égalité $\varpi_2 = \rho \circ \varpi_1$, nous déduisons

$$\dot{y} = \varpi_2\left(y\right) = \rho \circ \varpi_1\left(y\right) = \rho\left[\varpi_1\left(y\right)\right]$$

En posant $z = \varpi_1\left(y\right)$, nous avons $z \in G/G_1$ et $\dot{y} = \rho\left(z\right)$.
ρ est donc bien surjective

→ Recherche de $\ker \rho$

Soit $\dot{x} \in G/G_1$ tel que $\dot{x} \in \ker \rho$; alors $\rho\left(\dot{x}\right) = \dot{e}$. Il existe aussi $x \in G$ tel que $\varpi_1\left(x\right) = \dot{x}$
Toujours de l'égalité $\varpi_2 = \rho \circ \varpi_1$, nous déduisons

$$\dot{e} = \rho\left(\dot{x}\right) = \rho \circ \varpi_1\left(x\right) = \varpi_2\left(x\right)$$

Et donc $x \in G_2$ et donc $\dot{x} \in G_2/G_1$
D'où $\ker \rho = G_2/G_1$

Exercice 52 :

Soient G_0, G_1, G_2 des groupes, $f_1 : G_0 \longrightarrow G_1$, un homomorphisme surjectif de G_0 sur G_1, et $f_2 : G_0 \longrightarrow G_2$, un homomorphisme de G_0 sur G_2, tels que $\ker f_1 \subset \ker f_2$

1. *Montrer qu'il existe un homomorphisme $g : G_1 \longrightarrow G_2$ défini sur G_1, à valeurs dans G_2, et un seul, tel que $f_2 = g \circ f_1$*

En fait, nous devons démontrer que nous avons le schéma suivant :

$$\begin{tikzcd} G_0 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "f_2"'] & G_1 \arrow[dl, "g"] \\ G_2 & \end{tikzcd}$$

Nous allons noter $e_0 \in G_0$ l'élément neutre de G_0, $e_1 \in G_1$ l'élément neutre de G_1 et $e_2 \in G_2$ l'élément neutre de G_2.

Soit $y \in G_1$; nous nous devons donc de définir $g(y)$

- ⋆ f_1 étant surjective, il existe $x \in G_0$ tel que $y = f_1(x)$, et il semble naturel alors de poser $g(y) = f_2(x)$ et, dans ce cas, $f_2 = g \circ f_1$
- ⋆ f_1 étant surjective, il peut exister $x' \in G_0$ tel que $y = f_1(x')$ avec, éventuellement $x \neq x'$... Et alors ? ?

  Posons nous d'abord la question sur ce que veut dire $f_1(x') = f_1(x)$.

  $$f_1(x') = f_1(x) \Longleftrightarrow f_1(x') \times (f_1(x))^{-1} = e_1 \Longleftrightarrow f_1\left(x'x^{-1}\right) = e_1$$

  Ce qui veut donc dire que $x'x^{-1} \in \ker f_1$

  Or, par hypothèse, $\ker f_1 \subset \ker f_2$ et donc $x'x^{-1} \in \ker f_2$.

  En reprenant la démonstration que nous avons faite pour f_1, nous déduisons que $f_2(x') = f_2(x)$ et donc $g(y)$ est entièrement et bien défini.
- ⋆ Est ce que g est un homomorphisme de groupe ?

  Soient $y_1 \in G_1$ et $y_2 \in G_1$ et étudions $g(y_1y_2)$.

  Il existe donc $x_1 \in G_0$ et $x_2 \in G_0$ tels que $y_1 = f_1(x_1)$ et $y_2 = f_1(x_2)$ et donc $g(y_1) = f_2(x_1)$ et $g(y_2) = f_2(x_2)$

  $$g(y_1y_2) = g(f_1(x_1)f_1(x_2)) = g(f_1(x_1x_2)) = f_1(x_1)f_1(x_2) = g(y_1)g(y_2)$$

  g est donc bien un homomorphisme
- ⋆ Y a-t-il unicité de g ?

  Soit donc $g' : G_1 \longrightarrow G_2$ un second homomorphisme tel que $f_2 = g' \circ f_1$

  Soit $y \in G_1$. Il existe $x \in G_0$ tel que $y = f_1(x)$, et nous avons alors :

  $$g'(y) = g'(f_1(x)) = g' \circ f_1(x) = f_2(x) = g \circ f_1(x) = g(f_1(x)) = g(y)$$

  Nous venons donc de démontrer que $g = g'$, c'est à dire que nous venons de démontrer l'unicité.

2. *Montrer que* $\ker g = f_1(\ker f_2)$

⇒ Soit $y \in f_1(\ker f_2)$; alors, il existe $x \in \ker f_2$ tel que $y = f_1(x)$ et

$$g(y) = g(f_1(x)) = f_2(x) = e_2$$

Et donc, comme $g(y) = e_2$, nous avons $y \in \ker g$

D'où $f_1(\ker f_2) \subset \ker g$

⇒ Reciproquement soit $y \in \ker g$; alors $g(y) = e_2$ et donc, de $g(y) = g \circ f_1(x) = f_2(x) = e_2$ nous tirons que $x \in \ker f_2$, et comme $y = f_1(x)$, nous avons $y \in f_1(\ker f_2)$.

Donc $\ker g \subset f_1(\ker f_2)$

D'où $\ker g = f_1(\ker f_2)$

Exercice 53 :

Si $(G,+)$ *est un groupe abélien, nous désignerons par* $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, G)$ *l'ensemble des homomorphismes de* $\mathbb{Z}$ *dans* G.

1. *Montrer que tout homomorphisme* f *de* $\mathbb{Z}$ *dans* G *est complètement déterminé par la donnée de* $f(1)$.

Soit $(G,+)$ un groupe abélien dont l'opération est notée additivement de neutre noté 0 et $f : \mathbb{Z} \longrightarrow G$ un homomorphisme de groupe

- Alors $f(0) = 0$, et en utilisant les propriétés d'homomorphisme, pour tout $m \in \mathbb{Z}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$ nous avons :

  $$f(m+n) = f(m) + f(n) \text{ et } f(0) = 0 \text{ et } f(-m) = -f(m)$$

  En particulier, $f(2) = f(1+1) = f(1) + f(1) = 2f(1)$

- Très généralement, et par une récurrence facile, on montre que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ que $f(n) = nf(1)$
- Supposons que, maintenant, $n \in \mathbb{Z}^-$; il existe alors $n' \in \mathbb{N}^*$ tel que $n = -n'$, et donc :

$$f(n) = f(-n') = -f(n') = -[n'f(1)] = -n'f(1) = nf(1)$$

Nous venons donc de montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $f(n) = nf(1)$ et donc $f(1)$ détermine bien l'homomorphisme de groupe $f : \mathbb{Z} \longrightarrow G$

2. *On munit* $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, G)$ *de la loi de composition suivante :*

   Si $f \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, G)$ *et* $g \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, G)$*, alors* $f \oplus g$ *est l'application de* $\mathbb{Z}$ *dans* G *définie en posant pour chaque entier rationnel* $n \in \mathbb{Z}$*,*

$$(f \oplus g)(n) = f(n) + g(n)$$

Montrer que $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, G)$ *devient ainsi un groupe abélien.*

Voici une question classique et des plus faciles

- La loi $\oplus$ est une loi interne dans $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, G)$
  Soient $f \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, G)$ et $g \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, G)$, il faut montrer que $f \oplus g \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, G)$
  Il faut donc montrer que $f \oplus g$ est un homomorphisme de groupe.
  Soient $m \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{Z}$, alors :

$$\begin{aligned}(f \oplus g)(m+n) &= f(m+n) + g(m+n) \\ &= f(m) + f(n) + g(m) + g(n) \\ &= f(m) + g(m) + f(n) + g(n) \text{ par commutativité dans } (G,+) \\ &= (f \oplus g)(m) + (f \oplus g)(n)\end{aligned}$$

  Nous venons de montrer que $f \oplus g$ est un homomorphisme de groupe et que donc $f \oplus g \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, G)$
  La loi $\oplus$ est donc interne dans $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, G)$
- La loi $\oplus$ est associative
  Il faut donc montrer que, pour tout $f \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, G)$, $g \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, G)$ et $h \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, G)$, nous avons

$$(f \oplus g) \oplus h = f \oplus (g \oplus h)$$

  Soit donc $n \in \mathbb{Z}$; alors :

$$\begin{aligned}((f \oplus g) \oplus h)(n) &= (f \oplus g)(n) + h(n) \\ &= (f(n) + g(n)) + h(n) \\ &= f(n) + (g(n) + h(n)) \text{ par associativité dans } (G,+) \\ &= f(n) + (g \oplus h)(n) \\ &= (f \oplus (g \oplus h))(n)\end{aligned}$$

  Et donc nous avons, dans $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, G)$, $(f \oplus g) \oplus h = f \oplus (g \oplus h)$.
  La loi $\oplus$ est donc associative.
- La loi $\oplus$ est commutative
  Il faut donc montrer que, pour tout $f \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, G)$ et tout $g \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, G)$ nous avons

$$f \oplus g = g \oplus f$$

  Soit donc $n \in \mathbb{Z}$; alors :

$$\begin{aligned}(f \oplus g)(n) &= f(n) + g(n) \\ &= g(n) + f(n) \text{ par la commutativité dans } (G,+) \\ &= (g \oplus f)(n)\end{aligned}$$

  Et donc nous avons, dans $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, G)$, $f \oplus g = g \oplus f$.
  La loi $\oplus$ est donc commutative.

- L'élément neutre de $\oplus$ dans $\operatorname{Hom}(\mathbb{Z}, G)$ est la fonction constante $\mathcal{O} : \mathbb{Z} \longrightarrow G$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\mathcal{O}(n) = 0$.
  En effet, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, nous avons :
  $$(f \oplus \mathcal{O})(n) = f(n) + \mathcal{O}(n) = f(n) + 0 = f(n)$$
  Et donc $f \oplus \mathcal{O} = f$
  Par commutativité, nous avons de la même manière que $\mathcal{O} \oplus f = f$
  Et donc $f \oplus \mathcal{O} = \mathcal{O} \oplus f = f$
- Chaque élément $f \in \operatorname{Hom}(\mathbb{Z}, G)$ admet un symétrique noté $(-f)$ et défini pour tout $n \in \mathbb{Z}$ par $(-f)(n) = -f(n)$. En effet :
  $$(f \oplus (-f))(n) = f(n) + (-f)(n) = f(n) - f(n) = 0 = \mathcal{O}(n)$$
  Nous avons donc $f \oplus (-f) = \mathcal{O}$, et , par commutativité, $(-f) \oplus f = \mathcal{O}$

3. *Soient G_1, G_2 et G_3, trois groupes abéliens, $f_1 : G_1 \longrightarrow G_2$ un homomorphisme de G_1 dans G_2 et $f_2 : G_2 \longrightarrow G_3$ un homomorphisme de G_2 dans G_3.*
   On note f_1^* l'application de $\operatorname{Hom}(\mathbb{Z}, G_1)$ dans $\operatorname{Hom}(\mathbb{Z}, G_2)$ ainsi définie :
   $$\left\{ \begin{array}{rcl} f_1^* : \operatorname{Hom}(\mathbb{Z}, G_1) & \longrightarrow & \operatorname{Hom}(\mathbb{Z}, G_2) \\ g & \longmapsto & f_1^*(g) = f_1 \circ g \end{array} \right.$$
   On définit de manière analogue f_2^* par
   $$\left\{ \begin{array}{rcl} f_2^* : \operatorname{Hom}(\mathbb{Z}, G_2) & \longrightarrow & \operatorname{Hom}(\mathbb{Z}, G_3) \\ g & \longmapsto & f_2^*(g) = f_2 \circ g \end{array} \right.$$

   (a) *Montrer que f_1^* et f_2^* sont des homomorphismes.*

   Nous allons montrer seulement que f_1^* est un homomorphisme.
   Pour commencer, un schéma peut être instructif :
   $$\begin{tikzcd} G_1 \arrow[r, "f_1"] & G_2 \\ \mathbb{Z} \arrow[u, "g"] \arrow[ur, "f_1 \circ g"'] & \end{tikzcd}$$
   Soit $g \in \operatorname{Hom}(\mathbb{Z}, G_1)$ et $g' \in \operatorname{Hom}(\mathbb{Z}, G_1)$; il faut donc montrer que
   $$f_1^*(g \oplus g') = f_1^*(g) \oplus f_1^*(g')$$
   Soit donc $n \in \mathbb{Z}$, et nous avons :
   $$\begin{aligned} [f_1^*(g \oplus g')](n) = & \; [f_1 \circ (g \oplus g')](n) \\ = & \; f_1[(g \oplus g')(n)] \\ = & \; f_1[g(n) + g'(n)] \\ = & \; f_1[g(n)] + f_1[g'(n)] \\ = & \; f_1 \circ g(n) + f_1 \circ g'(n) \\ = & \; f_1^*(g)(n) + f_1^*(g')(n) \\ = & \; [f_1^*(g) \oplus f_1^*(g')](n) \end{aligned}$$
   Nous avons donc $f_1^*(g \oplus g') = f_1^*(g) \oplus f_1^*(g')$ et f_1^* est donc un homomorphisme de groupes

   (b) *Montrer que si $G_1 = G_2$, et si f_1 est l'identité de G_1 alors f_1^* est l'identité de $\operatorname{Hom}(\mathbb{Z}, G_1)$.*

   Reprenons le schéma :
   $$\begin{tikzcd} G_1 \arrow[r, "\mathrm{Id}_{G_1}"] & G_1 \\ \mathbb{Z} \arrow[u, "g"] \arrow[ur, "\mathrm{Id}_{G_1} \circ g"'] & \end{tikzcd}$$

Il faudrait donc montrer que, pour tout $g \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, G_1)$, nous avons $f_1^*(g) = g$.
Soit $n \in \mathbb{Z}$, alors :

$$f_1^*(g)(n) = f_1 \circ g(n) = \mathrm{Id}_{G_1} \circ g(n) = g(n)$$

Nous avons bien $f_1^*(g) = g$ et donc $f_1^* = \mathrm{Id}_{\mathrm{Hom}(\mathbb{Z},G_1)}$

(c) *Montrer que $(f_2 \circ f_1)^* = f_2^* \circ f_1^*$*

Tout d'abord, il faut remarquer que $f_2 \circ f_1$ est un homomorphisme du groupe G_1 dans le groupe G_3.
Il nous faut démontrer que, pour tout $g \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, G_1)$, nous avons

$$(f_2 \circ f_1)^*(g) = (f_2^* \circ f_1^*)(g) = f_2^*[f_1^*(g)]$$

Soit $n \in \mathbb{Z}$; alors :

$$\begin{aligned}(f_2 \circ f_1)^*(g)(n) = & \quad f_2 \circ f_1 \circ g(n) \\ = & \quad f_2[f_1 \circ g(n)] \\ = & \quad f_2[f_1^*(g)(n)] \\ = & \quad f_2^*[f_1^*(g)](n)\end{aligned}$$

Et nous avons donc, pour tout $g \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, G_1)$, $(f_2 \circ f_1)^*(g) = f_2^*[f_1^*(g)] = (f_2^* \circ f_1^*)(g)$
D'où $(f_2 \circ f_1)^* = f_2^* \circ f_1^*$

(d) *Montrer que si f_1 est injectif alors f_1^* est injectif.*

Supposons f_1 injectif et montrons que f_1^* est injectif.
Il nous faut donc montrer l'implication suivante pour tout $g \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, G_1)$ et tout $g' \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, G_1)$:

$$f_1^*(g) = f_1^*(g') \Longrightarrow g = g'$$

Supposons donc que $f_1^*(g) = f_1^*(g')$, alors, pour tout $n \in \mathbb{Z}$

$$f_1^*(g)(n) = f_1^*(g')(n) \Longleftrightarrow f_1 \circ g(n) = f_1 \circ g'(n) \Longleftrightarrow f_1(g(n)) = f_1(g'(n))$$

De l'injectivité de f_1, nous déduisons, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $g(n) = g'(n)$, c'est à dire $g = g'$.
f_1^* est donc injectif

(e) *Montrer que si f_1 est surjectif alors f_1^* est surjectif.*

Supposons f_1 surjectif. Soit $h \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, G_2)$; existe-t-il $g \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, G_1)$ tel que $f_1^*(g) = h$?
Soit $h \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, G_2)$.
f_1 étant surjectif, il existe $x \in G_1$ tel que $f_1(x) = h(1)$
Les homomorphismes $g \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, G_1)$ sont entièrement déterminés par la donnée de $g(1)$. Il existe donc un et un seul endomorphisme $g \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, G_1)$ tel que $g(1) = x$.
Alors $f_1 \circ g(1) = f_1(x) = h(1)$. Les homomorphismes g et h sont entièrement déterminés.
Ainsi $f_1 \circ g = h$, c'est à dire $f_1^*(g) = h$ et f_1^* est surjectif

Exercice 55 :

Soient G un groupe abélien et $H \subset G$ un sous-groupe de G tel que le quotient G/H soit un groupe monogène infini.
Montrer qu'il existe un isomorphisme de $H \times (G/H)$ sur G.

Soit $x \in G$ tel que $\dot{x}$ engendre G/H, c'est à dire :

$$G/H = \{(\dot{x})^n \text{ avec } n \in \mathbb{Z}\}$$

On appelle $X = \Gamma(\{x\})$, le sous-groupe de G engendré par x
→ Soit $\varphi : G/H \longrightarrow X$ une application définie par :

$$\begin{cases} \varphi : G/H & \longrightarrow & X \\ \quad (\dot{x})^n & \longmapsto & \varphi((\dot{x})^n) = x^n \end{cases}$$

Nous allons montrer que φ est un isomorphisme de groupe

⋆ φ est un homomorphisme de groupe
En effet :

$$\begin{aligned}\varphi\left((\dot{x})^n \times (\dot{x})^m\right) &= \varphi\left(\dot{\overline{x^n \times x^m}}\right)\\ &= \varphi\left(\dot{\overline{x^n \times x^m}}\right)\\ &= \varphi\left(\dot{\overline{x^{n+m}}}\right)\\ &= x^{n+m} = x^n \times x^m\\ &= \varphi\left((\dot{x})^n\right) \times \varphi\left((\dot{x})^m\right)\end{aligned}$$

φ est donc bien un homomorphisme de groupe

⋆ φ est surjective
Soit $y \in X$; il existe donc $n \in \mathbb{Z}$ tel que $y = x^n$ et donc, comme $\dot{\overline{x^n}} = \dot{x}^n$, nous avons $\varphi\left(\dot{\overline{x^n}}\right) = \varphi\left((\dot{x})^n\right) = x^n = y$.
Donc $\varphi : G/H \longrightarrow X$ est bien une application surjective.

⋆ Montrons que φ est injective.
Soient donc $y \in G/H$ et $z \in G/H$ tels que $\varphi(y) = \varphi(z)$.
Il existe $m \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{Z}$ tels que $(\dot{x})^n = y$ et $(\dot{x})^m = z$, et donc

$$\varphi(y) = \varphi(z) \Longleftrightarrow x^n = x^m \Longleftrightarrow x^{n-m} = e$$

En particulier, de $x^{n-m} = e$, nous tirons $\dot{x}^{n-m} = \dot{e}$.
Comme G/H est un groupe monogène infini, alors $n - m = 0 \Longleftrightarrow n = m$ et donc, $y = z$
φ est donc injective

Ainsi, φ est un isomorphisme de groupe.

De quel type sont donc les éléments $\dot{x} \in G/H$?

Nous avons $y \in \dot{x} \Longleftrightarrow y = xh$ avec $h \in H$. Du fait que G/H est monogène, toutes les classes de G/H sont du type $(\dot{x})^n$ avec $n \in \mathbb{Z}$ et alors $\dot{\overline{x^n}} = \{y \in G \text{ avec } y = x^n h \text{ avec } h \in H\}$

→ Soit, maintenant $\psi : H \times X \longrightarrow G$ définie par :

$$\begin{cases} \psi : H \times X & \longrightarrow & G \\ \quad (h, x^n) & \longmapsto & \psi\left[(h, x^n)\right] = hx^n \end{cases}$$

La structure de groupe de $H \times X$ est celle impliquée par les structures de groupe de H et de X

⋆ ψ est un homomorphisme de groupe
En effet

$$\psi\left[(h, x^n)(h', x^m)\right] = \psi\left[\left(hh', x^{n+m}\right)\right] = hh'x^{n+m} = hx^n h' x^m = \psi\left[(h, x^n)\right] \times \psi\left[(h', x^m)\right]$$

⋆ ψ est surjective
Soit $y \in G$; alors $\dot{y} \in G/H$ et, comme G/H est monogène infini, nous avons $\dot{y} = (\dot{x})^n$. Comme $y \in (\dot{x})^n$, il existe $h \in H$ tel que $y = x^n h$, c'est à dire :

$$y = x^n h = \psi\left[(h, x^n)\right]$$

ψ est donc surjective

⋆ ψ est injective
Soient $(h, x^n) \in H \times X$ et $(h', x^m) \in H \times X$ tels que $\psi\left[(h, x^n)\right] = \psi\left[(h', x^m)\right]$.
Alors $hx^n = h'x^m$, c'est à dire $x^n = h^{-1}h'x^m = \left(h^{-1}h'\right)x^m$; ainsi, $x^n \in (\dot{x})^m$, c'est à dire $(\dot{x})^n = (\dot{x})^m$ et donc $m = n$, et de $m = n$, on tire $h = h'$. Donc :

$$(h, x^n) = (h', x^m)$$

ψ est donc injective

Et ψ est un isomorphisme de $H \times X$ sur G

→ Nous avons montré que G/H et X étaient isomorphes *(par l'isomorphisme φ)*.
Comme $H \times X$ et G sont isomorphes, il est naturel de penser que $H \times G/H$ et G sont isomorphes.
Soit $\overline{\varphi} : H \times G/H \longrightarrow H \times X$ définie par :

$$\begin{cases} \overline{\varphi} : H \times G/H & \longrightarrow & H \times X \\ \quad (h, (\dot{x})^n) & \longmapsto & \overline{\varphi}\left[(h, (\dot{x})^n)\right] = \left(h, \varphi\left((\dot{x})^n\right)\right) = (h, x^n) \end{cases}$$

Il est facile de démontrer que $\overline{\varphi}$ est un isomorphisme de groupe. Nous avons donc :

$$H \times G/H \quad \xrightarrow{\overline{\varphi}} \quad H \times X \quad \xrightarrow{\psi} \quad G$$

Nous avons donc $\psi \circ \overline{\varphi} : H \times G/H \longrightarrow G$ qui est un isomorphisme comme composée de 2 isomorphismes.

Q.E.D.

Compléments

Nous avons dit qu'il était « facile de démontrer que $\overline{\varphi}$ est un isomorphisme de groupe ».
Nous vous proposons de le démontrer en élargissant le propos :

Soient G, H et K, 3 groupes et $\varphi : H \longrightarrow K$, un isomorphisme de groupes.
On construit $\overline{\varphi}$ de cette façon :

$$\begin{cases} \overline{\varphi} : G \times H & \longrightarrow & G \times K \\ \quad (g,h) & \longmapsto & \overline{\varphi}\left[(g,h)\right] = (g, \varphi(h)) \end{cases}$$

Montrer que $\overline{\varphi}$ est un isomorphisme de $G \times H$ sur $G \times K$

Exercice 56 :

Soient G un groupe d'élément neutre e.
On appelle <u>sous-groupe dérivé</u> de G, que l'on note $\mathcal{D}(G)$ le sous-groupe engendré par les éléments de la forme $[x,y] = xyx^{-1}y^{-1}$ où x et y sont des éléments de G.
Nous avons déjà démontré que $\mathcal{D}(G)$ est un sous-groupe distingué de G et que $G/\mathcal{D}(G)$ est un groupe abélien.

1. *Montrer que si f est un homomorphisme de G dans un groupe commutatif H, il existe un homomorphisme $\overline{f}$ de $G/\mathcal{D}(G)$ dans H, et un seul, tel que $f = \overline{f} \circ p$ où p désigne la surjection canonique de G sur $G/\mathcal{D}(G)$*

   En fait, nous souhaitons que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"] & H \\ G/\mathcal{D}(G) \arrow[ur, "\overline{f}"'] & \end{tikzcd}$$

⇒ **Nous allons démontrer que, pour tout homomorphisme $f : G \longrightarrow H$ où H est un <u>groupe commutatif</u>, nous avons $\mathcal{D}(G) \subset \ker f$**
Nous notons e', l'élément neutre de H
En effet, soit $z \in \mathcal{D}(G)$; il existe alors $x \in G$ et $y \in G$ tels que $z = [x,y] = xyx^{-1}y^{-1}$, et nous avons :

$$\begin{aligned} f(z) = \; & f\left(xyx^{-1}y^{-1}\right) \\ = \; & f(x) f(y) f(x)^{-1} f(y)^{-1} \quad \text{(propriétés des homomorphismes)} \\ = \; & f(x) f(x)^{-1} f(y) f(y)^{-1} \quad \text{(par commutativité de H)} \\ = \; & e' \end{aligned}$$

Donc $z \in \ker f$ et donc $\mathcal{D}(G) \subset \ker f$

⇒ Soit $\dot{y} \in G/\mathcal{D}(G)$; on pose $\overline{f}(\dot{y}) = f(y)$. En réutilisant la proposition 11.7.5, on démontre facilement que $\overline{f}$ est un homomorphisme de groupe et nous avons, pour tout $y \in G$,

$$f(y) = \overline{f}(\dot{y}) = \overline{f} \circ p(\dot{y})$$

c'est à dire $f = \overline{f} \circ p$

2. *En déduire que si K est un sous-groupe distingué de G tel que G/K soit commutatif, alors $K \supset \mathcal{D}(G)$* [1]

   On considère la projection canonique $s : G \longrightarrow G/K$; s est un homomorphisme de groupe de noyau K. D'après la question précédente, $\mathcal{D}(G) \subset \ker s$, c'est à dire $\mathcal{D}(G) \subset K$.
   Ce que nous voulions.

3. *On définit par récurrence le sous-groupe $\mathcal{D}^n(G)$ en posant $\mathcal{D}^0(G) = G$ et pour tout entier naturel n, $\mathcal{D}^{n+1}(G) = \mathcal{D}(\mathcal{D}^n(G))$.*
   Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
   (a) *Il existe un entier naturel k tel que $\mathcal{D}^k(G) = \{e\}$*
   (b) *Il existe p sous-groupes $G_1, \dots G_p$ de G tels que $G_0 = G \supset G_1 \supset \dots \supset G_p \supset G_{p+1} = \{e\}$ et pour tout entier q tel que $0 \leqslant q \leqslant p$,G_{q+1},est un sous-groupe distingué de G_q et G_q/G_{q+1} est un groupe commutatif.*

   ▷ **Supposons qu'il existe un entier naturel k tel que $\mathcal{D}^k(G) = \{e\}$**
   $\mathcal{D}^{i+1}(G) = \mathcal{D}\left(\mathcal{D}^i(G)\right)$ est le sous groupe dérivé de $\mathcal{D}^i(G)$ et nous avons ainsi une suite de sous-groupes décroissante, c'est à dire $\mathcal{D}^{i+1}(G) \subset \mathcal{D}^i(G)$.
   On a montré aussi que un sous-groupe dérivé est toujours distingué, donc $\mathcal{D}^{i+1}(G)$ est un sous-groupe distingué de $\mathcal{D}^i(G)$, et donc, l'ensemble des classes d'équivalence modulo $\mathcal{D}^{i+1}(G)$ qu'est $\mathcal{D}^{i+1}(G)/\mathcal{D}^i(G)$ est un groupe commutatif.
   Nous avons donc prouvvé l'existence de k sous-groupes $G_1, \dots G_k$ de G tels que $G_0 = G \supset G_1 \supset \dots \supset G_{k-1} \supset G_k = \{e\}$ et pour tout entier q tel que $0 \leqslant q \leqslant k$,G_{q+1},est un sous-groupe distingué de G_q et G_q/G_{q+1} est un groupe commutatif.

   ▷ **Réciproquement, supposons qu'il existe p sous-groupes $G_1, \dots G_p$ de G tels que $G_0 = G \supset G_1 \supset \dots \supset G_p \supset G_{p+1} = \{e\}$ et pour tout entier q tel que $0 \leqslant q \leqslant p$,G_{q+1} est un sous-groupe distingué de G_q et G_q/G_{q+1} est un groupe commutatif.**
   ⊠ D'après l'hypothèse, G/G_1 est un groupe commutatif, G_1 est un sous-groupe distingué de G et donc, d'après la question 3 $\mathcal{D}(G) \subset G_1$
   ⊠ Soit $q \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leqslant q \leqslant p+1$, et supposons que, pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leqslant k < q$, on ait $\mathcal{D}^k(G) \subset G_k$
   Nous avons, en particulier, $\mathcal{D}^{q-1}(G) \subset G_{q-1}$

   On énonce, ici, un résultat nécessaire, dont la démonstration est facile.

   Lemme

   Soient G un groupe, A et B 2 sous-groupe de G
   Si $A \subset B$, alors $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(B)$

   Démonstration

   Si $z \in \mathcal{D}(A)$, alors $z = [x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$ où $x \in A$ et $y \in B$
   Comme $A \subset B$, nous avons aussi $x \in B$ et $y \in B$ et donc $z \in \mathcal{D}(B)$.
   D'où $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(B)$

   Donc, de $\mathcal{D}^{q-1}(G) \subset G_{q-1}$, nous déduisons que $\mathcal{D}\left(\mathcal{D}^{q-1}(G)\right) \subset \mathcal{D}(G_{q-1})$, c'est à dire $\mathcal{D}^q(G) \subset \mathcal{D}(G_{q-1})$
   ⊠ Par hypothèse, G_q est un sous-groupe distingué de G_{q-1}, que G_{q-1}/G_q est un groupe commutatif ; donc, d'après la question 3 ci-dessus, $\mathcal{D}(G_{q-1}) \subset G_q$.
   Ainsi, de $\mathcal{D}^q(G) \subset \mathcal{D}(G_{q-1})$ et $\mathcal{D}(G_{q-1}) \subset G_q$, nous tirons, que, pour tout $q \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leqslant q \leqslant p+1$, nous avons $\mathcal{D}^q(G) \subset G_q$.
   En particulier, nous avons $\mathcal{D}^{p+1}(G) \subset G_{p+1} = \{e\}$.
   Il existe donc $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{D}^k(G) = \{e\}$

Exercice 57 :

Soit Gun groupe d'élément neutre e, ayant au moins deux éléments et dont les seuls sous-groupes sont $\{e\}$ et G. Montrer que G est cyclique d'ordre premier.

1. Nous trouvons une autre et meilleure démonstration dans la question 3 de l'exercice 23

Soit donc G un groupe de cardinal au moins 2, c'est à dire Card $G \geqslant 2$
Soit donc $x \in G$ tel que $x \neq e$, et on considère $\langle x \rangle = \{x^n \text{ avec } n \in \mathbb{Z}\}$, le sous-groupe de G engendré par x.
Comme $\langle x \rangle \neq \{e\}$, nous avons $\langle x \rangle = G$, et G est donc un groupe monogène.

→ Supposons que G soit un groupe d'ordre infini.
Alors, d'après 11.8.6, G est isomorphe à $\mathbb{Z}$; or, $\mathbb{Z}$ admet des sous-groupes non triviaux le ssous-groupes $p\mathbb{Z}$ avec $p \in \mathbb{N}$, ce qui contredit l'hypothèse.
Donc G est d'ordre fini.
G est donc monogène fini, c'est à dire cyclique.

→ Où nous montrons que n, l'ordre de G est un nombre premier.
Nous avons donc $\langle x \rangle = \left\{e, x, x^2, \cdots, x^{n-1}\right\}$.
Soit $0 \leqslant k \leqslant n-1$, et considérons le sous-groupe $\left\langle x^k \right\rangle$ engendré par l'élément x^k.
Alors Card $\left(\left\langle x^k \right\rangle\right) = \dfrac{n}{\text{pgcd}\,(n,k)}$. Ord'après l'hypothèse, $\left\langle x^k \right\rangle = G$ et nous avons donc $n = \dfrac{n}{\text{pgcd}\,(n,k)}$, c'est à dire pgcd $(n,k) = 1$, et ceci, pour tout $0 \leqslant k \leqslant n-1$; donc n est premier.

Exercice 58 :

L'objectif de cet exercice est de démontrer que les seuls groupes d'ordre 6 à isomorphisme près sont $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +)$ et $\mathcal{S}_3$.
Soit donc G un groupe d'ordre 6.

1. *Montrer que G possède au moins un élément d'ordre 3. On note x un tel élément.*

   → Supposons G groupe cyclique
   Alors, $G = \left\{e, x, x^2, x^3, x^4, x^5\right\}$, c'est à dire que G possède un élément d'ordre 6.
   Si nous considérons x^2, alors x^2 est un élément d'ordre 3 car nous avons $\left(x^2\right)^3 = e$ et $x^2 \neq e$

   → Supposons G groupe non cyclique
   Il n'y a donc aucun élément d'ordre 6, sinon, G serait cyclique.
   Soit $x \in G$ tel que $x \neq e$
   Alors $\langle x \rangle$ le sous groupe engendré par x ; alors, d'après le théorème de Lagrange, $\langle x \rangle$ est d'ordre 2 ou d'ordre 3, c'est à dire que x est d'ordre 2 ou d'ordre 3.

   → Supposons que tous les éléments de G soient d'ordre 2, c'est à dire que tout $x \in G$ est tel que $x^2 = e$; alors G est un groupe commutatif.
   Soient $a \in G$ et $b \in G$ avec $a \neq b$ et considérons $\langle a, b \rangle$ le sous-groupe engendré par a et b. Alors $\langle a, b \rangle = \{a, b, ab\}$ (puisque nous avons $ab = ba$.
   C'est donc un sous-groupe d'ordre 4, ce qui est impossible puisque 4 ne divise pas 6 *(théorème de Lagrange)*. Il existe donc, dans G, un élément d'ordre 3.

2. *Montrer que G possède au moins un élément d'ordre 2. On note y un tel élément.*

   On aurait pu penser la démonstration semblable à celle ci-dessus, il n'en est rien.

   → Supposons G groupe cyclique
   Alors, $G = \left\{e, x, x^2, x^3, x^4, x^5\right\}$, c'est à dire que G possède un élément d'ordre 6.
   Si nous considérons x^3, alors x^3 est un élément d'ordre 2 car nous avons $\left(x^3\right)^2 = x^6 = e$ et $x^3 \neq e$

   → Supposons G groupe non cyclique Il n'y a donc aucun élément d'ordre 6, sinon, G serait cyclique.
   Soit $x \in G$ tel que $x \neq e$
   Alors $\langle x \rangle$ est le sous groupe engendré par x ; alors, d'après le théorème de Lagrange, $\langle x \rangle$ est d'ordre 2 ou d'ordre 3, c'est à dire que x est d'ordre 2 ou d'ordre 3.

   → Supposons que tous les éléments de G soient d'ordre 3, c'est à dire que tout $x \in G$ est tel que $x^3 = e$.
   Soient $a \in G$ et $b \in G$ deux éléments de G distincts et d'ordre 3.
   Alors G contient $\left\{e, a, a^2, b, b^2\right\}$ qui sont des éléments deux à deux distincts.
   Comme Card $G = 6$, il existe donc un autre élément $c \in G$, distincts des précédents, tel que $G = \left\{e, a, a^2, b, b^2, c\right\}$

De plus c est nécessairement d'ordre 3.

→ Mais, bien entendu, G doit aussi contenir c^2.
On vérifie par un calcul direct que c^2 est distinct de e, a, a^2, b, b^2, c. En effet :
- ⋆ c étant d'ordre 3, $c^2 \neq e$
- ⋆ Ensuite, nous ne pouvons avoir $c^2 = a$, puisque si nous l'avions, alors $c^4 = c = a^2$, ce qui est impossible, et donc $c^2 \neq a$; on démontre aussi $c^2 \neq b$
- ⋆ De même, il nous est impossible d'avoir $c^2 = a^2$, puisque si nous l'avions, nous aurions $\left(c^2\right)^2 = \left(a^2\right)^2 \iff c^4 = a^4 \iff c = a$

Ce qui est impossible.
Ainsi G possède au moins un élément d'ordre 2.

3. *Montrer que $G = \langle x, y\rangle$*

Le groupe G contient $\left\{e, x, x^2, y\right\}$ qui sont distincts deux à deux *(nous avons $y^2 = e$)*.
On peut compléter cette liste en considérant xy et x^2y.
Nous avons xy et x^2y sont distincts des précédents ; en effet, les quelques calculs suivants le montrent :

→ Si $xy = x$, alors $x^2\,(xy) = x^2x \iff y = x^3 = e$, ce qui est impossible. De même, si $xy = y$, en multipliant à droite par y, nous avons $x = e$; ce qui est toujours impossible

→ Si $xy = x^2$, en multipliant à gauche par x^2, nous avons $x^2\,(xy) = x^2 \times x^2 \iff x^3y = x^4 \iff y = x$, ce qui est impossible

→ Si $x^2y = x$, toujours par multiplication, $y = x^2$; si $x^2y = y$, alors $x^2 = e$ et si $x^2y = y$, alors $y = e$, ce qui est impossible.

Ainsi $G = \left\{e, x, x^2, y, xy, x^2y\right\}$. En particulier nous avons $G = \langle x, y\rangle$.

4. *Montrer que si G est abélien, alors G est cyclique d'ordre 6.*

Supposons G groupe abélien.
Comme nous avons $xy = yx$ avec x d'ordre 3 et y d'ordre 2 . Remarquons que 2 et 3 sont premiers entre eux ; donc, le produit xy est d'ordre 6.
De Card $G = 6$, on déduit que G est cyclique et engendré par xy.
D'après le théorème de classification des groupes cycliques 11.8.7, G est isomorphe à $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +)$.

5. *Si G n'est pas abélien, montrer que $yx = x^2y$. Ecrire la table de multiplication de G. Conclure que $G \cong \mathcal{S}_3$*

Supposons G groupe non abélien.
Nous avons alors $yx = x^2y$. En effet :

→ Si $yx = e$, alors, en composant à gauche par y, nous avons :

$$yx = e \iff y\,(yx) = y \times e \iff y^2x = y \iff x = y$$

Ce qui est impossible

→ Si $yx = x$, alors, en composant à droite par x^2, nous avons :

$$yx = x \iff (yx)\,x^2 = x \times x^2 \iff yx^3 = x^3 \iff y = e$$

Ce qui est impossible

→ Si $yx = x^2$, alors, en composant à droite par x^2, nous avons :

$$yx = x^2 \iff (yx)\,x^2 = x^2 \times x^2 \iff yx^3 = x^4 \iff y = x$$

Ce qui est impossible

→ Si $yx = y$, alors, en composant à gauche par y, nous avons :

$$yx = y \iff y\,(yx) = y \times y \iff y^2x = e \iff x = e$$

Ce qui est impossible

Nous en déduisons que $yx = xy$ ou $yx = x^2y$. Mais comme $G = \langle x, y\rangle$ est non abélien, on a nécessairement $yx = x^2y$.

Table de multiplication de $G = \langle x, y\rangle$

$\curvearrowright$	e	x	x^2	y	xy	x^2y
e	e	x	x^2	y	xy	x^2y
x	x	x^2	e	xy	x^2y	y
x^2	x^2	e	x	x^2y	y	xy
y	y	x^2y	xy	e	x^2	x
xy	xy	y	x^2y	x	e	x^2
x^2y	x^2y	xy	y	x^2	x	e

Est ce que $G = \langle x, y\rangle$ est isomorphe à $\mathcal{S}_3$?

$\mathcal{S}_3$ est le groupe des permutations de $\{1, 2, 3\}$

Nous avons d'abord les permutations circulaires :

$$\mathrm{Id}_{\mathbb{N}_3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad c^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Puis les transpositions :

$$\tau_{\{1,2\}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \tau_{\{1,3\}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \tau_{\{3,2\}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

On peut remarquer que $\tau_{\{1,3\}} \circ \tau_{\{1,2\}} = c$

En créant un homomorphisme de groupe Φ entre $G = \langle x, y\rangle$ et $\mathcal{S}_3$ en posant $\Phi(x) = c$ et $\Phi(y) = \tau_{\{1,2\}}$, on démontre facilement que Φ est un isomorphisme.

A un isomorphisme près, il n'y a que 2 groupes à 6 éléments : $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +)$ **et** $\mathcal{S}_3$

6. *Justifier que les groupes $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +)$ et $\mathcal{S}_3$ ne sont pas isomorphes*

   Ils ne peuvent pas être isomorphes puisque, si $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +)$ est commutatif, par contre $\mathcal{S}_3$ ne l'est pas.

Exercice 59 :

Soit Δ_4 un groupe diédral à 8 éléments, de générateurs r et s avec r d'ordre 4, s d'ordre 2 et $rsrs = e$. On pose $K = \langle s\rangle$ et $H = \langle s, r^2\rangle$. Montrer que K est distingué dans H, H est distingué dans Δ_4 mais K n'est pas distingué dans Δ_4.

Nous avons $\Delta_4 = \{1, r, r^2, r^3, s, sr, sr^2, sr^3\}$.

Nous avons, par calculs :

- ⋆ $sr = r^3s$ puisque, partant de $rsrs = e$, en multipliant à gauche par r^3, nous obtenons :

$$r^3(rsrs) = r^3 \iff srs = r^3$$

  Puis, en multipliant à droite par s, nous obtenons $(srs)s = r^3s \iff sr = r^3s$

- ⋆ De même, $rs = sr^3$. Nous partons toujours de $rsrs = e$, nous multiplions à gauche par r^3 pour obtenir $srs = r^3$, puis toujours à gauche par s et nous obtenons $rs = sr^3$
- ⋆ Par calculs semblables, nous obtenons $sr^2 = r^2s$

De manière générale, pour $k = 0, 1, 2, 3$, nous obtenons $r^ks = sr^{4-k}$

On pose $K = \langle s\rangle$ et $H = \langle s, r^2\rangle$.

⇒ K **est un sous-groupe distingué de** H Tel que défini, le sous-groupe est donc $K = \{1, s\}$ est donc d'ordre 2.

Déterminons les éléments de H.

- ⋆ r étant un élément d'ordre 4, l'élément r^2 est d'ordre 2
- ⋆ D'autre part, $sr^2 = r^2s$

Et donc $H = \{e, s, r^2, r^2s\}$, et l'ordre de H est donc 4 et $K \subset H$.

De l'identité $\mathrm{Card}\ H = [H : K]\,\mathrm{Card}\ K$, nous déduisons que $[H : K] = 2$, et donc que K est un sous-groupe distingué de H

$\Rightarrow$ **H est un sous-groupe distingué de Δ_4**
De la même manière, l'indice de H dans Δ_4 est $\dfrac{\text{Card } \Delta_4}{\text{Card } H} = \dfrac{8}{4} = 2$ donc H est un sous-groupe distingué de Δ_4

$\Rightarrow$ **K n'est pas un sous-groupe distingué de Δ_4**
Il faut donc trouver un élément $X \in \Delta_4$ et un élément $x \in K$ tel que $XxX^{-1} \notin K$
Pour cela, considérons l'élément $s \in K$ et $r \in \Delta_4$. Alors :

$$rsr^{-1} = rsr^3 = r\,(rs) = r^2 s.$$

Or, $r^2 s \notin K$. Cela prouve que K n'est pas distingué dans Δ_4.

Prolongements

Considérons les isométries qui conservent un carré.

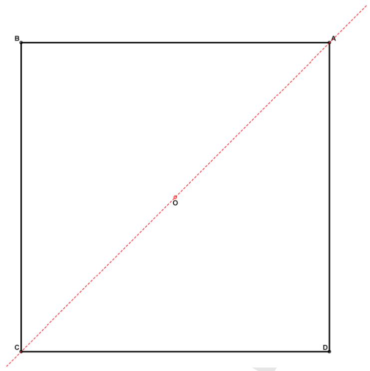

Figure 11.4 – Le carré

Si nous considérons la rotation de centre O et d'angle $+\dfrac{\pi}{2}$ et la symétrie s par rapport à la droite (AC), nous avons $r^4 = \mathrm{Id}_P$ et $s^2 = \mathrm{Id}_P$
Nous obtenons donc les permutations suivantes :

$$r = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & C & D & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B & C & D \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad s = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A & D & C & B \end{pmatrix} = \tau_{\{B,D\}}$$

s apparaît donc comme une transposition et r comme une permutation circulaire. Nous avons aussi :

$$rs = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & A & D & C \end{pmatrix} = \tau_{\{B,A\}} \circ \tau_{\{C,D\}}$$

Et nous avons bien $rsrs = \mathrm{Id}_P$ *(C'est, en fait, la symétrie orthogonale par rapport à la médiatrice du segment $[A, B]$)*
Les isométries laissant invariant un carré forment un groupe isomorphe à Δ_4. C'est, en fait, un sous-groupe de $\mathcal{S}_4$, groupe des permutations d'un ensemble à 4 éléments.
Faisons l'inventaire des transformations :

$$sr = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ D & C & B & A \end{pmatrix} = \tau_{\{A,D\}} \circ \tau_{\{B,C\}} \qquad sr^2 = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ C & B & A & D \end{pmatrix} = \tau_{\{A,C\}}$$

$$sr^3 = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & A & D & C \end{pmatrix} = \tau_{\{A,B\}} \circ \tau_{\{C,D\}} \qquad \text{On remarque que } sr^3 = rs$$

Géométriquement, sr est la symétrie orthogonale par rapport à la médiatrice du segment $[A, D]$, tandis que sr^2 la symétrie orthogonale par rapport à la diagonale (BD)

Exercice 60 :

Soient G un groupe d'ordre $n = pq$, avec $n \geqslant 2$, où p et q sont des nombres premiers, et e son élément neutre.

1. *Montrer que G a au moins un sous-groupe distinct de $\{e\}$ et de G.*

   Soit $x \in G$ tel que $x \neq e$.
   Alors, $\langle x \rangle$ est un sous-groupe de G dont l'ordre divise n. Ainsi, par hypothèses, Card $\langle x \rangle = 1$ ou Card $\langle x \rangle = p$ ou Card $\langle x \rangle = q$ ou Card $\langle x \rangle = n$, c'est à dire que x est d'ordre 1, p, q ou n
   - ⋆ Comme $x \neq e$, l'ordre ne peut être 1
   - ⋆ Si x est d'ordre p, alors $\langle x \rangle$ est bien distinct de $\{e\}$ et de G
   - ⋆ La réponse est la même si x est d'ordre q
   - ⋆ Si x est d'ordre n, alors G est cyclique et l'élément x^p est un élément d'ordre q, c'est à dire Card $\langle x^p \rangle = q$ et donc $\langle x^p \rangle$ est bien distinct de $\{e\}$ et de G

2. *Si H et H' sont deux sous-groupes propres de G tels que $H \neq H'$, montrer que $H \cap H' = \{e\}$.*

   Soient H et H', 2 sous-groupes propres de G tels que $H \neq H'$
   Ceci veut donc dire que $H \neq \{e\}$, $H' \neq \{e\}$, $H \neq G$ et $H' \neq G$; donc H et H' ont des ordres qui divisent $n = pq$
   Alors $H \cap H'$ est un sous-groupe de H dont l'ordre divise celui de H. Soit p l'ordre de H
   Si Card $H \cap H' = p$, alors $H \cap H' = H$, ce qui veut dire que $H \subset H'$, ce qui est impossible.
   Donc Card $H \cap H' = 1$, c'est à dire $H \cap H' = \{e\}$

3. *Soit H un sous-groupe de G. On appelle* ***normalisateur*** *de H l'ensemble $N(H)$ des éléments $x \in G$ tels que $xHx^{-1} = H$. Montrer que $N(H)$ est un sous-groupe de G.*

   Cette question a déjà été résolue

   Nous pouvons démontrer que, pour tout groupe quelconque G, si H est un sous-groupe de G, alors, pour tout $x \in G$, l'ensemble xHx^{-1} est un sous-groupe de G
   En effet, soit $x \in G$, fixé :
   - ⋆ $xHx^{-1} \neq \emptyset$ puisque $e \in xHx^{-1}$.
     Nous avons $e = xex^{-1} = xx^{-1}$. Comme $e \in H$, nous avons répondu à la question
   - ⋆ Soient $a \in xHx^{-1}$ et $b \in xHx^{-1}$; avons nous $ab \in xHx^{-1}$?
     Par hypothèses, il existe $h \in H$ et $h' \in H$ tels que $a = xhx^{-1}$ et $b = xh'x^{-1}$. Alors :
     $$ab = \left(xhx^{-1}\right)\left(xh'x^{-1}\right) = xh\left(x^{-1}x\right)h'x^{-1} = xhh'x^{-1}$$
     Nous avons bien $ab \in xHx^{-1}$
   - ⋆ Si $a \in xHx^{-1}$, avons nous $a^{-1} \in xHx^{-1}$?
     Comme tout à l'heure, il existe $h \in H$ tel que $a = xhx^{-1}$. Alors :
     $$a^{-1} = \left(xhx^{-1}\right)^{-1} = x(xh)^{-1} = x\left(h^{-1}x^{-1}\right) = xh^{-1}x^{-1}$$
     Nous avons donc $a^{-1} \in xHx^{-1}$

   xHx^{-1} est donc un sous-groupe de G appelé **sous-groupe conjugué de H**

   Redémontrons que $N(H)$ est un sous-groupe de G.
   → Tout d'abord, $N(H) \neq \emptyset$ puisque $e \in N(H)$; en effet, $eHe^{-1} = eHe = H$
   → Soient, maintenant $x \in N(H)$ et $y \in N(H)$, alors $xHx^{-1} = H$ et $yHy^{-1} = x$. Montrons que $xy \in N(H)$:
   $$xyH(xy)^{-1} = xyHy^{-1}x^{-1} = x\left(yHy^{-1}\right)x^{-1} = xHx^{-1} = H$$
   Donc $xy \in N(H)$
   → Soit $x \in N(H)$ et montrons que $x^{-1} \in N(H)$ Nous avons $xHx^{-1} = H$ et donc $x^{-1}\left(xHx^{-1}\right)x = x^{-1}Hx$, c'est à dire $\left(x^{-1}x\right)H\left(x^{-1}x\right) = x^{-1}Hx$ et donc $H = x^{-1}Hx$.
   Donc $x^{-1} \in N(H)$
   Donc $N(H)$ est un sous-groupe de G.
   Il faut faire remarquer que $H \subset N(H)$

4. *Déterminer $N(H)$ si H est un sous-groupe distingué de G, et montrer que si H n'est pas un sous-groupe distingué de G alors $N(H) = H$.*

→ Il est évident que si H est un sous-groupe distingué de G, $G = N(H)$

→ Supposons que H ne soit pas un sous-groupe distingué.
Alors $N(H) \neq G$. L'ordre de $N(H)$ est donc p ou q, nombre premier. Comme $H \subset N(H)$, l'ordre de H divise l'ordre de $N(H)$, les sous-groupes H et $N(H)$ sont de même ordre et donc $N(H) = H$

5. *On dit que deux sous-groupes H' et $H"$ de G sont conjugués, et on note $H'\mathcal{C}H"$, si et seulement si il existe un élément $x \in G$ tel que $H" = xH'x^{-1}$. Montrer que $\mathcal{C}$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble des sous-groupes de G.*

Nous appelons $\mathfrak{H}$ l'ensemble des sous-groupes de G et nous allons montrer que $\mathcal{C}$ est une relation d'équivalence sur $\mathfrak{H}$

→ Elle est réflexive
En effet, soit $H \in \mathfrak{H}$
Alors, $eHe^{-1} = eHe = H$, et nous avons bien $H\mathcal{C}H$

→ Elle est symétrique
Soient $H \in \mathfrak{H}$ et $H' \in \mathfrak{H}$ tels que $H'\mathcal{C}H$.
Il existe alors $x \in G$ tel que $H = xH'x^{-1}$, et donc $H' = x^{-1}Hx$. Il existe donc $y \in G$, $y = x^{-1}$ tel que $H' = yHy^{-1}$ et donc nous avons $H\mathcal{C}H'$.
La relation est donc symétrique

→ Elle est transitive
Soient $H \in \mathfrak{H}$, $H' \in \mathfrak{H}$ et $H'' \in \mathfrak{H}$tels que $H\mathcal{C}H'$ et $H'\mathcal{C}H''$.
Il existe donc $x \in G$ tel que $H' = xHx^{-1}$ et $y \in G$ tel que $H'' = yH'y^{-1}$. Alors :

$$H'' = yH'y^{-1} \iff H'' = y\left(xHx^{-1}\right)y^{-1} \iff H'' = yxHx^{-1}y^{-1}$$

Il existe donc $z \in G$, $z = xy$ tel que $H'' = zHz^{-1}$ et donc nous avons $H\mathcal{C}H''$
La relation $\mathcal{C}$ est donc transitive

$\mathcal{C}$ est donc une relation d'équivalence sur $\mathfrak{H}$

6. *Soit H un sous-groupe de G d'ordre p. Déterminer le nombre d'éléments de la classe d'équivalence de H modulo $\mathcal{C}$*

⇒ Si H est distingué, alors, pour tout $x \in G$, $H = xHx^{-1}$ et H est le seul élément de sa classe d'équivalence

⇒ Si H n'est pas distingué en G, la classe de H modulo $\mathcal{C}$est l'ensemble des groupes conjugués de H.
Soit H_1 un sous-groupe conjugué de H. A quelles conditions sur $x \in G$ et $y \in G$, avons nous $H_1 = xHx^{-1} = yHy^{-1}$?

$$\begin{aligned} H_1 = xHx^{-1} = yHy^{-1} &\iff y^{-1}\left(xHx^{-1}\right)y = H \\ &\iff y^{-1}xHx^{-1}y = H \\ &\iff \left(y^{-1}x\right)H\left(y^{-1}x\right)^{-1} = H \end{aligned}$$

Ce qui veut dire que $y^{-1}x$ est un élément du normalisateur $N(H)$ de H ; autrement dit $y^{-1}x \in N(H)$.
Comme H n'est pas distingué, $N(H) = H$ et donc $y^{-1}x \in H$, et dans la relation d'équivalence modulo H, $\dot{x} = \dot{y}$, et donc $xHx^{-1} = yHy^{-1} \iff \dot{x} = \dot{y}$
Le nombre de sous-groupes conjugués à H est donc le nombre de classes dans la relation d'équivalence à gauche modulo H.
C'est donc l'indice $[G : H]$, c'est à dire $\dfrac{n}{p} = \dfrac{pq}{p} = q$
Il y a donc q sous-groupes conjugués à H

7. *Démontrer que G a au moins un sous-groupe distingué différent de $\{e\}$ et de G.*

⇒ Si G est cyclique, bien entendu, G est commutatif et tous ses groupes sont distingués.

⇒ Supposons G non cyclique
   → G admet au moins un sous groupe propre, c'est à dire distinct de $\{e\}$ et de G. Appelons le H. Alors H est d'ordre p ou q. Supposons que H soit d'ordre p

→ Si H n'est pas distingué, il existe donc q sous-groupes de G qui lui sont conjugués.
Si nous appelons $H_1, H_2 \cdots, H_q$ les q sous-groupes conjugués, en soulignant que $H_1 = H$, puisque H est conjugué à lui-même.

Nous appelons $L = \bigcup_{i=1}^{q} H_i$

⋆ Bien entendu, Card $H_i =$ Card $H = p$

⋆ Si $i \neq j$, alors $H_i \cap H_j = \{e\}$
Tout d'abord, nous avons, évidemment $e \in H_i \cap H_j$
D'autre part, H_i et H_j sont 2 sous-groupes conjugués de H, c'est à dire qu'il existe $a \in G$ et $b \in G$ tels que $H_i = aHa^{-1}$ et $H_j = bHb^{-1}$ et comme $H_i \neq H_j$, nous avons $ab^{-1} \notin H$
Soit $y \in H_i \cap H_j$, alors $y = ah_ia^{-1}$ et $y = bh_jb^{-1}$ avec $h_i \in H$ et $h_j \in H$. De $y = ah_ia^{-1} = bh_jb^{-1}$, nous tirons $H_j = b^{-1}ah_ia^{-1}b = gh_ig^{-1}$, c'est à dire $H = gHg^{-1}$.
Donc $g \in H$ et donc $b^{-1}a \in H$. Il y a contradiction et donc $H_i \cap H_j = \{e\}$

Et donc Card $L = q(p-1) + 1 = n - (q-1)$ et donc Card $L < n$

→ Nous avons donc $G \setminus L \neq \emptyset$ et soit donc $x \in G \setminus L$; nous avons $x \neq e$ puisque $e \in L$

→ On appelle $K = \langle x \rangle$ le sous groupe de G engendré par x. K est non trivial, et donc Card $K = q$ ou Card $K = p$.
G n'étant pas cyclique, nous n'avons pas Card $K = n$

→ <u>On suppose que K n'est pas distingué en G</u>

→ Si x est d'ordre p, la classe de K, modulo la relation d'équivalence $\mathcal{C}$, contient q sous-groupes $K_1, \cdots, K_q$ avec $K_1 = K$
Pour $1 \leqslant i \leqslant q$ et $1 \leqslant j \leqslant q$, nous avons $K_i \neq H_j$, car l'intersection des classes d'équivalences est vide
Posons $M = \bigcup_{j=1}^{q} K_j$; alors Card $(M \cup L) = q(p-1) + q(p-1) + 1 = 2n - 2q + 1 > n$, ce qui est impossible parce que nous devons avoir Card $(M \cup L) \leqslant$ Card $G = n$

→ Si x est d'ordre q, la classe de K, modulo la relation d'équivalence $\mathcal{C}$, contient p sous-groupes $K_1, \cdots, K_p$ avec $K_1 = K$
Pour $1 \leqslant i \leqslant p$ et $1 \leqslant j \leqslant q$, nous avons $K_i \neq H_j$, car l'intersection des classes d'équivalences est vide
Posons $M = \bigcup_{j=1}^{p} K_j$; alors Card $(M \cup L) = p(q-1) + q(p-1) + 1 = 2n - 2p + 1 > n$, ce qui est impossible parce que nous devons avoir Card $(M \cup L) \leqslant$ Card $G = n$

→ L'hypothèse où K n'est pas distingué est donc contradictoire.

Le sous-groupe K est donc distingué en G

Ainsi G contient au moins un sous-groupe distingué

OUF ! !

NOUS VENONS DE MONTRER :

Tout groupe fini G d'ordre pq où p et q sont des nombres premiers possède au moins un sous-groupe distingé non trivial

Exercice 61 :

$\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients dans $\mathbb{R}$ et $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^+$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices dont le déterminant est strictement positif, c'est à dire :

$$(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^+ = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \text{ telles que } \det M > 0\}$$

1. $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ *est le groupe des matrices de* $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ *qui sont inversibles. Démontrer que* $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^+$ *est un sous-groupe de* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$

⇛ Premièrement, si $M \in (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^+$, alors $\det M > 0$ et donc $\det M \neq 0$ et M est inversible ; nous avons donc $M \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.
En conclusion, $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^+ \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$

⇛ Ensuite, $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^+ \neq \emptyset$ puisque $\mathrm{Id}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^+$

⇛ Soient $X \in (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^+$ et $Y \in (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^+$.
Il faut montrer que $X \times Y^{-1} \in (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^+$.
Si $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $ad - bc > 0$ et $Y = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ avec $\alpha\delta - \beta\gamma > 0$, alors

$$Y^{-1} = \frac{1}{\alpha\delta - \beta\gamma} \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}$$

Et nous avons $\det Y^{-1} = \dfrac{1}{\alpha\delta - \beta\gamma} > 0$

Donc $\det X \times Y^{-1} = \det X \det Y^{-1} = \dfrac{ad - bc}{\alpha\delta - \beta\gamma} > 0$ et donc $X \times Y^{-1} \in (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^+$

On vient donc de montrer que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^+$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$

Remarque :

⋆ $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $ad - bc > 0$ et $Y = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ avec $\alpha\delta - \beta\gamma > 0$, alors :

$$X \times Y = \begin{pmatrix} a\alpha + b\gamma & a\beta + b\delta \\ c\alpha + d\gamma & c\beta + d\delta \end{pmatrix}$$

Et nous avons $\det(X \times Y) = (ad - bc)(\alpha\delta - \beta\gamma)$

⋆ Evidemment, $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^+$ n'est pas commutatif !
Il suffit de choisir $X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ pour voir, par calcul que $X \times Y \neq Y \times X$

⋆ L'application $\det : (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^+ \longrightarrow (\mathbb{R}^{*+}, \times)$ définie par :

$$\begin{cases} \det : (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^+ & \longrightarrow & (\mathbb{R}^{*+}, \times) \\ \qquad M & \longmapsto & \det M \end{cases}$$

est un homomorphisme de groupe dont le noyau est

$$\ker \det = \left\{ M \in (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^+ \text{ telles que } \det M = 1 \right\} = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$$

En utilisant 11.6.3, nous voyons que $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ est distingué dans $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^+$.
Il est très facile de démontrer, et avec les mêmes arguments, que $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ est distingué dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$

2. *H est le sous ensemble de $\mathbb{C}$ des nombres complexes dont la partie imaginaire est strictement positive, c'est à dire :*

$$H = \{z \in \mathbb{C} \text{ telles que si } z = x + iy \text{ alors } y > 0\}$$

Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$ et $d \in \mathbb{R}$ tels que $ad - bc > 0$.
Soit $\varphi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par :

$$\begin{cases} \varphi : \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \quad z & \longmapsto & \varphi(z) = \dfrac{az + b}{cz + d} \end{cases}$$

Démontrer que si $z \in H$, alors $\varphi(z) \in H$.

Pour commencer, nous avons

$$\varphi(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{(az + b)\overline{(cz + d)}}{(cz + d)\overline{(cz + d)}} = \frac{ac|z|^2 + ad z + bc\overline{z} + bd}{|cz + d|^2}$$

En posant $z = x + iy$, nous avons :

$$\varphi(z) = \frac{ac|z|^2 + ad(x+iy) + bc(x-iy) + bd}{|cz+d|^2} = \frac{ac|z|^2 + (ad+bc)x + bd}{|cz+d|^2} + i\frac{y(ad-bc)}{|cz+d|^2}$$

Et donc $\mathrm{Im}(\varphi(z)) = \dfrac{y(ad-bc)}{|cz+d|^2} = \dfrac{\mathrm{Im}(z)(ad-bc)}{|cz+d|^2}$

Ainsi, si $z \in H$, c'est à dire si $y = \mathrm{Im}(z) > 0$, alors, comme $(ad-bc) > 0$, nous avons $\mathrm{Im}(\varphi(z)) > 0$, et donc $\varphi(z) \in H$

3. *On appelle $\mathcal{T}(H)$, l'ensemble des transformations φ de H dans H telles que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$, $d \in \mathbb{R}$ et $ad - bc > 0$ tels que nous ayions, pour tout $z \in H$, $\varphi(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$*

(a) *Démontrer que φ est bijective et donner φ^{-1}*

Soit donc $\varphi \in \mathcal{T}(H)$

▷ φ est injective

Soient $z \in H$ et $z_1 \in H$ tels que $\varphi(z) = \varphi(z_1)$; alors :

$$\begin{aligned}
\varphi(z) = \varphi(z_1) &\iff \frac{az+b}{cz+d} = \frac{az_1+b}{cz_1+d} \\
&\iff (az+b)(cz_1+d) = (az_1+b)(cz+d) \\
&\iff aczz_1 + adz + bcz_1 + bd = aczz_1 + adz_1 + bcz + bd \\
&\iff adz + bcz_1 = +adz_1 + bcz \\
&\iff (ad-bc)z = (ad-bc)z_1 \\
&\iff z = z_1 \text{ puisque } ad - bc > 0
\end{aligned}$$

φ est donc injective

▷ φ est surjective

Soit $Z \in H$. Existe-t-il $z \in H$ tel que $\varphi(z) = Z$?

$$\begin{aligned}
\varphi(z) = Z &\iff Z = \frac{az+b}{cz+d} \\
&\iff Z(cz+d) = az + b \iff Zcz + dZ = az + b \\
&\iff Zcz - az = b - dZ \iff z(cZ - a) = -dZ + b \\
&\iff z = \frac{dZ-b}{-cZ+a}
\end{aligned}$$

Evidemment, $Z \neq \dfrac{a}{c}$ puisque $\mathrm{Im}(Z) > 0$ et donc $Z \notin \mathbb{R}$.

φ est donc surjective.

φ est donc bijective et $\varphi^{-1}(z) = \dfrac{dz-b}{-cz+a}$

(b) *Démontrer que $\mathcal{T}(H)$ est un groupe.*

→ Tout d'abord, $\mathcal{T}(H)$ est non vide, puisque l'application identique $Id_H \in \mathcal{T}(H)$

→ Ensuite, la composition des applications est associative

→ La composition des applications est une loi interne de $\mathcal{T}(H)$.

En effet, soient $\varphi \in \mathcal{T}(H)$ et $\psi \in \mathcal{T}(H)$ telles que pour tout $z \in H$:

$$\varphi(z) = \frac{az+b}{cz+d} \text{ avec } ad - bc > 0 \text{ et } \psi(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \text{ avec } \alpha\delta - \beta\gamma > 0$$

Alors :

$$\begin{aligned}
\varphi[\psi(z)] &= \frac{a\left(\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}\right) + b}{c\left(\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}\right) + d} = \frac{a(\alpha z+\beta) + b(\gamma z+\delta)}{c(\alpha z+\beta) + d(\gamma z+\delta)} \\
&= \frac{(a\alpha + b\gamma)z + (a\beta + b\delta)}{(c\alpha + d\gamma)z + (c\beta + d\delta)}
\end{aligned}$$

Il faut, maintenant montrer que $(a\alpha + b\gamma)(c\beta + d\gamma) - (a\beta + b\delta)(c\alpha + d\delta) > 0$.

Or, tous calculs faits *(en effectuant et factorisant)* :

$$(a\alpha + b\gamma)(c\beta + d\gamma) - (a\beta + b\delta)(c\alpha + d\delta) = (ad - bc)(\alpha\delta - \beta\gamma)$$

Comme $ad - bc > 0$ et $\alpha\delta - \beta\gamma > 0$, nous avons bien

$$(a\alpha + b\gamma)(c\beta + d\delta) - (a\beta + b\delta)(c\alpha + d\gamma) > 0$$

Donc $\varphi \circ \psi \in \mathcal{T}(H)$ et donc la composition des applications est une loi interne de $\mathcal{T}(H)$

→ A chaque $\varphi \in \mathcal{T}(H)$ où $\varphi(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ correspond une application réciproque φ^{-1} définie pour tout $z \in H$ par $\varphi^{-1}(z) = \dfrac{dz-b}{-cz+a}$ où $ad - bc > 0$; donc $\varphi^{-1}\mathcal{T}(H)$

$\mathcal{T}(H)$ est donc un groupe.

4. *Soit $\Phi : (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^+ \longrightarrow \mathcal{T}(H)$ définie par :*

$$\begin{cases} \Phi : (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^+ & \longrightarrow & \mathcal{T}(H) \\ M & \longmapsto & \Phi(M) = \varphi_M \end{cases}$$

Où, si $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^+$ alors $\Phi(M)(z) = \varphi_M(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$

Démontrer que Φ est un homomorphisme de groupe

Pour $M \in (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^+$ et $M_1 \in (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^+$, il faut donc montrer

$$\Phi(M \times M_1) = \Phi(M) \circ \Phi(M_1) = \varphi_M \circ \varphi_{M_1}$$

Posons, pour les calculs, $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $M_1 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ et donc $M \times M_1 = \begin{pmatrix} a\alpha + b\gamma & a\beta + b\delta \\ c\alpha + d\gamma & c\beta + d\delta \end{pmatrix}$

Ainsi, pour $z \in H$, $\Phi(M \times M_1)(z) = \dfrac{(a\alpha + b\gamma)z + (a\beta + b\delta)}{(c\alpha + d\gamma)z + (c\beta + d\delta)}$

Or, nous avons démontré, dans une question précédente que $\varphi_M[\varphi_{M_1}(z)] = \dfrac{(a\alpha + b\gamma)z + (a\beta + b\delta)}{(c\alpha + d\gamma)z + (c\beta + d\delta)}$.

Nous avons bien $\Phi(M \times M_1) = \varphi_M \circ \varphi_{M_1} = \Phi(M) \circ \Phi(M_1)$ et Φ est bien un homomorphisme de groupe

Pour aller plus loin :

⇒ Il est évident que Φ est un homomorphisme surjectif

⇒ Par contre, Φ est très loin d'être injectif.
En effet, si $M = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $M_1 = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$, nous avons $\Phi(M) = \Phi(M_1)$ alors que $M \neq M_1$

⇒ Quel est le noyau de Φ noté $\ker \Phi$?
Si $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \ker \Phi$, alors $\Phi(M) = Id_H$ et donc, pour tout $z \in \mathbb{C}$, nous avons $\Phi(M)(z) = z$. Or :

$$\begin{aligned} \Phi(M)(z) = z \iff & \frac{az+b}{cz+d} = z \iff az + b = cz^2 + dz \\ \iff & cz^2 + (d-a)z - b = 0 \\ \iff & c = 0 \text{ et } a = d \text{ et } b = 0 \end{aligned}$$

Et donc $M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = a\mathrm{Id}_2$

Donc $\ker \Phi = \left\{ M \in (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^+ \text{ telle que } M = a\mathrm{Id}_2 \right\}$

⇒ Donc, nous avons $\Phi(M) = \Phi(M_1) \iff M \times M_1^{-1} \in \ker \Phi$, ce qui veut dire que $M = a\mathrm{Id}_2 \times M_1 = a \times M_1$

5. $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ *est l'ensemble des matrice de* $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^+$ *à coefficients dans* $\mathbb{Z}$ *et de déterminant 1.*

   (a) *Vérifier que* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ *est un sous-groupe de* $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^+$

   ⋆ Tout d'abord $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \neq \emptyset$ puisque $\mathrm{Id}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$

   ⋆ Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ et $M_1 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

   Alors, $M_1^{-1} = \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}$. Il est évident que $M \times M_1^{-1} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$

   ⋆ Il est, à nouveau, très facile de vérifier que $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ n'est pas commutatif

   $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ est donc un sous-groupe de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^+$

   Remarque

   Bien entendu, $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ est aussi un sous-groupe de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$

   (b) *Donner des exemples de matrices de* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ *sans élément nul*

   Pour qu'une matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ soit une matrice de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, il faut que $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$, $c \in \mathbb{Z}$ et $d \in \mathbb{Z}$ et qu'en plus $\det A = ad - bc = 1$.

   On remarque alors que les entiers a et c sont premiers entre eux, et d'après le théorème de Bachet-Bezout, il existe des entiers $d \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}$ tels que $ad - bc = 1$. b et c ne sont pas uniques et peuvent être choisis non nuls. Donnons comme exemples :

   $$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

   (c) *Soit* $T \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ *telle que* $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   → *Quelle est la forme de* T^n *pour* $n \in \mathbb{Z}$ *?*

   ▷ Classiquement $T^0 = \mathrm{Id}_2$ et, par calcul, $T^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

   ▷ Pour $n \in \mathbb{N}$, on montre facilement par récurrence que $T^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

   ▷ D'autre part, pour $m \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$, $T^m \times T^n = T^{m+n}$

   ▷ T est une matrice inversible, et $T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, et pour $n \in \mathbb{Z}$ avec n entier strictement négatif, nous définissons $T^n = (T^{-n})^{-1}$, c'est à dire :

   $$(T^{-n})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   ▷ Donc, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, nous avons $T^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et comme tout à l'heure, pour $m \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{Z}$, $T^m \times T^n = T^{m+n}$

   → *Soit* $\mathcal{T}$ *l'ensemble* $\mathcal{T} = \{T^n \text{ où } n \in \mathbb{Z}\}$. *Démontrer que* $\mathcal{T}$ *est un sous-groupe de* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$

   C'est un groupe monogène de générateur T

   → *Donner l'ensemble* $\Phi(\mathcal{T})$

   C'est sans doute la question la plus intéressante.

   Soit $T^n \in \mathcal{T}$ avec $n \in \mathbb{Z}$; alors $\Phi(T^n) = \varphi_{T^n}$ avec $\varphi_{T^n}(z) = \dfrac{z+n}{1} = z + n$.

   Donc $\Phi(\mathcal{T})$ est l'ensemble de toutes les applications $g : H \longrightarrow H$ telles que il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $g(z) = z + n$

   Pour aller plus loin :

- ▷ En fait, g est une translation d'axe les axes des réels et de « pas » entier
- ▷ Nous appelons $\mathcal{A}$ l'ensemble des transformations de H du type $g(z) = z + n$ avec $n \in \mathbb{Z}$. Les applications du type $g(z) = z + n$ avec $n \in \mathbb{Z}$ sont des translations.
- ▷ L'application $\Phi : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{A}$ est clairement surjective.
- ▷ Est-ce que $\Phi : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{A}$ est injective ?
  Supposons $\Phi(T^n) = \Phi(T^m)$; alors, pour tout $z \in H$,
  $$\varphi_{T^n}(z) = \varphi_{T^n}(z) \Longleftrightarrow z + m = z + n \Longleftrightarrow m = n$$
  Φ est donc injective.
- ▷ Ainsi, $\Phi : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{A}$ est bijective.

(d) *Soit $S \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ telle que $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.*

→ *Quelle est la forme de S^n pour $n \in \mathbb{Z}$?. On appelle $\mathcal{N}$ l'ensemble $\mathcal{N} = \{S^n \text{ où } n \in \mathbb{Z}\}$. Démontrer que $\mathcal{N}$ est un sous-groupe de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$*

$$S^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Id}_2 \qquad S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad S^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -\mathrm{Id}_2$$
$$S^3 = S^2 \times S = -S \qquad S^4 = S^2 \times S^2 = \mathrm{Id}_2$$

$\mathcal{N}$ est simplement un groupe cyclique d'ordre 4 et de générateur S
Et nous avons donc $\mathcal{N} = \left\{\mathrm{Id}_2, S, S^2, S^3\right\}$

→ *Donner l'ensemble $\Phi(\mathcal{N})$*

- ⋆ $\Phi\left(S^0\right) = Id_H$
- ⋆ $\Phi(S) = \varphi_S$ ce qui veut dire que, pour tout $z \in H$, $\varphi_S(z) = \dfrac{0z - 1}{z + 0} = \dfrac{-1}{z}$
- ⋆ $\Phi\left(S^2\right) = \varphi_{S^2}$ ce qui veut dire que, pour tout $z \in H$, $\varphi_{S^2}(z) = \dfrac{-z + 0}{0 - 1} = z = Id_H(z)$
- ⋆ $\Phi\left(S^3\right) = \Phi(-S) = \varphi_{-S}$ ce qui veut dire que, pour tout $z \in H$, $\varphi_{S^3}(z) = \dfrac{0z + 1}{-z + 0} = \dfrac{-1}{z}$
- ⋆ $\Phi\left(S^4\right) = \Phi(\mathrm{Id}_2) = \varphi_{\mathrm{Id}_2}$ ce qui veut dire que, pour tout $z \in H$, $\varphi_{S^4}(z) = z$

Ainsi, nous avons $\Phi(\mathcal{N}) = \{Id_H, \varphi_S\}$

(e) *Pour $z \in H$, calculer $\varphi_S(z)$, $\varphi_T(z)$, $\varphi_{ST}(z)$ $\varphi_{(ST)^2}(z)$ et $\varphi_{(ST)^3}(z)$*

Nous avons déjà calculé $\varphi_S(z) = \dfrac{-1}{z}$ et $\varphi_T(z) = z + 1$.

→ Ensuite, du fait que Φ est un homomorphisme,
$$\varphi_{ST}(z) = \varphi_S(\varphi_T(z)) = \frac{-1}{\varphi_T(z)} = \frac{-1}{z+1}$$

→ Maintenant, l'étude de $\varphi_{(ST)^2}(z)$
$$\begin{aligned} \varphi_{(ST)^2}(z) = {} & \varphi_{(ST)\times(ST)}(z) = \varphi_{(ST)} \circ \varphi_{(ST)}(z) \\ = {} & \varphi_{(ST)}\left(\varphi_{(ST)}(z)\right) = \frac{-1}{\varphi_{(ST)}(z) + 1} \\ = {} & \frac{-z-1}{z} = -1 - \frac{1}{z} \end{aligned}$$

→ Terminons par l'étude de $\varphi_{(ST)^3}(z)$.
Nous avons $(ST)^3 = (ST)^2 \times (ST)$, et donc :
$$\begin{aligned} \varphi_{(ST)^3}(z) = {} & \varphi_{(ST)^2\times(ST)}(z) = \varphi_{(ST)^2} \circ \varphi_{(ST)}(z) \\ = {} & \varphi_{(ST)^2}\left(\varphi_{(ST)}(z)\right) = -1 - \frac{1}{\varphi_{(ST)}(z)} \\ = {} & -1 - \frac{1}{\frac{-1}{z+1}} = -1 + z + 1 = z \end{aligned}$$

Remarquons que le calcul matriciel montre que $(ST)^3 = S^2 = -\mathrm{Id}_2$

6. *Nous appelons G' le sous-groupe de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ engendré par S et T.*
Nous appelons aussi

$$K = \left\{ z \in H \text{ tel que } |z| \geqslant 1 \text{ et } -\frac{1}{2} \leqslant \mathrm{Re}\,(z) \leqslant \frac{1}{2} \right\}$$

La visualisation du domaine K est représentée par la figure 11.5

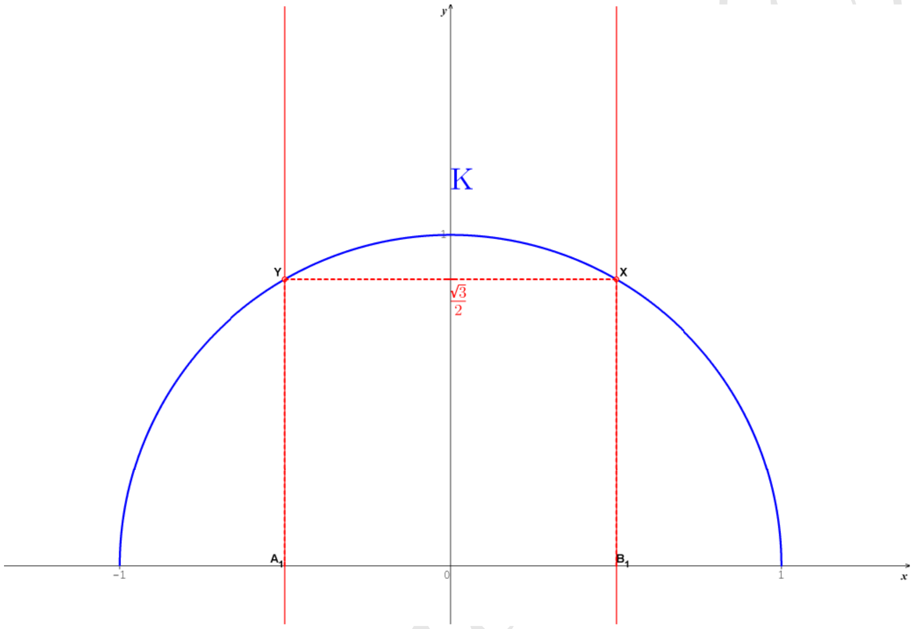

FIGURE 11.5 – Représentation graphique du domaine K

Soit $z \in H$

(a) *Soit $A > 0$ est un nombre réel donné. Démontrer que le nombre de couples $(c, d) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $|cz + d| \leqslant A$ est fini.*

Soit $z \in H$ et $A > 0$; pour démontrer le résultat demandé, nous allons procéder en 2 étapes.

$\Longrightarrow$ Nous allons d'abord démontrer que les $c \in \mathbb{Z}$ sont en nombre fini

▷ Pour tout $z \in \mathbb{C}$, nous avons $|\mathrm{Im}\,(z)| \leqslant |z|$, et comme $z \in H$, nous avons $\mathrm{Im}\,(z) > 0$, et donc, pour tout $z \in H$, nous avons $0 < \mathrm{Im}\,(z) \leqslant |z|$

▷ Maintenant, pour tout $z \in \mathbb{C}$, tout $c \in \mathbb{Z}$ et tout $d \in \mathbb{Z}$, nous avons :

$$cz + d = c\,(\mathrm{Re}\,(z) + i\,\mathrm{Im}\,(z)) + d = (c\,\mathrm{Re}\,(z) + d) + ic\,\mathrm{Im}\,(z)$$

Et donc $\mathrm{Im}\,(cz + d) = c\,\mathrm{Im}\,(z)$

▷ Ainsi, pour tout $z \in H$,

$$|cz + d| \geqslant |\mathrm{Im}\,(cz + d)| = |c\,\mathrm{Im}\,(z)| = |c|\,\mathrm{Im}\,(z)$$

Et donc, si $|cz + d| \leqslant A$, alors $|c|\,\mathrm{Im}\,(z) \leqslant A$, c'est à dire $|c| \leqslant \dfrac{A}{\mathrm{Im}\,(z)}$

▷ Donc, à $A > 0$ fixé et $z \in H$ fixé, l'ensemble des entiers $c \in \mathbb{Z}$ tels que $|c| \leqslant \dfrac{A}{\mathrm{Im}\,(z)}$ est bien un ensemble fini.

$\Longrightarrow$ Nous allons maintenant démontrer que les $d \in \mathbb{Z}$ sont aussi en nombre fini

Soit $c \in \mathbb{Z}$, fixé, et montrons maintenant qu'il n'y a qu'un nombre fini de $d \in \mathbb{Z}$ tels que $|cz + d| \leqslant A$

▷ Comme ci-dessus, pour tout $z \in \mathbb{C}$, nous avons $|\mathrm{Re}\,(z)| \leqslant |z|$ et aussi, toujours d'après l'étape ci-dessus, $\mathrm{Re}\,(cz + d) = c\,\mathrm{Re}\,(z) + d$

- ▷ Nous avons donc $|\mathrm{Re}\,(cz+d)| = |c\,\mathrm{Re}\,(z)+d| \leqslant |cz+d| \leqslant A$ et nous avons donc $|c\,\mathrm{Re}\,(z)+d| \leqslant A$
- ▷ De là, nous tirons :

$$|c\,\mathrm{Re}\,(z)+d| \leqslant A \Longleftrightarrow -A \leqslant c\,\mathrm{Re}\,(z)+d \leqslant A \Longleftrightarrow -A-c\,\mathrm{Re}\,(z) \leqslant d \leqslant A-c\,\mathrm{Re}\,(z)$$

- ▷ Or

$$-|c\,\mathrm{Re}\,(z)| \leqslant c\,\mathrm{Re}\,(z) \leqslant |c\,\mathrm{Re}\,(z)|$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$-|c|\,|\mathrm{Re}\,(z)| \leqslant c\,\mathrm{Re}\,(z) \leqslant |c|\,|\mathrm{Re}\,(z)|$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$-|c|\,|\mathrm{Re}\,(z)| \leqslant -c\,\mathrm{Re}\,(z) \leqslant |c|\,|\mathrm{Re}\,(z)|$$

Et donc

$$-A-|c|\,|\mathrm{Re}\,(z)| \leqslant -A-c\,\mathrm{Re}\,(z) \leqslant d \leqslant A-c\,\mathrm{Re}\,(z) \leqslant A+|c|\,|\mathrm{Re}\,(z)|$$

- ▷ En synthèse, nous avons donc $-A-|c|\,|\mathrm{Re}\,(z)| \leqslant d \leqslant A+|c|\,|\mathrm{Re}\,(z)|$, ce qui montre qu'il n'existe aussi qu'un nombre fini d'entiers $d \in \mathbb{Z}$

En conclusion, pour tout $z \in H$ et tout nombre réel $A > 0$, le nombre de couples $(c,d) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $|cz+d| \leqslant A$ est fini.

(b) *En déduire qu'il existe $g_0 \in G'$ tel que $\mathrm{Im}\,(\varphi_{g_0}(z))$ soit maximale.*

Notre problème ne sera pas de trouver une matrice précise de G', mais d'en prouver seulement l'existence.

$\Longrightarrow$ Comme $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \subset (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^+$ l'ensemble $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ hérite des propriétés de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^+$.

Ainsi, pour tout $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, nous avons $\mathrm{Im}\,(\Phi(M)(z)) = \mathrm{Im}\,(\varphi_M(z)) = \dfrac{\mathrm{Im}\,z \det M}{|cz+d|^2}$.

Comme $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, nous avons $\det M = 1$ et donc $\mathrm{Im}\,(\varphi_M(z)) = \dfrac{\mathrm{Im}\,z}{|cz+d|^2}$

Ainsi, si $g \in G'$, comme $G' \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, nous avons $\mathrm{Im}\,(\varphi_g(z)) = \dfrac{\mathrm{Im}\,z}{|cz+d|^2}$

Alors $\mathrm{Im}\,(\varphi_g(z))$ sera maximale lorsque $|cz+d|^2$ sera minimal.

$\Longrightarrow$ Nous venons de montrer qu'il n'y a qu'un nombre fini de couples d'entiers $c \in \mathbb{Z}$ et $d \in \mathbb{Z}$ tels que $|cz+d| \leqslant A \Longleftrightarrow |cz+d|^2 \leqslant A^2$ où $A > 0$ est fixé.

$\Longrightarrow$ Posons $A = |z|$

Soit Γ le sous-ensemble de G' formé des matrices $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telles que $|cz+d|^2 \leqslant |z|^2$, c'est à dire :

$$\Gamma = \left\{ g \in G' \text{ où } g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ telle que } |cz+d|^2 \leqslant |z|^2 \right\}$$

$\longrightarrow$ Tout d'abord $\Gamma \neq \emptyset$ puisque si $c = 1$ et $d = 0$, alors $|cz+d|^2 = |z|^2$ et une matrice de Γ pourrait être, par exemple, $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\longrightarrow$ D'autre part, les couples $(c,d) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $|cz+d|^2 \leqslant |z|^2$ sont en nombre fini et il existe <u>au moins</u> un couple $(c_0,d_0) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $|c_0z+d_0|^2$ soit minimal

$\longrightarrow$ Il existe donc <u>au moins</u> une matrice $g_0 \in G'$, soit $g_0 = \begin{pmatrix} a & b \\ c_0 & d_0 \end{pmatrix}$ telle que $\mathrm{Im}\,(\varphi_{g_0}(z))$ soit maximale

(c) *Montrer qu'il existe un entier $n_0 \in \mathbb{Z}$ tel que, pour tout $g \in G'$, $\varphi_{T^{n_0}g}(z)$ ait une partie réelle comprise entre $\dfrac{-1}{2}$ et $\dfrac{1}{2}$*

$\longrightarrow$ Revenons à $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Nous avons démontré que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $T^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, c'est à dire que, pour tout $z \in H$, $\Phi(T^n)(z) = \varphi_{T^n}(z) = z+n$

En particulier, pour tout $g \in G'$, $\Phi(T^n g)(z) = \varphi_{T^n g}(z) = \varphi_g(z)+n$

$\longrightarrow$ Remarquons, une fois de plus, que :

$$\operatorname{Re}\left(\Phi\left(T^n g\right)(z)\right)=\operatorname{Re}\left(\varphi_{T^n g}(z)\right)=\operatorname{Re}\left(\varphi_g(z)\right)+n$$

$\longrightarrow$ Nous souhaitons trouver $n_0 \in \mathbb{Z}$ tel que

$$-\frac{1}{2} \leqslant \operatorname{Re}\left(\Phi\left(T^{n_0} g\right)(z)\right) \leqslant \frac{1}{2} \Longleftrightarrow -\frac{1}{2} \leqslant \varphi_g(z)+n_0 \leqslant \frac{1}{2}$$

Or :

$$-\frac{1}{2} \leqslant \varphi_g(z)+n_0 \leqslant \frac{1}{2} \Longleftrightarrow -\frac{1}{2}-n_0 \leqslant \varphi_g(z) \leqslant \frac{1}{2}-n_0 \Longleftrightarrow -n_0 \leqslant \varphi_g(z)+\frac{1}{2} \leqslant -n_0+1$$

Et donc $n_0=-\left[\varphi_g(z)+\dfrac{1}{2}\right]$ où $[\bullet]$ désigne la partie entière

(d) *Montrer que, pour le $n_0 \in \mathbb{Z}$ correspondant à g_0, si $z'=\varphi_{T^{n_0} g_0}(z)$ alors $z' \in K$*

⊵ Le $n_0 \in \mathbb{Z}$ correspondant à g_0 est tel que $n_0=-\left[\varphi_{g_0}(z)+\dfrac{1}{2}\right]$ et nous avons alors :

$$-\frac{1}{2} \leqslant \operatorname{Re}\left(\Phi\left(T^{n_0} g_0\right)(z)\right) \leqslant \frac{1}{2} \Longleftrightarrow -\frac{1}{2} \leqslant \operatorname{Re}\left(\varphi_{T^n g_{n_0}}(z)\right) \leqslant \frac{1}{2}$$

C'est à dire que si $z'=\varphi_{T^{n_0} g_0}(z)$ alors $-\dfrac{1}{2} \leqslant \operatorname{Re}(z') \leqslant \dfrac{1}{2}$

Et $z' \in K$, si, de plus $|z'| \geqslant 1$. Il faut donc démontrer que $|z'| \geqslant 1$

⊵ Supposons le contraire, c'est à dire que $|z'|<1$

⊵ Revenons à $S=\begin{pmatrix}0 & -1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}$. Nous avons $S \in G'$.

De $z'=\varphi_{T^{n_0} g_0}(z)$, nous avons $\varphi_S(z')=\varphi_S\left(\varphi_{T^{n_0} g_0}(z)\right)=\varphi_{S T^{n_0} g_0}(z)$

Comme $\operatorname{Im}\left(\varphi_{g_0}(z)\right)$ est maximale et que $S T^{n_0} g_0 \in G'$, alors $\operatorname{Im}\left(\varphi_S(z')\right) \leqslant \operatorname{Im}\left(\varphi_{g_0}(z)\right)$

⊵ D'autre part, comme $\varphi_{T^{n_0} g_0}(z)=\varphi_{T^{n_0}}\left(\varphi_{g_0}(z)\right)$, nous avons $\varphi_{T^{n_0} g_0}(z)=\varphi_{g_0}(z)+n_0$, et donc :

$$\operatorname{Im}(z')=\operatorname{Im}\left(\varphi_{T^{n_0} g_0}(z)\right)=\operatorname{Im}\left(\varphi_{g_0}(z)+n_0\right)=\operatorname{Im}\left(\varphi_{g_0}(z)\right)$$

⊵ Regardons de plus près $\varphi_S(z')$.

Nous avons $\varphi_S(z')=\dfrac{-1}{z'}=\dfrac{-\overline{z'}}{|z'|^2}$ et donc $\operatorname{Im}\left(\varphi_S(z')\right)=\dfrac{\operatorname{Im}(z')}{|z'|^2}$

⊵ Comme nous avons fait l'hypothèse $|z'|<1$, alors $|z'|^2<1$ et donc $\dfrac{1}{|z'|^2}>1$ et donc

$$\operatorname{Im}\left(\varphi_S(z')\right)=\frac{\operatorname{Im}(z')}{|z'|^2}>\operatorname{Im}(z')=\operatorname{Im}\left(\varphi_{g_0}(z)\right)$$

Comme $\operatorname{Im}\left(\varphi_{g_0}(z)\right)$ est maximal, l'inégalité $\operatorname{Im}\left(\varphi_S(z')\right)>\operatorname{Im}\left(\varphi_{g_0}(z)\right)$ est impossible

⊵ Nous avons donc $|z'| \geqslant 1$ et $z' \in \mathbb{K}$

(e) *Démontrer que, pour tout $z \in H$, il existe $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ tel que $\Phi(M)(z) \in K$*

Nous venons de montrer que pour tout $z \in H$ fixé, il existe un élément $\gamma \in G'$ tel que $\Phi(\gamma)(z)=\varphi_\gamma(z) \in K$

Cet élément γ est défini par $\gamma=T^{n_0} g_0$ où $n_0=-\left[\varphi_{g_0}(z)+\dfrac{1}{2}\right]$.

Chapitre 12

Réduction des matrices

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne un corps commutatif; ce corps commutatif pouvant être $\mathbb{R}$, le corps des réels, ou, $\mathbb{C}$, le corps des complexes.

Motivation du chapitre

Pour motiver l'étude du chapitre, nous nous plaçons dans le plan $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2
Voici deux transformations simples définies par une matrice :

1. Soit $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une application dont la matrice dans la base canonique est :

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, nous obtenons $h\left[(x, y)\right] = (2x, 2y)$
L'application h est une homothétie de $\mathbb{R}^2$. Si D est une droite vectorielle, alors elle est globalement invariante par cette transformation, c'est-à-dire si $P \in D$ alors $h(P) \in D$ (mais on n'a pas $h(P) = P$).

2. Soit $k : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une application dont la matrice dans la base canonique est :

$$K = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, nous obtenons $k\left[(x, y)\right] = (2x, 3y)$
L'application k n'est plus une homothétie. Cependant la droite vectorielle de base $\overrightarrow{i}$ est globalement invariante par k; de même, la droite vectorielle de base $\overrightarrow{j}$ est globalement invariante.

Pour une matrice quelconque, il s'agit de voir comment on se ramène à ces situations géométriques simples. C'est ce qui nous amènera à la notion de vecteurs propres et de valeurs propres.

12.1 Similitudes des matrices

12.1.1 Définition et Théorème

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{K}$ un corps quelconque.
Nous considérons $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées à coefficients dans $\mathbb{K}$.
Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on dit que 2 matrices $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables si et seulement si il existe $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, inversible telle que

$$X = PYP^{-1}$$

La relation $\mathcal{S}$ définie pour tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et tout $Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par :

$$X\mathcal{S}Y \iff X \text{ et } Y \text{ sont semblables}$$

est une relation d'équivalence

Démonstration

Démontrer que c'est une relation d'équivalence n'est pas difficile.

Réflexivité Très simple, il suffit de prendre pour P, la matrice identité Id_n

Symétrie Soient $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $X\mathcal{S}Y$. Il existe alors $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, inversible telle que $X = PYP^{-1}$. Or :

$$X = PYP^{-1} \iff P^{-1}XP = Y$$

Et donc $Y\mathcal{S}X$

Transitivité Soient $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $Z \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $X\mathcal{S}Y$ et $Y\mathcal{S}Z$; alors :

$\rightarrow$ Il existe $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, inversible telle que $X = PYP^{-1}$

$\rightarrow$ Et, il existe $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, inversible telle que $Y = QZQ^{-1}$

Donc $X = PYP^{-1} = P\left(QZQ^{-1}\right)P^{-1} = (PQ)\,Z\left(Q^{-1}P^{-1}\right)$

Or, $(PQ)^{-1} = Q^{-1}P^{-1}$, et nous avons donc $X = (PQ)\,Z\,(PQ)^{-1}$ et donc $X\mathcal{S}Z$.

La relation est donc transitive

Remarque 1 :

1. Que P soit inversible signifie que $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$
2. Dire que 2 matrices sont semblables, c'est dire qu'elle représentent **la même application linéaire dans 2 bases différentes**. La matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ représentant la matrice de passage d'une base dans une autre

12.1.2 Théorème : invariants dans la relation de similitude

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{K}$ un corps quelconque et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées à coefficients dans $\mathbb{K}$.
2 matrices semblables ont même trace et même déterminant

Démonstration

Soient $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ 2 matrices semblables. Il existe alors $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, inversible telle que $X = PYP^{-1}$

1. **X et Y ont même trace**

   Si, pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{tr}(A)$ est la trace de A alors, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et tout $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, nous avons $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$. Donc :

   $$\mathrm{tr}(X) = \mathrm{tr}\left(PYP^{-1}\right) = \mathrm{tr}\left((PY)\,P^{-1}\right) = \mathrm{tr}\left(P^{-1}(PY)\right) = \mathrm{tr}\left(\left(P^{-1}P\right)Y\right) = \mathrm{tr}(Y)$$

   Ce que nous voulions
2. **X et Y ont même déterminant**

   Si, pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\det(A)$ est le déterminant de A alors, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et tout $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, nous avons $\det(AB) = \det A \times \det B$. Donc :

   $$\det(X) = \det\left(PYP^{-1}\right) = \det P \times \det Y \times \det P^{-1} = \det P \times \det Y \times (\det P)^{-1} = \det Y$$

   Ce que nous voulions

12.2 Vecteurs propres et valeurs propres

12.2.1 Définition

E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u : E \longrightarrow E$ une application linéaire ($u \in \mathcal{L}(E)$).
On appelle vecteur propre de u, tout vecteur $x \in E$, non nul, tel qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u(x) = \lambda x$

Remarque 2 :

1. Le cas du vecteur nul : $x = \overrightarrow{0}$ est sûrement vecteur propre de u puisque $u\left(\overrightarrow{0}\right) = \overrightarrow{0}$, mais, c'est un vecteur propre un peu spécial !!
2. Si D est un sous-espace vectoriel engendré par un vecteur propre, alors $u(D) \subset D$

12.2.2 Définition

E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u : E \longrightarrow E$ une application linéaire ($u \in \mathcal{L}(E)$).

1. On appelle valeur propre de u, tout élément $\lambda \in \mathbb{K}$ tel qu'il existe $x \in E$ avec $x \neq \overrightarrow{0}$ tel que $u(x) = \lambda x$
2. Etant donnée une valeur propre λ de u, on appelle *espace propre* l'ensemble

$$E_\lambda = \{y \in E/u(y) = \lambda y\}$$

Remarque 3 :

Il faut remarquer que dans les définitions 12.2.1 ou 12.2.2, la notion de vecteur propre ou de valeur propre est définie dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel quelconque, pas forcément de dimension finie.

12.2.3 Théorème

E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u : E \longrightarrow E$ une application linéaire.

1. Si $x \in E$ avec $x \neq 0$ est un vecteur propre de u, alors, la valeur propre correspondante est unique
2. Si λ est valeur propre de u, alors $E_\lambda = \{y \in E/u(y) = \lambda y\}$, l'espace propre associé à la valeur propre λ est un sous-espace vectoriel de E ; de plus $E_\lambda \neq \{\overrightarrow{0}\}$ et est stable par u, c'est à dire que $u(E_\lambda) \subset E_\lambda$

Démonstration

1. Soit $x \in E$ avec $x \neq \overrightarrow{0}$ tel qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ et $\mu \in \mathbb{K}$, avec $\lambda \neq \mu$ et $u(x) = \lambda x = \mu x$
   Alors, $u(x) = \lambda x = \mu x \Longrightarrow \lambda x - \mu x = \overrightarrow{0} \Longleftrightarrow (\lambda - \mu)x = \overrightarrow{0}$.
   Comme $\lambda \neq \mu$, alors $x = \overrightarrow{0}$, ce qui est impossible, par hypothèse. Et donc $\lambda = \mu$.
2. Que λ soit valeur propre de u, veut dire qu'il existe $x \neq \overrightarrow{0}$ tel que $u(x) = \lambda x$. Montrons que E_λ est un sous-espace vectoriel de E.
   ⇒ Tout d'abord, $E_\lambda \neq \emptyset$ puisque $\overrightarrow{0} \in E_\lambda$. En effet, nous avons $u\left(\overrightarrow{0}\right) = \overrightarrow{0} = \lambda \overrightarrow{0}$
   ⇒ Ensuite, soient $\vec{x} \in E_\lambda$, $\vec{y} \in E_\lambda$, $a \in \mathbb{K}$ et $b \in \mathbb{K}$. Avons nous $a\vec{x} + b\vec{y} \in E_\lambda$?.
   Par linéarité, nous avons $u(a\vec{x} + b\vec{y}) = au(\vec{x}) + bu(\vec{y})$. Comme $\vec{x} \in E_\lambda$ et $\vec{y} \in E_\lambda$, nous avons :

$$u(a\vec{x} + b\vec{y}) = a\lambda\vec{x} + b\lambda\vec{y} = \lambda((a\vec{x} + b\vec{y})$$

   Ce qui montre que $(a\vec{x} + b\vec{y} \in E_\lambda$
   E_λ est donc un sous-espace vectoriel de E
3. Que E_λ soit stable par u est évident.

Remarque 4 :

1. Si 0 est valeur propre de $u : E \longrightarrow E$, ceci signifie qu'il existe $x \neq \overrightarrow{0}$ tel que $u(x) = \overrightarrow{0}$, alors, $E_0 \neq \{\overrightarrow{0}\}$; en fait, $E_0 = \ker u$ et u n'est pas injectif.
2. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $E_\lambda = \{y \in E/u(y) = \lambda y\}$; alors la condition $E_\lambda = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$, signifie que λ n'est pas valeur propre de u

Exemple 1 :

1. Une homotéthie de E de rapport λ a λ pour seule valeur propre, le sous-espace propre associé est tout l'espace E
2. Un projecteur p de E *(différent de l'identité et de l'application nulle)* a pour valeurs propres 0 et 1, les sous-espaces propres associés sont le noyau et l'image de p ; en effet si $p(v) = \lambda v$ alors comme $p^2 = p$, nous avons $\lambda^2 v = \lambda v$ soit $\lambda^2 = \lambda$ puisque $v \neq 0$
3. Un endomorphisme f d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel tel que $f^n = \mathrm{Id}_E$ a pour valeurs propres des racines n-ièmes de 1 ; en effet si $f(v) = \lambda v$ on a $f^n(v) = \lambda^n v$, soit $\lambda^n v = v$ et si $v \neq \overrightarrow{0}$, alors $\lambda^n = 1$
4. E est le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. L'endomorphisme de E dans lui même qui, à une fonction f associe sa dérivée f' admet tous les réels pour valeur propre ; par exemple, la fonction $f(x) = e^{ax}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre a.

12.2.4 Théorème

E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u : E \longrightarrow E$ un endomorphisme de E
Supposons $\lambda \in \mathbb{K}$ et $\mu \in \mathbb{K}$ valeurs propres de u Alors,

$$\lambda \neq \mu \Longrightarrow E_\lambda \cap E_\mu = \{\overrightarrow{0}\}$$

Démonstration

Soit $x \in E_\lambda \cap E_\mu$; alors, $u(x) = \mu x = \lambda x$, donc, $(\lambda - \mu) x = 0$; et comme $\lambda \neq \mu$, on en déduit que $x = \overrightarrow{0}$

12.2.5 Théorème

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u : E \longrightarrow E$ un endomorphisme de E
Supposons $\lambda \in \mathbb{K}$ et $\mu \in \mathbb{K}$ valeurs propres de u telles que $\lambda \neq \mu$.
Soient $x \in E_\lambda$ tel que $x \neq 0$ et $y \in E_\mu$ avec $y \neq 0$
Alors x et y sont linéairement indépendants

Démonstration

Supposons, au contraire, que x et y non nuls tous les deux ne soient pas linéairement indépendants, c'est à dire qu'il existe $\alpha \neq 0$ tel que $y = \alpha x$.
On a alors $u(y) = \mu y = \mu \alpha x$ et $u(y) = u(\alpha x) = \alpha u(x) = \alpha \lambda x$
Donc, $\alpha \lambda x = \mu \alpha x \Longleftrightarrow \alpha(\lambda - \mu) x = \overrightarrow{0}$.
Comme $\alpha(\lambda - \mu) \neq 0$, nous en concluons $x = \overrightarrow{0}$
On est donc en contradiction avec l'hypothèse. Donc x et y sont linéairement indépendants.

12.2.6 Théorème : généralisation

E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u : E \longrightarrow E$ un endomorphisme de E admettant m valeurs propres 2à 2 distinctes $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$. Alors, la famille $x_1, \ldots, x_m$ de vecteurs tels que x_i a pour valeurs propres λ_i est une famille libre.

Démonstration

On appelle $P(m)$ la propriété à démontrer. La démonstration se fait par récurrence sur m

1. Elle est évidente pour $m = 1$
2. Supposons $P(m)$ vraie
3. Soient $m + 1$ valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_{m+1}$ distinctes 2 à 2 et $m + 1$ vecteurs $x_1, \ldots, x_{m+1}$, tels que x_i a pour valeur propre λ_i.
   Nous allons montrer que la famille $\{x_1, \ldots, x_{m+1}\}$ est une famille libre.

Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_{m+1}$, $(m+1)$ réels tels que

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_m x_m + \alpha_{m+1} x_{m+1} = \overrightarrow{0} \tag{12.1}$$

Alors, en faisant « opérer » u dans l'équation 12.1, nous obtenons

$$\alpha_1 \lambda_1 x_1 + \cdots + \alpha_{m+1} \lambda_{m+1} x_{m+1} = \overrightarrow{0}$$

En multipliant 12.1 par λ_{m+1}, nous obtenons

$$\alpha_1 \lambda_{m+1} x_1 + \cdots + \alpha_{m+1} \lambda_{m+1} x_{m+1} = \overrightarrow{0}$$

Puis, en soustrayant, le terme $\alpha_{m+1} \lambda_{m+1} x_{m+1}$ disparaissant :

$$\alpha_1 (\lambda_{m+1} - \lambda_1) x_1 + \cdots + \alpha_m (\lambda_{m+1} - \lambda_m) x_m = 0$$

Nous avons donc m valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ distinctes 2 à 2 et m vecteurs $x_1, \dots, x_m$, tels que x_i a pour valeur propre λ_i.
D'après l'hypothèse de récurrence $P(m)$, $\{x_1, \dots, x_m\}$ est une famille libre, et donc

$$\alpha_1 (\lambda_{m+1} - \lambda_1) = \cdots = \alpha_i (\lambda_{m+1} - \lambda_i) = \cdots = \alpha_m (\lambda_{m+1} - \lambda_m) = 0$$

De l'hypothèse des valeurs propres 2 à 2 distinctes, on déduit que $\alpha_1 = \cdots = \alpha_i = \cdots = \alpha_m = 0$, et donc, que $\alpha_{m+1} = 0$; ce qui termine de montrer que les vecteurs $\{x_1, \dots, x_{m+1}\}$ forment une famille libre.

12.2.7 Corollaire

E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E
Alors, $u : E \longrightarrow E$ admet au plus n valeurs propres.

Démonstration

Evident, car si E est de dimension n, il y a au plus n vecteurs linéairement indépendants, donc au plus n valeurs propres distinctes.

12.2.8 Corollaire

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E
Soient $\lambda_1 \dots \lambda_m$ m valeurs propres distinctes de u et F un sous-espace vectoriel de E tel que

$$F = E_{\lambda_1} + E_{\lambda_2} + \cdots + E_{\lambda_m}$$

Alors F est somme directe des E_{λ_i} et nous avons donc

$$F = E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_m}$$

Démonstration

Rappel :
F est somme directe des E_{λ_i} si et seulement si, pour tout $x \in F$, x peut s'écrire de manière unique $x = x_1 + \cdots + x_m$ où $x_i \in E_{\lambda_i}$

1. Soit $x \in F$.
   Alors, $x = x_1 + \cdots + x_m$ où $x_i \in E_{\lambda_i}$.
   Supposons $x = \overrightarrow{0} \iff x_1 + \cdots + x_m = \overrightarrow{0}$
   Nous allons montrer que, pour tout $i = 1, \cdots, m$, $x_i = \overrightarrow{0}$
   En effet, supposons $x_1 + \cdots + x_m = 0$, et qu'il existe i_0 tel que $x_{i_0} \neq 0$

Ceci signifie que les $\{x_1, \cdots, x_m\}$ forment une famille linéairement dépendantes ; ce qui est en contradiction avec le théorème 12.2.6

Conclusion, tous les x_i sont nuls

2. Ce qui permet de montrer l'unicité de la décomposition de $x \in F$.

   En effet, supposons $x = x_1 + \cdots + x_m = x_1^1 + \cdots + x_m^1$.

   Alors, $(x_1 - x_m^1) + \cdots + (x_m - x_m^1) = \overrightarrow{0}$. Comme $(x_i - x_i^1) \in E_{\lambda_i}$, nous avons $x_i - x_i^1 = \overrightarrow{0}$, pour tout i, c'est à dire que pour tout i, nous avons $x_i = x_i^1$

   Il y a donc unicité de la décomposition et F est donc somme directe des E_{λ_i}

12.2.9 Théorème

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E et $\lambda \in \mathbb{K}$
Les propriétés suivantes sont équivalentes :
- $\Rightarrow$ $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de u
- $\Rightarrow$ L'endomorphisme $u - \lambda \mathrm{Id}_E$ n'est pas injectif

Démonstration

1. On suppose que $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de u

   Il existe alors $x \neq 0$ tel que $u(x) = \lambda x$, ce qui est équivalent à

   $$u(x) - \lambda x = \overrightarrow{0} \iff (u - \lambda \mathrm{Id}_E)(x) = \overrightarrow{0}$$

   Donc, $\ker(u - \lambda \mathrm{Id}_E) \neq \{\overrightarrow{0}\}$, ce qui montre que $u - \lambda \mathrm{Id}_E$ n'est pas injective.

2. Réciproquement, on suppose que $u - \lambda \mathrm{Id}_E$ n'est pas injective

   Alors $\ker(u - \lambda \mathrm{Id}_E) \neq \left\{\overrightarrow{0}\right\}$

   Il existe donc $x \neq \overrightarrow{0}$ tel que $(u - \lambda \mathrm{Id}_E)(x) = \overrightarrow{0}$, ce qui est équivalent à $u(x) = \lambda x$; donc, $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de u.

12.2.10 Corollaire

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E et $\lambda \in \mathbb{K}$
Les propriétés suivantes sont équivalentes :
- $\Rightarrow$ $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de u
- $\Rightarrow$ L'endomorphisme $u - \lambda \mathrm{Id}_E$ n'est pas inversible

Démonstration

1. On suppose que $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de u

   D'après le théorème 12.2.9 nous savons déjà que $u - \lambda \mathrm{Id}_E$ n'est pas injective, et comme E est de dimension finie, $u - \lambda \mathrm{Id}_E$ n'est pas bijective, donc non inversible, c'est à dire $\det(u - \lambda \mathrm{Id}_E) \neq 0$

2. Réciproquement, on suppose que $u - \lambda \mathrm{Id}_E$ n'est pas inversible

   Comme E est de dimension finie, $u - \lambda \mathrm{Id}_E$ n'est pas bijective, donc non injective, et donc $\ker(u - \lambda \mathrm{Id}_E) \neq \left\{\overrightarrow{0}\right\}$

   Il existe donc $x \neq \overrightarrow{0}$ tel que $(u - \lambda \mathrm{Id}_E)(x) = \overrightarrow{0}$, ce qui est équivalent à $u(x) = \lambda x$; donc, $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de u.

Remarque 5 :

1. On remarque que pour $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ valeur propre de u, nous avons : $E_\lambda = \ker(u - \lambda \mathrm{Id}_E)$
2. (a) Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E. Si u est bijectif et admet λ comme valeur propre, alors $\lambda \neq 0$.

   (b) Réciproquement, si toutes les valeurs propres de u sont non nulles, alors u est bijectif.

12.3 Valeur propre d'une matrice

12.3.1 Rappels et introduction

1. Soit $\mathcal{B}$ une base de E, $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n ; alors, il existe un isomorphisme entre $\mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ainsi défini :
$$\begin{cases} M_{\mathcal{B}} : \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ \qquad\quad u & \longmapsto & M_{\mathcal{B}}(u) = A \end{cases}$$
Où $M_{\mathcal{B}}(u) = A$ est la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$.
2. Nous pouvons ainsi définir les vecteurs propres et les valeurs propres de la matrice A, comme étant les vecteurs propres et les valeurs propres de $u \in \mathcal{L}(E)$
3. $X \in E$ étant un vecteur propre de u de valeur propre associée $\lambda \in \mathbb{K}$, si $A = M_{\mathcal{B}}(u)$ et $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ les coordonnées de X dans la base $\mathcal{B}$, nous aurons :
$$A \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Nous avons donc le théorème suivant :

12.3.2 Théorème

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée d'ordre n ; les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. λ est valeur propre de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
2. La matrice $A - \lambda \mathrm{Id}_n$ n'est pas inversible
3. $\det(A - \lambda \mathrm{Id}_n) = 0$

Démonstration

Ce théorème est en fait un corollaire évident de 12.2.9 ; il suffit d'utiliser l'isomorphisme entre $\mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

12.3.3 Définition

1. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E. Le spectre de u que nous notons $\mathrm{Spec}(u)$ est l'ensemble des valeurs propres de u
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée d'ordre n. Le spectre de A que nous notons aussi $\mathrm{Spec}(A)$ est l'ensemble des valeurs propres de A

Remarque 6 :

La notion de spectre d'un opérateur est beaucoup plus large et s'étant aussi aux $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension quelconque. En dimension finie, cette notion coïncide avec l'ensemble des valeurs propres

Exemple 2 :

1. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2, rapporté à une base $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ de matrice dans la base $\{\vec{i}, \vec{j}\}$: $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
Soient $\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Alors : $A\vec{u} = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $A\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$
Nous avons $A\vec{v} = 2\vec{v}$, ce qui veut dire $u(\vec{v}) = 2\vec{v}$; ce qui montre que $\vec{v}$ est un vecteur propre de u de valeur propre 2, alors que $\vec{u}$ n'et pas un vecteur propre.

2. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2. Une rotation d'angle différent de 0 et π de E n'a pas de valeurs propres.
   Il est important de remarquer que nous parlons d'un **$\mathbb{R}$-espace vectoriel** . Le problème pourrait être différent [1] pour un $\mathbb{C}$-espace vectoriel

   Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice de rotation du plan. C'est à dire que :
$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$
   Existe-t-il $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$?
   - ▷ Si tout celea existe, nous avons :
$$\left\{ \begin{array}{rl} \cos\theta x - \sin\theta y = & \lambda x \\ \sin\theta x + \cos\theta y = & \lambda y \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rl} (\cos\theta - \lambda) x - \sin\theta y = & 0 \\ \sin\theta x + (\cos\theta - \lambda) y = & 0 \end{array} \right.$$
   - ▷ Le déterminant du système est
$$\begin{vmatrix} \cos\theta - \lambda & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta - \lambda \end{vmatrix} = (\cos\theta - \lambda)^2 + \sin^2\theta = \lambda^2 - 2\lambda\cos\theta + 1$$
     Si $P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda\cos\theta + 1$, le discriminant de P est $\Delta = 4\left(\cos^2\theta - 1\right) \leqslant 0$
     $\Delta = 0 \iff \theta = 2k\pi$ ou $\theta = (2k+1)\pi$
   - ▷ Ainsi, si $\theta \neq 2k\pi$ ou $\theta \neq (2k+1)\pi$ A n'admet pas de valeur propre
   - ▷ Sinon une rotation d'angle $2k\pi$ dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2 est Id_E qui admet 1 comme valeur propre
   - ▷ Et une rotation d'angle $(2k+1)\pi$ dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2 est $-\mathrm{Id}_E$ qui admet -1 comme valeur propre
3. Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ où $A_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. A_θ est la matrice de rotation d'axe $\vec{k}$ et d'angle θ. On vérifie que le vecteur $\vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de valeur propre 1.
   On démontre (et facilement !) que 1 est la seule valeur propre de A_θ
4. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ où $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. On démontre que $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ est valeur propre de A. En effet, nous avons :
$$A\begin{pmatrix} 1 \\ j \end{pmatrix} = j\begin{pmatrix} 1 \\ j \end{pmatrix}$$

Exercice 1 :

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Montrer que $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$ sont des vecteurs propres de A. Quelles sont les valeurs propres associées ?
2. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -1$ et $\lambda_3 = 0$ sont valeurs propres de A.
   Pour chaque valeur propre, trouver un vecteur propre associé.
3. Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & -7 & 7 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 7 & -2 \end{pmatrix}$. Montrer que les vecteurs $X_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $X_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont des vecteurs propres de A. Montrer que la famille $\{X_1, X_2, X_3\}$ ne forme pas une famille libre. Est-ce que cela contredit un résultat du cours ?

1. En fait, il est différent !!

Exercice 2 :

E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2, rapporté à une base $\left\{\vec{i}, \vec{j}\right\}$ et $f : E \longrightarrow E$ une application linéaire de matrice, dans la base $\left\{\vec{i}, \vec{j}\right\}$,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Démontrer que $k_0 = 5$ et $k_1 = -1$ sont des valeurs propres de f (ou de A).
2. Trouver $\overrightarrow{u_0}$ un vecteur propre de valeur propre $k_0 = 5$ et $\overrightarrow{u_1}$ un vecteur propre de valeur propre $k_1 = -1$ et démontrer que ces 2 vecteurs déterminent une base de E.
3. Quelle est la matrice de $f : E \longrightarrow E$ dans la base $\{\overrightarrow{u_0}, \overrightarrow{u_1}\}$; on appelle cette matrice B.
4. Trouver une matrice P, telle que $A = P^{-1}BP$, et montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $A^n = P^{-1}B^nP$

12.3.4 Proposition

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$; alors, toutes les **matrices semblables** à A ont même valeurs propres.

Démonstration

Soit B une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ semblable à A.
Il existe donc $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, inversible telle que $B = PAP^{-1}$. Soit X un vecteur propre de A, valeur propre $\lambda \in \mathbb{K}$.
Alors PX est un vecteur propre de B de valeur propre λ. En effet :

$$B(PX) = (BP)X = \left(PAP^{-1}P\right)X = (PA)X = P(AX) = P(\lambda X) = \lambda PX$$

Ainsi, PX est un vecteur propre de B de valeur propre λ.

Remarque 7 :

1. On vient de démontrer que si les valeurs propres de 2 matrices semblables sont identiques, il n'en est pas de même des vecteurs propres.
   D'autre part, les matrices B semblables à A sont de la forme $B = P^{-1}AP$, ont même valeur propre, puisqu'en fait, B est aussi la matrice de $u \in \mathcal{L}(E)$, mais dans une autre base.
2. le résultat fondamental pour déterminer les valeurs propres est donné par le théorème 12.3.2 :
   $$\lambda \text{ est valeur propre de } A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \text{ si et seulement si } \det(A - \lambda \mathrm{Id}_n) = 0$$
3. L'expression $P(\lambda) = \det(A - \lambda \mathrm{Id}_n)$ est un nombre et donc, toujours par le théorème 12.3.2 :
   $$\lambda \text{ est valeur propre de } A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \text{ si et seulement si } P(\lambda) = 0$$
4. On peut remplacer λ par une indéterminée X, et alors $P(X) = \det(A - X\mathrm{Id}_n)$ est un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$; c'est un polynôme de $\mathbb{K}_n[X]$
   $$\lambda \text{ est valeur propre de } A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \text{ si et seulement si } \lambda \text{ est racine de } P$$
5. **Exemple :**
   Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ alors $A - \lambda \mathrm{Id}_n = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 4 \\ 0 & 6-\lambda \end{pmatrix}$ et $P(\lambda) = (2-\lambda)(6-\lambda) = \lambda^2 - 8\lambda + 12$, que l'on, peut transformer en $P(X) = X^2 - 8X + 12$ où P devient un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$ de racines $x_1 = 2$ et $x_2 = 6$.
   Les valeurs propres de A sont donc $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = 6$

12.3.5 Proposition

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Le polynôme caractéristique de A est $P_A(X) = \det(A - X\mathrm{Id}_n)$
λ est valeur propre de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ si et seulement si λ est racine du polynôme caractéristique P_A

Remarque 8 :

1. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n rapporté à une base $\mathcal{B}$, $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$.
   Le polynôme caractéristique de A, est aussi appelé polynôme caractéristique de u
2. Une valeur propre λ d'une matrice *(ou d'une application linéaire)* est donc une racine du polynôme caractéristique puisque $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda \mathrm{Id}_n) = 0$

Exemple 3 :

1. On pose $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & 8 & 2 \end{pmatrix}$
   Alors, $P_A(X) = \begin{vmatrix} 3-X & 1 & 0 \\ -4 & -1-X & 0 \\ 4 & 8 & 2-X \end{vmatrix}$, et le calcul donne :
   $$P_A(X) = (2-X)(X-1)^2$$
   Nous avons 1 et 2 comme valeurs propres de A
   Recherchons les vecteurs propres de A
   Nous avons 2 valeurs propres : 1 et 2
   (a) Pour la valeur propre $\lambda = 1$ on peut remarquer qu'elle est double*(elle est racine double du polynôme caractéristique)*, et les vecteurs propres doivent vérifier : $AX = X$, ou, ce qui est équivalent :
   $$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & 8 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$
   $$\iff \begin{cases} 2x + y = 0 \\ -4x - 2y = 0 \\ 4x + 8y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + y = 0 \\ 4x + 8y + z = 0 \end{cases}$$
   Les vecteurs propres de valeur propre $\lambda = 1$ sont de la forme : $\{(x, -2x, 12x)$ où $x \in \mathbb{R}\}$
   L'espace propre E_1 est donc une droite de base le vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 12 \end{pmatrix}$
   (b) Pour la valeur propre $\lambda = 2$, on peut remarquer qu'elle est simple ; les vecteurs propres doivent vérifier : $AX = 2X$, ou, ce qui est équivalent :
   $$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 3x + y = 2x \\ -4x - y = 2y \\ 4x + 8y + 2z = 2z \end{cases}$$
   $$\iff \begin{cases} x + y = 0 \\ -4x - 3y = 0 \\ 4x + 8y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$$
   Les vecteurs propres de valeur propre $\lambda = 2$ sont de la forme : $\{(0; 0; z)$ avec $z \in \mathbb{R}\}$
   On obtient donc 2 sous espaces propres, E_1 et E_2, tels que $\dim E_1 = \dim E_2 = 1$
2. Soit $B = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ A est une matrice de rotation dans $\mathbb{R}^2$
   Alors $P_B(X) = X^2 - (2\cos\theta)X + 1$, ce qui montre que, sauf si $\theta = k\pi$, B n'admet pas de valeurs propres réelles ; par contre, si on considère B comme matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, B admet 2 valeurs propres qui sont $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$.

3. Soit A la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

   Alors $P_A(X) = \begin{vmatrix} -X & 1 \\ -1 & -1-X \end{vmatrix} = X(1+X)+1 = X^2+X+1 = (X-j)\left(X-\overline{j}\right)$.
   Ainsi :
   $\Rightarrow$ Si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, c'est à dire si $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, alors A ne possède pas de valeur propre
   $\Rightarrow$ Si $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, c'est à dire si $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, alors A possède 2 valeurs propres qui sont j et $\overline{j}$

Exercice 3 :

Rechercher les valeurs propres réelles ou complexes de la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

12.3.6 Proposition

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire *(supérieure ou inférieure)*
Les valeurs propres de A sont les coefficients diagonaux de la matrice.

Démonstration

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire supérieure *(le problème est identique si elle est triangulaire inférieure).*
On suppose

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

dont les coefficients diagonaux s'écrivent $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$
Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la matrice $A - \lambda \mathrm{Id}_n$ est toujours triangulaire supérieure et

$$A - \lambda \mathrm{Id}_n = \begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}-\lambda & \cdots & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix}$$

Et ses coefficients diagonaux s'écrivent $a_{11}-\lambda, a_{22}-\lambda, \cdots, a_{nn}-\lambda$
Le polynôme caractéristique de A est donc :

$$P_A(X) = \det(A - X\mathrm{Id}_n) = \begin{vmatrix} a_{11}-X & a_{12} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}-X & \cdots & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a_{nn}-X \end{vmatrix} = \prod_{i=0}^{n} (a_{ii}-X)$$

Les racines de P_A sont exactement les éléments diagonaux de A

12.3.7 Proposition

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $A^\intercal$ sa matrice transposée
Alors A et $A^\intercal$ ont les mêmes polynômes caractéristiques et donc les mêmes valeurs propres

Démonstration

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $A^\intercal$ sa matrice transposée.
Alors, $P_{A^\intercal}(X) = \det\left(A^\intercal - X\mathrm{Id}_n\right)$
Nous allons utiliser 3 propriétés de la matrice transposée :

- $\Rightarrow$ Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors $(A+B)^\intercal = A^\intercal + B^\intercal$
- $\Rightarrow$ En second lieu $\mathrm{Id}_n^\intercal = \mathrm{Id}_n$
- $\Rightarrow$ Et, pour terminer : $\det A = \det A^\intercal$

Ainsi $\left(A^\intercal - X\mathrm{Id}_n\right) = \left(A^\intercal - X\mathrm{Id}_n^\intercal\right) = \left(A - X\mathrm{Id}_n\right)^\intercal$
Comme $\det\left(A^\intercal - X\mathrm{Id}_n\right) = \det\left(\left(A - X\mathrm{Id}_n\right)^\intercal\right) = \det\left(A - X\mathrm{Id}_n\right)$, nous avons bien $P_{A^\intercal}(X) = P_A(X)$
Ce que nous voulions

12.3.8 Théorème

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On considère le polynôme caractéristique de A, $P_A(X) = \det\left(A - X\mathrm{Id}_n\right)$; Alors,

1. Ce polynôme est invariant lorsqu'on remplace A par une matrice semblable à A c'est à dire que si $B = PAP^{-1}$, alors $P_A(X) = P_B(X)$
2. Il est de degré n et de la forme :
$$P_A(X) = (-1)^n X^n - (-1)^{n-1} \operatorname{tr}(A) X^{n-1} + \cdots + \det A$$

Démonstration

1. Soit B une matrice semblable à A, c'est à dire que nous supposons $B = PAP^{-1}$
   Alors,
$$\begin{aligned} B - X\mathrm{Id}_n = & \; PAP^{-1} - XP\mathrm{Id}_nP^{-1} \\ = & \; PAP^{-1} - P\left(X\mathrm{Id}_n\right)P^{-1} \\ = & \; P\left(A - X\mathrm{Id}_n\right)P^{-1} \end{aligned}$$
   Donc,
$$\begin{aligned} P_B(X) = & \; \det\left(B - X\mathrm{Id}_n\right) = \det\left(P\left(A - X\mathrm{Id}_n\right)P^{-1}\right) \\ = & \; \det P \times \det\left(A - X\mathrm{Id}_n\right) \times \det P^{-1} = \det\left(A - X\mathrm{Id}_n\right) \\ = & \; P_A(X) \end{aligned}$$
   C'est à dire $P_A(X) = P_B(X)$; les 2 matrices ont même polynôme caractéristique
2. P_A est de degré n et $P_A(X) = (-1)^n X^n - (-1)^{n-1} \operatorname{tr}(A) X^{n-1} + \cdots + \det A$
   La démonstration de cette partie est très calculatoire *(calcul d'un déterminant)* et nous allons l'admettre.
   On peut remarquer que le terme constant est $P_A(0) = \det\left(A - 0 \times \mathrm{Id}_n\right) = \det A$

Exemple 4 :

Pour un cas trivial, $n = 2$, la matrice A est de la forme $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, et

$$\begin{aligned} P_A(A) = \det\left(A - X\mathrm{Id}_n\right) = & \; \begin{vmatrix} a - X & b \\ c & d - X \end{vmatrix} \\ = & \; (a - X)(d - X) - bc = X^2 - (a + d)X + (ad - bc) \\ = & \; X^2 - \operatorname{tr}(A)X + \det A \end{aligned}$$

Remarque 9 :

En ayant démontré que si 2 matrices A et B sont semblables, alors $P_A(X) = P_B(X)$, nous retrouvons le fait que 2 matrices semblables A et B ont mêmes valeurs propres.
C'est un nouveau cas d'invariance dans le cas des similitudes de matrices.

Exercice 4 :

1. Rechercher les valeurs propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 7 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. Calculer le polynôme caractéristique de la matrices $A = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ et en déduire les valeurs propres

12.3.9 Corollaire

1. Toute matrice de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ admet au plus n valeurs propres.
2. Si $\mathbb{K}$ est un corps algébriquement clos, alors, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ admet exactement n valeurs propres distinctes ou confondues.

12.3.10 Proposition

Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Les polynômes caractéristiques de A et A^{-1} vérifient :

$$P_{A^{-1}}(X) = \frac{(-1)^n}{\det A} X^n P_A\left(\frac{1}{X}\right)$$

En particulier, si λ est valeur propre de A alors $\lambda \neq 0$ et $\dfrac{1}{\lambda} = \lambda^{-1}$ est valeur propre de A^{-1}

Démonstration

⇒ Tout d'abord, comme $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, nous avons $\det A \neq 0$ et donc $\lambda \neq 0$

⇒ Remarquons aussi que si $P_A(X) = \sum_{k=0} a_k X^k$, alors

$$X^n P_A\left(\frac{1}{X}\right) = X^n \sum_{k=0} a_k \frac{1}{X^k} = \sum_{k=0} a_k X^{n-k} = \sum_{k=0} a_{n-k} X^k$$

est aussi un polynôme de degré n

⇒ Par définition de $P_{A^{-1}}(X)$, nous avons :

$$\begin{aligned}
P_{A^{-1}}(X) &= \det\left(A^{-1} - X\mathrm{Id}_n\right) = \det\left(A^{-1} - X\left(A^{-1}A\right)\right) \\
&= \det A^{-1}\left(\mathrm{Id}_n - XA\right) = \det A^{-1} \det\left(\mathrm{Id}_n - XA\right) \\
&= \det A^{-1} \det X\left(\frac{1}{X}\mathrm{Id}_n - A\right) \\
&= \det A^{-1} \times X^n \times (-1)^n \det\left(A - \frac{1}{X}\mathrm{Id}_n\right) \\
&= \det A^{-1} \times X^n \times (-1)^n P_A\left(\frac{1}{X}\right) \\
&= \frac{(-1)^n}{\det A} X^n P_A\left(\frac{1}{X}\right)
\end{aligned}$$

Ce que nous voulions

Remarque 10 :

Il nous est possible de nous poser la question : est-ce que n'importe quel polynôme peut être considéré comme polynôme caractéristique ? La réponse est oui et nous la développons dans la proposition suivante :

12.3.11 Définition et proposition

1. Soit $P \in \mathbb{K}_n[X]$ unitaire tel que $P(X) = X^n + c_{n-1}X^{n-1} + c_{n-2}X^{n-2} + \cdots + c_1X + c_0$.
   On appelle matrice compagnon de P une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -c_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & -c_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -c_{n-1} \end{pmatrix}$$

2. Soit $P \in \mathbb{K}_n[X]$ unitaire, alors le polynôme caractéristique de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la matrice compagnon de P est $P_A(X) = (-1)^n P(X)$

Démonstration

Nous allons faire cette démonstration par récurrence sur n

1. **Nous allons le vérifier pour les premiers termes.**
   (a) Pour $n = 2$, nous avons $P(X) = X^2 + c_1X + c_0$ et la matrice compagnon de P est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -c_0 \\ 1 & -c_1 \end{pmatrix}$$

   dont le polynôme caractéristique est donné par :

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} -X & -c_0 \\ 1 & -X - c_1 \end{vmatrix} = -X(-X - c_1) + c_0 = X^2 + c_1X + c_0 = (-1)^2 P(X)$$

   (b) Pour $n = 3$, nous avons $P(X) = X^3 + c_2X^2 + +c_1X + c_0$ et la matrice compagnon de P est $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -c_0 \\ 1 & 0 & -c_1 \\ 0 & 1 & -c_2 \end{pmatrix}$ dont le polynôme caractéristique est donné par :

$$\begin{aligned} P_A(X) &= \begin{vmatrix} -X & 0 & -c_0 \\ 1 & -X & -c_1 \\ 0 & 1 & -X - c_2 \end{vmatrix} = -X \times \begin{vmatrix} -X & -c_1 \\ 1 & -X - c_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & -c_0 \\ 1 & -X - c_2 \end{vmatrix} \\ &= -X(-X(-X - c_2) + c_1) - c_0 = -X^3 - c_2X^2 - c_1X - c_0 \\ &= (-1)^3 P(X) \end{aligned}$$

2. **Supposons que ce soit vrai à l'ordre n**
3. **Démontrons à l'ordre $n + 1$**
   Soit $P(X) = X^{n+1} + c_nX^n + c_{n-1}X^{n-1} + c_{n-2}X^{n-2} + \cdots + c_1X + c_0$ la matrice compagnon de P est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -c_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & -c_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -c_n \end{pmatrix}$$

Et son polynôme caractéristique $P_A(X) = \det(A - X\mathrm{Id}_{n+1}) = \begin{vmatrix} -X & 0 & \cdots & 0 & -c_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & -c_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -X & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -X-c_n \end{vmatrix}$

En développant par rapport à la première ligne, nous avons :

$$P_A(X) = -X \begin{vmatrix} -X & 0 & \cdots & 0 & -c_1 \\ 1 & \ddots & & \vdots & -c_2 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -X & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -X-c_n \end{vmatrix} + (-1)^{n+1} c_0 \begin{vmatrix} 1 & -X & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -X \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Or,

$$\begin{vmatrix} -X & 0 & \cdots & 0 & -c_1 \\ 1 & \ddots & & \vdots & -c_2 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -X & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -X-c_n \end{vmatrix}$$

est le polynôme caractéristique d'une matrice compagnon de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et

$$\begin{vmatrix} 1 & -X & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -X \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Donc, d'après l'hypothèse de récurrence :

$$P_A(X) = -X\left((-1)^n\left(X^n + c_nX^{n-1} + \cdots + c_2X + c_1\right)\right) + (-1)^{n+1}c_0$$

Et donc, pour terminer :

$$P_A(X) = (-1)^{n+1}\left(X^{n+1} + c_nX^n + \cdots + c_2X^2 + c_1X + c_0\right)$$

Ce que nous voulions ; la proposition est démontrée.

Exercice 5 :

1. Trouver plusieurs matrices carrées d'ordre 2 dont la somme des valeurs propres fait 6 et le produit des valeurs propres fait 2
2. Trouver une matrice, ni diagonale ni triangulaire, dont le polynôme caractéristique est $(X-1)^2\left(X^2+X+1\right)$

12.3.12 Théorème

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice de u dans une base de E.

1. L'ordre d'une valeur propre λ de u est l'ordre de λ en tant que racine du polynôme caractéristique P_A de A
2. Soit λ une valeur propre de u d'ordre k, alors, $1 \leqslant \dim E_\lambda \leqslant k$

Démonstration

On suppose λ valeur propre de u, d'ordre k et $\dim E_\lambda > k$
On pose $\dim E_\lambda = h$, et on construit $\{a_1, \dots, a_h\}$ une base de E_λ, base que l'on complète par $\{a_{h+1}, \dots, a_n\}$.
La matrice de u dans la base $\{a_1, \dots, a_n\}$ est alors, $M_{\{a_1,\dots,a_n\}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda Id_h & A_1 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$ où A_1 est une matrice $h \times (n-h)$ et A_2 est une matrice $(n-h) \times (n-h)$.Donc,

$$M_{\{a_1,\dots,a_n\}}(u) - X\mathrm{Id}_n = \begin{pmatrix} (\lambda - X)\, Id_h & A_1 \\ 0 & A_2 - XId_{n-h} \end{pmatrix}$$

C'est une matrice définie par blocs D'où,

$$\begin{aligned} P_u(X) = & \ (\lambda - X)^h \det(A_2 - X\mathrm{Id}_{n-h}) \\ = & \ (\lambda - X)^h P_{A_2}(X) \end{aligned}$$

Donc, si on suppose $h > k$, alors, l'ordre de λ serait supérieur à k ; ce qui est impossible.
Donc, $h \leqslant k$

12.4 Diagonalisation

Introduction

Dans ce qui suit, nous allons considérer un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n *(en fait, $E = \mathbb{K}^n$)* et un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$.
Du fait de l'isomorphisme entre $\mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, nous parlerons indifféremment du polynôme caractéristique P_u de $u \in \mathcal{L}(E)$ et du polynôme caractéristique P_A où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est la matrice de u. Nous avons $P_u = P_A$.
Ainsi, parler de valeur propre de $u \in \mathcal{L}(E)$ ou de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est identique

12.4.1 Définition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$

1. On dit que $u \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable s'il existe une base $\mathcal{B}$ telle que la matrice associée à u dans la base $\mathcal{B}$ soit diagonale.
2. Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable, s'il existe une matrice $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible, telle $P^{-1}AP$ soit une matrice diagonale

Remarque 11 :

1. En fait, $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible veut dire $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$
2. On revient aux remarques de l'introduction : la matrice diagonale D est la matrice de $u \in \mathcal{L}(E)$ dans la base $\mathcal{B}$. P et P^{-1} étant les matrices de passage d'une base à l'autre.

12.4.2 Théorème

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$.
$u \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable si et seulement si il est possible de trouver une base de E formée de vecteurs propres.

Démonstration

1. On suppose que $u \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable
   Alors, il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice associée à u dans la base $\mathcal{B}$ soit diagonale. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ cette matrice

Nous avons $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \cdots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$ où $\lambda_i \in \mathbb{K}$; donc le polynôme caractéristique de u est

$$P_u(X) = \det(A - X\mathrm{Id}_n) = \begin{vmatrix} \lambda_1 - X & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 - X & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \lambda_{n-1} - X & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \lambda_n - X \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} (\lambda_i - X)$$

La famille des λ_i pour $i = 1, \ldots, n$ est donc une famille de valeurs propres de u et pour chaque $i = 1, \ldots, n$, $u(a_i) = \lambda_i a_i$ et les a_i sont des vecteurs propres non nuls de valeur propre associée λ_i ; la famille de ces a_i forme une base $\mathcal{B} = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ de E

2. Réciproquement, si $\mathcal{B} = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ est une base faite des vecteurs propres de u tels que, pour chaque $i = 1, \ldots, n$, $u(a_i) = \lambda_i a_i$, alors, la matrice de u dans la base $\mathcal{B} = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ est une matrice diagonale

Remarque 12 :

Ainsi, si un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable, ses n valeurs propres, distinctes ou confondues sont toutes dans $\mathbb{K}$, et le polynôme caractéristique P_u a toutes ses racines dans $\mathbb{K}$

12.4.3 Théorème

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$
$u \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable si et seulement si les 2 propositions suivantes sont vérifiées

1. Le polynôme P_u a toutes ses racines dans $\mathbb{K}$
2. Si $\lambda_i \in \mathbb{K}$ est racine de P_u d'ordre k_i alors, $\dim E_{\lambda_i} = k_i$

Démonstration

1. On suppose que $u \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable
   Soit A la matrice de u.

   Alors, A est semblable à une matrice diagonale de la forme $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \cdots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$ où

   $\lambda_i \in \mathbb{K}$ et le polynôme caractéristique $P_u(X) = \prod_{i=1}^{n} (\lambda_i - X)$; donc P_u a toutes ses racines dans $\mathbb{K}$

   Soit k_i l'ordre de λ_i ; alors alors, $P_u(X) = \prod_{i=1}^{h} (\lambda_i - X)^{k_i}$ où $k_1 + \cdots + k_h = n$ et A est, en fait, semblable à une matrice du type :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & & \\ & \lambda_1 & & & & & & \\ & & \lambda_1 & & & & & \\ & & & \lambda_2 & & 0 & & \\ & & & & \lambda_2 & & & \\ & & 0 & & & \ddots & & \\ & & & & & & \lambda_h & \\ & & & & & & & \lambda_h \end{pmatrix}$$

C'est à dire qu'il existe une base de vecteurs propres dans lequel u admet D pour matrice.
Nous avons donc, $\dim E_{\lambda_i} = k_i$
Alors $E = E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_h}$ et donc $\dim E = \dim E_{\lambda_1} + \cdots + \dim E_{\lambda_h}$

2. Etude de la réciproque
   Supposons que P_u a toutes ses racines dans $\mathbb{K}$ et que si λ_i est une racine de P_u d'ordre k_i alors, $\dim E_{\lambda_i} = k_i$
   Alors, $k_1 + \cdots + k_h = n$ impose que $\dim (E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_h}) = n = \dim E$
   Donc, $E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_h} = E$; la réunion des bases de chacun des E_{λ_i} forme une base de E, formée de vecteurs propres, d'où u est diagonalisable.

12.4.4 Corollaire

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est semblable à une matrice diagonale si et seulement si

1. P_A le polynôme caractéristique de A a toutes ses racines dans $\mathbb{K}$
2. Si λ_i est une racine de P_A d'ordre k_i alors, $\dim E_{\lambda_i} = k_i$

Démonstration

Pour démontrer ce corollaire, il suffit d'utiliser le théorème 12.4.3 et l'isomorphisme entre $\mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Remarque 13 :

Mettons nous dans la situation où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Si les valeurs propres ne sont pas toutes réelles, on ne peut pas espérer pouvoir diagonaliser dans $\mathbb{R}$; en effet D fait apparaître les valeurs propres sur sa diagonale et ne saurait alors être réelle.
La première condition est donc indispensable si on veut obtenir une diagonalisation dans $\mathbb{K}$; par contre, si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, elle n'a pas d'objet si on diagonalise dans $\mathbb{C}$. Dans la plupart des cas cette condition sera réalisée

12.4.5 Une condition suffisante de diagonalisation

1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$
   Si u possède n valeurs propres 2 à 2 distinctes dans $\mathbb{K}$, alors, u est diagonalisable
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice possèdant n valeurs propres 2 à 2 distinctes dans $\mathbb{K}$, alors, A est diagonalisable.

Démonstration

Supposons que toutes les racines de $P_u = P_A$ soient toutes des éléments de $\mathbb{K}$ $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ et qu'elles soient 2 à 2 distinctes, c'est à dire que si $i \neq j$, alors $\lambda_i \neq \lambda_j$
Il existe donc une famille de vecteurs $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ tous non nuls tels que, pour tout i, $u(x_i) = \lambda x_i$.
La famille $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ est une famille de vecteurs propres donc forme une famille libre et est donc une base de E
u est diagonalisable ; donc A est diagonalisable.

12.4.6 Corollaire

Soit $\mathbb{K}$ un corps algébriquement clos.

1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$. Pour que u soit diagonalisable, <u>il suffit</u> que les racines de P_u soient simples
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour que A soit diagonalisable, <u>il suffit</u> que les racines de P_A soient simples.

Démonstration

En effet, si $\mathbb{K}$ est algébriquement clos, toutes les racines de $P_u = P_A$ sont dans $\mathbb{K}$. Elles sont distinctes 2 à 2 si et seulement si les racines sont simples.
D'où ce corollaire.

Remarque 14 :

1. Le cas du corps algébriquement clos, c'est surtout celui où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
2. Lorsque $\mathbb{K}$ est algébriquement clos, l'application linéaire u (ou la matrice A) peut très bien être diagonalisable, même si $P_u = P_A$ a des racines multiples. Il suffit de penser à l'identité Id_n dont le polynôme caractéristique est $P_{\mathrm{Id}_n}(X) = (1-X)^n$
3. ATTENTION, même sur $\mathbb{C}$ il existe des matrices qui ne sont pas diagonalisables.
   Par exemple $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice triangulaire supérieure. Elle admet donc une seule valeur propre $\lambda = 0$. C'est une racine double, puisque $P_A(X) = X^2$, mais sa multiplicité géométrique *(La dimension de l'espace propre associé à $\lambda = 0$, c'est à dire le noyau)* est visiblement 1.
   Donc $\mathbb{C}^2$ ne peut pas être somme directe des espaces propres, et A n'est pas diagonalisable

Exemple 5 :

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$. Déterminer vecteurs propres et valeurs propres de cette matrice

- ■ ⇒ **Recherchons les valeurs propres**

  Tout d'abord, $P_A(X) = \begin{vmatrix} 2-X & 0 & 4 \\ 3 & -4-X & 12 \\ 1 & -2 & 5-X \end{vmatrix}$
  Tout calculs faits, $P_A(X) = -X(X-1)(X-2)$.
  Les 3 valeurs propres sont 0, 1 et 2 ; elles sont simples ; la matrice A est donc diagonalisable.
- ■ ⇒ **Cherchons le vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda = 0$**

  En fait, nous devons, ici, chercher le noyau, c'est à dire les vecteurs $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tels que

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  Nous obtenons donc le système :

$$\begin{cases} 2x + 4z = 0 \\ 3x - 4y + 12z = 0 \\ x - 2y + 5z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + 2z = 0 \\ -4y + 6z = 0 \\ -2y + 3z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + 2z = 0 \\ -2y + 3z = 0 \end{cases}$$

  D'où les solutions sont du type $\overrightarrow{K} = \begin{pmatrix} -4\mu \\ 3\mu \\ 2\mu \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ où $\mu \in \mathbb{R}$
  On remarque, tout de suite que $\dim E_0 = \dim \ker u = 1$

■ ⇒ **Cherchons le vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda = 1$**

Soit $\overrightarrow{U} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ le vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda = 1$

Nous devons donc résoudre le système :

$$\left\{\begin{aligned} 2x + 4z &= x \\ 3x - 4y + 12z &= y \\ x - 2y + 5z &= z \end{aligned}\right. \iff \left\{\begin{aligned} x + 4z &= 0 \\ 3x - 5y + 12z &= 0 \\ x - 2y + 4z &= 0 \end{aligned}\right. \iff \left\{\begin{aligned} x + 4z &= 0 \\ -5y &= 0 \\ -2y &= 0 \end{aligned}\right.$$

D'où les solutions sont du type $\overrightarrow{K} = \begin{pmatrix} -4\mu \\ 0 \\ \mu \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ où $\mu \in \mathbb{R}$

On remarque, tout de suite que $\dim E_1 = 1$

■ ⇒ **Cherchons le vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda = 2$**

Soit $\overrightarrow{U} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ le vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda = 2$

Nous devons donc résoudre le système :

$$\left\{\begin{aligned} 2x + 4z &= 2x \\ 3x - 4y + 12z &= 2y \\ x - 2y + 5z &= 2z \end{aligned}\right. \iff \left\{\begin{aligned} 4z &= 0 \\ 3x - 6y + 12z &= 0 \\ x - 2y + 3z &= 0 \end{aligned}\right. \iff \left\{\begin{aligned} z &= 0 \\ 3x - 6y &= 0 \\ x - 2y &= 0 \end{aligned}\right.$$

D'où les solutions sont du type $\overrightarrow{K} = \begin{pmatrix} \mu \\ 2\mu \\ 0 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ où $\mu \in \mathbb{R}$

On remarque, tout de suite que $\dim E_2 = 1$

Exercice 6 :

Mêmes questions : déterminer vecteurs propres et valeurs propres des matrices suivantes :

1. $Y = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
2. $Z = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$
3. $T = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

12.4.7 Proposition

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonalisable. On suppose que les valeurs propres de A sont $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, éventuellement distinctes. Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, les valeurs propres de A^k sont $\lambda_1^k, \lambda_2^k, \ldots, \lambda_n^k$
De plus, si $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est une matrice qui diagonalise A, alors

$$A^k = P \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \lambda_n^k \end{pmatrix} P^{-1}$$

Démonstration

La démonstration pose peu de difficultés.
$P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est une matrice qui diagonalise A, alors, ceci veut dire que $P^{-1}AP$ est diagonale, ou encore

$$A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1} = PDP^{-1}$$

Par conséquent,

$$A^k = \left(PDP^{-1}\right)\left(PDP^{-1}\right)\cdots\left(PDP^{-1}\right) = PD\left(P^{-1}P\right)D\left(P^{-1}P\right)\cdots\left(P^{-1}P\right)DP^{-1} = PD^kP^{-1}$$

Or, il est évident [2] que $D^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \lambda_n^k \end{pmatrix}$

D'où le résultat.

Exercice 7 :

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Rechercher les valeurs propres et les vecteurs propres de A et en déduire A^n pour $n \in \mathbb{N}$
2. Ecrivez $A = 2\mathrm{Id}_2 + M$ où $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est à préciser. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer M^n et retrouver A^n
3. La matrice A est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Soit $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice symétrique, c'est à dire telle que
$$X = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} \text{ avec } a \in \mathbb{R} \text{ et } b \in \mathbb{R}$$
La matrice X est-elle diagonalisable ?

Exercice 8 :

On considère un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension 2, rapporté à une base $\left\{\vec{i}, \vec{j}\right\}$; f est l'endomorphisme de E, défini par sa matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$

1. Rechercher les vecteurs propres et les valeurs propres de A
2. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, calculer A^n
3. On considère 2 suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_0 = 3$, $v_0 = -3$ et $\begin{cases} u_{n+1} = 5u_n - v_n \\ v_{n+1} = -u_n + 5v_n \end{cases}$
Donner u_n et v_n en fonction de n

12.5 Réduction à la forme triangulaire

On a vu que l'on pouvait trouver des endomorphismes - donc des matrices - qui n'étaient pas diagonalisables ; seulement, on cherche toujours à simplifier ces calculs matriciels à l'aide de matrices équivalentes. S'il est impossible de diagonaliser, nous chercherons donc une matrice équivalente, mais , cette fois ci, triangulaire.

12.5.1 Endomorphisme trigonalisable

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $u : E \longrightarrow E$ un endomorphisme. On dit que $u \in \mathcal{L}(E)$ est trigonalisable,s'il existe une base $\mathcal{B}_T$, telle que la matrice de u dans cette base soit triangulaire.

12.5.2 Matrice trigonalisable

Une matrice $A \in\in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est trigonalisable si et seulement si il est possible de trouver une matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, inversible, telle que la matrice $B = PAP^{-1}$ soit triangulaire.

2. Résultat qui peut, par exemple, être montré par récurrence

12.5.3 Théorème

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$, tel que le polynôme caractéristique de u, P_u ait ses n racines $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ dans $\mathbb{K}$
Alors, il existe une base $\mathcal{B}_T$ de E, telle que A la matrice de $u \in \mathcal{L}(E)$ dans la base $\mathcal{B}_T$ soit triangulaire.
Si nous supposons $A = M_{\mathcal{B}_T}(u) = \left[(a_{i,j})_{\substack{i=1,\ldots,n \\ j=1,\ldots,n}}\right]$, on a alors $a_{i,i} = \lambda_i$

Démonstration

1. **On peut ne rechercher qu'une matrice triangulaire supérieure**
   En effet, soit $\mathcal{B}_T = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une base dans laquelle la matrice de $u \in \mathcal{L}(E)$ appelée $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_T}(u)$ est triangulaire supérieure.
   La famille $\mathcal{B}_{T_1} = \{e_n, \ldots, e_1\}$ *(remarquez l'ordonnancement)* est telle que la matrice de $u \in \mathcal{L}(E)$ dans cette base sera triangulaire inférieure.
2. **Nous allons démontrer le théorème par récurrence**
   Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ la propriété que nous devons montrer par récurrence :

   Si E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$, tel que le polynôme caractéristique de u P_u ait ses n racines $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ dans $\mathbb{K}$, alors, il existe une base $\mathcal{B}_T = \{e_1, \ldots, e_n\}$ de E, telle que la matrice de u dans la base $\mathcal{B}_T$ appelée $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_T}(u)$ soit triangulaire supérieure.

- Le théorème est trivialement vrai pour $n = 1$
- Supposons qu'au rang n, $P(n)$ soit vraie,
- Démontrons $P(n+1)$
  Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n+1$ et $u \in \mathcal{L}(E)$, tel que le polynôme caractéristique de P_u ait ses $n+1$ racines $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}$ dans $\mathbb{K}$
  Soit donc, λ_1 l'une d'entre elles, et e_1, un vecteur non nul tel que $u(e_1) = \lambda_1 e_1$
  On considère alors les vecteurs $\{e_2, \ldots, e_{n+1}\}$ tels que la famille de vecteurs $\{e_1, e_2, \ldots, e_{n+1}\}$ forment une base de E.
  En fait, $\{e_2, \ldots, e_{n+1}\}$ forment une base du supplémentaire de $\mathbb{K}e_1 = \{\alpha e_1 \text{ où } \alpha \in \mathbb{K}\}$
  La matrice de u dans la base $\{e_1, e_2, \ldots, e_{n+1}\}$ est donnée par

$$\mathcal{M}_{\{e_1,\ldots,e_{n+1}\}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & b_{1,2} & \cdots & \cdots & b_{1,n+1} \\ 0 & b_{2,2} & \cdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & b_{n+1,2} & \cdots & \cdots & b_{1,n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & b_{1,2} & \cdots & b_{1,n+1} \\ 0 & & & \\ \vdots & & C' & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

  où C' est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
  Nous avons, évidemment , pour $j = 2, \ldots, n+1$ $u(e_j) = \sum_{k=1}^{n+1} b_{k,j} e_k$, et si on restreint u à l'espace F engendré par $\{e_2, \ldots, e_{n+1}\}$, F n'est pas stable par u, car les $\{b_{1,j} \text{ avec } j = 2, \ldots, n+1\}$ ne sont pas tous forcément nuls.
  On considère alors la projection Π de E sur F, parallèlement à $\mathbb{K}e_1 = \{\alpha e_1 \text{ où } \alpha \in \mathbb{K}\}$ et l'endomorphisme $g = \Pi \circ u$
  Nous avons, pour $j = 2, \ldots, n+1$, $g(e_j) = \sum_{k=2}^{n+1} b_{k,j} e_k = b_{2,j} e_2 + b_{3,j} e_3 + \cdots + b_{n+1,j} e_{n+1}$; ce qui montre que F est stable par $g = \Pi \circ f$, et si g' est la restriction de g à F, alors $\mathcal{M}_{\{e_2,\ldots,e_{n+1}\}}(g') = C'$
  Il faut maintenant montrer que le polynôme caractéristique de g' a toutes ses racines dans $\mathbb{K}$

Or,

$$P_u(X) = \det\left(\mathcal{M}_{\{e_1,\dots,e_{n+1}\}}(u) - X\mathrm{Id}_{n+1}\right) = \begin{vmatrix} \lambda_1 - X & b_{12} & \dots & \dots & b_{1n+1} \\ 0 & b_{22} - X & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & b_{n+1,2} & \dots & \dots & b_{n+1,n+1} - X \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda_1 - X & b_{12} \cdots b_{1,n+1} \\ 0 & \\ \vdots & C' - X\mathrm{Id}_n \\ 0 & \end{vmatrix}$$

C'est à dire, en développant par rapport à la première colonne,

$$P_u(X) = \det\left(\mathcal{M}_{\{e_1,\dots,e_{n+1}\}}(u) - X\mathrm{Id}_{n+1}\right) = (\lambda_1 - X)\det(C' - X\mathrm{Id}_n) = (\lambda_1 - X)P_{g'}(X)$$

Ce qui montre que $P_{g'}(X)$ divise $P_u(X)$, et comme il y a $n+1$ racines à $P_u(X)$, il y en a donc n à $P_{g'}(X)$, et les valeurs propres de g' sont aussi celles de u.
Nous sommes donc dans l'hypothèse de récurrence : il existe donc une base $\{b_2, \dots, b_{n+1}\}$ de F, dans laquelle la matrice C' est triangulaire supérieure, c'est à dire

$$\mathcal{M}_{\{b_2,\dots,b_{n+1}\}}(g') = T = \begin{pmatrix} \beta_{22} & \beta_{23} & \cdots & \cdots & \beta_{2,n+1} \\ 0 & \beta_{33} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \beta_{n+1,n+1} \end{pmatrix}$$

D'où on obtient :

$$\mathcal{M}_{\{e_1,b_2,\dots,b_{n+1}\}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & b'_{1,2} & \cdots & b'_{1,n+1} \\ 0 & & & \\ \vdots & & T & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & b'_{1,2} & \cdots & b'_{1,n+1} \\ 0 & \beta_{2,2} & \cdots & \beta_{2,n+1} \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \beta_{n+1,n+1} \end{pmatrix}$$

Et, nous avons bien $P_u(X) = (\lambda_1 - X)(\beta_{22} - X)\cdots(\beta_{n+1,n+1} - X)$.
Les valeurs propres de u sont bien les éléments diagonaux de $\mathcal{M}_{\{e_1,b_2,\dots,b_{n+1}\}}(u)$

12.5.4 Corollaire

Toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont le polynôme caractéristique a toutes ses racines dans $\mathbb{K}$ est trigonalisable

Remarque 15 :

- ⇒ Ceci veut donc dire qu'il existe une matrice inversible $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, inversible, telle que la matrice $B = PAP^{-1}$ soit triangulaire.
- ⇒ Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, toute matrice est trigonalisable.

12.6 Polynômes de matrices, polynôme d'endomorphismes

12.6.1 Définition de polynôme de matrice

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$.
À X^k, on associe A^k ; au polynôme constant 1, nous associons la matrice identité Id_n.
Plus généralement, pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ avec $P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n$, nous définissons la matrice carrée $P(A) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par :

$$P(A) = a_0\mathrm{Id}_n + a_1A + a_2A^2 + \cdots + a_nA^n$$

Exemple 6 :

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $P(X) = X^2 + X + 1$.

Nous calculons A^2 et nous obtenons $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$, d'où nous obtenons $P(A)$:

$$P(A) = A^2 + A + \mathrm{Id}_n = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 8 \end{pmatrix} = 4A$$

Nous pouvons aller plus loin en observant donc que si $P(A) = A^2 + A + \mathrm{Id}_n = 4A$, il est possible de trouver la matrice inverse de A. On vérifie facilement qu'elle est inversible puisque $\det A = 3$.
D'autre part :

$$A^2 + A + \mathrm{Id}_n = 4A \iff \mathrm{Id}_n = 3A - A^2 \iff \mathrm{Id}_n = A \times (3\mathrm{Id}_n - A)$$

D'où[3] $A^{-1} = 3\mathrm{Id}_n - A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
Autre observation, nous avons $A^2 + A + \mathrm{Id}_n = 4A \iff A^2 - 3A + \mathrm{Id}_n = \mathcal{O}_n$ où $\mathcal{O}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est la matrice carrée nulle d'ordre n.

12.6.2 Définition de polynôme d'endomorphisme

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E.
Pour $u \in \mathcal{L}(E)$, on note $u^k = \underbrace{u \circ u \circ u \circ \cdots \circ u}_{k \text{ fois}}$
À X^k, on associe f^k ; au polynôme constant 1, nous associons l'application identique Id_E.
Plus généralement, pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ avec $P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n$, nous définissons l'endomorphisme $P(u) \in \mathcal{L}(E)$ par :

$$P(u) = a_0\mathrm{Id}_E + a_1u + a_2u^2 + \cdots + a_nu^n$$

Exemple 7 :

Choisissons $E = \mathbb{R}^2$.
Soit, maintenant, $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, la rotation d'angle $\theta = \dfrac{\pi}{6}$. Soit, maintenant, $P(X) = X^{11}$. Calculons $P(F)$.

Pour $k \in \mathbb{Z}$, F^k est la rotation d'angle $k\theta = \dfrac{k\pi}{6}$. Donc $P(F) = F^{11}$ est la rotation d'angle $\dfrac{11\pi}{6}$ qui est aussi la rotation d'angle $\dfrac{-\pi}{6}$
Ainsi $P(F) = F^{11} = F^{-1}$

3. Résultat qui aurait bien sûr pu être obtenu avec le cours de L_0

Exercice 9 :

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E. Comme dans la définition 12.6.2 précédente pour $u \in \mathcal{L}(E)$, nous définissons $u^k = \underbrace{u \circ u \circ u \circ \cdots \circ u}_{k \text{ fois}}$.

Démontrer que $\operatorname{Im} u^{k+1} \subset \operatorname{Im} u^k$ et que $\ker u^k \subset \ker u^{k+1}$

12.6.3 Proposition

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $Q \in \mathbb{K}[X]$

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$; Alors

$$(P \times Q)(A) = P(A) \times Q(A) = P(A) \times Q(A) = (Q \times P)(A)$$

2. De la même manière, pour $u \in \mathcal{L}(E)$,

$$(P \times Q)(u) = P(u) \circ Q(u) = P(u) \circ Q(u) = (Q \times P)(u)$$

3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ fixée et considérons l'application $\Phi_A : \mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \Phi_A : \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ P & \longmapsto & \Phi_A(P) = P(A) \end{array} \right.$$

Alors, Φ_A est un morphisme d'algèbres, c'est à dire :

⋆ Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, tout $\mu \in \mathbb{K}$, tout $p \in \mathbb{K}[X]$ et tout $Q \in \mathbb{K}[X]$,

$$\Phi_A(\lambda P + \mu Q) = \lambda \Phi_A(P) + \mu \Phi_A(Q)$$

c'est à dire $(\lambda P + \mu Q)(A) = \lambda P(A) + \mu Q(A)$

⋆ $\Phi_A(P \times Q) = \Phi_A(P) \times \Phi_A(Q)$

Démonstration

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $Q \in \mathbb{K}[X]$.
Alors $(P \times Q)(X) = P(X) \times Q(X) = Q(X) \times P(X) = (Q \times P)(X)$
Et donc, pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, nous avons :

$$(P \times Q)(A) = P(A) \times Q(A) = Q(A) \times P(A) = (Q \times P)(A)$$

La démonstration est semblable pour $u \in \mathcal{L}(E)$
Le fait que Φ_A soit un morphisme d'algèbre est trivial

12.6.4 Proposition

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
Si A et B sont 2 matrices semblables, alors les matrices $P(A)$ et $P(B)$ sont, elles aussi semblables
Plus précisément, si $A = SBS^{-1}$ où $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, alors $P(A) = SP(B)S^{-1}$

Démonstration

Supposons que $P \in \mathbb{K}[X]$ s'écrive $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, alors :

$$\begin{aligned} P(A) = &\ a_0 \mathrm{Id}_n + a_1 A + a_2 A^2 + \cdots + a_k A^k + \cdots + a_n A^n \\ = &\ a_0 SS^{-1} + a_1 SBS^{-1} + a_2 SB^2 S^{-1} + \cdots + a_k SB^k S^{-1} + \cdots + a_n SB^n S^{-1} \end{aligned}$$

En utilisant la distributivité, nous avons :

$$\begin{aligned} a_0SS^{-1}+a_1SBS^{-1}+a_2SB^2S^{-1}+\cdots+a_nSB^nS^{-1} &= S\left(a_0\mathrm{Id}_n+a_1B+a_2B^2+\cdots+a_nB^n\right)S^{-1} \\ &= SP(B)\,S^{-1} \end{aligned}$$

Et donc $P(A)=SP(B)\,S^{-1}$

Exemple 8 :

Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonalisable, c'est à dire qu'il existe une matrice diagonale $D\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $S\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $A=SDS^{-1}$.
Si $P\in\mathbb{K}[X]$, alors nous avons $P(A)=SP(D)\,S^{-1}$.
Si $P(X)=a_0+a_1X+\cdots+a_nX^n$, alors $P(X)=a_0\mathrm{Id}_n+a_1D+\cdots+a_nD^n$.
Si $D=\begin{pmatrix}\lambda_1&0&\cdots&0\\0&\lambda_2&\cdots&\vdots\\\vdots&\cdots&\ddots&0\\0&\cdots&0&\lambda_n\end{pmatrix}$, alors $D^k=\begin{pmatrix}\lambda_1^k&0&\cdots&0\\0&\lambda_2^k&\cdots&\vdots\\\vdots&\cdots&\ddots&0\\0&\cdots&0&\lambda_n^k\end{pmatrix}$ de telle sorte que nous avons tout de suite que

$$P(D)=\begin{pmatrix}P(\lambda_1)&0&\cdots&0\\0&P(\lambda_2)&\cdots&\vdots\\\vdots&\cdots&\ddots&0\\0&\cdots&0&P(\lambda_n)\end{pmatrix}$$

Et ce, quel que soit le polynôme $P\in\mathbb{K}[X]$.
Nous pouvons donc dire que si $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable, si $\lambda\in\mathbb{K}$ est valeur propre de A, alors $P(\lambda)$ est valeur propre de la matrice $P(A)$

Exercice 10 :

1. Soit $A=\begin{pmatrix}-2&1\\0&3\end{pmatrix}$ et $P(X)=X^2-X$. Calculer $P(A)$
2. Soit $A=\begin{pmatrix}2&-3\\-4&1\end{pmatrix}$ et $P(X)=X^2-3X$. Montrer que $P(A)=10\mathrm{Id}_2$. En déduire A^{-1}
3. (a) Trouver une matrice $A\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A^2\neq\mathcal{O}_3$ mais $A^3=\mathcal{O}_3$
   (b) Trouver une matrice $B\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $B^2\neq\mathrm{Id}_3$ mais $B^3=\mathrm{Id}_3$

12.6.5 Sous espaces stables

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u\in\mathcal{L}(E)$.
Un sous-espace vectoriel F de E est stable par u si et seulement si $u(F)\subset F$, c'est à dire :

$$(\forall x\in F)\,(u(x)\in F)$$

Exemple 9 :

1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u\in\mathcal{L}(E)$. Un premier exemple de sous-espace vectoriel stable par u sont les sous-espaces propres de u qui sont stables par u .

   En effet, si E_λ est un sous-espace propre de u pour la valeur propre λ alors, pour tout $x\in E_\lambda$, $u(x)\in E_\lambda$
2. Soit $\{e_1,e_2,e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et r_θ la rotation d'axe vertical e_3 et d'angle θ.
   L'endomorphisme r_θ laisse invariant deux sous-espaces : $F_11=\mathrm{Vect}(\{e_1,e_2\})=\mathbb{R}e_1\oplus\mathbb{R}e_2$ et $F_2=\mathrm{Vect}(\{e_3\})$

La matrice de r_θ dans cette base $\{e_1, e_2, e_3\}$ est la matrice $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

La matrice de cet exemple a une structure particulière

3. **Effet sur les matrices.**
   Supposons que E soit de dimension n, que $f : E \longrightarrow E$ soit un endomorphisme de E ; choisissons $F \subset E$, sous-espace vectoriel de E stable par f .
   Notons $\{f_1, f_2, \cdots, f_p\}$ une base de F. On complète cette base par des vecteurs $\{e_{p+1}, e_{p+2}, \cdots, e_n\}$ pour obtenir une base de E : $\mathcal{B} = \{f_1, f_2, \cdots, f_p, e_{p+1}, e_{p+2}, \cdots, e_n\}$
   La matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est triangulaire par blocs :

$$\mathcal{M}(f)_{\mathcal{B}} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} & b_{1,1} & \cdots & b_{1,n-p} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p,1} & \cdots & a_{p,p} & b_{p,1} & \cdots & a_{p,n-p} \\ \hline & & & d_{1,1} & \cdots & d_{1,n-p} \\ & & & \vdots & & \vdots \\ & & & d_{n-p,1} & \cdots & d_{n-p,n-p} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline \mathcal{O} & D \end{array}\right)$$

   où $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ et $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ est la matrice de la restriction $f_{|F}$ de f à F dans la base $\{f_1, f_2, \cdots, f_p\}$

4. Supposons que $E = F_1 \oplus F_2$ et que F_1 et F_2 soient tous les deux stables par f , alors la matrice de f est diagonale par blocs :

$$\mathcal{M}(f)_{\mathcal{B}} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p,1} & \cdots & a_{p,p} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline & & & d_{1,1} & \cdots & d_{1,n-p} \\ & & & \vdots & & \vdots \\ & & & d_{n-p,1} & \cdots & d_{n-p,n-p} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} A & \mathcal{O} \\ \hline \mathcal{O} & D \end{array}\right)$$

12.6.6 Proposition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit F un sous-espace vectoriel de E est stable par u
Alors, pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$, F est stable par le polynôme d'endomorphisme $P(u)$

Démonstration

- ▷ Il assez facile de comprendre que si $x \in F$, alors $u(x) \in F$ et donc, en poursuivant, $u(u(x)) \in F$.
- ▷ Par une récurrence simple sur $k \in \mathbb{N}$, on montre que $u^k(x) \in F$ pour tout $k \geqslant 0$.
- ▷ Soit, maintenant, $P \in \mathbb{K}[X]$ c'est à dire $P(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n$ alors $P(u)$ est l'endomorphisme défini par $P(u) = a_0\mathrm{Id}_E + a_1u + \cdots + a_nu^n$
  Donc, pour tout $x \in F$, $P(u)(x) = a_0x + a_1u(x) + \cdots + a_nu^n(x)$. Chaque terme $a_ku^k(x)$ est un élément de F et donc $P(u)(x) \in F$ car F est un sous-espace vectoriel de E

En conclusion, si F est stable par u, alors, pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$, F est stable par $P(u)$.

Exercice 11 :

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel . Soient $u : E \longrightarrow E$ et $f : E \longrightarrow E$ 2 endomorphismes qui commutent, c'est à dire tels que $f \circ u = u \circ f$.
Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ un vecteur propre de u d'espace propre associé E_λ. Démontrer que E_λ est stable par f, c'est à dire que $f(E_\lambda) \subset E_\lambda$

12.6.7 Proposition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel . Soient $u : E \longrightarrow E$ et $f : E \longrightarrow E$ 2 endomorphismes qui commutent, c'est à dire tels que $f \circ u = u \circ f$.
Alors $\ker u$ et $\mathrm{Im} u$ sont stables par f.

Démonstration

- Soit $x \in \ker u$.
  Nous devons donc démontrer que $f(x) \in \ker u$
  Nous avons $u(x) = 0$, d'où, de l'égalité $f \circ u = u \circ f$, nous tirons :
  $$u(f(x)) = f(u(x)) = f(0) = 0$$
  Donc $f(x) \in \ker u$
- Soit $y \in \mathrm{Im} u$. Il faudra donc montrer que $f(y) \in \mathrm{Im} u$
  Il existe donc $x \in E$ tel que $y = u(x)$, d'où $f(y) = f(u(x)) = u(f(x))$
  Il existe donc $z \in E$, et $z = f(x)$ tel que $f(y) = u(z)$ et donc $f(y) \in \mathrm{Im} u$

Remarque 16 :

Nous n'avons pas la réciproque, c'est à dire que ce n'est pas parce que $\ker u$ et $\mathrm{Im} u$ sont stables par f que $f \circ u = u \circ f$

Contre-exemple

On considère E $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2 rapporté à une base $\mathcal{B}_0 = \{i, j\}$. Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ de matrice respective dans la base $\mathcal{B}_0$:

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}_0}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathcal{M}_{\mathcal{B}_0}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Nous pouvons remarquer que l'une est la transposée de l'autre et que toutes deux sont bijectives puisque leur déterminant est non nul.
Donc $\ker u = \{0\}$ et $\mathrm{Im}\, u = E$ et de manière évidente, $f(\ker u) = f(\{0\}) = \{0\} = \ker u$ et donc $\ker u$ est stable par f.
De la même manière, $f(\mathrm{Im}\, u) = f(E) = E = \mathrm{Im}\, u$ et donc $\mathrm{Im}\, u$ est stable par f.
Mais, f et u ne commutent pas. En effet :

$\Rightarrow$ $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_0}(u \circ f) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_0}(u) \times \mathcal{M}_{\mathcal{B}_0}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ Et $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_0}(f \circ u) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_0}(f) \times \mathcal{M}_{\mathcal{B}_0}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Nous avons donc $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_0}(u \circ f) \neq \mathcal{M}_{\mathcal{B}_0}(f \circ u)$ et donc $u \circ f \neq u \circ f$

Exercice 12 :

On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique.

Soit f, l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique est :$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Soit g l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique est $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

1. Montrer que $f \circ g = g \circ f$.
2. Calculer $\ker g$ et $\mathrm{Im}\, g$, et vérifier qu'ils sont stables par f
3. Calculer $\ker f$ et $\mathrm{Im}\, f$, et vérifier qu'ils sont stables par g

Exercice 13 :

Soient f et g deux endomorphismes du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie tels que f soit diagonalisable.
Démontrer que f et g commutent si et seulement si les sous-espaces propres de f sont stables par g.

Remarque 17 :

Rappel de la notion de restriction
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $F \subset E$ un sous-espace vectoriel stable par un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$.
Dans ce cas, on note $f_{|F} : F \longrightarrow F$, la restriction de f à F.
L'application $f_{|F}$ est un endomorphisme de F, c'est à dire $f_{|F} \in \mathcal{L}(F)$.

12.6.8 Polynôme caractéristique

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E. On suppose aussi qu'il existe un sous-espace $F \subset E$ laissé stable par f .
Nous notons $P_{f_{|F}}$ le polynôme caractéristique de la restriction de f à F. Alors si P_f est le polynôme caractéristique de f, $P_{f_{|F}}(X)$ divise $P_f(X)$ dans $\mathbb{K}[X]$

Démonstration

Ne reprenons des considérations déjà faites.
Considérons $\{f_1, f_2, \cdots, f_p\}$ une base de F. On complète cette base par des vecteurs $\{e_{p+1}, e_{p+2}, \cdots, e_n\}$ pour obtenir une base de E : $\mathcal{B} = \{f_1, f_2, \cdots, f_p, e_{p+1}, e_{p+2}, \cdots, e_n\}$
La matrice de f dans cette base est de la forme $\mathcal{M}_{\mathcal{B}} = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline \mathcal{O} & C \end{array}\right)$ où $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ est la matrice de $f_{|F}$ dans la base $\{f_1, f_2, \cdots, f_p\}$
On a alors

$$\begin{aligned} P_f(X) = & \det\left(\mathcal{M}_{\mathcal{B}} - X\mathrm{Id}_n\right) \\ = & \left|\begin{array}{c|c} \det\left(A - X\mathrm{Id}_p\right) & B \\ \hline \mathcal{O} & \det\left(C - X\mathrm{Id}_{n-p}\right) \end{array}\right| \\ = & \det\left(A - X\mathrm{Id}_p\right) \times \det\left(C - X\mathrm{Id}_{n-p}\right) \\ = & P_{f_{|F}}(X) \times \det\left(C - X\mathrm{Id}_{n-p}\right) = P_{f_{|F}}(X) \times Q(X) \end{aligned}$$

Où $Q \in \mathbb{K}_{n-p}[X]$
Cela prouve donc que $P_{f_{|F}}(X)$ divise $P_f(X)$

Exercice 14 :

Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par :

$$\begin{cases} f : \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & f[(x, y, z)] = \left(2x - y, 3x - 2y, \dfrac{1}{3}z\right) \end{cases}$$

Calculer la matrice de f dans la base canonique et déterminer le polynôme caractéristique de f. En déduire les sous-espaces stables par f

Exercice 15 :

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

Montrer que les vecteurs $w_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ engendrent un sous-espace stable de dimension 2 de cette matrice.

12.6.9 Définition d'endomorphisme nilpotent

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $g \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E
g est nilpotent s'il existe un entier $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $g^m = \mathcal{O}_E$

Remarque 18 :

1. Remarquons que dans cette définition, nous n'avons pas donné de dimension à E
2. Il est bien évident que l'endomorphisme nul $\mathcal{O}_E$ est nilpotent d'ordre 1
3. Si g est nilpotent d'ordre $m \geqslant 2$, alors $\ker g \neq \left\{\overrightarrow{0}_E\right\}$

   En effet, supposons le contraire, c'est à dire supposons $\ker g = \left\{\overrightarrow{0}_E\right\}$, ce qui sous-entend que pour tout $x \in E$, $x \neq \overrightarrow{0}_E$, $g(x) \neq \overrightarrow{0}_E$, et donc, par récurrence, pour tout $x \in E$ et tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons l'implication $x \neq \overrightarrow{0}_E \Longrightarrow g^n(x) \neq \overrightarrow{0}_E$ et donc, g n'est plus nilpotent.

   Il y a donc contradiction et donc $\ker g \neq \left\{\overrightarrow{0}_E\right\}$

   Nous pouvons donc déduire qu'un endomorphisme nilpotent n'est pas injectif.

12.6.10 Définition de matrice nilpotente

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans $_K$
A est une matrice nilpotente s'il existe un entier $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^m = \mathcal{O}_n$

Exemple 10 :

Exemples de matrices nilpotentes

1. Considérons $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Nous avons $A^2 = \mathcal{O}_2$
2. Maintenant $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Nous avons aussi $B^2 = \mathcal{O}_3$
3. Et, pour terminer, $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Nous avons $C^3 = \mathcal{O}_3$

Remarque 19 :

Si A est une matrice nilpotent d'ordre m, nous avons alors $\det A^m = 0$; comme $\det A^m = (\det A)^m = 0$, nous en concluons que $\det A = 0$ et que la matrice A n'est pas la matrice d'une bijection. Nous retrouvons, en particulier, le fait que si A est la matrice d'un endomorphisme g d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $\ker g \neq \left\{\overrightarrow{0}_E\right\}$.

12.6.11 Proposition et définition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $g \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent de E

1. Il existe un plus petit entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $g^k = \mathcal{O}_E$. Nous avons
$$k = \min\left\{m \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } g^m = \mathcal{O}_E\right\}$$
2. Ce plus petit entier k est appelé indice ou ordre de nilpotence

Démonstration

Si g est un endomorphisme nilpotent, il existe donc $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $g^m = \mathcal{O}_E$.
Alors, pour tout $n \geqslant m$, nous avons $g^n = \mathcal{O}_E$.
Il existe donc un plus petit entier $k \in \mathbb{N}^*$ et $k \leqslant m$ tel que $g^k = \mathcal{O}_E$

Remarque 20 :

1. Si k est l'indice de nilpotence de g, alors $g^{k-1} \neq \mathcal{O}_E$, et même mieux, pour tout $s < k$, $g^s \neq \mathcal{O}_E$
2. De manière similaire, pour une matrice nilpotente, il existe un plus petit entier k, appelé aussi indice ou ordre de nilpotence tel que $A^k = \mathcal{O}_n$

Exercice 16 :

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ nilpotente d'indice k et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ nilpotente d'indice l qui commutent.
Montrer que $A + B$ et AB sont 2 matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

12.6.12 Lemme

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent d'indice k de E.
Alors, il existe $x \in E$, avec $x \neq \overrightarrow{0}_E$ tel que, pour tout $j \in \mathbb{N}$ et $1 \leqslant j \leqslant k-1$ et $f^j(x) \neq \overrightarrow{0}_E$

Démonstration

Supposons le contraire, c'est à dire que, pour tout $x \in E$, avec $x \neq \overrightarrow{0}_E$, il existe $j \in \mathbb{N}$ avec $1 \leqslant j \leqslant k-1$ et $f^j(x) = \overrightarrow{0}_E$.
Ceci contredit donc le fait que k soit l'indice de nilpotence de f et donc le lemme est démontré.

12.6.13 Proposition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent d'indice k de E. Soit $x \in E$, avec $x \neq \overrightarrow{0}_E$ tel que, pour tout $j \in \mathbb{N}$ et $1 \leqslant j \leqslant k-1$ et $f^j(x) \neq \overrightarrow{0}_E$
On appelle $F = \text{Vect}\left(\left\{x, f(x), f^2(x), \cdots, f^{k-1}(x)\right\}\right)$. Alors F est stable par f

Démonstration

Soit $y \in F$; il faut donc montrer que $f(y) \in F$.

Nous pouvons écrire $y = \displaystyle\sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i f^i(x)$, avec $\lambda_i \in \mathbb{K}$ et donc :

$$f(y) = \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i f^{i+1}(x) = \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_{i-1} f^i(x) = \lambda_0 f(x) + \lambda_1 f^2(x) + \cdots + \lambda_{k-2} f^{k-1}(x)$$

Et nous avons bien $f(y) \in F$, c'est à dire que F est stable par f

12.6.14 Proposition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent d'indice k de E. Soit $x \in E$, avec $x \neq \overrightarrow{0}_E$ tel que, pour tout $j \in \mathbb{N}$ et $1 \leqslant j \leqslant k-1$ et $f^j(x) \neq \overrightarrow{0}_E$
Alors, la famille de vecteurs $\left\{x, f(x), f^2(x), \cdots, f^{k-1}(x)\right\}$ est une famille libre

Démonstration

Soient $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{k-1}$, n éléments de $\mathbb{K}$ tels que

$$\lambda_0 x + \lambda_1 f(x) + \lambda_2 f^2(x) + \cdots + \lambda_{k-1} f^{k-1}(x) = \overrightarrow{0}_E$$

- $\Rightarrow$ En appliquant f^{k-1}, nous avons :

$$f^{k-1}\left[\lambda_0 x + \lambda_1 f(x) + \lambda_2 f^2(x) + \cdots + \lambda_{k-1} f^{k-1}(x)\right] = f^{k-1}\left(\overrightarrow{0}_E\right) \Longrightarrow \lambda_0 f^{k-1}(x) = \overrightarrow{0}_E$$

  Comme $f^{k-1}(x) \neq \overrightarrow{0}_E$, nous avons $\lambda_0 = 0$
  Donc, nous pouvons écrire :

$$\lambda_0 x + \lambda_1 f(x) + \lambda_2 f^2(x) + \cdots + \lambda_{k-1} f^{k-1}(x) = \lambda_1 f(x) + \lambda_2 f^2(x) + \cdots + \lambda_{k-1} f^{k-1}(x) = \overrightarrow{0}_E$$

- $\Rightarrow$ Nous pouvons itérer en appliquant f^{k-2} et nous avons :

$$f^{k-2}\left[\lambda_1 f(x) + \lambda_2 f^2(x) + \cdots + \lambda_{k-1} f^{k-1}(x)\right] = f^{k-2}\left(\overrightarrow{0}_E\right) \Longrightarrow \lambda_1 f^{k-1}(x) = \overrightarrow{0}_E$$

  Comme $f^{k-1}(x) \neq \overrightarrow{0}_E$, nous avons $\lambda_1 = 0$
  Donc, nous pouvons écrire :

$$\lambda_1 f(x) + \lambda_2 f^2(x) + \cdots + \lambda_{k-1} f^{k-1}(x) = \lambda_2 f^2(x) + \cdots + \lambda_{k-1} f^{k-1}(x) = \overrightarrow{0}_E$$

- $\Rightarrow$ En continuant cette même opération, nous arrivons à la conclusion que :

$$\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_{k-1} = 0$$

La famille de vecteurs $\left\{x, f(x), f^2(x), \cdots, f^{k-1}(x)\right\}$ est donc une famille libre

Remarque 21 :

1. Donc, $\dim \operatorname{Vect}\left(\left\{x, f(x), f^2(x), \cdots, f^{k-1}(x)\right\}\right) = k$
2. Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, l'indice de nilpotence d'un endomorphisme nilpotent ne peut être supérieur à n.
3. En notant toujours $F = \operatorname{Vect}\left(\left\{x, f(x), f^2(x), \cdots, f^{k-1}(x)\right\}\right)$, la matrice de $f_{|F}$ la restriction de f au sous-espace vectoriel F dans la base $\left\{x, f(x), f^2(x), \cdots, f^{k-1}(x)\right\}$ est donc :

$$\mathcal{M}_{\{x, f(x), f^2(x), \cdots, f^{k-1}(x)\}}\left(f_{|F}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, il est possible de compléter la base $\left\{x, f(x), f^2(x), \cdots, f^{k-1}(x)\right\}$ par des vecteurs $e_{k+1}, \ldots, e_n$ de telle sorte que $\left\{x, f(x), f^2(x), \cdots, f^{k-1}(x), e_{k+1}, \ldots, e_n\right\}$ forme une base $\mathcal{B}_0$ de E. La matrice de f dans la base $\mathcal{B}_0$ est triangulaire par blocs.

$$[\mathcal{M}_{\mathcal{B}_0}(f) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1,n} \\ 1 & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & 1 & 0 & a_{k,k+1} & \cdots & a_{k,n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{k+1,k+1} & \cdots & a_{k+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,k+1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

5. Revenons à $F = \text{Vect}\left(\left\{x, f(x), f^2(x), \cdots, f^{k-1}(x)\right\}\right)$.
   Pour $\lambda \in \mathbb{K}$, considérons $g = f + \lambda \text{Id}_E$
   - ▷ Tout d'abord, F est stable par g

     En effet, soit $y \in F$; alors $g(y) = f(y) + \lambda y$.
     Comme F est stable par f, $f(y) \in F$ et F étant un sous-espace vectoriel , $f(y) + \lambda y \in F$
     Et donc, F est stable par g
   - ▷ La matrice de g dans la base $\left\{x, f(x), f^2(x), \cdots, f^{k-1}(x)\right\}$ est donc :

$$\mathcal{M}_{\{x, f(x), f^2(x), \cdots, f^{k-1}(x)\}}(g) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

   Cette matrice est appelée <u>matrice de Jordan</u>

12.6.15 Théorème de Cayley-Hamilton

1. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E de polynôme caractéristique P_f. Alors $P_f(f) = \mathcal{O}_E$
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de polynôme caractéristique P_A. Alors, $P_A(A) = \mathcal{O}_n$

<u>**Démonstration**</u>

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et $f \in \mathcal{L}(E)$
Soit $x \in E$ tel que $x \neq \overrightarrow{0}_E$, c'est à dire que x est non nul.

→ Soit $p \in \mathbb{N}$ avec $1 \leqslant p \leqslant n$ le plus grand entier tel que la famille $\left\{x, f(x), f^2(x), \cdots, f^{p-1}(x)\right\}$ soit libre. Nous pouvons donc écrire :

$$f^p(x) = c_0 x + c_1 f(x) + c_2 f^2(x) + \cdots + c_{p-1} f^{p-1}(x)$$

Où pour $1 \leqslant i \leqslant p-1$, nous avons $c_i \in \mathbb{K}$

→ Comme tout à l'heure en 12.6.13, nous appelons $F = \text{Vect}\left(\left\{x, f(x), f^2(x), \cdots, f^{p-1}(x)\right\}\right)$. F est un sous-espace vectoriel de E de dimension p, stable par f.
Nous avons, en particulier $f\left[f^{p-1}(x)\right] = f^p(x) = c_0 x + c_1 f(x) + c_2 f^2(x) + \cdots + c_{p-1} f^{p-1}(x)$ et donc

$$A = \mathcal{M}_{\{x, f(x), f^2(x), \cdots, f^{p-1}(x)\}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & c_0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & c_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & c_{p-1} \end{pmatrix}$$

→ Cette matrice $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ est la matrice compagnon *(cf 12.3.11)* du polynôme $P(X) = X^p - c_{p-1} X^{p-1} - \cdots - c_2 X^2 - c_1 X - c_0$ et donc, toujours d'après 12.3.11, $P_A(X) = (-1)^p P(X)$

→ D'après la proposition 12.6.8, le polynôme P_A divise le polynôme caractéristique P_f dans $\mathbb{K}[X]$, c'est à dire qu'il existe un polynôme $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P_f(X) = Q(X) P_A(X)$

→ Comme $P_f(f) \in \mathcal{L}(E)$ et de $P_f(X) = Q(X) P_A(X)$, nous avons, $P_f(f)(x) = [Q(f) \circ P_A(f)](x)$.
Et donc :

$$\begin{aligned} P_f(f)(x) = [Q(f) \circ P_A(f)](x) = & \; Q(f)[P_A(f)(x)] \\ = & \; Q(f)\left[(-1)^p P(f)(x)\right] = (-1)^p Q(f)[P(f)(x)] \\ = & \; (-1)^p Q(f)\left[\left(f^p - c_{p-1} f^{p-1} - \cdots - c_2 f^2 - c_1 f - c_0 \text{Id}_E\right)(x)\right] \\ = & \; (-1)^p Q(f)\left[f^p(x) - c_{p-1} f^{p-1}(x) - \cdots - c_2 f^2(x) - c_1 f(x) - c_0 x\right] \\ = & \; (-1)^p Q(f)\left[\overrightarrow{0}_E\right] \\ = & \; \overrightarrow{0}_E \end{aligned}$$

Finalement, $P_f(f)(x) = \overrightarrow{0}_E$ pour tout vecteur $x \in E$, et donc $P_f(f) = \mathcal{O}_E$.
Il est bien évident que ce qui est vrai pour un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ où E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n l'est aussi pour tout matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Exemple 11 :

1. Commençons simple.
   Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. On montre facilement que le polynôme caractéristique $P_A(X) = X^2 + 1$.
   Par calcul, $P_A(A) = A^2 + \mathrm{Id}_2 = \mathcal{O}_2$, puisque, par calculs, nous avons $A^2 = -\mathrm{Id}_2$
2. Plus généralement, pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
   Le polynôme caractéristique de M est $P_M(X) = X^2 - (a+d)X + ad - bc$.
   Par calcul, on montre facilement que $P_M(M) = \mathcal{O}_2$
3. On considère la matrice $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   Nous avons $P_N(X) = X^4$. Il est facile de voir que $P_N(N) = N^4 = \mathcal{O}_4$
4. On considère la matrice $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   Nous avons $P_J(X) = X^4 - 1$. Il est facile de voir que $J^4 = \mathrm{Id}_4$ et donc $P_J(J) = J^4 - \mathrm{Id}_4 = \mathcal{O}_4$

12.6.16 Définition de polynôme annulateur

1. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E. On dit qu'un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ est un polynôme annulateur de l'endomorphisme f si $P(f) = \mathcal{O}_E$
2. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$. On dit qu'un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ est un polynôme annulateur de la matrice A si $P(A) = \mathcal{O}_n$

Exemple 12 :

1. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $p \in \mathcal{L}(E)$ une projection de E ; alors $p \circ p = p \Longleftrightarrow p^2 = p$.
   Alors, le polynôme $P(X) = X^2 - X$ est un polynôme annulateur de p
2. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\sigma \in \mathcal{L}(E)$ une symétrie de E ; alors $\sigma \circ \sigma = \mathrm{Id}_E \Longleftrightarrow \sigma^2 = \mathrm{Id}_E$.
   Alors, le polynôme $P(X) = X^2 - 1$ est un polynôme annulateur de σ
3. Le polynôme caractéristique d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ou d'un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ est un polynôme annulateur de A ou de f

Exercice 17 :

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1. Trouver une relation entre Id_3, A et A^2, et en déduire que A est inversible.
2. En déduire aussi un polynôme annulateur de A
3. Démontrer que si λ est valeur propre de A, alors, λ est racine du polynôme $P(X) = X^2 - X - 2$
4. Rechercher les valeurs propres de A et les vecteurs propres associés ; la matrice A est-elle diagonalisable ?

12.6.17 Proposition

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme annulateur de l'endomorphisme f.
Alors, les valeurs propres de f sont racines du polynôme annulateur P

Démonstration

- ▷ Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $x \in E$, un vecteur propre de f de valeur propre λ. Comme nous avons $f(x) = \lambda x$, on démontre facilement que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^k(x) = \lambda^k x$
- ▷ Soit $Q \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme tel que $Q(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$. Alors :

$$\begin{aligned} Q(f)(x) = & \; a_0 x + a_1 f(x) + \cdots + a_n f^n(x) \\ = & \; a_0 x + a_1 \lambda x + \cdots + a_n \lambda^n x = (a_0 + a_1 \lambda + \cdots + a_n \lambda^n) x \\ = & \; Q(\lambda) x \end{aligned}$$

- ▷ Si P est un polynôme annulateur de f, alors $P(f)(x) = P(\lambda) x = \overrightarrow{0}_E$
  Comme $x \neq \overrightarrow{0}_E$, alors $P(\lambda) = 0$ et donc λ est une racine de P

Remarque 22 :

1. La proposition énoncée pour un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ est aussi vraie pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
2. Ce résultat nous indique seulement que les valeurs propres de A sont également des racines du polynôme annulateur P. Il peut donc y avoir des racines du polynôme P qui ne sont pas des valeurs propres de A.

12.6.18 Proposition et définition de polynôme minimal

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E.

1. Il existe un unique polynôme $\mu_f \in \mathbb{K}[X]$ qui vérifie les trois conditions suivantes :
   - ▷ μ_f est un polynôme annulateur de f
   - ▷ μ_f est un polynôme unitaire
   - ▷ Si $P \in \mathbb{K}[X]$ est un polynôme annulateur de f alors $\deg \mu_f \leqslant \deg P$

   Ce polynôme μ_f est appelé le polynôme minimal de f
2. Le polynôme minimal de f , μ_f divise tous les polynômes annulateurs de f

Démonstration

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E

1. Soit $Z(f) = \{P \in \mathbb{K}[X] \text{ tel que } P(f) = \mathcal{O}_E\}$.
   Par le théorème de Cayley-Hamilton 12.6.15, le polynôme caractéristique de f, P_f, annule f .
   Ainsi, l'ensemble $Z(f)$ est non vide.
   Choisissons dans cet ensemble un polynôme $Q \in Z(f)$ de degré minimal.
2. Il est clair que tout polynôme multiple de Q annule également f .
   En effet, si $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = BQ$ où $B \in \mathbb{K}[X]$, alors $P(f) = B(f) \circ Q(f) = \mathcal{O}_E$ car $Q(f) = \mathcal{O}_E$
3. Réciproquement, soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(f) = \mathcal{O}_E$.
   On effectue la division euclidienne de P par Q.
   Nous obtenons alors $P = BQ + R$ avec $\deg R < \deg Q$.
   Ainsi $P(f) = B(f) \circ Q(f) + R(f) = \mathcal{O}_E$
   Comme de plus $Q(f) = \mathcal{O}_E$, alors on déduit de la division euclidienne que l'on a aussi $R(f) = \mathcal{O}_E$.

Par l'absurde, si $R(X)$ n'est pas le polynôme nul, alors on a obtenu un polynôme non nul qui annule f et qui est de degré strictement inférieur à celui de Q ; ce qui est contradictoire avec le choix de Q qui est de degré minimum dans $Z(f)$.
Donc, R est le polynôme nul et $P = BQ$, c'est-à-dire Q divise P.

4. Vérifions l'unicité d'un tel polynôme Q s'il est choisi unitaire.
Supposons donc qu'il existe 2 polynômes Q_1 et Q_2, tous deux de degré minimal et unitaires, annulant f .
Alors, par ce qui précède, Q_1 divise Q_2 et de même Q_2 divise Q_1, ce qui veut dire que Q_1 et Q_2 sont associés, c'est à dire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $Q_1 = \lambda Q_2$.
Q_1 et Q_2 étant choisis unitaires, $\lambda = 1$, ce qui prouve que $Q_1 = Q_2$

Q est donc le polynôme minimal μ_f

Remarque 23 :

1. Le polynôme minimal est donc le polynôme unitaire de degré le plus petit qui annule f. On définit de même le polynôme minimal μ_A d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
2. Une conséquence immédiate de la proposition précédente et du théorème de Cayley-Hamilton12.6.15 est que le polynôme minimal μ_f divise le polynôme caractéristique P_f

Exemple 13 :

1. Le polynôme caractéristique de la matrice identité Id_n est $(1-X)^n$ et donc, le polynôme minimal de la matrice identité Id_n est $\mu_{\mathrm{Id}_n}(X) = X - 1$
2. Et, de manière évidente, le polynôme minimal de la matrice nulle est X.
3. Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

   Le polynôme caractéristique de A est $P_A(X) = (X-1)^2$; Son polynôme minimal étant un diviseur de P_A ne peut être que $(X-1)$ ou $(X-1)^2$. Ce ne peut pas être $X-1$ car, alors, A serait égale à Id_2 donc son polynôme minimal est $\mu_A = (X-1)^2$
4. Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ où $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
   - ▷ Nous avons $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = A$ *(C'est donc une projection)* et donc, nous avons $A^2 - A = \mathcal{O}_3$, donc le polynôme $P(X) = X^2 - X$ est un polynôme annulateur de la matrice A
   - ▷ On vérifie que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ la matrice $A - \lambda \mathrm{Id}_3$ n'est jamais la matrice nulle. Donc aucun polynôme de degré 1 n'est un polynôme annulateur de la matrice A A
   - ▷ Le polynôme $P(X) = X^2 - X$ est donc le polynôme unitaire de plus petit degré annulant A. Conclusion : $\mu_f(X) = X^2 - X$

Exercice 18 :

Quel est le polynôme minimal de la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$?

12.6.19 Proposition

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E. Nous appelons μ_f le polynôme minimal de f.
Il y a équivalence entre les 2 propositions suivantes :

1. $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de f
2. $\lambda \in \mathbb{K}$ est une racine du polynôme minimal, c'est à dire $\mu_f(\lambda) = 0$

Démonstration

1. Supposons que $\mu_f(\lambda) = 0$
   D'après 12.6.18, on sait que μ_f divise P_f, le polynôme caractéristique de f.
   Il existe donc $B \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P_f = B \times \mu_f$.
   Si $\lambda \in \mathbb{K}$ est racine du polynôme minimal, alors $P_f(\lambda) = B(\lambda) \times \mu_f(\lambda) = 0$
   Donc λ est racine du polynôme caractéristique, c'est donc une valeur propre de f
2. Réciproquement, supposons que $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de f
   Soit $u \in E$ un vecteur propre de valeur propre λ, de telle sorte que $f(x) = \lambda x$.
   → Nous avons démontré en 12.6.17 que si $Q \in \mathbb{K}[X]$, alors $Q(f)(u) = Q(\lambda)\,u$
   Donc $Q(\lambda)$ est valeur propre de l'endomorphisme $Q(f)$.
   → On applique alors 12.6.17 au polynôme minimal μ_f :
   $$\mu_f(f)(u) = \mu_f(\lambda)\,u$$
   Or, par définition du polynôme minimal, μ_f, $\mu_f(f)$ est l'endomorphisme identiquement nulet donc $\mu_f(f)(u) = \overrightarrow{0}_E$.
   Donc, par l'égalité précédente, $\mu_f(\lambda)\,u = \overrightarrow{0}_E$ et comme $u \neq \overrightarrow{0}_e$, alors $\mu_f(\lambda) = 0$ et donc λ est bien racine du polynôme minimal

Exemple 14 :

Recherchons le polynôme minimal de la matrice $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

Pour rechercher ce polynôme minimal, nous allons rechercher son polynôme caractéristique, en ayant en tête que le polynôme minimal divise le polynôme caractéristique et que les valeurs propres de C sont aussi racines de μ_C, le polynôme minimal de C

1. On commence par calculer le polynôme caractéristique de C.
   Classiquement, $P_C(X) = \det(C - X\mathrm{Id}_3) = \begin{vmatrix} 1-X & 2 & -2 \\ 2 & 1-X & -2 \\ 2 & 2 & -3-X \end{vmatrix} = (X-1)(X+1)^2$
   C admet donc deux valeurs propres, $+1$ et -1, l'une étant simple (1), l'autre étant double (-1)
2. On recherche, maintenant, les espaces propres associés.
   ▷ Pour la valeur propre $+1$, nous devons rechercher les vecteurs $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tels que $C\overrightarrow{X} = \overrightarrow{X}$
   Nous devons donc résoudre :
   $$\left\{\begin{array}{rl} x+2y-2z = & x \\ 2x+y-2z = & y \\ 2x+2y-3z = & z \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rl} 2y-2z = & 0 \\ 2x-2z = & 0 \\ 2x+2y-4z = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rl} x-z = & 0 \\ x+y-2z = & 0 \end{array}\right.$$
   L'ensemble des solutions de ce système est donc une droite $\Delta = \{(x, x, x) \text{ où } x \in \mathbb{R}\}$.
   Nous pouvons donc écrire $\Delta = \mathbb{R}\overrightarrow{f}_1$ où $\overrightarrow{f}_1 = (1, 1, 1)$
   ▷ Pour la valeur propre -1, nous devons rechercher les vecteurs $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tels que $C\overrightarrow{X} = -\overrightarrow{X}$
   Nous devons donc résoudre :
   $$\left\{\begin{array}{rl} x+2y-2z = & -x \\ 2x+y-2z = & -y \\ 2x+2y-3z = & -z \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rl} 2x+2y-2z = & 0 \\ 2x+2y-2z = & 0 \\ 2x+2y-2z = & 0 \end{array}\right. \iff x+y-z=0$$

L'ensemble des solutions de ce système est donc un plan $\Pi = \{(x, y, x+y) \text{ où } x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R}\}$.

Nous pouvons donc écrire $\Pi = \mathbb{R}\overrightarrow{f}_2 \oplus \mathbb{R}\overrightarrow{f}_3$ où $\overrightarrow{f}_2 = (1, 0, 1)$ et $\overrightarrow{f}_3 = (0, 1, 1)$

La matrice C est donc diagonalisable, de valeurs propres $+1$ et -1

3. Le polynôme minimal de C, μ_C divise le polynôme caractéristique de C, $P_C(X) = (X-1)(X+1)^2$, tout en ayant les mêmes racines.

   Le polynôme minimal ne peut être que $\mu_C(X) = (X-1)(X+1)$ ou $\mu_C(X) = (X-1)(X+1)^2 = P_C(X)$

   Il est alors facile de vérifier que $(X-1)(X+1)$ est un polynôme annulateur de C et que donc $\mu_C(X) = (X-1)(X+1) = X^2 - 1$

Si $\mu_C(X) = X^2 - 1$, nous pouvons en déduire que $\mu_C(C) = C^2 - \mathrm{Id}_3 = \mathcal{O}_3$, c'est à dire que $C^2 = \mathrm{Id}_3$. Ainsi, on montre que C est son propre inverse.

En fait, C est une involution, c'est la matrice d'une symétrie ; ici, c'est la matrice de la symétrie par rapport au plan Π, parallèlement à la droite Δ

Exercice 19 :

Rechercher le polynôme minimal de la matrice $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$

12.7 Liste d'exercices complémentaires

12.7.1 Applications du cours

Exercice 20 :

Soit $\mathcal{C}^\infty(R)$ l'espace des fonctions numériques, définies sur $\mathbb{R}$ et indéfiniment continuement différentiables sur $\mathbb{R}$.
Soit D l'endomorphisme de $\mathcal{C}^\infty(R)$ qui à f associe sa fonction dérivée f'. Déterminer les valeurs propres de D et les sous-espaces propres associés.

Exercice 21 :

Soit $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est l'espace des suites à numériques complexes, et Φ l'endomorphisme de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ ainsi défini :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & \Phi\left((u_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) = (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ où } \left\{ \begin{array}{l} v_0 = u_0 \\ v_n = \dfrac{u_n + u_{n-1}}{2} \end{array} \right. \end{array}$$

Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de Φ.

Exercice 22 :

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que $A = \begin{pmatrix} a & \overline{b} \\ b & a \end{pmatrix}$
Discuter en fonction des valeurs de $a \in \mathbb{C}$ et de $b \in \mathbb{C}$ de la diagonalisation ou de la trigonalisation de A

Exercice 23 :

Dans les matrices suivantes, on cherchera les valeurs propres et les vecteurs propres correspondant à chaque valeur propre. Trouver, s'il y a lieu, une base de $\mathbb{C}^n$ formée de vecteurs propres. Si la matrice est diagonalisable sur $\mathbb{C}$, trouver le plus petit sous-corps de $\mathbb{C}$, c'est à dire $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{Q}$ sur lequel la matrice est diagonalisable.

1. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}$
2. $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
3. $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$
4. $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

Exercice 24 :

Soit $m \in \mathbb{R}$ un nombre réel et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2-m & m-2 & m \end{pmatrix}$$

1. Quelles sont les valeurs propres de f ?
2. Pour quelles valeurs de $m \in \mathbb{R}$, l'endomorphisme est-il diagonalisable ?
3. On suppose $m = 2$. Calculer A^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 25 :

Pour $a \in \mathbb{C}$, $b \in \mathbb{C}$ et $c \in \mathbb{C}$ des nombres complexes, on pose $M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$ et $J = M(0,1,0)$.

1. Exprimer $M(a,b,c)$ en fonction de Id_3, J et J^2
2. Démontrer que J est diagonalisable, et donner ses valeurs propres et ses vecteurs propres.
3. En déduire que $M(a,b,c)$ est diagonalisable, et donner ses valeurs propres.

Exercice 26 :

1. Soit $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; calculer B^2, B^3, puis montrer que $B^3 = 4B^2 - 4B$
2. En déduire vecteurs propres et valeurs propres de B

Exercice 27 :

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel .

1. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent. Démontrer que la seule valeur propre de f est 0
2. Réciproquement, démontrer que si $f \in \mathcal{L}(E)$ a toutes ses valeurs propres nulles, alors f est nilpotent

Exercice 28 :

E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n et $f : E \longmapsto E$ un endomorphisme de E tel que $f^2 = f$.
Quelles sont les valeurs propres de f ?
Trouver toutes les matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telles que $A^2 = A$

12.7.2 Pour aller un peu plus loin

Exercice 29 :

Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} a+b & 0 & a \\ 0 & b & a \\ a & 0 & a+b \end{pmatrix}$ est semblable à une matrice triangulaire
On discutera suivant les valeurs de a et de b

Exercice 30 :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente d'indice p

1. Démontrer que $A^n = \mathcal{O}_n$
2. Calculer $\det(A + \mathrm{Id}_n)$
3. Soit $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $AM = MA$. Calculer $\det(A + M)$

Exercice 31 :

On considère $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathcal{B}_0 = \left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right\}$.
Soient $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ et $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ des endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ dont les matrices dans la base canonique sont :

$$M = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_0}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad N = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_0}(g) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Démontrez que f et g commutent
2. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de f et g
3. Parmi les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$, invariants par f et g, montrer qu'il en existe un de dimension 1 et un autre de dimension 2. En déduire une base de $\mathbb{R}^3$ par rapport à laquelle les matrices de f et g sont triangulaires.

Exercice 32 :

Résoudre dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'équation $X^2 = A$ où $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 8 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 33 :

On considère $\mathbb{C}_3[X]$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 3.
Soient $A(X) = X^4 - 1$ et $B(X) = X^4 - X$, et

$$\left\{ \begin{array}{rcl} f : \mathbb{C}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{C}_3[X] \\ P & \longmapsto & f(P) = R \end{array} \right.$$

où $R = f(P)$ est le reste de la division euclidienne de AP par B.
Vérifier que f est un endomorphisme de $\mathbb{C}_3[X]$ puis déterminer $\ker f$, $\mathrm{Im} f$ et les valeurs et vecteurs propres de f .

Exercice 34 :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice carrée d'ordre n.
Montrer que A est nilpotente si et seulement si pour tout $k \in \mathbb{N}$ avec $1 \leqslant k \leqslant n$, $\mathrm{Tr}\left(A^k\right) = 0$

12.7.3 Miscelleanous

Exercice 35 :

Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice nilpotente.
Montrer que la matrice $\mathrm{Id}_n - N$ est inversible et exprimer son inverse en fonction de N.

Exercice 36 :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$, et pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant n$, $0 \leqslant a_{i,j} \leqslant 1$ et $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$

1. Montrer que 1 est une valeur propre de A.
2. Soit λ une valeur propre de A. Montrer que $|\lambda| \leqslant 1$.

Exercice 37 :

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E. On désigne par φ_u l'application de $\mathcal{L}(E)$ dans $\mathcal{L}(E)$ définie par

$$\left\{\begin{array}{rcl} \varphi_u : \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ f & \longmapsto & \varphi_u(f) = u \circ f \end{array}\right.$$

1. Soit α une valeur propre de u et d la dimension du sous-espace propre E_α de valeur propre α. Montrer que α est une valeur propre de φ_u et caractériser les vecteurs propres de φ_u associés à α. Quelle est la dimension du sous-espace propre de $\mathcal{L}(E)$ associé à la valeur propre α ?
2. Montrer que si u est diagonalisable, alors φ_u est diagonalisable.
3. Dans cette question, on suppose que $E = \mathbb{R}^2$ et on considère l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice par rapport à la base canonique est $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
   (a) Calculer les valeurs propres et trouver des vecteurs propres de u ; montrer que u est diagonalisable.
   (b) φ_u étant définie comme à la question 1, écrire la matrice de φ_u, relativement à une base convenablement choisie de $\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^2\right)$. Chercher les valeurs propres et les vecteurs propres de φ_u. Montrer que φ_u est diagonalisable et retrouver ainsi par le calcul direct le résultat de 2 appliqué à ce cas particulier.

Exercice 38 :

L'objet de ce problème est d'étudier une forme de valeur propre et de vecteur propre d'une application semi-linéaire.
Dans tout ce problème l'entier n est supérieur ou égal à 1 *(c'est à dire $n \in \mathbb{N}^*$)* et E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n.
Le but de ce problème est d'étudier les applications semi-linéaires du $\mathbb{C}$-espace vectoriel E dans lui même.
Une application u de E dans lui même est dite **semi-linéaire** si elle possède la propriété suivante :

$$(\forall x \in E)\,(\forall y \in E)\,(u(x+y) = u(x) + u(y))$$

$$(\forall x \in E)\,(\forall a \in \mathbb{C})\,(u(ax) = \overline{a}u(x))$$

Le nombre complexe $\overline{a}$ est le nombre complexe conjugué de a.
Un nombre complexe $\mu \in \mathbb{C}$ est une valeur **co-propre** de l'application semi-linéaire u s'il existe un vecteur $x \in E$ différent de 0 tel que la relation ci-dessous soit vérifiée :

$$u(x) = \mu x$$

Le vecteur x est un vecteur **co-propre** associé à la valeur co-propre μ

Première partie

Le but de cette partie est d'étudier, pour une application semi-linéaire u donnée, les valeurs et vecteurs co-propres.

1. **Premières propriétés.**
   Soit u une application semi-linéaire du $\mathbb{C}$-espace vectoriel E.
   (a) Démontrer qu'étant donné un vecteur $x \neq 0$, appartenant au $\mathbb{C}$-espace vectoriel E, il existe au plus un nombre complexe $\mu \in \mathbb{C}$ tel que la relation $u(x) = \mu x$ ait lieu.
   (b) Démontrer que, si le nombre complexe μ est une valeur co-propre de l'application semi-linéaire u, alors, pour tout réel θ , le nombre complexe $\mu e^{i\theta}$ est encore valeur co-propre de l'application semi-linéaire u. Exprimer un vecteur co-propre associé à la valeur co-propre $\mu e^{i\theta}$ en fonction d'un vecteur co-propre x associé à la valeur co-propre μ et du réel θ
   (c) Etant donnée une valeur co-propre μ de l'application semi-linéaire u, soit E_μ l'ensemble des vecteurs $x \in E$ qui vérifient la relation $u(x) = \mu x$, c'est à dire :

$$E_\mu = \{x \in E \text{ tels que } u(x) = \mu x\}$$

   ▷ Est-ce que l'ensemble E_μ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel ?
   ▷ Est-ce que l'ensemble E_μ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ?
   (d) Etant données deux applications semi-linéaires u et v, démontrer la linéarité de l'application composée $u \circ v$

2. **Matrice associée à une application semi-linéaire**
   Soit u une application semi-linéaire du $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension finie n ; soit $\{e_i; 1 \leqslant i \leqslant n\}$ une base du $\mathbb{C}$-espace vectoriel E.

   A un vecteur $x \in E$ de coordonnées $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est associée la matrice colonne $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$
   (a) Démontrer qu'à une application semi-linéaire $u : E \longrightarrow E$ est associée dans la base $\{e_i; 1 \leqslant i \leqslant n\}$ de E une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. telle que la relation $y = u(x)$ s'écrive : $Y = A\overline{X}$.
   (La matrice-colonne $\overline{X}$ est la matrice complexe conjuguée de la matrice-colonne X)
   (b) Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ les matrices associées à une même application semi-linéaire $u : E \longrightarrow E$ dans les bases $\mathcal{B}_e = \{e_i; 1 \leqslant i \leqslant n\}$ et $\mathcal{B}_f = \{f_i; 1 \leqslant i \leqslant n\}$ respectivement.
   Soit S la matrice de passage de la base $\{e_i; 1 \leqslant i \leqslant n\}$ à la base $\{f_i; 1 \leqslant i \leqslant n\}$. Démontrer la relation $B = S \times A \times \overline{S^{-1}}$ où, si $S = (s_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ alors $\overline{S} = (\overline{s_{i,j}})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$

3. Étant donnée une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, complexe, d'ordre n, le vecteur X, différent de 0,$(X \neq 0)$ est un vecteur co-propre de la matrice carrée A, associée à la valeur co-propre μ, si le vecteur X et le nombre complexe μ vérifient la relation matricielle : $A\overline{X} = \mu X$.
   Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ la matrice d'ordre 2 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
   Rechercher les valeurs co-propres μ et les vecteurs co-propres $X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ associés.

4. **Correspondance entre les valeurs co-propres de la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et les valeurs propres de la matrice $A\overline{A}$**
   Soit$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$
   (a) Démontrer que si le scalaire μ est une valeur co-propre de la matrice A, le nombre réel $|\mu|^2$ est une valeur propre de la matrice $A\overline{A}$
   (b) Soit λ une valeur propre réelle positive ou nulle $\lambda \in \mathbb{R}^+$ de la matrice $A\overline{A}$ et X un vecteur propre associé, c'est à dire $A\overline{A}X = \lambda X$.
   Démontrer que le réel $\sqrt{\lambda}$ est une valeur co-propre de la matrice A

(c) En déduire que, pour que le réel positif ou nul μ soit valeur co-propre de la matrice A, il faut et il suffit que le réel μ^2 soit valeur propre de la matrice $A\overline{A}$

(d) Etant donné un réel $m \in \mathbb{R}$, soit A_m la matrice définie par la relation :

$$A_m = \begin{pmatrix} m & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Déterminer les valeurs co-propres réelles positives de A_m *(discuter selon les valeurs de m).*

5. **Cas d'une matrice triangulaire supérieure**

Dans cette question la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est une matrice triangulaire supérieure *(les éléments situés en-dessous de la diagonale principale sont nuls).*

(a) Démontrer que si λ est une valeur propre de la matrice A, alors, pour tout réel θ, le nombre complexe $\lambda e^{i\theta}$ est une valeur co-propre de la matrice A.

(b) Démontrer que si μ est une valeur co-propre de la matrice A, alors il existe un réel θ tel que le nombre complexe $\mu e^{i\theta}$ soit valeur propre de la matrice A.

(c) Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ la matrice définie par $A = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & i \end{pmatrix}$

Démontrer que le réel 1 est valeur co-propre de cette matrice et déterminer un vecteur X co-propre associé.

6. **Une caractérisation des valeurs co-propres**

Soit A une matrice carrée complexe d'ordre n, c'est à dire $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$; soient $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ les matrices réelles définies par la relation suivante $A = B + iC$.

Démontrer que le nombre complexe μ est valeur co-propre de la matrice A si et seulement si le nombre réel $|\mu|$ est une valeur propre de la matrice D, carrée, réelle, d'ordre $2n$ c'est à dire $D \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$, définie par blocs par la relation suivante : $D = \begin{pmatrix} B & C \\ C & -B \end{pmatrix}$

Seconde partie

Soient A et B deux matrices carrées complexes d'ordre n *(c'est à dire $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$)*, s'il existe une matrice carrée complexe S d'ordre n inversible *(c'est à dire $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$)* telle que la relation $B = SA\overline{S}^{-1}$ soit vérifiée, les deux matrices A et B **sont dites co-semblables**.
Si une matrice A est co-semblable à une matrice diagonale, la matrice A est dite **co-diagonalisable**.
Le but de cette partie est de rechercher à quelles conditions une matrice est co-diagonalisable.

1. **Une relation d'équivalence :**

Etant données deux matrices carrées complexes A et B d'ordre n, ces matrices sont dites satisfaire la relation $\equiv$ si et seulement si ces deux matrices sont co-semblables, c'est à dire :

$$A \equiv B \iff (\exists S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}))\left(B = SA\overline{S}^{-1}\right)$$

Démontrer que la relation $\equiv$ est une relation d'équivalence dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, l'ensemble des matrices carrées complexes d'ordre n .

2. **Indépendance des vecteurs co-propres :**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice carrée complexe d'ordre n ; soient $X_1, X_2, \ldots, X_k$, k vecteurs co-propres de la matrice A associés à des valeurs co-propres $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$, l'entier k étant inférieur ou égal à l'entier n ($k \leqslant n$).

Démontrer que, si les valeurs co-propres μ_p pour $p = 1, 2, \ldots, k$ ont des modules différents les uns des autres, c'est à dire que si $p \neq q$, alors $|\mu_p| \neq |\mu_q|$, alors la famille $\{X_1, X_2, \ldots, X_k\}$ est libre.

En déduire que, si la matrice $A\overline{A}$ a n valeurs propres λ_p avec $p = 1, \ldots, n$, positives ou nulles, c'est à dire telles que $\lambda_p \geqslant 0$, distinctes les unes des autres, c'est à dire que si $p \neq q$, alors $\lambda_p \neq \lambda_q$, alors la matrice A est co-diagonalisable.

3. **Quelques propriétés :**

(a) Soit $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ une matrice carrée complexe d'ordre n inversible ; soit A la matrice définie par la relation $A = S \times \overline{S}^{-1}$
Calculer la matrice produit $A \times \overline{A}$

(b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice carrée complexe d'ordre n telle que $A \times \overline{A} = \mathrm{Id}_n$.
Démontrer qu'il existe au moins un réel θ_0 tel que la matrice $S(\theta_0)$ définie par la relation

$$S(\theta_0) = A - e^{-i\theta_0}\mathrm{Id}_n$$

soit inversible.
Calculer Calculer la matrice $A \times S(\theta_0)$..
En déduire la matrice $S(\theta) \times \overline{S(\theta)}^{-1}$

4. **Une condition nécessaire :**
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice d'ordre n co-diagonalisable. Il existe donc une matrice $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, inversible telle que la matrice $S^{-1} \times A \times S$ soit diagonale.
Démontrer que la matrice $A \times \overline{A}$ est diagonalisable, que ses valeurs propres sont positives ou nulles et que le rang de la matrice A est égal au rang de la matrice $A \times \overline{A}$

5. **Exemples : co-diagonalisable ? Pas co-diagonalisable ?**
Soient A, B, C, D les matrices d'ordre 2 suivantes :

(a) $A = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & i \end{pmatrix}$ (b) $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (c) $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (d) $D = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$

Est-ce que ces matrices sont diagonalisables ? co-diagonalisables ?

12.8 Correction des exercices

12.8.1 Correction des exercices du cours

Exercice 1 :

Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & -7 & 7 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 7 & -2 \end{pmatrix}$. *Montrer que les vecteurs* $X_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ *et* $X_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *sont des vecteurs propres de* A. *Montrer que la famille* $\{X_1, X_2, X_3\}$ *ne forme pas une famille libre. Est-ce que cela contredit un résultat du cours ?*

- ⋆ Montrons que X_1 est un vecteur propre :

$$AX_1 = \begin{pmatrix} 5 & -7 & 7 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 7 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ -5 \\ -5 \end{pmatrix} = 5X_1$$

  X_1 est donc un vecteur propre de valeur propre 5
- ⋆ En faisant des calculs semblables, nous avons $AX_2 = 5X_2$ et donc X_2 est un vecteur propre de valeur propre 5
- ⋆ Et, pour terminer, nous avons $AX_3 = 5X_3$ et donc X_3 est un vecteur propre de valeur propre 5

Effectivement, la famille $\{X_1, X_2, X_3\}$ ne forme pas une famille libre *(Nous avons* $X_1 = -\dfrac{4}{5}X_2 + \dfrac{3}{5}X_3$*)*.
Il n' y apas contradiction avec le cours, puisque d'après 12.2.5, si les valeurs propres sont différentes, alors les vecteurs propres sont indépendants. Ici, nous avons qu'une seule valeur propre.

En fait, le polynôme caractéristique de A est $P_A(X) = -(5-X)^2(X+2)$. La valeur propre 5 est une valeur propre d'ordre 2 et la dimension de l'espace propre correspondant est au plus 2.

Exercice 2 :

E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2, rapporté à une base $\left\{\vec{i}, \vec{j}\right\}$ *et* $f : E \longrightarrow E$ *une application linéaire de matrice, dans la base* $\left\{\vec{i}, \vec{j}\right\}$,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

1. *Démontrer que* $k_0 = 5$ *et* $k_1 = -1$ *sont des valeurs propres de* f *(ou de* A*).*

   Nous allons en fait nous intéresser à l'identité :

$$A\overrightarrow{X} = k\overrightarrow{X} \iff \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2x - 3y = & kx \\ -3x + 2y = & ky \end{cases} \iff \begin{cases} (2-k)x - 3y = & 0 \\ -3x + (2-k)y = & 0 \end{cases}$$

   Le système $\begin{cases} (2-k)x - 3y = & 0 \\ -3x + (2-k)y = & 0 \end{cases}$ est un système de Cramer de déterminant $(2-k)^2 - 9 = (k-5)(k+1)$.
   Ce déterminant s'annule pour $k = 5$ ou $k = -1$.
   - ⋆ Si $k \neq 5$ et $k \neq -1$, le système n'admet qu'une seule solution : $x = 0$ et $y = 0$
   - ⋆ Si $k = 5$, alors le système devient $x + y = 0$.
     Ainsi, la droite $\Delta_5 = \left\{\overrightarrow{X} = (x, -x) \text{ où } x \in \mathbb{R}\right\} = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un espace propre de valeur propre 5
   - ⋆ Si $k = -1$, alors le système devient $x - y = 0$.
     Ainsi, la droite $\Delta_{-1} = \left\{\overrightarrow{X} = (x, x) \text{ où } x \in \mathbb{R}\right\} = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un espace propre de valeur propre -1

2. *Trouver $\overrightarrow{u_0}$ un vecteur propre de valeur propre $k_0 = 5$ et $\overrightarrow{u_1}$ un vecteur propre de valeur propre $k_1 = -1$ et démontrer que ces 2 vecteurs déterminent une base de E.*

   D'après la question ci-dessus, nous choisissons $\overrightarrow{u_0} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   Il est évident que ces 2 vecteurs forment une base de E

3. *Quelle est la matrice de $f : E \longrightarrow E$ dans la base $\{\overrightarrow{u_0}, \overrightarrow{u_1}\}$; on appelle cette matrice B.*

   Voilà qui est très facile : $B = \mathcal{M}(f)_{\{\overrightarrow{u_0}, \overrightarrow{u_1}\}} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

4. *Trouver une matrice P, telle que $A = P^{-1}BP$, et montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $A^n = P^{-1}B^nP$*

   ⋆ La matrice de passage de la base $\{\overrightarrow{u_0}, \overrightarrow{u_1}\}$ à la base canonique est $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et la matrice de passage de la base canonique à la base $\{\overrightarrow{u_0}, \overrightarrow{u_1}\}$ est la matrice $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

   ⋆ Nous avons donc $A = PBP^{-1}$ et donc :

$$\begin{aligned} A^n = ()^n = & \left(PBP^{-1}\right)\left(PBP^{-1}\right)\cdots\left(PBP^{-1}\right) \\ = & PB\left(P^{-1}P\right)B\left(P^{-1}P\right)\cdots\left(P^{-1}P\right)BP^{-1} \\ = & PB^nP^{-1} \end{aligned}$$

   ⋆ Nous avons $B^n = \begin{pmatrix} 5^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$

   D'où nous avons $A^n = \begin{pmatrix} \dfrac{5^n + (-1)^n}{2} & \dfrac{-5^n + (-1)^n}{2} \\ \dfrac{-5^n + (-1)^n}{2} & \dfrac{5^n + (-1)^n}{2} \end{pmatrix}$

Exercice 4 :

Calculer le polynôme caractéristique de la matrices $A = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ et en déduire les valeurs propres

Nous recherchons le polynôme caractéristique de A, $P_A(X)$:

$$P_A(X) = \det(A - X\mathrm{Id}_4) = \begin{vmatrix} -3-X & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -3-X & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1-X & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 2-X \end{vmatrix}$$

Nous allons utiliser le calcul du déterminant par blocs :

$$\begin{aligned} P_A(X) = & \begin{vmatrix} -3-X & -1 \\ -1 & -3-X \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} -1-X & 2 \\ 5 & 2-X \end{vmatrix} = \left[(-3-X)^2 + 1\right]\left[(X-2)(X+1) - 10\right] \\ = & \left[(3+X)^2 + 1\right]\left[X^2 - X - 12\right] \end{aligned}$$

→ Si nous considérons A comme une matrice à coefficients réels, c'est à dire $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, alors, $P_A(X) = 0$ si et seulement si $X^2 - X - 12 = 0$.
Dans ce cas, A n'admet que 2 valeurs propres $\lambda_1 = 4$ et $\lambda_2 = -3$

→ Par contre, si nous considérons A comme une matrice à coefficients complexes, c'est à dire $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{C})$, alors, $P_A(X) = 0$ si et seulement si $X^2 - X - 12 = 0$ et $(3+X)^2 + 1 = 0$.
Dans ce cas, A admet 4 valeurs propres $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = -3$, $\lambda_3 = -3 + i$ et $\lambda_4 = -3 - i$

Exercice 5 :

1. *Trouver plusieurs matrices carrées d'ordre 2 dont la somme des valeurs propres fait 6 et le produit des valeurs propres fait 2*

   ⋆ Le polynôme caractéristique d'une matrice A carrée d'ordre 2 est donné par $P_A(X) = X^2 - \operatorname{tr}(A)X + \det A$, tout en sachant que si les valeurs propres sont λ_1 et λ_2, $\operatorname{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2$ et $\det A = \lambda_1 \times \lambda_2$.
   Dans notre cas, $P_A(X) = X^2 - 6X + 2$ dont les racines sont $\lambda_1 = 3 + \sqrt{7}$ et $\lambda_2 = 3 - \sqrt{7}$

   ⋆ Ainsi, une première famille de matrices est donnée par :

$$A_z = \begin{pmatrix} 3+\sqrt{7} & z \\ 0 & 3-\sqrt{7} \end{pmatrix} \text{ où } z \in \mathbb{C}$$

   ⋆ Si nous considérons le polynôme $P_A(X) = X^2 - 6X + 2$, la « matrice-compagnon » de P_A est donnée par $M = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$

2. *Trouver une matrice, ni diagonale ni triangulaire, dont le polynôme caractéristique est* $(X-1)^2\left(X^2+X+1\right)$

   Nous allons utiliser une matrice d'ordre 4, par blocs :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & j & \mu \\ 0 & 0 & 0 & j^2 \end{pmatrix} \text{ avec } \lambda \in \mathbb{C} \text{ et } \mu \in \mathbb{C}$$

Exercice 6 :

Déterminer les vecteurs propres et les valeurs propres de la matrice $Y = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

⇒ Tout d'abord, nous clculons le polynôme caractéristique P_Y :

$$\begin{aligned} P_Y(X) &= \begin{vmatrix} -1-X & 1 & 0 \\ 0 & -1-X & 1 \\ 1 & 0 & -1-X \end{vmatrix} = (-1-X)\begin{vmatrix} -1-X & 1 \\ 0 & -1-X \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1-X & 1 \end{vmatrix} \\ &= (-1-X)^3 + 1 = 1 - (1+X)^3 \end{aligned}$$

⇒ Nous avons $(1+X)^3 = 1 + X^3 + 3X + 3X^2$ et donc $P_Y(X) = 1 - (1+X)^3 = -X\left(X^2+3X+3\right)$
Les valeurs propres de Y sont donc les racines du polynôme P_Y

⇒ Si nous supposons $Y \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, la seule racine réelle de P_Y est 0 et la recherche de vecteurs propres est la recherche du noyau.
Nous devons donc trouver $\overrightarrow{U} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tel que $Y\overrightarrow{U} = \overrightarrow{0}$, c'est à dire résoudre le système :

$$\begin{cases} -x+y = & 0 \\ -y+z = & 0 \\ x-z = & 0 \end{cases} \iff x = y = z$$

Ainsi, $\ker Y = \{(x,x,x) \text{ avec } x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

⇒ Si nous supposons maintenant $Y \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, les racines de P_Y sont 0 et celles du polynôme $X^2 + 3X + 3$, c'est à dire $\lambda_1 = -1 + j$ et $\lambda_2 = -1 + \overline{j}$

   ⋆ Nous avons $\ker Y = \{(x,x,x) \text{ avec } x \in \mathbb{C}\} = \mathbb{C}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

⋆ Recherchons les vecteurs propres de valeurs propres $\lambda_1 = -1+j$. Nous devons donc résoudre :

$$\left\{\begin{array}{rl} -x+y= & (-1+j)\,x \\ -y+z= & (-1+j)\,y \\ x-z= & (-1+j)\,z \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rl} jx-y= & 0 \\ jy-z= & 0 \\ -x+jz= & 0 \end{array}\right. \iff y=jx \text{ et } z=j^2x=\overline{j}x \text{ avec } x\in\mathbb{C}$$

Ainsi, $E_{-1+j} = \left\{\left(x, jx, j^2x\right) \text{ avec } x\in\mathbb{C}\right\} = \mathbb{C}\begin{pmatrix}1\\ j\\ j^2\end{pmatrix}$

⋆ Continuons en reherchant les vecteurs propres de valeurs propres $\lambda_1 = -1+\overline{j} = -1+j^2$.
Nous devons donc résoudre :

$$\left\{\begin{array}{rl} -x+y= & \left(-1+j^2\right)x \\ -y+z= & \left(-1+j^2\right)y \\ x-z= & \left(-1+j^2\right)z \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rl} j^2x-y= & 0 \\ j^2y-z= & 0 \\ -x+j^2z= & 0 \end{array}\right. \iff y=\overline{j}x \text{ et } z=jx=\overline{j}x \text{ avec } x\in\mathbb{C}$$

Ainsi, $E_{-1+\overline{j}} = \left\{\left(x, j^2x, jx\right) \text{ avec } x\in\mathbb{C}\right\} = \mathbb{C}\begin{pmatrix}1\\ j^2\\ j\end{pmatrix}$

Exercice 7 :

Soit $A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice symétrique, c'est à dire telle que

$$A = \begin{pmatrix} a & c\\ c & b\end{pmatrix} \text{ avec } a\in\mathbb{R} \text{ et } b\in\mathbb{R}$$

La matrice A est-elle diagonalisable ?

Nous utilisons les résultats sur les matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

$$P_A(X) = X^2 - \operatorname{tr}(A)\,X + \det A$$

C'est à dire, dans notre cas :

$$P_A(X) = X^2 - (a+b)\,X + ab - c^2$$

Le discriminant de ce polynôme est $\Delta = (a+b)^2 - 4\left(ab-c^2\right) = (a-b)^2 + 4c^2$.
Comme $\Delta \geqslant 0$, le polynôme a aumoins une racine.

⋆ $\Delta = 0$ si et seulement si $a=b$ et $c=0$ et la matrice X est du type $X = a\mathrm{Id}_2$
⋆ Si $a\neq b$ ou $c\neq 0$, alors $\Delta>0$ et le polynôme caractéristique admet 2 racines distinctes et donc X admet 2 valeurs propres.

Ainsi, toute matrice symétrique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est diagonalisable.

Exercice 8 :

On considère un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension 2, rapporté à une base $\left\{\vec{i},\vec{j}\right\}$; f est l'endomorphisme de E, défini par sa matrice $A = \begin{pmatrix}5 & -1\\ -1 & 5\end{pmatrix}$

1. *Rechercher les vecteurs propres et les valeurs propres de A*

   Remarquons que la matrice A est symétrique et qu'elle admet sûrement 2 valeurs propres distinctes
   ⇒ Le polynôme caractistique de A est $P_A(X) = X^2 - 10X + 24$ dont les racines sont $\lambda_1 = 6$ et $\lambda_2 = 4$
   ⇒ Recherchons les vecteurs propres de valeur propre $\lambda_1 = 6$.
   Nous devons donc résoudre le système d'équations :

$$\left\{\begin{array}{rl} 5x-y= & 6x \\ -x+5y= & 6y \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rl} -x-y= & 0 \\ -x-y= & 0 \end{array}\right. \iff x+y=0$$

   Donc si E_6 est le sous-espace vectoriel des vecteurs propres de valeur propre 6, nous avons $E_6 = \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$

⇒ Recherchons, maintenant, les vecteurs propres de valeur propre $\lambda_2 = 4$.
Nous devons donc résoudre le système d'équations :

$$\left\{\begin{array}{rl} 5x - y = & 4x \\ -x + 5y = & 4y \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rl} x - y = & 0 \\ -x + y = & 0 \end{array}\right. \iff x - y = 0$$

Donc si E_4 est le sous-espace vectoriel des vecteurs propres de valeur propre 4, nous avons $E_4 = \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

2. *Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, calculer A^n*

⇒ Appelons $u_0 = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ et $u_1 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$
Il est clair que la famille $\{u_0, u_1\}$ forme une base de E, et qui si $f : E \longrightarrow E$ est une application linéaire de matrice A dans la lase canonique, la matrice de f dans la base $\{u_0, u_1\}$ sera $D = \begin{pmatrix}6 & 0\\0 & 4\end{pmatrix}$

⇒ Si P est la matrice de passage de la base canonique à la base $\{u_0, u_1\}$, nous avons $P = \begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & 1\end{pmatrix}$ et nous avons $A = PDP^{-1}$, puis, pour $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.
Nous avons $P^{-1} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{-1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$

⇒ Pour $n \in \mathbb{N}$, nous avons $D^n = \begin{pmatrix}6^n & 0\\0 & 4^n\end{pmatrix}$, nous obtenons alors, par calculs

$$A^n = \begin{pmatrix}\frac{4^n + 6^n}{2} & \frac{4^n - 6^n}{2}\\ \frac{4^n - 6^n}{2} & \frac{4^n + 6^n}{2}\end{pmatrix}$$

⇒ Soit $n \in \mathbb{Z}$ et $n \leqslant -1$.
Alors, $A^n = \left(A^{-1}\right)^{-n}$ et, de $A = PDP^{-1}$, nous avons $A^{-1} = PD^{-1}P^{-1}$; d'où $A^n = \left(A^{-1}\right)^{-n} = P\left(D^{-1}\right)^{-n}P^{-1}$

⇒ Nous avons $D^{-1} = \begin{pmatrix}\frac{1}{6} & 0\\ 0 & \frac{1}{4}\end{pmatrix}$ et donc $\left(D^{-1}\right)^{-n}\begin{pmatrix}\frac{1}{6^{-n}} & 0\\ 0 & \frac{1}{4^{-n}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6^n & 0\\0 & 4^n\end{pmatrix}$

⇒ Ainsi, pour $n \in \mathbb{Z}$ et $n \leqslant -1$, nous avons $A^n = PD^nP^{-1}$, c'est à dire :

$$A^n = \begin{pmatrix}\frac{4^n + 6^n}{2} & \frac{4^n - 6^n}{2}\\ \frac{4^n - 6^n}{2} & \frac{4^n + 6^n}{2}\end{pmatrix}$$

En conclusion, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, nous avons

$$A^n = \begin{pmatrix}\frac{4^n + 6^n}{2} & \frac{4^n - 6^n}{2}\\ \frac{4^n - 6^n}{2} & \frac{4^n + 6^n}{2}\end{pmatrix}$$

3. *On considère 2 suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_0 = 3$, $v_0 = -3$ et $\left\{\begin{array}{l} u_{n+1} = 5u_n - v_n \\ v_{n+1} = -u_n + 5v_n \end{array}\right.$*
Donner u_n et v_n en fonction de n

De manière évidente, nous avons $\begin{pmatrix}u_{n+1}\\v_{n+1}\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}u_n\\v_n\end{pmatrix}$.

Donc en itérant, nous obtenons $\begin{pmatrix}u_{n+1}\\v_{n+1}\end{pmatrix} = A^2\begin{pmatrix}u_{n-1}\\v_{n-1}\end{pmatrix}$ et plus généralement $\begin{pmatrix}u_{n+1}\\v_{n+1}\end{pmatrix} = A^p\begin{pmatrix}u_{n-p+1}\\v_{n-p+1}\end{pmatrix}$

De là, nous déduisons que $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$ et donc, par calcul :

$$\begin{cases} u_n = & 3 \times 6^n \\ v_n = & -3 \times 6^n \end{cases}$$

Les 2 suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont simplement des suites géométriques.

Exercice 11 :

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel . Soient $u : E \longrightarrow E$ et $f : E \longrightarrow E$ 2 endomorphismes qui commutent, c'est à dire tels que $f \circ u = u \circ f$.
Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ un vecteur propre de u d'espace propre associé E_λ. Démontrer que E_λ est stable par f, c'est à dire que $f(E_\lambda) \subset E_\lambda$

Soit $x \in E_\lambda$; il faudra donc montrer que $f(x) \in E_\lambda$.
$f \circ u(x) = f[u(x)] = f[\lambda x] = \lambda f[x]$
De $f \circ u = u \circ f$, nous déduisons que, pour $x \in E_\lambda$, $f \circ u(x) = f[u(x)] = u \circ f(x) = u[f(x)]$
Nous avons dons $f[u(x)] = u[f(x)] \iff \lambda f[x] = u[f(x)]$
Nous en déduisons que $f(x)$ est donc un vecteur propre de valeur propre λ, c'est à dire que $f(x) \in E_\lambda$.

Exercice 13 :

Soient f,g deux endomorphismes du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie tels que f soit diagonalisable. Démontrer que f et g commutent si et seulement si les sous-espaces propres de f sont stables par g.

- Supposons que f et g commutent
  Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme quelconque. Alors $\ker P(f)$ est stable par g

  En effet, soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et nous avons alors $P(f) = a_0 \mathrm{Id}_E + a_0 f + \cdots + a_n f^n$.
  Nous devons donc montrer que si $x \in \ker P(f)$, alors $g(x) \in \ker P(f)$.
  Soit $x \in \ker P(f)$; alors $P(f)(x) = 0$ et nous devons montrer que $P(f)[g(x)] = 0$.
  Nous avons :

  $$P(f)[g(x)] = a_0 g(x) + a_0 f[g(x)] + \cdots + a_n f^n[g(x)]$$

  Remarquons que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, avec $1 \leqslant k \leqslant n$, en utilisant la commutativité et l'associativité de la composition :

  $$\begin{array}{rcl} f^k \circ g = & & f^{k-1} \circ (f \circ g) = f^{k-1} \circ (g \circ f) \\ & = & f^{k-2} \circ (f \circ g) \circ f = f^{k-2} \circ (g \circ f) \circ f \\ & = & f^{k-3} \circ (f \circ g) \circ f^2 = f^{k-3} \circ (g \circ f) \circ f^2 = \left(f^{k-3} \circ g\right) \circ f^3 \\ & \vdots & \vdots \\ & = & g \circ f^k \end{array}$$

  Nous avons alors :

  $$\begin{array}{rcl} P(f)[g(x)] & = & a_0 g(x) + a_0 g[f(x)] + \cdots + a_n g[f^n(x)] \\ & = & g[a_0 x + a_0 f(x) + \cdots + a_n f^n(x)] \\ & = & g[P(f)(x)] \\ & = & g(0) = 0 \end{array}$$

  Donc $g(x) \in \ker P(f)$ et $\ker P(f)$ est bien stable par g

  Comme $\ker P(f)$ est stable par g pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$, il l'est, en particulier, pour les polynômes $P_\lambda(X) = X - \lambda$ où $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de f.
  Si E_λ est un sous-espace propre de f de valeur propre λ, nous avons en fait $E_\lambda = \ker P_\lambda(f)$ qui est donc stable par g.
  Ainsi, si f et g commutent alors les sous-espaces propres de f sont stables par g

- ▷ Réciproquement, on suppose que g laisse stable tous les sous-espaces propres de f.
  Soit E_λ un tel sous-espace propre et soit $x \in E_\lambda$.
  Alors d'une part $g(f(x)) = g(\lambda x) = \lambda g(x)$, ce qui signifie que $g(x) \in E_\lambda$.
  Autrement dit, si $x \in E_\lambda$, on a $f(g(x)) = \lambda g(x)$ et $g(f(x)) = g(\lambda x) = \lambda g(x)$. Ainsi, si $x \in E_\lambda$, alors $f(g(x)) = g(f(x))$.
  Maintenant, comme f est diagonalisable, E est somme directe des sous-espaces propres de f.
  Ecrivant tout $x \in E$ comme somme de x_{λ_i}, où $x_{\lambda_i} \in E_{\lambda_i}$, on prouve que $f(g(x)) = g(f(x))$ et donc que g et f commutent.

Exercice 16 :

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ nilpotente d'indice k et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ nilpotente d'indice l qui commutent.
Montrer que $A+B$ et AB sont 2 matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

- ▷ A et B étant 2 matrices qui commutent, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous pouvons calculer $(A+B)^n$ à l'aide de la formule du binôme de Newton. Ainsi :

$$(A+B)^n = \sum_{j=0}^{n} \mathrm{C}_n^j A^j B^{n-j} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} A^j B^{n-j}$$

  Nous allons choisir $n = k+l-1$; alors :

$$\begin{aligned}(A+B)^{k+l-1} &= \sum_{j=0}^{k+l-1} \binom{k+l-1}{j} A^j B^{k+l-1-j} \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k+l-1}{j} A^j B^{k+l-1-j} + \sum_{j=k}^{k+l-1} \binom{k+l-1}{j} A^j B^{k+l-1-j}\end{aligned}$$

  Dans l'expression $\displaystyle\sum_{j=k}^{k+l-1} \binom{k+l-1}{j} A^j B^{k+l-1-j}$, nous avons $j \geqslant k$ et donc $A^j = \mathcal{O}_n$, de telle sorte que $\displaystyle\sum_{j=k}^{k+l-1} \binom{k+l-1}{j} A^j B^{k+l-1-j} = \mathcal{O}_n$.
  Puis, dans l'expression $\displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} \binom{k+l-1}{j} A^j B^{k+l-1-j}$, nous avons $1-k \leqslant -j \leqslant 0$ et donc $1-k+(k+l-1) \leqslant (k+l-1)-j \leqslant (k+l-1)$, c'est à dire $(k+l-1)-j \geqslant l$ et donc nous avons $B^{k+l-1-j} = \mathcal{O}_n$.
  D'où $\displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} \binom{k+l-1}{j} A^j B^{k+l-1-j} = \mathcal{O}_n$.
  Et donc, en résumé, $(A+B)^{k+l-1} = \mathcal{O}_n$ et la matrice $A+B$ est donc nilpotente, d'indice au plus $k+l-1$
- ▷ Comme A et B commutent, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous pouvons calculer $(AB)^n = A^n \times B^n$.
  En supposant $k \leqslant l$, nous avons $(AB)^k = A^k \times B^n = \mathcal{O}_n \times B^n = \mathcal{O}_n$.
  Donc, AB est nilpotente, d'indice, au plus k

Exercice 17 :

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1. *Trouver une relation entre Id_3, A et A^2, et en déduire que A est inversible.*

   Un calcul matriciel élémentaire montre que $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Nous voyons donc, tout de suite, que $A^2 = 2\mathrm{Id}_2 + A$
Donc, nous avons :

$$A^2 = 2\mathrm{Id}_2 + A \Longleftrightarrow A^2 - A = 2\mathrm{Id}_2 \Longleftrightarrow A\left(A - \mathrm{Id}_2\right) = 2\mathrm{Id}_2$$

D'où, $A^{-1} = \dfrac{1}{2}\left(A - \mathrm{Id}_2\right) = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

2. *En déduire aussi un polynôme annulateur de A*

   Très simple. Nous avons $A^2 = 2\mathrm{Id}_2 + A \Longleftrightarrow A^2 - A - 2\mathrm{Id}_2 = \mathcal{O}_2$
   Le polynôme $P(X) = X^2 - X - 2$ est donc un polynôme annulateur de A

3. *Démontrer que si λ est valeur propre de A, alors, λ est racine du polynôme $P(X) = X^2 - X - 2$*

   Soit $\lambda_i n\mathbb{K}$, une valeur propre de A de vecteur propre non nul u. Alors :

$$A(u) = \lambda u \quad A^2(u) = A\left[A(u)\right] = A\left[\lambda u\right] = \lambda A(u) = \lambda^2 u$$

   Donc :

$$\left(A^2 - A - 2\mathrm{Id}_2\right)(u) = \mathcal{O}_2(u) \Longleftrightarrow A^2(u) - A(u) - 2u = \overrightarrow{0}_E \Longleftrightarrow \left(\lambda^2 - \lambda - 2\right)u = \overrightarrow{0}_E$$

   Comme $u \neq \overrightarrow{0}_E$, nous avons $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$, ce qui veut dire que λ est racine du polynôme $P(X) = X^2 - X - 2$

4. *Rechercher les valeurs propres de A et les vecteurs propres associés ; la matrice A est-elle diagonalisable ?*

   Si λ est valeur propre de A, alors, λ est racine du polynôme $P(X) = X^2 - X - 2$.
   Nous avons $X^2 - X - 2 = (X+1)(X-2)$, ce qui veut dire que -1 et 2 sont des valeurs propres de A. Mais, sont-ce les seules ?.
   Recherchons le polynôme caractéristique de A.

$$P_A(X) = \det\left(A - X\mathrm{Id}_3\right) = \begin{vmatrix} -X & 1 & 1 \\ 1 & -X & 1 \\ 1 & 1 & -X \end{vmatrix} = -X^3 + 3X + 2 = (X+1)^2(2-X)$$

   Il y a donc 2 valeurs propres :
   - ⋆ Une valeur propre simple $\lambda = 2$
   - ⋆ Une valeur propre double $\lambda = -1$

   Recherchons, maintenant, l'espace propre associé à la valeur propre $\lambda = -1$.

   Nous devons donc trouver des vecteurs $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tels que $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

   Nous avons :

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} y + z = & -x \\ x + z = & -y \\ x + y = & -z \end{array}\right. \Longleftrightarrow x + y + z = 0$$

   L'espace propre de valeur propre $\lambda = -1$ est le plan d'équation $x+y+z = 0$. c'est un sous-espace vectoriel de dimension 2 et la matrice A est donc diagonalisable. A est donc semblable à la matrice $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

   Il faut remarquer que le polynôme annulateur $P(X) = X^2 - X - 2$ divise le polynôme caractéristique $P_A(X) = (X+1)^2(2-X)$

   C'est exceptionnel ! ! Par exemple, si nous considérons la matrice $\Pi = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ qui est une projection ($\Pi^2 = \Pi$), alors le polynôme $Q(X) = X^3 - X$ est un polynôme annulateur de Π, mais ne divise pas le polynôme caractéristique P_Π de Π

Exercice 18 :

Quel est le polynôme minimal de la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ *?*

Un calcul facile montre que $B^2 = 3B$ et que donc $B^2 - 3B = \mathcal{O}_3$. Ainsi, le polynôme $Q(X) = X^2 - 3X$ est un polynôme annulateur de B.
Le polynôme minimal de B, μ_B divise Q. Donc $\mu_B(X) = X$ ou $\mu_B(X) = X - 3$ ou $\mu_B(X) = X^2 - 3X$.
Or, B n'est ni la matrice nulle ni un multiple de la matrice identité.
Donc, le seul choix que nous ayions est $\mu_B(X) = X^2 - 3X$

Exercice 19 :

Rechercher le polynôme minimal de la matrice $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$

Pour rechercher ce polynôme minimal, nous allons rechercher son polynôme caractéristique, en ayant en tête que le polynôme minimal divise le polynôme caractéristique et que les valeurs propres de D sont aussi racines de μ_D, le polynôme minimal de D

1. On commence par calculer le polynôme caractéristique de D.

   Classiquement, $P_D(X) = \det(D - X\mathrm{Id}_3) = \begin{vmatrix} 3-X & 0 & 8 \\ 3 & -1-X & 6 \\ -2 & 0 & -5-X \end{vmatrix} = (X+1)^3$

   D n'admet donc qu'une seule valeurs propre, -1
2. On recherche, maintenant, les espaces propres associés.

   ▷ Nous devons rechercher les vecteurs $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tels que $D\overrightarrow{X} = -\overrightarrow{X}$

   Nous devons donc résoudre :

   $$\left\{\begin{array}{rl} 3x + 8z = & -x \\ 3x - y + 6z = & -y \\ -2x - 5z = & -z \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rl} 4x + 8z = & 0 \\ 3x + 6z = & 0 \\ -2x - 4z = & 0 \end{array}\right. \iff x + 2z = 0$$

   L'ensemble des solutions de ce système est donc un plan $\Pi_1 = \{(-2z, y, z) \text{ où } z \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R}\}$.
   Nous avons $\dim \Pi_1 = 2$

   La matrice D n'est donc pas diagonalisable.
3. Le polynôme minimal de D, μ_D divise le polynôme caractéristique de D, $P_D(X) = (X+1)^3$, tout en ayant comme racine $x_0 = -1$
   Le polynôme minimal ne peut être que $\mu_D(X) = (X+1)$, $\mu_D(X) = (X+1)^2$ ou $\mu_D(X) = (X+1)^3 = P_C(X)$
4. Comme $D \neq -\mathrm{Id}_3$, le polynôme $(X+1)$ n'est sûrement pas le polynôme annulateur de D
5. $D + \mathrm{Id}_3 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$

   Il est alors facile de vérifier, par calcul que $(D + \mathrm{Id}_3)^2 =$ et que donc $(X+1)^2$ est un polynôme annulateur de D et que donc $\mu_D(X) = (X+1)^2$

12.8.2 Applications du cours

Exercice 20 :

Soit $\mathcal{C}^\infty(R)$ *l'espace des fonctions numériques, définies sur* $\mathbb{R}$ *et indéfiniment continuement différentiables sur* $\mathbb{R}$.
Soit D *l'endomorphisme de* $\mathcal{C}^\infty(R)$ *qui à* f *associe sa fonction dérivée* f'. *Déterminer les valeurs propres de* D *et les sous-espaces propres associés.*

Il faut trouver des fonctions $f \in \mathcal{C}^{\infty}(R)$ telles que $D(f) = \lambda f \iff f' = \lambda f$.
C'est une équation différentielle banale du type $y' = \lambda y$ dont les solutions sont du type $f_\lambda(x) = Ce^{\lambda x}$.
Un espace propre de valeur propre λ est donc l'espace $\left\{Ce^{\lambda x} \text{ avec } C \in \mathbb{R}\right\}$

> **Note**
> Si on choisit des fonctions définies sur $\mathbb{R}$, mais à valeurs dans $\mathbb{C}$, on peut choisir $\lambda \in \mathbb{C}$ et $C \in \mathbb{C}$

Exercice 21 :

Soit $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est l'espace des suites à numériques complexes, et Φ l'endomorphisme de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ ainsi défini :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & \Phi\left((u_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) = (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ où } \left\{\begin{array}{l} v_0 = u_0 \\ v_n = \dfrac{u_n + u_{n-1}}{2} \end{array}\right. \end{array}$$

Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de Φ.

Nous admettons, mais la démonstration est simple, que Φ est une application linéaire
Il faut donc trouver une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et un nombre $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $\Phi\left((u_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) = \lambda (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$
Soit donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un « vecteur propre » associé à la valeur propre λ.
Nous avons alors $u_0 = \lambda u_0$ et pour tout $n \geqslant 1$, $\dfrac{u_n + u_{n-1}}{2} = \lambda u_n \iff u_{n-1} = (2\lambda - 1) u_n$

- ⋆ Si $\lambda = 1$, alors $u_0 = u_0$ *(ce qui ne nous apporte rien)* et $u_{n-1} = u_n$, ce qui veut dire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite constante.
  Réciproquement, il est clair qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ constante vérifie $\Phi\left((u_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$
  Donc, le nombre 1 est bien valeur propre de Φ, d'espace propre associé le sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ formé des suites constantes.
- ⋆ Si $\lambda = \dfrac{1}{2}$, alors $u_0 = \dfrac{1}{2}u_0$ implique $u_0 = 0$ et, pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = 0$. Ainsi, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la seule suite nulle et donc $\dfrac{1}{2}$ n'est pas valeur propre
- ⋆ Pour $\lambda \neq 1$ et $\lambda \neq \dfrac{1}{2}$ alors l'identité $u_0 = \lambda u_0$ implique toujours $u_0 = 0$, et comme, pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = \dfrac{1}{2\lambda - 1}u_{n-1}$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique telle que, toujours pour $n \geqslant 1$, $u_n = \left(\dfrac{1}{2\lambda - 1}\right)^n u_0$.
  La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite nulle

En conclusion, la seule valeur propre de Φ est 1, et les seuls vecteurs propres sont les suites constantes.

Exercice 22 :

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que $A = \begin{pmatrix} a & \bar{b} \\ b & a \end{pmatrix}$

Discuter en fonction des valeurs de $a \in \mathbb{C}$ et de $b \in \mathbb{C}$ de la diagonalisation ou de la trigonalisation de A

Cet exercice ne me paraît pas difficile. Je l'ai mis pour changer d'espace : trop souvent, nous travaillons sur $\mathbb{R}$. Ici, nous nous intéressons à $\mathbb{C}^2$

Comme toute matrice d'ordre 2, le ploynôme caractéristique de A est donné par

$$P_A(X) = X^2 - 2aX + \left(a^2 - |b|^2\right)$$

Par calcul, les racines de P_A sont $\lambda_1 = a + |b|^2$ et $\lambda_2 = a - |b|^2$ et sont donc aussi les valeurs propres possibles de A.

⇒ Recherchons les vecteurs propres de valeur propre $\lambda_1 = a + |b|^2$

Nous devons chercher des vecteurs $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ tels que $A\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \left(a + |b|^2\right)\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$; ce qui revient à étudier le système :

$$\left\{\begin{array}{rl} az_1 + \overline{b}z_2 = & \left(a + |b|^2\right) z_1 \\ bz_1 + az_2 = & \left(a + |b|^2\right) z_2 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} -|b|^2 z_1 + \overline{b}z_2 = & 0 \\ bz_1 - |b|^2 z_2 = & 0 \end{array}\right.$$

Nous sommes devant un système de Cramer dont le déterminant est donné par :

$$\delta = |b|^4 - |b|^2 = |b|^2 \left(|b|^2 - 1\right)$$

- ⋆ Supposons $|b| = 0$ ou, ce qui est équivalent, $b = 0$.
  La matrice A devient alors $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = a\mathrm{Id}_2$
  A est donc la matrice d'une homothétie
- ⋆ Supposons $|b| = 1$
  Le système devient alors, en tenant compte que $|b|^2 = b\overline{b} = 1$, :

$$\left\{\begin{array}{rl} -z_1 + \overline{b}z_2 = & 0 \\ bz_1 - z_2 = & 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow bz_1 - z_2 = 0$$

  L'espace propre de valeur propre $\left(a + |b|^2\right) = a + 1$ est donc

$$E_{a+1} = \{(z, bz) \text{ où } z \in \mathbb{C}\} = \mathbb{C} \times \begin{pmatrix} 1 \\ b \end{pmatrix}$$

- ⋆ Bien sûr, si $|b| \neq 0$ ou $|b| \neq 1$, les seules solutions au système sont $z_1 = 0$ et $z_2 = 0$ et, à ce moment, $\lambda_1 = a + |b|^2$ n'est pas une valeur propre.
  Par contre, si $|b| \neq 0$ ou $|b| \neq 1$, la matrice A est trigonalisable

⇒ Recherchons, maintenant, les vecteurs propres de valeur propre $\lambda_2 = a - |b|^2$

Nous devons chercher des vecteurs $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ tels que $A\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \left(a - |b|^2\right)\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$; ce qui revient à étudier le système :

$$\left\{\begin{array}{rl} az_1 + \overline{b}z_2 = & \left(a - |b|^2\right) z_1 \\ bz_1 + az_2 = & \left(a - |b|^2\right) z_2 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} |b|^2 z_1 + \overline{b}z_2 = & 0 \\ bz_1 + |b|^2 z_2 = & 0 \end{array}\right.$$

Nous sommes devant un système de Cramer dont le déterminant est toujours donné par :

$$\delta = |b|^4 - |b|^2 = |b|^2 \left(|b|^2 - 1\right)$$

- ⋆ Supposons $|b| = 0$ ou, ce qui est équivalent, $b = 0$.
  La matrice A nous retrouvons alors $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = a\mathrm{Id}_2$
  A est donc la matrice d'une homothétie.
- ⋆ Supposons $|b| = 1$
  Le système devient alors, en tenant compte que $|b|^2 = b\overline{b} = 1$, :

$$\left\{\begin{array}{rl} z_1 + \overline{b}z_2 = & 0 \\ bz_1 + z_2 = & 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow bz_1 + z_2 = 0$$

  L'espace propre de valeur propre $\left(a - |b|^2\right) = a - 1$ est donc

$$E_{a-1} = \{(z, -bz) \text{ où } z \in \mathbb{C}\} = \mathbb{C} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -b \end{pmatrix}$$

- ⋆ Bien sûr, si $|b| \neq 0$ ou $|b| \neq 1$, les seules solutions au système sont $z_1 = 0$ et $z_2 = 0$ et, à ce moment, $\lambda_1 = a - |b|^2$ n'est pas une valeur propre, mais la matrice A est néanmoins trigonalisable

Exercice 23 :

Dans les matrices suivantes, on cherchera les valeurs propres et les vecteurs propres correspondant à chaque valeur propre. Trouver, s'il y a lieu, une base de $\mathbb{C}^n$ formée de vecteurs propres. Si la matrice est diagonalisable sur $\mathbb{C}$, trouver le plus petit sous-corps de $\mathbb{C}$, c'est à dire $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{Q}$ sur lequel la matrice est diagonalisable.

1. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}$

   Par calculs, le polynôme caractéristique de A est $P_A(X) = -(X+2)(X-1)^2$.
   Il y a 2 racines $X_0 = -2$ et $X_1 = 1$. 1 est racine double de P_A.
   Visiblement, $\overrightarrow{k}$ est vecteur propre de A et de valeur propre -2.
   Pour que A soit diagonisable il faudra que la dimension de l'espace propre associé à la valeur propre $\lambda = 1$ soit de dimension 2.
   <u>Recherchons les vecteur propre de valeur propre 1</u>
   Si $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ est un tel vecteur propre, nous devrons avoir :

$$\left\{\begin{array}{rl} 3x+y = & x \\ -4x-y = & y \\ 4x-8y-2z = & z \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rl} 2x+y = & 0 \\ -4x-2y = & 0 \\ 4x-8y-3z = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rl} 2x+y = & 0 \\ 4x-8y-3z = & 0 \end{array}\right.$$

   C'est l'équation d'une droite dans $\mathbb{R}^3$.
   Nous avons $E_1 = \{z\,(3,-6,20)\ \text{ où } z \in \mathbb{R}\}$.
   Donc $\dim E_1 = 1$ et la matrice A n'est pas diagonalisable

2. $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

   On peut remarquer que la matrice B est déjà une matrice triangulaire et que donc, le polynôme caractéristique de B est $P_A(X) = (1-X)^3$.
   Elle n'est sûrement pas diagonalisable. Si B était diagonalisable, B serait semblable à Id_3, la matrice identité, ce qui est impossible.
   Visiblement, ici aussi, seul $\overrightarrow{i}$ est un vecteur propre de valeur propre 1

3. $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

   Recherchons le polynôme caractéristique de C.
   Par calculs, nous trouvons $P_C = (2-X)\left(X^2 - X + 44\right)$.
   le polynôme P_C n'a qu'une seule racine réelle $X_0 = 2$ et la matrice C n'est donc pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$; elle l'est, par contre, dans $\mathbb{C}$.
   En résolvant de manière classique le système adéquat, on trouve comme espace propre pour la valeur propre 2 :

$$E_2 = \{x\,(2,1,0)\ \text{ avec } x \in \mathbb{K}\}$$

4. $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

   Comme pour toutes les autres questions, nous calculons le polynôme caractéristique de D.
   Nous avons $P_D = (1-X)\left(X^2 - 9X + 22\right)$. P_D n'admettant, dans $\mathbb{R}$ qu'une seule racine, D n'est donc pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$.
   Recherchons l'espace propre de valeur propre 1.

Un vecteur propre de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et de valeur propre 1 vérifie le système d'équations :

$$\left\{ \begin{array}{rl} 4x - 2z = & x \\ y = & y \\ x - 2y + 5z = & z \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rl} 3x - 2z = & 0 \\ x - 2y + 4z = & 0 \end{array} \right.$$

C'est donc une droite et nous avons :

$$E_1 = \{z\,(2,7,3) \text{ avec } z \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 24 :

Soit $m \in \mathbb{R}$ un nombre réel et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2-m & m-2 & m \end{pmatrix}$$

1. *Quelles sont les valeurs propres de f ?*

   Nous allons donc calculer le polynôme caractéristique de A en développant suivant la première ligne

$$\begin{aligned} P_A(X) = \begin{vmatrix} 1-X & 0 & 1 \\ -1 & 2-X & 1 \\ 2-m & m-2 & m-X \end{vmatrix} &= (1-X) \begin{vmatrix} 2-X & 1 \\ m-2 & m-X \end{vmatrix} + 1 \times \begin{vmatrix} -1 & 2-X \\ 2-m & m-2 \end{vmatrix} \\ &= (1-X)\left[(2-X)(m-X) - (m-2)\right] + \left[-(m-2) - (2-m)(2-X)\right] \\ &= (1-X)\left[(2-X)(m-X) - (m-2)\right] + (m-2)\left[-1 + (2-X)\right] \\ &= (1-X)\left[(2-X)(m-X) - (m-2)\right] + (m-2)\left[1-X\right] \\ &= (1-X)\left[(2-X)(m-X) - (m-2) + (m-2)\right] \\ &= (1-X)(2-X)(m-X) \end{aligned}$$

   Les valeurs propres de A sont donc 1,2 et m. En particulier, si $m = 1$ ou $m = 2$, la matrice A n'admet que deux valeurs propres.

2. *Pour quelles valeurs de $m \in \mathbb{R}$, l'endomorphisme est-il diagonalisable ?*

   ⇒ Si $m \neq 1$ et $m \neq 2$, les racines de P_A sont simples et la matrice A est diagonalisable.

   ⇒ Si $m = 1$, alors le polynôme caractéristique $P_A(X) = (1-X)^2(2-X)$; la valeur $\lambda = 1$ est racine double de P_A. A sera diagonalisable si et seulement si l'espace propre associé sera de dimension 2.

   Pour $m = 1$, la matrice A devient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ se traduit par :

$$\left\{ \begin{array}{rl} x + z = & x \\ -x + 2y + z = & y \\ x - y + z = & z \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rl} z = & 0 \\ -x + y + z = & 0 \\ x - y = & 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rl} z = & 0 \\ x - y = & 0 \end{array} \right.$$

   L'espace propre associé à la valeur propre 1 est alors $E_1 = \{x\,(1,1,0) \text{ avec } x \in \mathbb{R}\}$
   Nous avons $\dim E_1 = 1$ et la matrice A n'est pas diagonalisable

   ⇒ Si $m = 2$, alors le polynôme caractéristique $P_A(X) = (1-X)(2-X)^2$; la valeur $\lambda = 2$ est racine double de P_A. A sera diagonalisable si et seulement si l'espace propre associé sera de dimension 2.

Pour $m = 2$, la matrice A devient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ se traduit par :

$$\left\{ \begin{array}{rl} x + z = & 2x \\ -x + 2y + z = & 2y \\ 2z = & 2z \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rl} -x + z = & 0 \\ -x + z = & 0 \end{array} \right.$$

L'espace propre associé à la valeur propre 2 est alors $E_2 = \{(x, y, x) \text{ avec } x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R}\}$
Nous avons $\dim E_2 = 2$ et la matrice A est diagonalisable

3. *On suppose $m = 2$. Calculer A^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.*

Revenons à $m = 2$.

La matrice A est donnée par $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ dont les valeurs propres sont 1 et 2.

$\Rightarrow$ Nous connaissons le sous-espace propre E_2 dont une base est donnée par $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ Il nous faut, maintenant, chercher l'espace propre E_1 pour la valeur propre 1.

$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ se traduit, avec $m = 2$, par :

$$\left\{ \begin{array}{rl} x + z = & x \\ -x + 2y + z = & y \\ 2z = & 2z \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rl} z = & 0 \\ -x + y + z = & 0 \end{array} \right.$$

L'espace propre associé à la valeur propre 1 est alors $E_1 = \{(x, x, 0) \text{ avec } x \in \mathbb{R}\}$. Une base de E_1 est donc le vecteur $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

La famille de vecteurs $\left\{\overrightarrow{v}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{u}\right\}$ forme une base de $\mathbb{R}^3$.
Si f est un endomorphisme de matrice A dans la base canonique, la matrice de f sera, dans la base $\left\{\overrightarrow{v}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{u}\right\}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et nous aurons $A = PDP^{-1}$ où $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et donc $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous aurons $A^n = PD^nP^{-1}$ où $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ D'où, nous trouvons, par calculs :

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2^n - 1 \\ 1 - 2^n & 2^n & 2^n - 1 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

Exercice 25 :

Pour $a \in \mathbb{C}$, $b \in \mathbb{C}$ et $c \in \mathbb{C}$ des nombres complexes, on pose $M(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$ et $J = M(0, 1, 0)$.

1. *Exprimer $M(a,b,c)$ en fonction de Id_3, J et J^2*

   Un calcul simple montre que $J^2 = M(0,0,1)$ et que $J^3 = M(1,0,0) = \mathrm{Id}_3$ et, très simplement, nous avons :
   $$M(a,b,c) = aM(1,0,0) + bM(0,1,0) + cM(0,0,1) = a\mathrm{Id}_3 + bJ + cJ^2$$
   Ce qui nous simplifie le calcul entre 2 matrices du même type :
   $$M(a,b,c) \times M(a',b',c') = M(aa' + bc' + cb', ab' + ba' + cc', ac' + bb' + ca')$$

2. *Démontrer que J est diagonalisable, et donner ses valeurs propres et ses vecteurs propres.*

   $\Rightarrow$ Le polynôme caractéristique est donné par :
   $$P_J(X) = \begin{vmatrix} -X & 1 & 0 \\ 0 & -X & 1 \\ 1 & 0 & -X \end{vmatrix} = -X \begin{vmatrix} -X & 1 \\ 0 & -X \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -X & 1 \end{vmatrix} = 1 - X^3$$
   P_J admet 3 racines complexes distinctes 1, j et j^2.
   La matrice J est donc diagonalisable dans $\mathbb{C}$

   $\Rightarrow$ Recherche des vecteurs propres de valeur propre 1

   Si $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ est un tel vecteur, il devra alors vérifier :
   $$\begin{cases} y = & x \\ z = & y \\ x = & z \end{cases} \iff x = y = z$$
   L'espace propre E_1 est donc $E_1 = \{x(1,1,1) \text{ où } x \in \mathbb{C}\}$

   $\Rightarrow$ Recherche des vecteurs propres de valeur propre j

   Si $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ est un tel vecteur, il devra alors vérifier :
   $$\begin{cases} y = & jx \\ z = & jy \\ x = & jz \end{cases} \iff x = j^2 y = jz$$
   L'espace propre E_j est donc $E_j = \left\{y\left(j^2,1,j\right) \text{ où } y \in \mathbb{C}\right\}$

   $\Rightarrow$ Pour terminer, recherchons des vecteurs propres de valeur propre j^2

   Si $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ est un tel vecteur, il devra alors vérifier :
   $$\begin{cases} y = & j^2 x \\ z = & j^2 y \\ x = & j^2 z \end{cases} \iff x = j^2 z = jy$$
   L'espace propre E_{j^2} est donc $E_{j^2} = \left\{z\left(j,1,j^2\right) \text{ où } z \in \mathbb{C}\right\}$

3. *En déduire que $M(a,b,c)$ est diagonalisable, et donner ses valeurs propres.*

   Comme nous savons que J est semblable à la matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & j^2 \end{pmatrix}$, il existe des matrices P et P^{-1} telles que $J = PDP^{-1}$.
   Nous aurons alors $J^2 = PD^2P^{-1}$

De l'identité $M(a,b,c) = a\mathrm{Id}_3 + bJ + cJ^2$, nous tirons :

$$\begin{aligned} M(a,b,c) = a\mathrm{Id}_3 + bJ + cJ^2 = & \; aPP^{-1} + bPDP^{-1} + cPD^2P^{-1} \\ = & \; P\left(a\mathrm{Id}_3 + bD + cD^2\right)P^{-1} \end{aligned}$$

En posant $\Delta = a\mathrm{Id}_3 + bD + cD^2$, nous avons $\Delta = \begin{pmatrix} a+b+c & 0 & 0 \\ 0 & a+bj+cj^2 & 0 \\ 0 & 0 & a+bj^2+cj \end{pmatrix}$

Ainsi, la matrice $M(a,b,c)$ est diagonalisable, et ses valeurs propres sont $a+b+c$, $a+bj+cj^2$, $a+bj^2+cj$.

Vous prendrez bien encore un petit verre ?

1. J est, en fait, une matrice de permutation. Expliquons nous :
   Si Σ est un endomorphisme de E, de matrice, dans la base canonique $\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right\}$, J, nous avons :
   $$\Sigma\left(\overrightarrow{i}\right) = \overrightarrow{k} \quad \Sigma\left(\overrightarrow{j}\right) = \overrightarrow{i} \quad \Sigma\left(\overrightarrow{k}\right) = \overrightarrow{j}$$
   On peut remarquer que $\Sigma^3 = \mathrm{Id}_3$ et que l'ensemble $\left\{\mathrm{Id}_3, \Sigma, \Sigma^2\right\}$ forme un groupe pour la composition de applications
2. Utiliser l'exercice précédent pour déterminer toutes les matrices $M(a,b,c)$ telles que $M(a,b,c) \times M(a,b,c) = \mathrm{Id}_3$

Exercice 26 :

1. *Soit $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; calculer B^2, B^3, puis montrer que $B^3 = 4B^2 - 4B$*

   Les calculs matriciels sont évidents. Nous avons :
   $$B^2 = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 2 \\ -4 & -2 & -2 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B^3 = \begin{pmatrix} 20 & 16 & 4 \\ -12 & -8 & -4 \\ 12 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$
   Une vérification simple montre que $B^3 = 4B^2 - 4B$
2. *En déduire vecteurs propres et valeurs propres de B*

   Si $x \in E$ est vecteur propre de B de valeur propre λ, alors, pour tout $n_i n\mathbb{N}$, nous avons $B^n(x) = \lambda^n x$ et donc $B^3(x) = \lambda^3 x$ et $\left(4B^2 - 4B\right)(x) = \left(4\lambda^2 - 4\lambda\right)x$.
   Comme $x \neq \overrightarrow{0}$, nous avons $\lambda^3 = 4\lambda^2 - 4\lambda \iff \lambda^3 - 4\lambda^2 + 4\lambda = 0 \iff \lambda(\lambda - 2)^2$
   Les valeurs propres de B sont donc 0 et 2

Exercice 27 :

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel .

1. *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent. Démontrer que la seule valeur propre de f est 0*

   Si $f \in \mathcal{L}(E)$ est un endomorphisme nilpotent, alors il existe un entier k tel que $f^k = \mathcal{O}_E$
   Maintenant, si λ est une valeur propre associée à $\overrightarrow{x}$ non nul, alors : $f(x) = \lambda\overrightarrow{x}$ et donc $f^k(x) = \lambda^k\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$; comme $\overrightarrow{x} \neq \overrightarrow{0}$, nous en déduisons $\lambda = 0$
2. *Réciproquement, démontrer que si $f \in \mathcal{L}(E)$ a toutes ses valeurs propres nulles, alors f est nilpotent*

   Réciproquement, supposons que λ soit une valeur propre non nulle associée au vecteur propre $\overrightarrow{x}$, et que f soit nilpotent.
   Alors pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $f^n(x) = \lambda^n\overrightarrow{x}$ est non nul et donc f n'est pas nilpotent.
   Contradiction et donc f est nilpotent

Exercice 28 :

1. *E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n et $f : E \longmapsto E$ un endomorphisme de E tel que $f^2 = f$. Quelles sont les valeurs propres de f ?*

   Soit $x \in E$ un vecteur propre non nul de valeur propre λ ; alors $f^2(x) = f(x) \Longleftrightarrow \lambda^2 x = \lambda x$, et comme $x \neq \overrightarrow{0}$, nous avons $\lambda^2 = \lambda$, c'est à dire $\lambda = 1$ et $\lambda = 0$

   Les 2 valeurs propres de f sont $\lambda = 1$ et $\lambda = 0$

   Rien d'étonnant à cela puisque f est un projecteur

2. *Trouver toutes les matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telles que $A^2 = A$*

   Nous revenons à la question précédente où nous avons les valeurs propres de A qui sont 0 et 1.
   Ainsi, toute matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que $A^2 = A$ sera semblable à une matrice de la forme $D_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ou $D_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ou $\mathcal{O}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ou $\mathrm{Id}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

   Il existera donc une matrice $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, c'est à dire telle que $ad - bc \neq 0$ telle que $A = PD_1P^{-1}$ ou $A = PD_2P^{-1}$

   Par calculs, nous trouvons 2 types de matrices :

   ▷ Le premier type $A_1 = \dfrac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} -bc & -bd \\ ac & ad \end{pmatrix}$ avec $a \in \mathbb{C}$, $b \in \mathbb{C}$, $c \in \mathbb{C}$ et $d \in \mathbb{C}$ et $ad - bc \neq 0$

   ▷ Le premier type $A_2 = \dfrac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} ad & bd \\ -ac & -bc \end{pmatrix}$ avec toujours $a \in \mathbb{C}$, $b \in \mathbb{C}$, $c \in \mathbb{C}$ et $d \in \mathbb{C}$ et $ad - bc \neq 0$

   Les seules matrices semblables à $\mathcal{O}_2$ ou Id_2 sont elles-mêmes ; donc peu intéressantes.

12.8.3 Approfondissements

Exercice 29 :

Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} a+b & 0 & a \\ 0 & b & a \\ a & 0 & a+b \end{pmatrix}$ est semblable à une matrice triangulaire

On discutera suivant les valeurs de a et de b

Nous allons commencer par quelques « bricolages »

1. Si $a = 0$, alors la matrice A devient $A = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} = b\mathrm{Id}_3$ et alors $A^n = b^n \mathrm{Id}_3$.

   Remarquons que si $b = 0$, alors A est la matrice nulle et $A^n = \mathcal{O}_n$.
   Dans notre cas, A est semblable à une matrice diagonale *(En fait, une matrice d'homthétie)*

2. Si $a \neq 0$ et $b = 0$, alors la matrice A devient $A = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & 0 & a \\ a & 0 & a \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = a\mathcal{U}$ où $\mathcal{U} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   Nous aurons donc $A^n = a^n \mathcal{U}^n$

   Adonnons nous à de nouveaux bricolages

   ▷ Pour $n = 2$, par calculs, nous avons $\mathcal{U}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

   Pour $n = 3$, c'est $\mathcal{U}^3 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

▷ Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, nous avons $\mathcal{U}^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \\ 2^{n-2} & 0 & 2^{n-2} \\ 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}$.

Et donc, $A^n = a^n \mathcal{U}^n = \begin{pmatrix} a^n 2^{n-1} & 0 & a^n 2^{n-1} \\ a^n 2^{n-2} & 0 & a^n 2^{n-2} \\ a^n 2^{n-1} & 0 & a^n 2^{n-1} \end{pmatrix}$.

Nous n'avons pas montré qu'elle était semblable à une matrice triangulaire.

Et maintenant, « jouons sérieux » en supposant $a \neq 0$ et $b \neq 0$

Nous allons tenter de trigonaliser la matrice A.

1. Recherchons donc le polynôme caractéristique de A

$$\begin{aligned} P_A(X) = \det(A - X\mathrm{Id}_3) = & \begin{vmatrix} a+b-X & 0 & a \\ 0 & b-X & a \\ a & 0 & a+b-X \end{vmatrix} \\ = & (a+b-X)\begin{vmatrix} b-X & a \\ 0 & a+b-X \end{vmatrix} + a \begin{vmatrix} 0 & a \\ b-X & a \end{vmatrix} \\ = & (a+b-X)^2 (b-X) + a\left[-a(b-X)\right] \\ = & (a+b-X)^2 (b-X) - a^2 (b-X) \\ = & (b-X)\left[(a+b-X) - a\right]\left[(a+b-X)+a\right] \\ = & (b-X)^2 (2a+b-X) \end{aligned}$$

P_A a donc 2 racines : l'une $x_1 = b$ laquelle est une racine double, et l'autre $x_2 = 2a+b$ qui est une racine simple

2. Recherchons, maintenant, les espaces propres associés aux valeurs propres $\lambda_1 = b$ et $\lambda_2 = 2a+b$

(a) <u>Pour $\lambda_1 = b$</u>

Nous devons trouver des vecteurs $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tels que $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = b\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Or :

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = b\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rl} (a+b)x + az = & bx \\ by + az = & by \\ ax + (a+b)z = & bz \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rl} ax + az = & 0 \\ az = & 0 \\ ax + az = & 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rl} x + z = & 0 \\ z = & 0 \end{array} \right.$$

puisque $a \neq 0$; donc $x = z = 0$ et $y \in \mathbb{R}$

L'espace propre de valeur propre b est donc de dimension 1 : c'est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\overrightarrow{j}$. La matrice A n'est donc pas diagonalisable.

(b) <u>Pour $\lambda_2 = 2a+b$</u>

Nous devons, cette fois-ci, résoudre :

$$\left\{ \begin{array}{rl} (a+b)x + az = & (2a+b)x \\ by + az = & (2a+b)y \\ ax + (a+b)z = & (2a+b)z \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rl} -ax + az = & 0 \\ -2ay + az = & 0 \\ ax - az = & 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rl} x - z = & 0 \\ z = & 2y \end{array} \right.$$

L'espace propre de valeur propre $2a+b$ est donc : $E_{2a+b} = \{y(2,1,2) \text{ où } y \in \mathbb{R}\}$

3. (a) Appelons $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$; alors, la famille $\mathcal{B}_T = \left\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right\}$ est une base de E.

(b) On appelle f l'endomorphisme de E qui admet A pour matrice dans la base canonique $Can = \left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right\}$. Alors :

▷ $f(\overrightarrow{u}) = (2a+b)\overrightarrow{u}$, $f\left(\overrightarrow{j}\right) = b\overrightarrow{j}$ et $f\left(\overrightarrow{k}\right) = a\overrightarrow{i} + a\overrightarrow{j} + (a+b)\overrightarrow{k}$

▷ Si $\overrightarrow{u} = 2\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$, alors $\overrightarrow{i} = \frac{1}{2}\overrightarrow{u} - \frac{1}{2}\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$, de telle sorte que :

$$\begin{aligned} f\left(\overrightarrow{k}\right) &= a\overrightarrow{i} + a\overrightarrow{j} + (a+b)\overrightarrow{k} \\ &= a\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{u} - \frac{1}{2}\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}\right) + a\overrightarrow{j} + (a+b)\overrightarrow{k} \\ &= \frac{a}{2}\overrightarrow{u} - \frac{a}{2}\overrightarrow{j} + b\overrightarrow{k} \end{aligned}$$

Ainsi, dans la base $\mathcal{B}_T$, l'endomorphisme f a pour matrice $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_T}(f) = T = \begin{pmatrix} 2a+b & 0 & \frac{a}{2} \\ 0 & b & \frac{a}{2} \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$

▷ En nous intéressant aux matrices de passage, en posant $P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, nous avons $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{-1}{2} & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et donc $A = PTP^{-1}$.

La matrice A est donc bien semblable à la matrice T

Exercice 30 :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente d'indice p

1. *Démontrer que $A^n = \mathcal{O}_n$*

   Si la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est nilpotente d'indice p, alors la seule valeur propre de A est 0 et P_A, le polynôme caractéristique de A est $P_A(X) = (-X)^n$. D'après le théorème de Cayley-Hamilton 12.6.15, nous avons $P_A(A) = \mathcal{O}_n$, c'est à dire $(-1)^n A^n = \mathcal{O}_n$, et donc $A^n = \mathcal{O}_n$

2. *Calculer* $\det(A + \mathrm{Id}_n)$

   A étant nilpotente, est semblable à une matrice triangulaire dont tous les termes diagonaux sont nuls. Donc, $(A + \mathrm{Id}_n)$ est une matrice triangulaire dont tous les termes diagonaux sont égaux à 1. et nous avons donc $\det(A + \mathrm{Id}_n) = 1$

3. *Soit $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $AM = MA$. Calculer* $\det(A + M)$

   Nous avons $A + M = M\left(AM^{-1} + \mathrm{Id}_n\right)$ et donc $\det(A + M) = \det M \times \det\left(AM^{-1} + \mathrm{Id}_n\right)$
   Nous avons aussi $AM = MA \iff AM^{-1} = M^{-1}A$ et donc $\left(AM^{-1}\right)^p = A^p \times \left(M^{-1}\right)^p$ et donc, AM^{-1} est nilpotente d'indice p. D'après la question précédente, $\det\left(AM^{-1} + \mathrm{Id}_n\right) = 1$ et donc $\det(A + M) = \det M$

   De l'importance de la commutativité.

   Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Nous avons $A^2 = \mathcal{O}_2$. A est donc nilpotente d'indice 2.

   Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Nous avons $M \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, $\det M = 1$ et $AM \neq MA$.

   Ensuite, $M + A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et donc $\det(A + M) = 0 \neq \det M$

Exercice 31 :

On considère $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathcal{B}_0 = \left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right\}$.
Soient $f \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^3\right)$ et $g \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^3\right)$ des endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ dont les matrices dans la base canonique sont :

$$M = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_0}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad N = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_0}(g) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. *Démontrez que f et g commutent*

   Les ensembles $\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^3\right)$ et $\mathcal{M}_3\left(\mathbb{R}\right)$ sont isomorphes et démontrer que $f\circ g = g\circ f$, c'est démontrer que $MN = NM$. Or :
$$MN = NM = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$
   Donc, $MN = NM$ et donc $f\circ g = g\circ f$

2. *Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de f et g*

   Exercice classique... et éreintant !!

   (a) <u>Recherche des vecteurs propres et valeurs propres de f</u>

   $\Rightarrow$ Comme d'habitude, nous allons nous pencher sur le polynôme caractéristique de f.
$$\begin{aligned} P_f\left(X\right) = \det\left(M - X\mathrm{Id}_3\right) &= \begin{vmatrix} 1-X & 0 & 0 \\ 0 & -X & -1 \\ 0 & 1 & 2-X \end{vmatrix} \\ &= (1-X)\begin{vmatrix} -X & -1 \\ 1 & 2-X \end{vmatrix} = (1-X)\left[-X\left(2-X\right)+1\right] \\ &= (1-X)^3 \end{aligned}$$
   f n'a donc qu'une seule valeur propre $\lambda = 1$, laquelle est une valeur propre triple.

   $\Rightarrow$ Recherchons, maintenant un vecteur propre et/ou l'espace propre de valeur propre 1. Ces vecteurs propres doivent répondre à l'équation $f\left(u\right) = u$, c'est à dire, qu'en termes matriciel, nous devons avoir $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, ce qui se traduit en termes de systèmes d'équations par :
$$\left\{\begin{array}{rl} x = & x \\ -z = & y \\ y + 2z = & z \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} -y - z = & 0 \\ y + z = & 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow y + z = 0$$
   L'espace propre de valeur propre 1 est le plan d'équation $y + z = 0$ de base, par exemple $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

   Ce qui nous permet de conclure que f n'est pas diagonalisable

   (b) <u>Recherche des vecteurs propres et valeurs propres de g</u>

   Itérons !!

   $\Rightarrow$ Nous allons nous pencher sur le polynôme caractéristique de g.
$$\begin{aligned} P_g\left(X\right) = \det\left(N - X\mathrm{Id}_3\right) &= \begin{vmatrix} -X & 1 & 1 \\ -1 & 1-X & -1 \\ 1 & 1 & 3-X \end{vmatrix} \\ &= -X\begin{vmatrix} 1-X & -1 \\ 1 & 3-X \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3-X \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1-X & -1 \end{vmatrix} \\ &= -X\left[(1-X)(3-X)+1\right] + \left[3 - X - 1\right] + \left[-1 - (1-X)\right] \\ &= -X\left[X^2 - 4X + 4\right] + \left[2 - X\right] + X \\ &= -X\left(X-2\right)^2 + (2-X) + (X-2) \\ &= -X\left(X-2\right)^2 \end{aligned}$$
   g a donc 2 valeurs propres dstinctes $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 2$; μ_2 étant une valeur propre double

   $\Rightarrow$ Recherchons, maintenant les vecteurs propres de g

   $\star$ Pour la valeur propre $\mu_1 = 0$

   Les vecteurs propres doivent répondre à l'équation $g\left(u\right) = \overrightarrow{0}$, c'est à dire, qu'en termes matriciel, nous devons avoir $N\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; autrement dit, nous recherchons $\ker g$

Ces vecteurs propres vérifient alors le système d'équations :

$$\left\{\begin{array}{rl} y+z= & 0 \\ -x+y-z= & 0 \\ x+y+3z= & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rl} y+z= & 0 \\ x-y+z= & 0 \end{array}\right.$$

L'espace propre de valeur propre $\mu_1 = 0$ est la droite d'équation $\left\{\begin{array}{rl} y+z= & 0 \\ x-y+z= & 0 \end{array}\right.$ de base, par exemple $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 2u_1 - u_2$

⋆ Pour la valeur propre $\mu_2 = 2$
Les vecteurs propres doivent répondre à l'équation $g(u) = 2u$, c'est à dire, qu'en termes matriciel, nous devons avoir $N\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}$
Ces vecteurs propres vérifient alors le système d'équations :

$$\left\{\begin{array}{rl} y+z= & 2x \\ -x+y-z= & 2y \\ x+y+3z= & 2z \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rl} 2x-y-z= & 0 \\ x+y+z= & 0 \\ x+y+z= & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rl} 2x-y-z= & 0 \\ x+y+z= & 0 \end{array}\right.$$

L'espace propre de valeur propre $\mu_2 = 2$ est la droite d'équation $\left\{\begin{array}{rl} 2x-y-z= & 0 \\ x+y+z= & 0 \end{array}\right.$ de base, par exemple $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -u_1$

Ce qui nous permet de conclure que g n'est pas diagonalisable

3. *Parmi les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$, invariants par f et g, montrer qu'il en existe un de dimension 1 et un autre de dimension 2. En déduire une base de $\mathbb{R}^3$ par rapport à laquelle les matrices de f et g sont triangulaires.*

C'est une question que je trouve assez emberlificotée!!. M'enfin!!
Rappelons les égalités :

$$(v_1 = 2u_1 - u_2 \text{ et } v_2 = -u_1) \iff (u_1 = -v_2 \text{ et } u_2 = -v_1 - 2v_2)$$

⇒ Recherche de sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$, invariants par f et g

▷ Soit $F = \text{span}(\{u_1\})$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par u_1
Alors, F est stable par f et g. En effet :
$f(u_1) = u_1$ et $g(u_1) = g(-v_2) = -g(v_2) = -2v_2 = 2u_1$

▷ Soit $G = \text{span}(\{u_1, u_2\})$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par u_1 et u_2
Alors, G est stable par f et g. En effet, nous avons déjà démontré que $f(u_1) = u_1$ et $g(u_1) = 2u_1$.
Maintenant, $f(u_2) = u_2$ et $g(u_2) = g(-v_1 - 2v_2) = -g(v_1) - 2g(v_2) = -4v_2 = 4u_1$
$G = \text{span}(\{u_1, u_2\})$ est bien stable par f et g

⇒ Recherche d'une base de $\mathbb{R}^3$ par rapport à laquelle les matrices de f et g sont triangulaires. Soit $k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ il est évident que la famille $\{u_1, u_2, k\}$ forme une base de $\mathbb{R}^3$

Dans la base canonique, nous avons $f(k) = -j + 2k = u_2 + k$ et donc $\mathcal{M}_{\{u_1,u_2,k\}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

De même, dans la base canonique, nous avons $g(k) = i - j + 3k = u_1 + u_2 + 2k$ et donc $\mathcal{M}_{\{u_1,u_2,k\}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Exercice 32 :

Résoudre dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'équation $X^2 = A$ où $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 8 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Soit $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

- Si nous avons $X^2 = A$ alors, en multipliant à droite, $AX = X^3$ et en multipliant à gauche $XA = X^3$ et donc $AX = XA$ ce qui veut dire que X et A commutent.
- Il est clair et facile à voir que A admet trois valeurs propres réelles et simples à savoir 1, 3 et 4. Donc A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et les sous-espaces vectoriels propres de A sont des droites Δ_1,Δ_2 et Δ_3.

  Nous avons démontré que si f et u étaient 2 endomorphismes qui commutent et que si E_λ était un espace propre de u, alors E_λ était un sous-espace vectoriel stable par f

  Comme X commute avec A, X laisse stable les trois droites propres Δ_1,Δ_2 et Δ_3.
  Ainsi une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de A est également une base de vecteurs propres de X ou encore, si P est une matrice réelle inversible telle que $P^{-1}AP$ soit une matrice diagonale D_0 alors pour la même matrice P, $P^{-1}XP$ est une matrice diagonale D et donc $X = PDP^{-1}$. De plus

$$X^2 = A \iff PD^2P^{-1} = PD_0P^{-1} \iff D^2 = D_0 \iff D = \begin{pmatrix} \pm\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & \pm 2 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$$

  Ce qui fournit $2^3 = 8$ solutions deux à opposées.

  Pour P, on peut prendre $P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -16 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et donc $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 8 & 1 & 0 \\ -\frac{5}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$

  D'où nous tirons les valeurs de X.

  En posant $\varepsilon_1 = \pm 1$, $\varepsilon_2 = \pm 1$ et $\varepsilon_3 = \pm 1$, nous avons $D = \begin{pmatrix} \varepsilon_1\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 2\varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}$ et nous avons alors :

$$X = \begin{pmatrix} \varepsilon_1\sqrt{3} & 0 & 0 \\ -8\varepsilon_1\sqrt{3} + 16\varepsilon_2 & 2\varepsilon_2 & 0 \\ \frac{5}{2}\left(\varepsilon_1\sqrt{3} - \varepsilon_3\right) & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}$$

Exercice 33 :

On considère $\mathbb{C}_3[X]$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 3.
Soient $A(X) = X^4 - 1$ et $B(X) = X^4 - X$, et

$$\begin{cases} f : \mathbb{C}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{C}_3[X] \\ \quad P & \longmapsto & f(P) = R \end{cases}$$

où $R = f(P)$ est le reste de la division euclidienne de AP par B.

1. *Vérifier que f est un endomorphisme de $\mathbb{C}_3[X]$*
   - ⋆ Soit $P \in \mathbb{C}_3[X]$ et effectuons la division euclidienne de AP par B :

$$AP = BQ + R \text{ avec } ((\deg R < \deg B) \iff (\deg R \leqslant 3))$$

     Ainsi, si $f(P) = R$, nous avons $f(P) \in \mathbb{C}_3[X]$.
   - ⋆ Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et $P \in \mathbb{C}_3[X]$. Nous allons étudier $f(\lambda P)$

$$AP = BQ + R \iff A(\lambda P) = \lambda(AP) = \lambda(BQ + R) = B(\lambda Q) + \lambda R$$

     Donc, $f(\lambda P) = \lambda R = \lambda f(P)$

- ⋆ Soient $P_1 \in \mathbb{C}_3[X]$ et $P_2 \in \mathbb{C}_3[X]$.
  Alors $AP_1 = BQ_1 + R_1$ et $AP_2 = BQ_2 + R_2$
  Et nous avons $f(P_1) = R_1$ et $f(P_2) = R_2$
  Maintenant,
  $$A(P_1 + P_2) = AP_1 + AP_2 = (BQ_1 + R_1) + (BQ_2 + R_2) = B(Q_1 + Q_2) + (R_1 + R_2)$$
  Nous avons donc $f(P_1 + P_2) = (R_1 + R_2) = f(P_1) + f(P_2)$

f est donc un endomorphisme de $\mathbb{C}_3[X]$

2. *Déterminer* $\ker f$ *et* $\mathrm{Im} f$

Pour commencer, nous allons préciser la base canonique de $\mathbb{C}_3[X]$.
Cette base est donnée par $Can = \{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ où, pour $k = 0, \cdots, 3$, nous avons $e_k(X) = X^k$

- ⋆ Etude de $f(e_0)$
  $$1\left(X^4 - 1\right) = X^4 - 1 = \left(X^4 - X\right) + (X - 1)$$
  Et donc $f(e_0) = -e_0 + e_1$
- ⋆ Etude de $f(e_1)$
  $$X\left(X^4 - 1\right) = X^5 - X = X\left(X^4 - X\right) + \left(X^2 - X\right)$$
  Et donc $f(e_1) = -e_1 + e_2$
- ⋆ Etude de $f(e_2)$
  $$X^2\left(X^4 - 1\right) = X^6 - X^2 = X^2\left(X^4 - X\right) + \left(X^3 - X^2\right)$$
  Et donc $f(e_2) = -e_2 + e_3$
- ⋆ Etude de $f(e_3)$
  $$X^3\left(X^4 - 1\right) = X^7 - X^3 = \left(X^3 + 1\right)\left(X^4 - X\right) + \left(X - X^3\right)$$
  Et donc $f(e_3) = e_1 - e_3$

Nous obtenons donc la matrice de f dans la base canonique Can
$$\mathcal{M}_{Can}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

⇒ Recherche du noyau $\ker f$.
Si $P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d$ et si $P \in \ker f$, alors les termes a, b, c, d doivent vérifier le système d'équations :
$$\begin{cases} -d = & 0 \\ d - c + a = & 0 \\ c - b = & 0 \\ b - a = & 0 \end{cases} \Longleftrightarrow d = 0 \text{ et } a = b = c$$
Ainsi, $P \in \ker f$ si et seulement si $P(X) = a\left(X^3 + X^2 + X\right) = aX(X - j)\left(X - j^2\right)$ avec $a \in \mathbb{C}$

⇒ Recherche de $\mathrm{Im} f$, l'image de f
Comme $\dim \ker f = 1$ et que $\dim \mathbb{C}_3[X] = 4$, nous avons $\dim \mathrm{Im} f = 3$.
Nous pouvons remarquer que $f(e_3) = -f(e_1) - f(e_2)$ et donc $\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}\left(\{f(e_0), f(e_1), f(e_2)\}\right)$ et, en termes de polynômes, $\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}\left(\left\{(X - 1), \left(X^2 - X\right), \left(X^3 - X^2\right)\right\}\right)$

3. *Rechercher les valeurs et vecteurs propres de* f

⇒ Recherche des valeurs propres

Comme à chaque fois, nous allons nous pencher sur le polynôme caractéristique de f :

$$\begin{aligned}
P_f(X) &= \begin{vmatrix} -1-X & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1-X & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1-X & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1-X \end{vmatrix} \\
&= (-1-X) \begin{vmatrix} -1-X & 0 & 1 \\ 1 & -1-X & 0 \\ 0 & 1 & -1-X \end{vmatrix} \\
&= (-1-X) \left[(-1-X) \begin{vmatrix} -1-X & 0 \\ 1 & -1-X \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1-X \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right] \\
&= (-1-X) \left[(-1-X)^3 + 1 \right] \\
&= (-1-X) \left[-X^3 - 3X^2 - 3X \right] \\
&= X(X+1)\left(X^2+3X+3\right) \\
&= X(X+1)(X-(-1+j))\left(X-\left(-1+j^2\right)\right)
\end{aligned}$$

f admet donc 4 valeurs propres et est donc diagonalisable. Ces valeurs propres sont $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -1+j$ et $\lambda_3 = -1+j^2$

$\Rightarrow$ Recherche des vecteurs propres

- $\triangleright$ Pour la valeurs $\lambda_0 = 0$, c'est la recherche du noyau dont nous avons trouvé une base.
- $\triangleright$ Pour la valeurs $\lambda_1 = -1$, les coordonnées du vecteur propre devont vérifier

$$\left\{\begin{array}{rl} -d = & -d \\ d-c+a = & -c \\ c-b = & -b \\ b-a = & -a \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rl} d = & d \\ d+a = & 0 \\ c = & 0 \\ b = & 0 \end{array}\right. \iff c=0 \quad b=0 \quad a=-d$$

Ainsi, si $P \in E_{-1}$, alors $P(X) = a\left(X^3-1\right)$ avec $a \in \mathbb{C}$

- $\triangleright$ Pour la valeurs $\lambda_2 = -1+j$, les coordonnées du vecteur propre devont vérifier

$$\left\{\begin{array}{rl} -d = & (-1+j)\,d \\ d-c+a = & (-1+j)\,c \\ c-b = & (-1+j)\,b \\ b-a = & (-1+j)\,a \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rl} jd = & 0 \\ d-jc+a = & 0 \\ c-jb = & 0 \\ b-ja = & 0 \end{array}\right. \iff d=0 \quad c=jb \quad b\in\mathbb{C} \quad a=j^2b$$

Ainsi, si $P \in E_{-1+j}$, alors $P(X) = b\left(j^2X^3+X^2+jX\right) = bX\left(j^2X^2+X+j\right)$ avec $b \in \mathbb{C}$

- $\triangleright$ Pour la valeurs $\lambda_3 = -1+j^2$, les coordonnées du vecteur propre devont vérifier

$$\left\{\begin{array}{rl} -d = & \left(-1+j^2\right)d \\ d-c+a = & \left(-1+j^2\right)c \\ c-b = & \left(-1+j^2\right)b \\ b-a = & \left(-1+j^2\right)a \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rl} j^2d = & 0 \\ d-j^2c+a = & 0 \\ c-j^2b = & 0 \\ b-j^2a = & 0 \end{array}\right. \iff d=0 \quad c=j^2b \quad b\in\mathbb{C} \quad a=jb$$

Ainsi, si $P \in E_{-1+j^2}$, alors $P(X) = b\left(jX^3+X^2+j^2X\right) = bX\left(jX^2+X+j^2\right)$ avec $b \in \mathbb{C}$

Exercice 34 :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice carrée d'ordre n.
Montrer que A est nilpotente si et seulement si pour tout $k \in \mathbb{N}$ avec $1 \leqslant k \leqslant n$, $\operatorname{Tr}\left(A^k\right) = 0$

1. Supposons $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice carrée d'ordre n nilpotente
   Il existe donc $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = \mathcal{O}_n$
   Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$ avec $1 \leqslant k \leqslant n$, $\left(A^k\right)^p = A^{kp} = (A^p)^k = (\mathcal{O}_n)^k = \mathcal{O}_n$
   A^k est donc nilpotente et $\operatorname{Tr}\left(A^k\right) = 0$
2. Réciproquement, supposons que pour tout $k \in \mathbb{N}$ avec $1 \leqslant k \leqslant n$, $\operatorname{Tr}\left(A^k\right) = 0$
   Nous allons montrer que toutes les valeurs propres de A sont nulles ; le polynôme caractéristique sera alors $(-X)^n$, et en appliquant le théorème de Cayley-Hamilton 12.6.15, nous aurons :
   $$P_A(A) = (-X)^n = (-1)^n A^n = \mathcal{O}_n$$
   Donc $A^n = \mathcal{O}_n$ et A est donc nilpotente.

⇒ Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les n valeurs propres de A, alors, par hypothèses $\operatorname{Tr}(A) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 0$

⇒ A est donc semblable à une matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$

⇒ Et donc, A^k est semblable à une matrice diagonale $D^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n^k \end{pmatrix}$ et nous avons alors

$$\operatorname{Tr}\left(A^k\right) = \lambda_1^k + \lambda_2^k + \cdots + \lambda_n^k = 0$$

⇒ Nous sommes devant le système :

$$\left\{\begin{array}{rl} \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = & 0 \\ \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \cdots + \lambda_n^2 = & 0 \\ \vdots \qquad\qquad = & \vdots \\ \lambda_1^n + \lambda_2^n + \cdots + \lambda_n^n = & 0 \end{array}\right.$$

Qui n'a rien d'évident à être résolu ! !

⇒ Nous allons le résoudre en faisant uns récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$. La propriété $P(n)$ étant définie par :

$$P(n) : \left\{\begin{array}{l} \text{Etant donnés } n \text{ complexes } \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \text{ tels que :} \\ \left\{\begin{array}{rl} \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = & 0 \\ \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \cdots + \lambda_n^2 = & 0 \\ \vdots \qquad\qquad = & \vdots \\ \lambda_1^n + \lambda_2^n + \cdots + \lambda_n^n = & 0 \end{array}\right. \\ \text{Alors } \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0 \end{array}\right.$$

- ⋆ C'est trivialement vrai pour $n = 1$
- ⋆ Supposons $P(n)$ vraie
- ⋆ Démontrons que $P(n+1)$ est vraie

  Soient donc $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{n+1}$ $n+1$ nombres complexes tels que :

$$\left\{\begin{array}{rl} \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_{n+1} = & 0 \\ \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \cdots + \lambda_{n+1}^2 = & 0 \\ \vdots \quad \vdots \qquad\quad = & \vdots \\ \lambda_1^{n+1} + \lambda_2^n + \cdots + \lambda_{n+1}^{n+1} = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rl} \displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = & 0 \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i^2 = & 0 \\ \vdots = & \vdots \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i^{n+1} = & 0 \end{array}\right.$$

Considérons le polynôme $Q(X) = \prod_{k=1}^{n+1} (X - \lambda_k)$; alors, pour tout $1 \leqslant i \leqslant n+1$, $Q(\lambda_i) = 0$ et de $Q(\lambda_i) = 0$, nous tirons très facilement $\sum_{i=1}^{n+1} Q(\lambda_i) = 0$

Ecrivons Q sous forme développée $Q(X) = X^{n+1} + a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0$ et

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+1} Q(\lambda_i) = & \sum_{i=1}^{n+1} \left(\lambda_i^{n+1} + a_n \lambda_i^n + \cdots + a_1 \lambda_i + a_0\right) \\ = & \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i^{n+1} + a_n \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i^n + \cdots + a_1 \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i + n a_0 \\ = & n a_0 = 0 \end{aligned}$$

Et donc $a_0 = 0$; ce qui veut dire que $Q(X) = X^{n+1} + a_n X^n + \cdots + a_1 X$ et donc que 0 est racine de Q.
Ce qui veut dire qu'il existe $i_0 \in \mathbb{N}^*$ et $1 \leqslant i_0 \leqslant n+1$ tel que $\lambda_{i_0} = 0$.
Quitte à réordonner, nous pouvons supposer $\lambda_{n+1} = 0$ et le système initial nous fournit alors un nouveau système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n & = & 0 \\ \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \cdots + \lambda_n^2 & = & 0 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots & = & \vdots \\ \lambda_1^n + \lambda_2^n + \cdots + \lambda_n^n & = & 0 \end{array}\right.$$

Par hypothèse de récurrence, nous en déduisions que $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$, c'est à dire, finalement, $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = \lambda_{n+1} = 0$
Avec ce raisonnement par récurrence, le résultat est établi.
Les valeurs propre de A sont donc toutes nulles et la matrice A est donc nilpotente.

12.8.4 Miscelleanous

Exercice 35 :

Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice nilpotente.
Montrer que la matrice $\mathrm{Id}_n - N$ est inversible et exprimer son inverse en fonction de N.

Soit p l'indice de nilpotence de N, c'est à dire tel que $N^p = \mathcal{O}_n$.
Considérons $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(X) = 1 - X^p$.
En utilisant le polynôme matriciel, nous avons $P(N) = \mathrm{Id}_n - N^p = \mathrm{Id}_n$.
Or $P(X) = 1 - X^p = (1 - X)\left(1 + X + X^2 + \cdots + X^{p-1}\right)$ et donc, en termes de polynômes matriciels

$$P(N) = \mathrm{Id}_n = (\mathrm{Id}_n - N)\left(\mathrm{Id}_n + N + N^2 + \cdots + N^{p-1}\right)$$

Ce qui montre bien que $\mathrm{Id}_n - N$ est inversible et d'inverse

$$(\mathrm{Id}_n - N)^{-1} = \mathrm{Id}_n + N + N^2 + \cdots + N^{p-1}$$

Exercice 36 :

Cet exercice s'intéresse aux matrices stochastiques
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$, et pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant n$, $0 \leqslant a_{i,j} \leqslant 1$ et $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$

1. *Montrer que 1 est une valeur propre de A.*

   Soit $U \in \mathbb{R}^n$ tel que $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

   Alors $AU = A\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{1,j} \\ \vdots \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{n,j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

   Nous avons donc $AU = U$ et 1 est donc valeur propre de A
2. *Soit λ une valeur propre de A. Montrer que $|\lambda| \leqslant 1$.*

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de A et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur propre de A.

De l'identité $AX = \lambda X$, nous tirons pour chaque i tel que $1 \leqslant i \leqslant n$, $\lambda x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j$.

En passant à la valeur absolue, nous avons :

$$|\lambda x_i| = \left| \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \right| \leqslant \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} |x_j|$$

Soit j_0 tel que $|x_{j_0}| = \max \{|x_j| \text{ où } 1 \leqslant j \leqslant n\}$; cet indice j_0 existe et de plus, comme $X \neq \overrightarrow{0}$, $|x_{j_0}| > 0$.
Alors, pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$

$$|\lambda x_i| \leqslant \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} |x_j| \leqslant \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} |x_{j_0}| \Longrightarrow |\lambda x_i| \leqslant |x_{j_0}|$$

En particulier lorsque $i = j_0$

$$|\lambda x_{j_0}| \leqslant |x_{j_0}| \Longleftrightarrow |\lambda| \, |x_{j_0}| \leqslant |x_{j_0}| \Longrightarrow |\lambda| \leqslant 1$$

Exercice 37 :

On s'intéresse en fait, dans cet exercice, à l'endomorphisme dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui, à une matrice M fait correspondre son produit $\Phi_U(M) = UM$ par une matrice U. Sans le dire, mais en le faisant, cet exercice tente de faire le lien entre les valeurs propres de U et celles de Φ_U. Un exemple pratique est proposé en fin d'exercice en dimension 2

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n et u un endomorphisme de E. On désigne par φ_u l'application de $\mathcal{L}(E)$ dans $\mathcal{L}(E)$ définie par

$$\begin{cases} \varphi_u : \mathcal{L}(E) & \longrightarrow \quad \mathcal{L}(E) \\ \qquad\quad f & \longmapsto \quad \varphi_u(f) = u \circ f \end{cases}$$

1. *Soit α une valeur propre de u et d la dimension du sous-espace propre E_α de valeur propre α. Montrer que α est une valeur propre de φ_u et caractériser les vecteurs propres de φ_u associés à α. Quelle est la dimension du sous-espace propre de $\mathcal{L}(E)$ associé à la valeur propre α ?*

   Soit $\alpha \in \mathbb{K}$ une valeur propre de u
   - ▷ Si α est valeur propre de φ_u et $f \in \mathcal{L}(E)$ un vecteur propre de φ_u de valeur propre α, alors $\varphi_u(f) = \alpha f$. Or :

   $$u \circ f = \alpha f \Longleftrightarrow u \circ f - \alpha f = \mathcal{O}_E \Longleftrightarrow (u - \alpha \mathrm{Id}_E) \circ f = \mathcal{O}_E$$

     De l'identité $(u - \alpha \mathrm{Id}_E) \circ f = \mathcal{O}_E$, on peut déduire que $\mathrm{Im} f \subset \ker(u - \alpha \mathrm{Id}_E)$
   - ▷ Si α est valeur propre de u, alors, E_α, l'espace propre de valeur propre α est tel que $E_\alpha = \ker(u - \alpha \mathrm{Id}_E)$
   - ▷ Supposons que $\dim E_\alpha = d$ et $\{e_1, \ldots, e_d\}$ une base de E_α, complétée par une famille de vecteurs $\{e_{d+1}, \ldots, e_n\}$, de telle sorte que la famille $\{e_1, \ldots, e_d, e_{d+1}, \ldots, e_n\}$ forme une base de E.
     Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que :
     - ⋆ Pour $1 \leqslant i \leqslant d$, $f(e_i) = \sum_{j=1}^{d} a_{i,j} e_j$ avec $a_{i,j} \in \mathbb{K}$

$\star$ Pour $d+1 \leqslant i \leqslant n$, $f(e_i) = \overrightarrow{0}$

$\mathrm{Im} f \subset E_\alpha$ et il existe donc des endomorphismes f de E, non nuls tels que $\mathrm{Im} f \subset \ker(u - \alpha \mathrm{Id}_E)$

▷ Pour tout $x \in E$, $f(x) \in \ker(u - \alpha \mathrm{Id}_E)$, c'est à dire

$$(u - \alpha \mathrm{Id}_E)[f(x)] = \overrightarrow{0} \iff u[f(x)] = \alpha [f(x)] \iff \varphi_u(f)(x) = (\alpha f)(x) \iff \varphi_u(f) = \alpha f$$

▷ L'espace propre de φ_u de valeur propre α est donc l'ensemble des applications linéaires de E dans E_α, c'est à dire $\mathcal{L}(E, E_\alpha)$.

On démontre facilement que $\mathcal{L}(E, E_\alpha)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ de dimension nd

2. *Montrer que si u est diagonalisable, alors φ_u est diagonalisable.*

▷ Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ les valeurs propres de l'endomorphisme u de E et $E_{\alpha_1}, \ldots, E_{\alpha_p}$ les différents espaces propres associés. Nous appelons $d_i = \dim E_{\alpha_i}$

▷ u étant diagonalisable, nous avons $d_1 + d_2 + \cdots + d_i + \cdots + d_p = n$ et $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_{\alpha_i}$

▷ Pour chacune des valeurs propres α_i, φ_u admet un espace propre $\mathcal{L}(E, E_{\alpha_i})$ qui a pour dimension $d_i n$.

Soit $F = \bigoplus_{i=1}^{p} \mathcal{L}(E, E_{\alpha_i})$ qui est la somme directe des espaces propres de φ_u.

Nous avons $\dim F = \sum_{i=1}^{n} \dim \mathcal{L}(E, E_{\alpha_i}) = \sum_{i=1}^{n} n d_i = n^2 = \dim \mathcal{L}(E)$

Donc $F = \mathcal{L}(E)$ et φ_u est diagonalisable.

3. *Dans cette question, on suppose que $E = \mathbb{R}^2$ et on considère l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice par rapport à la base canonique est $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$*

(a) *Calculer les valeurs propres et trouver des vecteurs propres de u ; montrer que u est diagonalisable.*

Question tout ce qu'il y a de plus classique !!

$\Rightarrow$ Recherchons les valeurs propres :

$$P_u(X) = \begin{vmatrix} 1-X & 4 \\ 1 & 1-X \end{vmatrix} = (1-X)^2 - 4 = (X-3)(X+1)$$

Les valeurs propres sont donc $\alpha_1 = -1$ et $\alpha_2 = 3$

$\Rightarrow$ Recherche des espaces propres

$\star$ Pour $\alpha_1 = -1$, les vecteurs $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ vérifient :

$$\left\{ \begin{array}{rl} x + 4y = & -x \\ x + y = & -y \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rl} 2x + 4y = & 0 \\ x + 2y = & 0 \end{array} \right. \iff x + 2y = 0$$

L'espace propre E_{-1} est donc $E_{-1} = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R} \right\}$

$\star$ De la même manière, pour $\alpha_2 = 3$, les vecteurs $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ vérifient :

$$\left\{ \begin{array}{rl} x + 4y = & 3x \\ x + y = & 3y \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rl} -2x + 4y = & 0 \\ x - 2y = & 0 \end{array} \right. \iff x - 2y = 0$$

L'espace propre E_{-3} est donc $E_{-3} = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R} \right\}$

Les vecteurs $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ forment une base de $\mathbb{R}^2$ et la matrice $U = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est donc diagonalisable.

(b) *φ_u étant définie comme à la question 1, écrire la matrice de φ_u, relativement à une base convenablement choisie de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$. Chercher les valeurs propres et les vecteurs propres de φ_u. Montrer* *que φ_u est diagonalisable et retrouver ainsi par le calcul direct le résultat de 2 appliqué à ce cas particulier.*

Cette question comporte plusieurs volets ! !

Tout d'abord, pour nous simplifier la vie, nous allons confondre matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et endomorphisme. Ainsi, l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$\left\{\begin{array}{rcl}\varphi_u : \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^2\right) & \longrightarrow & \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^2\right)\\ f & \longmapsto & \varphi_u(f) = u \circ f\end{array}\right.$$

sera, en raison de l'isomorphisme entre $\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^2\right)$ et $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ sera remplacé par :

$$\left\{\begin{array}{rcl}\Phi_U : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\\ M & \longmapsto & \Phi_U(M) = UM\end{array}\right.$$

⇒ La base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est donnée par :

$$\mathcal{B}_0 = \left\{A_{1,1} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix} \quad A_{1,2} = \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix} \quad A_{2,1} = \begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix} \quad A_{2,2} = \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\right\}$$

Donner la matrice de Φ_U dans la base canonique, c'est rechercher $\Phi_U(A_{i,j}) = U \times A_{i,j}$

- ⋆ $\Phi_U(A_{1,1}) = U \times A_{1,1} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix}1 & 4\\1 & 1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 0\end{pmatrix} = A_{1,1} + A_{2,1}$
- ⋆ $\Phi_U(A_{1,2}) = U \times A_{1,2} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix}1 & 4\\1 & 1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 1\end{pmatrix} = A_{1,2} + A_{2,2}$
- ⋆ $\Phi_U(A_{2,1}) = U \times A_{2,1} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix}1 & 4\\1 & 1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4 & 0\\1 & 0\end{pmatrix} = 4A_{1,1} + A_{2,1}$
- ⋆ $\Phi_U(A_{2,2}) = U \times A_{2,2} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix}1 & 4\\1 & 1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 4\\0 & 1\end{pmatrix} = 4A_{1,2} + A_{2,2}$

Et donc, la matrice de Φ_u dans la base $\mathcal{B}_0$ est donnée par :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}_0}(\Phi_U) = \begin{pmatrix}1 & 0 & 4 & 0\\0 & 1 & 0 & 4\\1 & 0 & 1 & 0\\0 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

⇒ Le polynôme caractéristique de Φ_u est donné par :

$$\begin{aligned}P_{\Phi_U}(X) &= \begin{vmatrix}1-X & 0 & 4 & 0\\0 & 1-X & 0 & 4\\1 & 0 & 1-X & 0\\0 & 1 & 0 & 1-X\end{vmatrix}\\ &= (1-X)\begin{vmatrix}1-X & 0 & 4\\0 & 1-X & 0\\1 & 0 & 1-X\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}0 & 4 & 0\\1-X & 0 & 4\\1 & 0 & 1-X\end{vmatrix}\end{aligned}$$

⋆ Premiers calculs

$$\begin{aligned}(1-X)\begin{vmatrix}1-X & 0 & 4\\0 & 1-X & 0\\1 & 0 & 1-X\end{vmatrix} &= (1-X)(1-X)\begin{vmatrix}1-X & 4\\1 & 1-X\end{vmatrix}\\ &= (1-X)^2\left[(1-X)^2 - 4\right]\end{aligned}$$

⋆ Second calcul

$$\begin{vmatrix}0 & 4 & 0\\1-X & 0 & 4\\1 & 0 & 1-X\end{vmatrix} = -4\begin{vmatrix}1-X & 4\\1 & 1-X\end{vmatrix} = -4\left[(1-X)^2 - 4\right]$$

D'où $P_{\Phi_U}(X) = (1-X)^2\left[(1-X)^2-4\right] - 4\left[(1-X)^2-4\right] = \left[(1-X)^2-4\right]^2 = (P_u(X))^2$
Les valeurs propres de Φ_U sont donc -1 et 3 et elles sont doubles

⇒ Recherche des espaces propres.
La recherche des espaces propres est classique. Pour la valeur propre $\alpha_1 = -1$, nous devons avoir, pour un endomorphisme $M = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$:

$$\left\{\begin{array}{rl} x_1 + 4x_3 = & -x_1 \\ x_2 + 4x_4 = & -x_2 \\ x_1 + x_3 = & -x_3 \\ x_2 + x_4 = & -x_4 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rl} 2x_1 + 4x_3 = & 0 \\ 2x_2 + 4x_4 = & 0 \\ x_1 + 2x_3 = & 0 \\ x_2 + 2x_4 = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rl} x_1 + 2x_3 = & 0 \\ x_2 + 2x_4 = & 0 \end{array}\right.$$

L'espace propre est donc un espace de dimension 2 engendré par les endomorphismes M_1 et M_2
Les coordonnées de M_1 sont :

$$M_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -2A_{1,1} + A_{2,1} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Et les coordonnées de M_2 :

$$M_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -2A_{1,2} + A_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On démontrerait, de la même manière que l'espace propre de valeur propre 3 est engendré par les matrices

$$M_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La famille de matrices $\{M_1, M_2, M_3, M_4\}$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans laquelle la matrice de Φ_U est diagonale.

Exercice 38 :

Dans tout ce problème l'entier n est supérieur ou égal à 1 (c'est à dire $n \in \mathbb{N}^*$) et E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n.
Une application u de E dans lui même est dite **semi-linéaire** *si elle possède la propriété suivante :*

$$(\forall x \in E)\,(\forall y \in E)\,(u(x+y) = u(x) + u(y))$$

$$(\forall x \in E)\,(\forall a \in \mathbb{C})\,(u(ax) = \overline{a}u(x))$$

Le nombre complexe $\overline{a}$ est le nombre complexe conjugué de a.
Un nombre complexe $\mu \in \mathbb{C}$ est une valeur **co-propre** *de l'application semi-linéaire u s'il existe un vecteur $x \in E$ différent de 0 tel que la relation ci-dessous soit vérifiée :*

$$u(x) = \mu x$$

Le vecteur x est un vecteur **co-propre** *associé à la valeur co-propre μ*

Première partie

Le but de cette partie est d'étudier, pour une application semi-linéaire u donnée, les valeurs et vecteurs co-propres.

1. **Premières propriétés.**
Soit u une application semi-linéaire du $\mathbb{C}$-espace vectoriel E.

(a) *Démontrer qu'étant donné un vecteur $x \neq 0$, appartenant au $\mathbb{C}$-espace vectoriel E, il existe au plus un nombre complexe $\mu \in \mathbb{C}$ tel que la relation $u(x) = \mu x$ ait lieu.*

Comme toujours, soient $\mu_1 \in \mathbb{C}$ et $\mu_2 \in \mathbb{C}$ 2 nombres complexes tels que $u(x) = \mu_1 x$ et $u(x) = \mu_2 x$. Alors :

$$u(x) = \mu_1 x = \mu_2 x \Longleftrightarrow (\mu_2 - \mu_1) x = 0$$

Comme $x \neq 0$, nous avons alors $\mu_2 - \mu_1 = 0$, c'est à dire $\mu_2 = \mu_1$
Ce que nous voulions

(b) *Démontrer que, si le nombre complexe μ est une valeur co-propre de l'application semi-linéaire u, alors, pour tout réel θ, le nombre complexe $\mu e^{i\theta}$ est encore valeur co-propre de l'application semi-linéaire u. Exprimer un vecteur co-propre associé à la valeur co-propre $\mu e^{i\theta}$ en fonction d'un vecteur co-propre x associé à la valeur co-propre μ et du réel θ*

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $x \in E$ tel que $u(x) = \mu x$

▷ Alors, $u\left(e^{-i\frac{\theta}{2}} x\right) = e^{i\frac{\theta}{2}} u(x) = e^{i\frac{\theta}{2}} \mu x$.
Or, $e^{i\frac{\theta}{2}} \mu x = e^{i\theta} \mu \left(e^{-i\frac{\theta}{2}} x\right)$

▷ Ainsi, le vecteur $e^{-i\frac{\theta}{2}} x$ est un vecteur co-propre de u associé à la valeur co-propre $\mu e^{i\theta}$

(c) *Etant donnée une valeur co-propre μ de l'application semi-linéaire u, soit E_μ l'ensemble des vecteurs $x \in E$ qui vérifient la relation $u(x) = \mu x$, c'est à dire :*

$$E_\mu = \{x \in E \text{ tels que } u(x) = \mu x\}$$

▷ *Est-ce que l'ensemble E_μ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel ?*

La réponse est NON

⋆ Tout d'abord E_μ est stable par addition.
Soient $x \in E_\mu$ et $y \in E_\mu$, alors, $x + y \in E_\mu$. En effet :

$$u(x+y) = u(x) + u(y) = \mu x + \mu y = \mu(x+y)$$

⋆ Mais E_μ n'est pas stable par la multiplication par un scalaire
Soient $x \in E_\mu$ et $a \in \mathbb{C}$. Alors :

$$u(ax) = \overline{a} u(x) = \mu(\overline{a} x) \neq \mu(ax)$$

Et donc $ax \notin E_\mu$

Prenons par exemple $E = \mathbb{C}$ qui est considéré comme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel .
Et soit $u : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que $u(z) = \overline{z}$. u est clairement semi-linéaire.
Recherchons des co-valeurs propres et des co-vecteurs propres, c'est à dire des vecteurs $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, et des scalaires $\mu \in \mathbb{C}$ tels que $u(z) = \mu z$, c'est à dire tels que $\overline{z} = \mu z$. Or, en posant $z = x + iy$:

$$\overline{z} = \mu z \Longleftrightarrow x - iy = \mu(x+iy) \Longleftrightarrow x = \mu x \text{ et } 2\mu y = 0$$

C'est à dire $\mu = 1$ et $y = 0$; c'estr à dire, dans notre cas, $E_1 = \mathbb{R}$ et $\mathbb{R}$ n'est pas un $\mathbb{C}$-espace vectoriel puisque non stable par la multiplication par un scalaire complexe.

▷ *Est-ce que l'ensemble E_μ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ?*

Oui, c'est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel .

- ⋆ Nous avons démontré que E_μ était stable par addition.
- ⋆ Et E_μ est stable par la multiplication par un scalaire réel
  Soient $x \in E_\mu$ et $a \in \mathbb{R}$. Alors :
  $$u(ax) = \overline{a}u(x) = au(x) = \mu(ax)$$
  Et donc $ax \in E_\mu$ lorsque $a \in \mathbb{R}$

(d) *Etant données deux applications semi-linéaires u et v , démontrer la linéarité de l'application composée $u \circ v$*

Cette question ne pose pas de difficultés.
Soient $x \in E$, $y \in E$, $a \in \mathbb{C}$ et $b \in \mathbb{C}$. Alors :

$$\begin{aligned} u \circ v(ax+by) = u[v(ax+by)] &= u[v(ax)+v(by)] \\ &= u\left[\overline{a}v(x)+\overline{b}v(y)\right] = u[\overline{a}v(x)] + u\left[\overline{b}v(y)\right] \\ &= \overline{\overline{a}}u[v(x)] + \overline{\overline{b}}u[v(y)] \\ &= au[v(x)] + bu[v(y)] = au \circ v(x) + bu \circ v(y) \end{aligned}$$

$u \circ v$ est bien linéaire.
Plus généralement, il est possible de démontrer que si $u : E \longrightarrow E$ est semi-linéaire et $v : E \longrightarrow E$, linéaire, alors $v \circ u$ et $u \circ v$ sont semi-linéaires.

Si $E = \mathbb{C}^n$ *(Il faut faire remarquer que tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie est isomorphe à $\mathbb{C}^n$; donc, toutes les considérations que nous faisons, ici, sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension finie, nous les faisons, en fait, sur $\mathbb{C}^n$)* et $u : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$, définissons $\overline{u} : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ par :

$$\begin{cases} \overline{u} : \mathbb{C}^n & \longrightarrow & \mathbb{C}^n \\ \quad x & \longmapsto & \overline{u}(x) = \overline{u(x)} \end{cases}$$

Il est facile de démontrer que si u est semi-linéaire, alors $\overline{u}$ est linéaire.

- ▷ Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{C}^n$ et tout $y \in \mathbb{C}^n$, $\overline{u}(x+y) = \overline{u}(x) + \overline{u}(y)$ est évident
- ▷ Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et $x \in \mathbb{C}^n$; alors :

$$\overline{u}(\lambda x) = \overline{u(\lambda x)} = \overline{\overline{\lambda}u(x)} = \lambda\overline{u(x)} = \lambda\overline{u}(x)$$

2. **Matrice associée à une application semi-linéaire**

Soit u une application semi-linéaire du $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension finie n ; soit $\{e_i; 1 \leqslant i \leqslant n\}$ une base du $\mathbb{C}$-espace vectoriel E. Á un vecteur $x \in E$ de coordonnées $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est associée la matrice colonne $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

(a) *Démontrer qu'à une application semi-linéaire $u : E \longrightarrow E$ est associée dans la base $\{e_i; 1 \leqslant i \leqslant n\}$ de E une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que la relation $y = u(x)$ s'écrive : $Y = A\overline{X}$*
(La matrice-colonne $\overline{X}$ est la matrice complexe conjuguée de la matrice-colonne X)

⇒ Bricolons un peu pour commencer. Intéressons nous à $\mathbb{C}^2$, $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 2.
Soit $u : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$ une application semi-linéaire. La base canonique de $\mathbb{C}^2$ est donnée par $\{e_1; e_2\}$ où $e_1 = (1,0)$ et $e_2 = (0,1)$.
Nous avons $u(e_1) = ae_1 + be_2$ et $u(e_2) = ce_1 + de_2$ avec $a \in \mathbb{C}$, $b \in \mathbb{C}$, $c \in \mathbb{C}$ et $d \in \mathbb{C}$.
Appelons $Z = z_1e_1 + z_2e_2$ ou, en écriture matricielle $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$. Si $Z' = u(Z)$ nous aurons $Z' = \begin{pmatrix} z'_1 \\ z'_2 \end{pmatrix}$

Alors :

$$Z' = u(Z) = u(z_1e_1 + z_2e_2) = \begin{array}{l} u(z_1e_1) + u(z_2e_2) \\ = \overline{z_1}u(e_1) + \overline{z_2}u(e_2) = \overline{z_1}(ae_1 + be_2) + \overline{z_2}(ce_1 + de_2) \\ = (\overline{z_1}a + \overline{z_2}c)e_1 + (\overline{z_1}b + \overline{z_2}d)e_2 \end{array}$$

Identité que nous pouvons traduire par :

$$\begin{pmatrix} z'_1 \\ z'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{z_1} \\ \overline{z_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \overline{\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \overline{Z}$$

⇒ Après le bricolage, passons à la généralisation
Soit $u : E \longrightarrow \mathbb{E}$ une application semi-linéaire. Une base de E est donnée par $\{e_1; e_2; \ldots; e_n\}$

Nous avons, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$ tel que $1 \leqslant j \leqslant n$, $u(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}e_i$ avec $a_{ij} \in \mathbb{C}$.

Soit $Z \in E$ tel que $Z = \sum_{k=1}^{n} z_k e_k$. Nous avons, en écriture matricielle, $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$. Si $Z' = u(Z)$ nous aurons $Z' = \begin{pmatrix} z'_1 \\ z'_2 \\ \vdots \\ z'_n \end{pmatrix}$

Alors :

$$Z' = u(Z) = u\left(\sum_{k=1}^{n} z_k e_k\right) = \begin{array}{l} \sum_{k=1}^{n} u(z_k e_k) = \sum_{k=1}^{n} \overline{z_k} u(e_k) \\ = \sum_{k=1}^{n} \overline{z_k}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ik}e_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} \overline{z_k}a_{ik}\right) e_i \end{array}$$

De telle sorte que nous avons $z'_i = \sum_{k=1}^{n} \overline{z_k} a_{ik}$

Si nous posons comme matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ $A = (a_{ik})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant k \leqslant n}}$, nous avons :

$$\begin{pmatrix} z'_1 \\ z'_2 \\ \vdots \\ z'_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \overline{z_1} \\ \overline{z_2} \\ \vdots \\ \overline{z_n} \end{pmatrix} = A \overline{\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}} = A\overline{Z}$$

Nous avons bien le résultat demandé.

(b) *Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ les matrices associées à une même application semi-linéaire $u : E \longrightarrow E$ dans les bases $\mathcal{B}_e = \{e_i; 1 \leqslant i \leqslant n\}$ et $\mathcal{B}_f = \{f_i; 1 \leqslant i \leqslant n\}$ respectivement. Soit S la matrice de passage de la base $\{e_i; 1 \leqslant i \leqslant n\}$ à la base $\{f_i; 1 \leqslant i \leqslant n\}$. Démontrer la relation $B = S \times A \times \overline{S^{-1}}$ où, si $S = (s_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ alors $\overline{S} = (\overline{s_{i,j}})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$*

⇒ S étant la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_e = \{e_i; 1 \leqslant i \leqslant n\}$ à la base $\mathcal{B}_f = \{f_i; 1 \leqslant i \leqslant n\}$, c'est à dire, en reprenant les notations de L_0, $S = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_e \to \mathcal{B}_f}(\mathrm{Id}_E)$, les colonnes de la matrice S sont composées des coordonnées des vecteurs $\{e_i; 1 \leqslant i \leqslant n\}$ dans la base $\mathcal{B}_f$.

C'est à dire que si $x \in E$ est un vecteur de E de coordonnées dans la base $\mathcal{B}_e$ $X_e = \begin{pmatrix} x_1^e \\ x_2^e \\ \vdots \\ x_n^e \end{pmatrix}$

et $X_f = \begin{pmatrix} x_1^f \\ x_2^f \\ \vdots \\ x_n^f \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}_f$, nous avons :

$$X_f = SX_e \iff X_e = S^{-1}X_f$$

Où $S^{-1} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_f \to \mathcal{B}_e}(\mathrm{Id}_E)$ est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_f$ dans la base $\mathcal{B}_e$

$\Rightarrow$ Pour tout $x \in E$, la relation $y = u(x)$ s'écrit matriciellement $Y_e = A\overline{X_e}$.
En utilisant les matrices de passage, nous avons :

$$Y_e = A\overline{X_e} \iff S^{-1}Y_f = A \times \overline{S^{-1}X_f} = A \times \overline{S^{-1}} \times \overline{X_f} \iff Y_f = S\times = A \times \overline{S^{-1}} \times \overline{X_f}$$

Par définition, nous avons $Y_f = B\overline{X_f}$ et donc

$$B\overline{X_f} = S \times A \times \overline{S^{-1}} \times \overline{X_f}$$

Ceci étant vrai pour tout $x \in E$, nous avons donc $B = S \times A \times \overline{S^{-1}}$

3. *Étant donnée une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, complexe, d'ordre n, le vecteur X, différent de 0,($X \neq 0$) est un vecteur co-propre de la matrice carrée A, associée à la valeur co-propre μ, si le vecteur X et le nombre complexe μ vérifient la relation matricielle : $A\overline{X} = \mu X$.*

   Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ la matrice d'ordre 2 : $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

   Rechercher les valeurs co-propres μ et les vecteurs co-propres $X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ associés.

   Soit $X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ un vecteur co-propre de A de valeur co-propre μ

   Alors, par calcul matriciel, nous avons : $-\overline{b} = \mu a$ et $\overline{a} = \mu b$.
   De $-\overline{b} = \mu a$, nous tirons $b = -\overline{\mu} \times \overline{a}$ d'où nous tirons :

   $$\overline{a} = \mu b \iff \overline{a} = -|\mu|^2\,\overline{a}$$

   Il est très tentant de simplifier, maintenant par $\overline{a}$, sauf qu'il faut s'assurer que $\overline{a} \neq 0$.
   Or, $\overline{a} = 0 \iff a = 0$ et si $a = 0$, alors de l'identité $-\overline{b} = \mu a$, nous tirons $b = 0$, c'est à dire $X = 0$, ce qui est exclu.
   Donc, $\overline{a} \neq 0$ et $\overline{a} = -|\mu|^2\,\overline{a} \iff |\mu|^2 = -1$, ce qui est impossible.

   Ainsi, la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ n'admet pas de valeur co-propre, ni de vecteur co-propre.

4. **Correspondance entre les valeurs co-propres de la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et les valeurs propres de la matrice $A\overline{A}$**

   Soit$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

   (a) *Démontrer que si le scalaire μ est une valeur co-propre de la matrice A, le nombre réel $|\mu|^2$ est une valeur propre de la matrice $A\overline{A}$*

   Soit donc μ une valeur co-propre de A de vecteur co-propre $X \neq 0$; donc $A\overline{X} = \mu X$.
   En prenant la conjugaison, nous avons : $\overline{A\overline{X}} = \overline{\mu X} \iff \overline{A}X = \overline{\mu}\overline{X}$
   En multipliant par la matrice A, nous obtenons :

   $$\overline{A}X = \overline{\mu}\overline{X} \iff A\overline{A}X = A\overline{\mu}\overline{X} = \overline{\mu}A\overline{X} = \overline{\mu}\mu X = |\mu|^2 X$$

   Et donc $A\overline{A}X = |\mu|^2 X$.
   Ainsi, si le scalaire μ est une valeur co-propre de la matrice A, le nombre réel $|\mu|^2$ est une valeur propre de la matrice $A\overline{A}$

(b) *Soit λ une valeur propre réelle positive ou nulle $\lambda \in \mathbb{R}^+$ de la matrice $A\overline{A}$ et X un vecteur propre associé, c'est à dire $A\overline{A}X = \lambda X$.*
Démontrer que le réel $\sqrt{\lambda}$ est une valeur co-propre de la matrice A

■ → Supposons les vecteurs $A.\overline{X}$ et X liés
Il existe donc $k \in \mathbb{C}$, $k \neq 0$ tel que $A.\overline{X} = kX$ et effectivement, k est une valeur co-propre de A et, d'après la question précédente, $|k|^2$ est une valeur propre de la matrice $A\overline{A}$.
Donc, de $A\overline{A}X = \lambda X = |k|^2 X$, et comme $X \neq 0$, nous avons $\lambda = |k|^2$ et donc $\sqrt{\lambda} = |k|$ et si θ est un argument de k, nous avons $k = \sqrt{\lambda}e^{i\theta}$.
Comme k est une valeur co-propre de A, d'après une question précédente, $ke^{-i\theta}$ en est une aussi, c'est à dire que $\sqrt{\lambda}$ est une valeur co-propre de A

■ → Supposons les vecteurs $A\overline{X}$ et X non colinéaires
Soit $Y = aA\overline{X} + bX$; du fait de la non colinéarité de $A\overline{X}$ et X, $Y = 0$ si et seulement si $a = b = 0$. Alors :
$$\overline{Y} = \overline{a}\overline{A}X + \overline{b}\overline{X} \Longleftrightarrow A\overline{Y} = \overline{a}A\overline{A}X + \overline{b}A\overline{X}$$
Alors, de $A\overline{A}X = \lambda X$, nous tirons $A\overline{Y} = \overline{a}\lambda X + \overline{b}A\overline{X}$.
Nous avons $A\overline{Y} = \sqrt{\lambda}Y$, si et seulement si $\overline{a}\lambda X + \overline{b}A\overline{X} = a\sqrt{\lambda}A\overline{X} + b\sqrt{\lambda}X$.
De l'indépendance des vecteurs $A\overline{X}$ et X, nous déduisons $\overline{a}\lambda = b\sqrt{\lambda}$ et $\overline{b} = a\sqrt{\lambda}$
Nous avons ainsi $A\overline{Y} = \overline{a}\lambda X + a\sqrt{\lambda}A\overline{X}$. Si $a = 1$, alors $\overline{a} = 1$ et $Y = A\overline{X} + \sqrt{\lambda}X$ est tel que $A\overline{Y} = \sqrt{\lambda}Y$

(c) *En déduire que pour que le réel positif ou nul μ soit valeur co-propre de la matrice A, il faut et il suffit que le réel μ^2 soit valeur propre de la matrice $A\overline{A}$*

C'est une conséquence des questions précédentes :
- ▷ Si le scalaire μ est une valeur co-propre de la matrice A alors le nombre réel $|\mu|^2 = \mu^2$ est une valeur propre de la matrice $A\overline{A}$
- ▷ Réciproquement, si μ^2 une valeur propre de la matrice $A\overline{A}$ alors le réel $\sqrt{\mu^2} = \mu$ est une valeur co-propre de la matrice A

Nous venons donc de montrer l'équivalence demandée

(d) *Etant donné un réel $m \in \mathbb{R}$, soit A_m la matrice définie par la relation :*
$$A_m = \begin{pmatrix} m & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
Déterminer les valeurs co-propres réelles positives de A_m(discuter selon les valeurs de m).

Pour que $\mu \geqslant 0$ soit une valeur co-propre de A_m, il faut et il suffit que $\sqrt{\mu}$ soit valeur propre de $A_m\overline{A_m} = A_m^2$
Or, par calcul, $A_m^2 = \begin{pmatrix} m^2-1 & -m \\ m & -1 \end{pmatrix}$ et le polynôme caractéristique de A_m^2 est donné par
$$P_{A_m^2} = \begin{vmatrix} m^2-1-X & -m \\ m & -1-X \end{vmatrix} = X^2 - \left(m^2-2\right)X + 1$$
Le discriminant de ce polynôme est $\Delta = m^2\left(m^2-4\right)$.
- ▷ Si $m = 0$, alors $\Delta = 0$ et alors $P_{A_m^2} = X^2 + 2X + 1 = (X+1)^2$. -1 est donc racine double et valeur propre double qui, négative, n'entre pas dans notre problème.
  Nous pouvons remarquer qu'alors $A_m^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Elle est diagonale.
- ▷ Maintenant, si $m^2 \geqslant 4 \Longleftrightarrow |m| \geqslant 2$, alors $\Delta \geqslant 0$ et $P_{A_m^2}$ admet une ou 2 racines.
  - ⋆ Si $|m| = 2$, alors $P_{A_m^2} = X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2$. Alors A_m^2 admet une valeur propre double $\mu^2 = 1$ et donc A_m admet une co-valeur propre $\mu = 1$
    On peut remarquer que si $m = 2$, alors $A_m^2 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ et si $m = -2$, alors $A_m^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.
    L'une est donc la transposée de l'autre

⋆ Si $|m| > 2$, alors $P_{A_m^2}$ admet 2 racines réelles :

$$X_1 = \frac{m^2 - 2 + \sqrt{m^2\left(m^2 - 4\right)}}{2} \text{ et } X_2 = \frac{m^2 - 2 - \sqrt{m^2\left(m^2 - 4\right)}}{2}$$

Comme $X_1 \times X_2 = 1$, nous avons $X_2 = \frac{1}{X_1}$.
De $|m| > 2$, on déduit $m^2 > 4 > 2$ et donc $X_1 > 0$ et donc $X_2 > 0$
Dans ce cas, A_m admet comme valeurs co-propres $\mu_1 = \sqrt{\frac{m^2 - 2 + \sqrt{m^2\left(m^2 - 4\right)}}{2}}$ et $\mu_2 = \frac{1}{\mu_1}$

5. **Cas d'une matrice triangulaire supérieure**

Dans cette question la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est une matrice triangulaire supérieure (les éléments situés en-dessous de la diagonale principale sont nuls).

(a) *Démontrer que si λ est une valeur propre de la matrice A, alors, pour tout réel θ, le nombre complexe $\lambda e^{i\theta}$ est une valeur co-propre de la matrice A.*

Soit λ une valeur propre de la matrice A.
Nous pouvons écrire $\lambda = |\lambda| e^{i\phi}$ où ϕ est un argument de $\lambda \in \mathbb{C}$.
Ainsi, d'après la question 1-b, si nous démontrons que $|\lambda|$ est valeur co-propre de A, alors $|\lambda| e^{i\phi}$ sera aussi valeur co-propre de A, c'est à dire que λ sera valeur co-propre de A et pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, nous aurons aussi $\lambda e^{i\theta}$ valeur co-propre de A.
Maintenant, $|\lambda|$ sera valeur co-propre de A si et seulement si $|\lambda|^2$ sera valeur propre de $A\overline{A}$
A étant diagonale, $\overline{A}$ l'est aussi.
Les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont ses coefficients diagonaux et les coefficients diagonaux d'un produit de matrices triangulaires supérieures sont les produits des coefficients diagonaux de chacune de ces matrices.
Ainsi, si λ est valeur propre de A, λ et $\overline{\lambda}$ sont des éléments diagonaux respectivement de A et $\overline{A}$ et le produit $\lambda \times \overline{\lambda} = |\lambda|^2$ est un élément diagonal de la matrice triangulaire $A\overline{A}$.
Donc, $|\lambda|^2$ est un vecteur propre de $A\overline{A}$
Ainsi, λ est valeur co-propre de A et donc, pour tout réel θ, le nombre complexe $\lambda e^{i\theta}$ est une valeur co-propre de la matrice A.

(b) *Démontrer que si μ est une valeur co-propre de la matrice A, alors il existe un réel θ tel que le nombre complexe $\mu e^{i\theta}$ soit valeur propre de la matrice A.*

Soit μ une valeur co-propre de A.
Nous avons $\mu = |\mu| e^{i\phi}$ où ϕ est l'argument de μ. Ainsi, $\mu e^{-i\phi}$ est aussi une valeur co-propre de A. Comme $\mu e^{-i\phi} = |\mu|$, on conclue que $|\mu|$ est donc aussi une valeur co-propre de A
Et donc $|\mu|^2$ est une valeur propre de $A\overline{A}$.
Comme les valeurs propres de $A\overline{A}$ *(elle est triangulaire)* sont les $|a_{j,j}|^2$, il existe $j_0 \in \mathbb{N}$ avec $1 \leqslant j_0 \leqslant n$ tel que $|a_{j_0,j_0}|^2 = |\mu|^2 \iff |a_{j_0,j_0}| = |\mu|$
Ayant deux nombres complexes de mêmes modules, ils diffèrent seulement par leurs arguments modulo 2π *(éventuellement arbitraires si les nombres sont nuls)* et nous avons donc $a_{j_0,j_0} = \mu e^{i\theta}$
Donc $\mu e^{i\theta}$ figure sur la diagonale de A, c'en est donc une valeur propre.

En résumé :
Soit A triangulaire.

⋆ Si λ est valeur propre de A alors $\lambda e^{i\theta}$ est une valeur co-propre de la matrice A pour tout réel θ

⋆ Réciproquement, si μ est valeur co-propre de A, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\mu e^{i\theta}$ soit valeur propre de la matrice A

(c) *Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ la matrice définie par $A = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & i \end{pmatrix}$*
Démontrer que le réel 1 est valeur co-propre de cette matrice et déterminer un vecteur X co-propre associé.

Nous pouvons remarquer qu'ici, $\lambda = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ est valeur propre double, et donc, d'après le « résumé » précédent, $\lambda e^{-i\frac{\pi}{2}} = e^{i\frac{\pi}{2}} \times e^{-i\frac{\pi}{2}}$ est une valeur co-propre de la matrice A, c'est à dire que 1 est une valeur co-propre de A.
Nous devons alors résoudre $A\overline{X} = X$.
Posons $X = \begin{pmatrix} a+ib \\ c+id \end{pmatrix}$ avec $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$ et $d \in \mathbb{R}$; alors, nous devons avoir :

$$A\overline{X} = X \iff \begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a-ib \\ c-id \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+ib \\ c+id \end{pmatrix}$$

Ce qui donne le système

$$\begin{cases} ia+b+c-id = & a+ib \\ c+id = & ic+d \end{cases} \iff \begin{cases} (b+c-a)+i(a-d-b) = & 0 \\ c-d+i(d-c) = & 0 \end{cases}$$

En identifiant partie réelle et partie imaginaire de la seconde ligne, nous avons $d = c$ et en reportant dans la première équation, nous obtenons

$$(b+c-a)+i(a-c-b) = 0 \iff a = b+c$$

Le vecteur $X = \begin{pmatrix} b+c+ib \\ c+ic \end{pmatrix}$ est donc un vecteur co-propre de A avec la valeur co-propre 1.

6. **Une caractérisation des valeurs co-propres**
Soit A une matrice carrée complexe d'ordre n, c'est à dire $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$; soient $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ les matrices réelles définies par la relation suivante $A = B + iC$.
Démontrer que le nombre complexe μ est valeur co-propre de la matrice A si et seulement si le nombre réel $|\mu|$ est une valeur propre de la matrice D, carrée, réelle d'ordre $2n$ c'est à dire $D \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$, définie par blocs par la relation suivante : $D = \begin{pmatrix} B & C \\ C & -B \end{pmatrix}$

Soit $\mu = a + ib$ valeur co-propre de A *(avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$)* et soit $X = Y + iZ$ un vecteur co-propre associé *(avec Y et Z vecteurs réels)*
Analytiquement, comme $A = B + iC$, nous avons :

$$\begin{aligned} A\overline{X} = \mu X \iff & (B+iC)\overline{X} = (a+ib)X \\ \iff & (B+iC)\overline{(Y+iZ)} = (a+ib)(Y+iZ) \iff (B+iC)(Y-iZ) = (a+ib)(Y+iZ) \\ \iff & BY - iBZ + iCY + CZ = aY + iaZ + ibY - bZ \\ \iff & (BY+CZ) + i(CY-BZ) = (aY-bZ) + i(aZ+bY) \end{aligned}$$

Si θ est l'un des arguments de μ, nous avons $\mu = |\mu| e^{i\theta}$ et, d'après 1.b $|\mu| = \mu e^{-i\theta}$ est encore une valeur co-propre, on peut donc appliquer les identités précédentes avec $a = |\mu|$ et $b = 0$; ce qui donne comme :

$$(BY+CZ) + i(CY-BZ) = |\mu| Y + i|\mu| Z \iff \begin{cases} BY+CZ = & |\mu| Y \\ CY-BZ = & |\mu| Z \end{cases}$$

Ce qui peut être traduit par :

$$\begin{pmatrix} B & C \\ C & -B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix} = |\mu| \begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix} \iff D\begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix} = |\mu| \begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix}$$

Et donc $\begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de D pour la valeur propre $|\mu|$

Réciproquement, si $|\mu|$ est valeur propre de D, alors il existe un vecteur propre $\begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix}$ réel tel que $D\begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix} = |\mu|\begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix}$ et nous avons alors le système :

$$\begin{cases} BY + CZ = & |\mu|\, Y \\ CY - BZ = & |\mu|\, Z \end{cases}$$

Et si nous avons le système précédent, alors $(B + iC)(Y - iZ) = |\mu|(Y + iZ)$, c'est à dire $A\overline{X} = |\mu|\, X$ et $|\mu|$ est donc valeur co-propre de la matrice A, donc μ aussi.

Seconde partie

Soient A et B deux matrices carrées complexes d'ordre n (c'est à dire $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$), s'il existe une matrice carrée complexe S d'ordre n inversible (c'est à dire $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$) telle que la relation $B = SA\overline{S}^{-1}$ soit vérifiée, les deux matrices A et B **sont dites co-semblables***.*
Si une matrice A est co-semblable à une matrice diagonale, la matrice A est dite **co-diagonalisable***.*
Le but de cette partie est de rechercher à quelles conditions une matrice est co-diagonalisable.

1. **Une relation d'équivalence :**
   Etant données deux matrices carrées complexes A et B d'ordre n, ces matrices sont dites satisfaire la relation $\equiv$ si et seulement si ces deux matrices sont co-semblables, c'est à dire :

$$A \equiv B \iff (\exists S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}))\left(B = SA\overline{S}^{-1}\right)$$

   Démontrer que la relation $\equiv$ est une relation d'équivalence dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, l'ensemble des matrices carrées complexes d'ordre n.

   - $\rightarrow$ **Elle est réflexive**
     En effet, soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Alors, $A = \mathrm{Id}_n \times A \times \mathrm{Id}_n$ et il est clair que $\left(\overline{\mathrm{Id}_n}\right)^{-1} = (\mathrm{Id}_n)^{-1} = \mathrm{Id}_n$.
     Il existe donc $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et $S = \mathrm{Id}_n$ tel que $A = SA\overline{S}^{-1}$.
     La relation $\equiv$ est donc réflexive
   - $\rightarrow$ **Elle est symétrique**
     Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ 2 matrices telles que $A \equiv B$, c'est à dire qu'il existe $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que la relation $B = SA\overline{S}^{-1}$ soit vérifiée.
     Avons nous $B \equiv A$?

$$B = SA\overline{S}^{-1} \iff B\overline{S} = SA \iff S^{-1}B\overline{S} = A$$

     Avons nous $\overline{S} = \overline{S^{-1}}^{-1}$ ou, autre forme de la question, avons nous $\left(\overline{S}\right)^{-1} = \overline{S^{-1}}$?
     <u>Et bien oui!!</u>
     Nous partons du fait que $SS^{-1} = \mathrm{Id}_n$ et donc $\overline{SS^{-1}} = \overline{\mathrm{Id}_n} = \mathrm{Id}_n$.
     Or $\overline{SS^{-1}} = \overline{S} \times \overline{S^{-1}} = \mathrm{Id}_n$, et donc $\left(\overline{S}\right)^{-1} = \overline{S^{-1}}$

     Il existe donc $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et nous avons $X = S^{-1}$ tel que $A = XB\overline{X}^{-1}$ et donc $B \equiv A$; la relation est donc symétrique
   - $\rightarrow$ **Elle est transitive**
     Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tels que $A \equiv B$ et $B \equiv C$
     - ⋆ Comme $A \equiv B$, il existe $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que la relation $B = SA\overline{S}^{-1}$
     - ⋆ De même, de $B \equiv C$, il existe $T \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que la relation $C = TB\overline{T}^{-1}$
     - ⋆ Alors, nous avons :

$$\begin{aligned} C = & \; T\left(SA\overline{S}^{-1}\right)\overline{T}^{-1} = (TS)\, A\left(\overline{S}^{-1} \times \overline{T}^{-1}\right) = (TS)\, A\left(\overline{S^{-1}} \times \overline{T^{-1}}\right) \\ = & \; (TS)\, A\left(\overline{S^{-1}T^{-1}}\right) = (TS)\, A\left(\overline{(TS)^{-1}}\right) = (TS)\, A\overline{(TS)}^{-1} \end{aligned}$$

     Et nous avons donc $A \equiv C$; la relation $\equiv$ est donc transitive

La relation $\equiv$ est donc une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, l'ensemble des matrices carrées complexes d'ordre n

2. **Indépendance des vecteurs co-propres :**
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice carrée complexe d'ordre n ; soient $X_1, X_2, \ldots, X_k$, k vecteurs co-propres de la matrice A associés à des valeurs co-propres $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$, l'entier k étant inférieur ou égal à l'entier n ($k \leqslant n$).

→ *Démontrer que, si les valeurs co-propres μ_p pour $p = 1, 2, \ldots, k$ ont des modules différents les uns des autres, c'est à dire que si $p \neq q$, alors $|\mu_p| \neq |\mu_q|$, alors la famille $\{X_1, X_2, \ldots, X_k\}$ est libre.*

Soient $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$, k valeurs co-propres de A, de vecteurs co-propres correspondants $X_1, X_2, \ldots, X_k$.
D'après la question 4 de la partie 1, les réels positifs $|\mu_1|^2, |\mu_2|^2, \ldots, |\mu_k|^2$ sont des valeurs propres de la matrice $A\overline{A}$, de vecteurs propres respectifs $X_1, X_2, \ldots, X_k$.
D'après le cours (théorème 12.2.6), comme les modules des valeurs co-propres sont distincts 2 à 2 (i.e. si $p \neq q$, alors $|\mu_p| \neq |\mu_q|$), les vecteurs propres sont donc linéairement indépendants.

→ *En déduire que, si la matrice $A\overline{A}$ a n valeurs propres λ_p avec $p = 1, \ldots, n$, positives ou nulles, c'est à dire telles que $\lambda_p \geqslant 0$, distinctes les unes des autres, c'est à dire que si $p \neq q$, alors $\lambda_p \neq \lambda_q$, alors la matrice A est co-diagonalisable.*

Supposons que la matrice $A\overline{A}$ ait n valeurs propres λ_p avec $p = 1, \ldots, n$, positives ou nulles et distinctes.
Alors, d'après la question 4 de la première partie, $\sqrt{\lambda_p}$ est valeur co-propre de A, de vecteur co-propres respectifs $X_1, X_2, \ldots, X_n$.
Comme $p \neq q \Longrightarrow \lambda_p \neq \lambda_q$, nous avons aussi $p \neq q \Longrightarrow \sqrt{\lambda_p} \neq \sqrt{\lambda_q}$ et donc les vecteurs $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont linéairement indépendants et forment donc une base de E.
Et, pour tout p, nous avons $A\overline{X_p} = \sqrt{\lambda_p} X_p$.
Appelons u l'application semi-linéaire de matrice A dans la base canonique $\mathcal{B}_0$.

Si $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice $D = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & \cdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}$.

D est donc une matrice diagonale ; c'est la matrice de u dans la base $X_1, X_2, \ldots, X_n$ formée de co-vecteurs propres.
Si $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_0$ à la base $X_1, X_2, \ldots, X_n$, d'après la question 3 de la partie 1, nous avons $S = SD\left(\overline{S}\right)^{-1}$
La matrice A est donc co-diagonalisable.

3. **Quelques propriétés :**

(a) *Soit $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ une matrice carrée complexe d'ordre n inversible ; soit A la matrice définie par la relation $A = S \times \overline{S}^{-1}$. Calculer la matrice produit $A \times \overline{A}$*

Il suffit de calculer :

$$\begin{aligned} A \times \overline{A} = &\ S \times \overline{S}^{-1} \times \overline{S \times \overline{S}^{-1}} = S \times \overline{S}^{-1} \times \overline{S} \times S^{-1} \\ = &\ S \times \left(\overline{S}^{-1} \times \overline{S}\right) \times S^{-1} = S \times \mathrm{Id}_n \times S^{-1} = S \times S^{-1} \\ = &\ \mathrm{Id}_n \end{aligned}$$

Dans ce cas, nous avons donc $A \times \overline{A} = \mathrm{Id}_n$, c'est à dire $\overline{A} = A^{-1}$

(b) ▷ *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice carrée complexe d'ordre n telle que $A \times \overline{A} = \mathrm{Id}_n$. Démontrer qu'il existe au moins un réel θ_0 tel que la matrice $S(\theta_0)$ définie par la relation*

$$S(\theta_0) = A - e^{-i\theta_0}\mathrm{Id}_n$$

soit inversible.

▷ Première remarque :A est inversible et $A^{-1} = \overline{A}$ et donc $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$

▷ Seconde remarque : Si A admet des valeurs propres, ces valeurs propres sont en nombre fini. et $\lambda \in \mathbb{C}$ est valeur propre si et seulement si la matrice $A - \lambda\mathrm{Id}_n$ n'est pas inversible

▷ Troisième remarque : Il est donc possible de trouver $\theta_0 \in \mathbb{R}$ tel que $e^{i\theta_0}$ ne soit pas une des valeurs propres et donc tel que $A - e^{i\theta_0}\mathrm{Id}_n$ soit inversible, c'est à dire tel que $S(\theta_0) = A - e^{i\theta_0}\mathrm{Id}_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$

▷ *Calculer la matrice $A \times \overline{S(\theta_0)}$.*

Et bien, faisons ces calculs :

$$\begin{aligned} A \times \overline{S(\theta_0)} = & \; A\left(\overline{A - e^{i\theta_0}\mathrm{Id}_n}\right) \\ = & \; A \times \overline{A} - e^{-i\theta_0} A = \mathrm{Id}_n - e^{-i\theta_0} A = -e^{-i\theta_0}\left(A - e^{i\theta_0}\mathrm{Id}_n\right) = -e^{-i\theta_0} S(\theta_0) \end{aligned}$$

Ainsi, $A \times \overline{S(\theta_0)} = -e^{-i\theta_0} S(\theta_0)$

▷ *En déduire la matrice $S(\theta_0) \times \overline{S(\theta_0)}^{-1}$*

Il est donc évident que :

$$\begin{aligned} A \times \overline{S(\theta_0)} = -e^{-i\theta_0} S(\theta_0) \iff & \; A \times \overline{S(\theta_0)} \times \overline{S(\theta_0)}^{-1} = -e^{-i\theta_0} S(\theta_0) \times \overline{S(\theta_0)}^{-1} \\ \iff & \; S(\theta_0) \times \overline{S(\theta_0)}^{-1} = -e^{i\theta_0} A \end{aligned}$$

Donc, $S(\theta_0) \times \overline{S(\theta_0)}^{-1} = -e^{i\theta_0} A$

4. **Exemples : co-diagonalisable ? Pas co-diagonalisable ?**
Est-ce que les matrices A, B, C, D d'ordre 2 suivantes sont diagonalisables ? Co-diagonalisables ? :

(a) $A = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & i \end{pmatrix}$

Nous avons $\overline{A} = \begin{pmatrix} -i & 1 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$ et $A \times \overline{A} = \mathrm{Id}_2$. A est donc co-diagonalisable

(b) $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Ici, $B \times \overline{B} = B^2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$. Or, les valeurs propre de B^2 ne sont pas ves nombres réels positifs. Donc, B n'est pas codiagonalisable.

(c) $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Il est évident que $C \times \overline{C} = 0$. C et $C \times \overline{C}$ n'ont pas le même rang et donc C n'est pas co-diagonalisable

(d) $D = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$

Nous avons $\overline{D} = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$ et donc $D \times \overline{D} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$D \times \overline{D}$ est diagonalisable et ses valeurs propres sont des réels positifs. De plus D et $D \times \overline{D}$ sont inversibles et par conséquent de même rang. D est donc co-diagonalisable.

Chapitre 13

Formes bilinéaires Formes hermitiennes

Work in progress

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ est mis pour $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

13.1 Formes bilinéaires

Chapitre 14

Topologie des espaces de matrices

Work in progress

Cinquième partie

Probabilités

Chapitre 15

Espace probabilisable, Espace probabilisé

15.1 Bref historique du calcul des probabilités

Quand le calcul des probabilités n'existait pas

Depuis toujours les hommes ont essayé de prévoir le temps, ont fait de la divination, ont aussi pratiqué les jeux de hasard. Ils ont en quelque sorte fait des probabilités sans le savoir.
Citons pour exemple des relevés de type statistique fournis par les recensements dans l'empire romain, ou sous Guillaume le Conquérant ; quant aux jeux de hasard, pensons à la Bible et les "sorts sacrés", ou encore à l'Egypte où l'on jouait aux dés, dès -3500 ! On peut penser que les premiers dés avaient tendance à être pipés et les résultats, considérés comme une manifestation des dieux, n'avaient pas assez de régularité pour donner naissance à un calcul.
Cependant c'est de l'observation des jeux de dés que, en Occident, vers le XVème siècle, émergera peu à peu le "calcul des probabilités".

Naissance du Calcul des probabilités

Trois mathématiciens, italiens principalement, nous ont laissé leurs études : **Tartaglia** (1499 - 1577) s'intéresse à des problèmes de jeux de dés et de dénombrement comme le nombre de manières d'asseoir 10 personnes à 10 places différentes.

Cardan (1501 - 1576) dans un livre posthume "De ludo aleae" étudie le problème des partis, qu'il ne résoud pas, mais il donne un certain nombre de règles qui constituent les premiers éléments du calcul des probabili tés.

Galilée (1564 - 1642) explique pourquoi, lorsqu'on jette simultanément 3 dés, la somme 9 a moins de chances d'apparaître que 10, bien que ces deux nombres se décomposent tout deux de 6 manières di fférentes en la somme de 3 nombres de 1 à 6.
Ces hommes de la Renaissance découvrent que les jeux de hasard sont soumis à l'ordre des nombres ; la calcul des probabili tés est né.

La "géométrie du hasard"

En 1654, en France, **Pascal** (1623 - 1662) et **Fermat** (1601 - 1665) échangent des lettres sur le problème du chevalier de Méré et la règle des partis *(comment interrompre un jeu avant son terme en se partageant la mise de manière équitable en fonction des résultats partiels déjà obtenus)*. Ils résolvent ce problème de deux façons différentes ; et Pascal surtout saisit l'importance de sa découverte : le hasard est "géométrisable", ce qui semble a priori paradoxal. **Pascal** et **Fermat** font intervenir entre autres la notion "d'espérance de gain" (ce que Pascal, ironique, utilisera dans l'argument du Pari). Les successeurs de Pascal, dont Huyghens dans "De Ratiocinüs in ludo aleae", expliciteront cette notion et résoudront la plupart des problèmes de jeux de l'époque.

Les successeurs de Pascal

Cette nouvelle science bien que née en même. temps que d'autres inventions prestigieuses comme la géométrie analytique ou le calcul différentiel, se développe cependant dès la fin du XVIIème siècle, et est employée à la résolution de problèmes pratiques, comme des problèmes statistiques. Mais il reste encore beaucoup à faire.
Jacques Bernouilli (1654 - 1705) dans "Ars conjectandi" (publié en 1713) démontre de façon très rigoureuse la loi faible des grands nombres dans le jeu de pile ou face. [La fréquence moyenne d'apparition d'un résultat dans une répétition d'épreuves tend vers la probabilité d'observer cette apparition dans une épreuveJ. Il reprend les travaux de Huyghens et fournit une théorie sur les combinaisons et permutations en distinguant les combinaisons avec et sans répétition ou avec des restrictions supplémentaires d'ordre ou de catégorie.
Abraham De Moivre (1667 - 1754) précise, dans le théorème qui porte son nom, le théorème de Bernouilli en donnant une évaluation asymptotique de la loi de l'écart entre la probabilité "a priori" et la probabilité "a posteriori". [A cette occasion, ayant besoin de factorielles dont la croissance est très rapide il publie, avec **Stirling** (1692 - 1730), une formule donnant une valeur approchée de n : pour n très grandJ.
On peut alors faire de l'estimation statistique et construire des modèles probabilistes de phénomènes expérimentaux.

Le XVIIIème siècle

Ce siècle verra une évolution du calcul vers une "probabilisation" du monde qui pourra mener parfois à des dérapages.
Thomas Bayes (1702 - 1761) réfléchit au problème de l'estimation des probabilités des évènements naturels et dans "Thomas Bayes essay towards solving a problem in the doctrin of chances" (publié en 1763) il cherche la probabilité que la probabilité d'un évènement soit comprise entre deux bornes fixées à l'avance, et il définit la "règle de Bayes". A une loi subjective, il associe une loi de probabilité mathématique, pour remonter au réel. Le problème de la valeur pratique du résultat se pose et Bayes a sans doute senti confusément les dangers ; certains successeurs utiliseront parfois abusivement la méthode de Bayes, sans problème de conscience. Parallèlement, **Daniel Bernouilli** (1700 - 1782) fonde la "mécanique statistique" et construit un modèle de diffusion entre deux enceintes, qui sera complété plus tard par **Laplace** ; **Buffon** (1707 - 1788) s'intéresse à "l'arithmétique morale" c'est-à-dire la description probabiliste des sociétés humaines ; **Condorcet** (1743 - 1794) poussé par **Turgot**, tentera aussi d'utiliser les p'robabilités dans les questions d'arithmétique morale mais n'arrivera pas vraiment à créer la "science sociale". Les probabilités sont aussi utilisées pour justi fier des hypothèses. Buffon, par exemple, observe que 6 planètes du soleil tournent dans le même sens, alors que la probabilité pour qu'il en soit ainsi n'est que de $\frac{1}{2^6}$;il en déduit qu'un tel événement n'est pas dû au hasard mais à une cause bien précise eL suppose que ces 6 planètes sont issues d'une collision entre le soleil et une.. comète.
Il faut cependant noter que la propagation de ces nouvelles notions reste assez lente à ses débuts'car D'Alembert (1717 - 1783) dans son article de l'Encyclopédie "croix ou pile" en 1754 ne rejette pas l'idée qu'il y ait 2 chances sur 3 d'obtenir au moins 1 croix en lançant 2 fois de suite une pièce. Cette erreur sera ensuite rectifiée par Condorcet dans l'article "probabilité" en 1765.

L'influence de Laplace

Pierre Simon Laplace (1749 - '1827) est sans doute le plus marquant dans le domaine des probabilités. Dans "théorie analytique des probabilités" (1812) , ouvrage monumental, il donne la formule "nombre de cas favorables sur nombre de cas possibles" (empruntée sans doute à ses prédécesseurs) ; il en connaît les limites et traite aussi de cas beaucoup plus généraux. Il étend le théorème de Moivre et la formule de Stirling en créant la "méthode de Laplace". [Il s'agit de la loi normale connue aussi sous le nom de loi de Gauss, qui la complèteraJ. Il développe un nombre considérable d'applications. C'est aussi l'époque de la probabilité des erreurs, très importante pour les mesures physiques et astronomiques, que Gauss reprendra en inventant la "méthode des moindres carrés".

Dans le sillage de Laplace, **Poisson** (1781- 1840) publie "recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile" et nous est surtout connu pour sa "loi des petits nombres".. L'influence de Laplace est grande et ses-énoncés les plus contestables seront tenus longtemps pour acquis. Lui-même et ses élèves sont convaincus que le calcul des probabilités est une méthode scientifique pour pallier nos ignorances et corriger nos illusions.
Cependant certains déjà comme **Bienaymé** (1796 - 1878) réagissent à cette exploitation parfois contestable des théories de Laplace, sans beaucoup de succès. En France, le calcul des probabilités se trouve peu à peu discrédité, et comme dans d'autres domaines à l'époque, c'est à l'étranger que les recherches se poursuivent, sur des bases plus rigoureuses.

Les écoles anglaises et russes

Georges Boole (1815 - 1864) innove totalement, avec l'algèbre des évènements. Par ailleurs, sous l'influence de **Darwin** (1809 - 1882), les mathématiciens anglais (Galton, Weldon, Pearson, Yule, Student, ...) fondent la statistique moderne.
A Saint Petersbourg, à la même époque, **Tchebycheff** (182'1 - 1894) énonce une loi des grands nombres très générale et en donne une nouvelle démonstration (inégalité de Bienaymé - Tchebycheff). Ses élèves dont **Markov** (1856 - 1922), au début du XXème siècle, donneront la forme presque définitive du théorème de Moivre.

Les nouvelles théories

La fin du XIXème siècle est marquée par l'extraordinaire évolution de la mécanique statistique avec **Clausius** (1822 - 1888), **Maxwell** (1831 - 1879), **Boltzmann** (1844 - 1906), enfin **Einstein** (1879 - 1955) et le mouvement Brownien (1905). Les probabilités sont presque considérées comme une branche de la physique, mais très vite les possibilités du calcul sont dépassées et les mathématiciens "purs" vont faire des découvertes qui bouleverseront la "géométrie du hasard". Il était en effet impossible d'élaborer des bases solides du calcul des probabilités tant que la théorie de l'intégrale n'avait pas atteint un niveau de maturité suffisant. Citons **Borel** (1871 - 1956), **Lebesque** (1875 - 1941), enfin **Kolmogorov** (1903-1987) qui en 1933 propose une axiomatique du calcul des probabilités. S'appuyant sur la théorie de la mesure, il a donné un cadre mathématique précis pour le calcul des probabilités permettant ainsi à d'autres mathématiciens, au premier rang desquels **Paul Lévy**, de développer l'analyse stochastique.
Alors ce calcul devient à part entière une branche des mathématiques et se développe de façon exponentielle...
Le problème philosophique de la distinction entre probabilité-théorie mathématique et probabilité-description du monde, se posant peut-être de façon encore plus précise.

15.2 Espace fondamental

15.2.1 Introduction

— A quoi tu penses ?
— Je pense que, si en ouvrant un dictionnaire au hasard, on tombait sur le mot « hasard », ce serait un miracle, alors que si on tombait sur le mot « miracle », ce serait un hasard.

H. Le Tellier, *Les amnésiques n'ont rien vécu d'inoubliable.*

Il peut paraître irréaliste et prétentieux de vouloir, de par sa nature même, quantifier le hasard. C'est pourtant ce qui a conduit à la notion de Probabilité.

Nous allons dans ce cours introduire ce concept mathématique, dont la puissance **permettra de modéliser** d'innombrables situations où le hasard intervient, dépassant ainsi largement le cadre restreint des jeux de dés et tirages de cartes. La **modélisation probabiliste est fondamentale** dans tous les domaines d'applications, qu'ils soient issus des sciences dures ou des sciences humaines, de la physique *(mouvement de particules, formation de gouttes d'eau)*, de la météorologie, de la biologie *(mutation du génôme)*, de l'écologie *(déplacement des oiseaux migrateurs pendant la grippe aviaire)*, de la médecine *(traitement d'images)*, de l'économie *(marchés boursiers)*, ou de la sociologie.

Ce cours introduit toutes les notions de base de la théorie des probabilités et permet d'acquérir le raisonnement probabiliste. La théorie des probabilités ne peut se construire axiomatiquement qu'en utilisant la théorie de la mesure et de l'intégration, ce qui en constitue une des difficultés principales. Nous n'en donnerons que les éléments nécessaires à sa bonne compréhension, sans exiger de prérequis dans ce domaine. *(Mais nous remarquerons que la théorie des Probabilités constitue un très bel exemple d'application de la théorie de l'intégration).*

Soulignons que les probabilités sont en lien étroit avec la vie quotidienne. À ce titre, elles s'appuient sur un passage du concret à l'abstrait : **la modélisation**, ce qui les rend difficiles, mais palpitantes. L'apprentissage de ce raisonnement probabiliste sera développé dans le cours.

Le mot **Hasard** est un mot d'origine arabe : « az-zahr », le dé. Il est apparu en français pour signifier tout d'abord un jeu de dés, puis plus généralement un événement non prévisible, et par extension le mode d'apparition de ce type d'événement.

Dans la vie quotidienne, chacun est maintenant familier avec le mot et même le concept de probabilité : probabilité qu'il pleuve la semaine suivante, probabilité d'avoir une fille aux yeux bleus, probabilité de gagner au loto ou celle d'être dans la bonne file au supermarché.

Les assurances fixent le contrat d'assurance-vie d'un individu de 20 ans, grâce à une estimation de sa probabilité de survie à 80 ans. Dans de nombreux domaines, les probabilités interviennent : les entreprises cherchent à calculer le besoin probable de leurs produits dans le futur, les médecins cherchent à connaître les probabilités de succès de différents protocoles de soin, les compagnies pharmaceutiques doivent estimer les probabilités d'apparitions d'effets secondaires pour leurs médicaments.

Un exemple récent et spectaculaire est celui de l'utilisation des probabilités en économie, et en particulier en théorie aléatoire de la finance. On peut citer également d'autres domaines d'applications extrêmement importants et en pleine expansion, aussi variés que le calcul de structures, la théorie du signal, l'optimisation et le contrôle des systèmes

15.2.2 Premier exemple : Lancer de dés ; Alea jacta est

Lorsque vous lancez deux dés, vous ne pouvez savoir à l'avance quelles sont les faces qui vont apparaître. Il est certain que deux faces apparaîtront à l'issue de l'expérience, mais on ne peut les prédire avec certitude.
On dit que le résultat est aléatoire *(du latin "alea" qui signifie justement dé)*. Alea jacta est, les dés en sont jetés.

15.2.3 Définition d'événement aléatoire

Un phénomène est dit aléatoire si, reproduit maintes fois dans des conditions identiques, il se déroule chaque fois différemment de telle sorte que le résultat de l'expérience change d'une fois sur l'autre de manière imprévisible.

Exemple 1 :

1. Si le résultat de l'expérience aléatoire consiste à la détermination du sexe d'un nouveau né, l'ensemble des résultats possibles est donné par :
$$\Omega = \{F, G\}$$
où G désigne que l'enfant est un garçon et F, une fille.
2. Si l'issue de l'expérience est **l'ordre d'arrivée** d'une course entre 7 chevaux ayant les positions de départ, $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$, alors
$$\Omega = \{\text{Toutes les permutations de } (1, 2 \ldots, 7)\}$$
c'est à dire 7! possibilités d'arrivées au total

15.2.4 Où donc vont se nicher les probabilités ?

Les files d'attente

Postez vous à un guichet de péage et comptez les véhicules qui se présentent à ce guichet pendant un intervalle de temps $[0,\ T]$. Le résultat de l'expérience est à priori un nombre entier : on prendra donc pour espace des épreuves, l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers positifs ou nuls ; un exemple d'événement est : "on observe au plus n voitures", représenté par le sous ensemble $\{0, 1, \ldots, n\} \subset \mathbb{N}$. Une loi de probabilité souvent utilisée dans ces cas est la loi de Poisson :
$$\mathbb{P}(n) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n\,!}$$
λ étant une constante caractérisant la fréquentation de la gare de péage pendant un intervalle de temps $[0,\ T]$; souvent, on écrit
$$\mathbb{P}(n) = e^{-\lambda_T} \frac{\lambda_T^n}{n\,!}$$
précisant ainsi que le paramètre λ dépend de l'intervalle de temps $[0,\ T]$. On a alors
$$\mathbb{P}(\{0, 1, \ldots, n\}) = e^{-\lambda_T} \left(1 + \lambda_T + \frac{\lambda_T^{n2}}{2\,!} + \ldots + \frac{\lambda_T^n}{n\,!}\right)$$

Processus d'Erhenfest

En physique ou chimie, on considère un gaz confiné dans un cube à deux compartiments. Comment va se répartir ce gaz dans les deux compartiments ? Pour comprendre le phénomène, on le modélise à l'aide d'urnes et de boules. On considère donc $2N$ boules réparties dans 2 urnes A et B ; à chaque instant entier, on choisit **"au hasard"** une urne, puis, une fois l'urne choisie, on en tire une boule qu'on met dans l'autre urne. Le problème consiste à étudier l'évolution du système, les boules modélisant les molécules de gaz. Cette étude entre dans le cadre d'étude des chaînes de Markov et des marches aléatoires.

La gestion des stocks

L'état d'un stock à l'état $n + 1$ dépend de l'état du stock à l'état n et des départs et arrivées entre l'instant n et $n + 1$

15.2.5 Description générale d'une expérience aléatoire

La caractéristique d'une expérience aléatoire est que l'issue de celle ci n'est pas entièrement déterminée par les conditions expérimentales. Pour modéliser une telle expérience, on commence donc par préciser l'ensemble Ω **de toutes les issues, à priori possibles**. La loi de l'expérience ne sera pas, à la différence du cas déterministe, une règle *(exprimée par une équation, par une formule)* permettant de prévoir avec certitude l'issue de l'expérience, mais une règle (appelée loi de probabilité) déterminant les " chances " que l'issue de l'expérience appartienne à tel ou tel sous-ensemble des issues possibles à priori.
La modélisation complète d'une expérience aléatoire comporte donc :

— La définition précise de l'ensemble Ω de toutes les issues à priori possibles. On appelle Ω **espace des issues** ou **espace fondamental**

— La définition d'un catalogue $\mathbb{F}$ d'événements qui sont des sous-ensembles de Ω : une issue ω réalise l'événement $A \in \mathbb{F}$ si $\omega \in A$. Deux événements ne peuvent se réaliser simultanément s'ils sont deux sous-ensembles disjoints de Ω ; on dit qu'ils sont **incompatibles**

— La donnée **d'une loi de probabilité** $\mathbb{P}$ qui, à chaque événement $A \in \mathbb{F}$ associe sa probabilité $\mathbb{P}(A) \in [0;1]$

Dans l'évaluation des chances des événements, il est usuel de supposer que si deux événements A et B sont incompatibles, on a $\mathbb{P}(A \text{ ou } B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$. En outre, on a l'habitude d'attribuer la probabilité 1 (100% de chances) à l'événement certain Ω (qui est réalisé quelqu'en soit l'issue)

Dictionnaire utile entre langage ensembliste et langage probabiliste

Langage probabiliste	Traduction en langage ensembliste
Résultat de l'épreuve	Elément ω de Ω
Evénement A	Partie A de Ω
L'événement A est réalisé	$\omega \in$ A
Evénement impossible	$\emptyset$
L'événement A implique l'événement B	A $\subset$ B
Evénement contraire de A	$\overline{A}$
Evénement A et événement B	A $\cap$ B
A et B sont incompatibles	A $\cap$ B $= \emptyset$
Evénement A ou événement B	A $\cup$ B

Ainsi, par exemple, « L'événement A implique l'événement B " signifie que si $\omega \in A$, alors $\omega \in B$
Les probabilités peuvent être vues comme une continuation, un prolongement, du cours de logique vu en L_0

15.2.6 Définition

Soit Ω un ensemble quelconque et $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des parties de Ω.
On appelle tribu sur Ω, la donnée d'un sous ensemble $\mathcal{F}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$ dont les éléments sont appelés « événements » tels que :

1. $\Omega \in \mathcal{F}$
2. $A \in \mathcal{F} \Longrightarrow \overline{A} \in \mathcal{F}$
3. Stabilité par réunion dénombrable :
   Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements de $\mathcal{F}$ alors, $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}$

La donnée de $\{\Omega, \mathcal{F}\}$ s'appelle espace probabilisable
On appelle espace probabilisable fini, une paire $\{\Omega; \mathcal{F}\}$ où Ω est un ensemble fini, et $\mathcal{F}$ une tribu sur Ω

Remarque 1 :

Remarques importantes

1. Les événements sont bien des sous-ensembles de Ω

2. La propriété « **Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements de $\mathcal{F}$ alors, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}$** » est évidemment vraie si la suite d'événements est finie ; nous avons donc aussi :
$$A \in \mathcal{F} \text{ et } B \in \mathcal{F} \Longrightarrow A \cup B \in \mathcal{F}$$
3. Lorsque Ω est un ensemble fini, nous prendrons toujours comme tribu $\mathcal{F}$, l'ensemble des parties de Ω. Autrement dit, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$
4. Le point de vue adopté dans ce cours est le point de vue issu de l'axiômatique ensembliste, très proche de la logique et de l'algèbre de Boole.
5. Quelle est la différence entre algèbre de Boole et tribu ?
Une algèbre de Boole est une partie de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans laquelle nous avons défini 2 opérations binaires (ici, la réunion $\cup$ et l'intersection $\cap$), et une opération unaire : $A \mapsto \overline{A}$.
La définition de tribu montre qu'elle est stable par l'opération de réunion ; la proposition 15.2.7 montre qu'une tribu est stable par intersection.
Une tribu est donc une algèbre de Boole ; ce qu'une tribu a en plus, c'est la stabilité par réunion dénombrable. Une tribu est aussi appelée σ-algèbre de Boole.

Exemple 2 :

On lance 2 dés discernables [1]
Soient A l'événement $A = \{\text{Les 2 numéros obtenus sont pairs}\}$ et $B = \{\text{La somme des numéros obtenus est paire}\}$
Il est clair que si A est réalisé, alors B l'est aussi, c'est à dire que si $\omega \in A$, alors $\omega \in B$, et donc $A \subset B$
Comment formaliser ces ensembles ?

- ⋆ $\Omega = \{(i,j) \text{ où } 1 \leqslant i \leqslant 6 \text{ et } 1 \leqslant j \leqslant 6\}$. Evidemment $\text{Card}\,\Omega = 36$
- ⋆ $A = \{(i,j) \in \Omega \text{ où } i \text{ est pair et } j \text{ est pair}\}$.
- ⋆ $B = \{(i,j) \in \Omega \text{ où } i+j \text{ est pair}\}$.

Nous aurons l'occasion d'en voir plusieurs autres dans les exercices.

15.2.7 Proposition : stabilité par intersection dénombrable

Soient $\{\Omega, \mathcal{F}\}$ un espace probabilisable et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements de $\mathcal{F}$ alors, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}$

Démonstration

La clé de la démonstration est la loi de Morgan donnée, dans le cas fini par :
$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \text{ et } \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$
Nous allons démontrer la loi de Morgan dans le cas infini dénombrable

1. **Démontrons que $\overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}$ *(Loi de Morgan dans le cas infini dénombrable)***
   (a) Soit $x \in \overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n}$; alors $x \notin \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ et donc, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $x \notin A_p \Longleftrightarrow x \in \overline{A_p}$
   Et donc $x \in \bigcup_{p\in\mathbb{N}} \overline{A_p}$
   Nous venons de montrer que si $x \in \overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n}$, alors $x \in \bigcup_{p\in\mathbb{N}} \overline{A_p}$
   Nous avons donc $\overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n} \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}$.

1. Par exemple un dé bleu et un dé rouge ; de toutes façons, pour mieux modéliser une expérience, il faudra toujours différencier les dés

(b) Réciproquement, supposons $x \in \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}$; il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x \in \overline{A_{n_0}} \Longleftrightarrow x \notin A_{n_0}$, et donc $x \notin \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$, c'est à dire $x \in \overline{\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n}$

Ainsi, si $x \in \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}$, alors $x \in \overline{\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n}$

Nous avons donc : $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n} \subset \overline{\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n}$

(c) Nous avons $\overline{\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n} \subset \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}$ et $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n} \subset \overline{\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n}$, nous pouvons donc conclure que :

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n} = \overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n}$$

2. **D'après les axiômes de tribu,** si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n \in \mathcal{F}$, alors $\overline{A_n} \in \mathcal{F}$
   Ensuite, $\left(\overline{A_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite dénombrable d'éléments de $\mathcal{F}$, et donc, toujours par les axiômes de tribu, $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n} \in \mathcal{F}$, c'est à dire, par l'égalité démontrée précédemment $\overline{\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n} \in \mathcal{F}$
   Par passage au complémentaire, nous avons bien $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}$
   Ce que nous voulions

Remarque 2 :

1. En fait, nous avons $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}$ équivalent à $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}$ *(toujours par la loi de Morgan)*[2]
2. La propriété « **Si** $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **est une suite d'événements de** $\mathcal{F}$ **alors,** $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}$ » est évidemment vraie si la suite d'événements est finie ; nous avons donc aussi :

$$A \in \mathcal{F} \text{ et } B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$$

3. Que veut dire $\omega \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$?
   Très simplement que, **pour tout** $n \in \mathbb{N}$, $\omega \in A_n$, c'est à dire, en langage formalisé :

$$\left(\omega \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \Longleftrightarrow ((\forall n \in \mathbb{N})\,(\omega \in A_n))$$

4. De la même manière, que veut dire $\omega \in \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$?
   Tout aussi simplement **qu'il existe** $n \in \mathbb{N}$ tel que $\omega \in A_n$, c'est à dire, en langage formalisé :

$$\left(\omega \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \Longleftrightarrow ((\exists n_0 \in \mathbb{N})\,(\omega \in A_{n_0}))$$

15.2.8 Conséquences directes de la définition de tribu

Soit Ω un ensemble quelconque, et $\mathcal{F}$ tribu sur Ω. Alors :

1. $\emptyset \in \mathcal{F}$
2. $A \in \mathcal{F}$ et $B \in \mathcal{F} \Longrightarrow A \setminus B \in \mathcal{F}$ et $A \Delta B \in \mathcal{F}$

2. Démontrez le en exercice

Démonstration

Cette démonstration est élémentaire

1. Il faut commencer par définir $A \setminus B$ et $A\Delta B$;
   $\to$ $A \setminus B = A \cap \overline{B}$
   $\to$ $A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$
   Le $A\Delta B$ correspond, en logique, au **« ou exclusif »**
2. D'après les propriétés des tribus, si $\Omega \in \mathcal{F}$, alors $\overline{\Omega} \in \mathcal{F}$; comme $\overline{\Omega} = \emptyset$, on a le résultat
3. D'après les lois de Morgan et 15.2.7, $A \cap B = \overline{\overline{A} \cup \overline{B}}$; il suffit ensuite d'appliquer les axiômes de tribu.
4. $A \setminus B = A \cap \overline{B}$ et on applique les axiômes ; même problème avec $A\Delta B$

Exemple 3 :

Exemples de tribu

1. Si Ω est un ensemble fini, $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des parties de Ω est une tribu sur Ω. C'est la tribu naturelle que nous allons utiliser le plus souvent, surtout lorsque nous travaillerons les espaces probabilisés finis.
2. L'ensemble $B = \{\emptyset; \Omega\}$ est une tribu ; c'est la tribu grossière.
3. Soit $A \subset \Omega$; alors, $B = \left\{\emptyset; \Omega; A; \overline{A}\right\}$ est une tribu sur Ω *(c'est une tribu adaptée au jeu de« pile ou face »)*
4. Soient $\mathcal{F}_1$ une tribu sur Ω et $\mathcal{F}_2$ une seconde tribu sur Ω, alors $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ est une tribu sur Ω.
5. Soit $B \subset \Omega$; **on appelle $\sigma(B)$ la tribu engendrée par B ; c'est la plus petite tribu contenant B ;** en fait, $\sigma(B)$ est l'intersection de toutes les tribus contenant B
   Nous avons, en particulier, $B \in \sigma(B)$
6. La tribu des boréliens de $\mathbb{R}$
   Soit $\mathcal{O}$ l'ensemble des intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ $\sigma(\mathcal{O})$ est la tribu des boréliens de $\mathbb{R}$; nous avons $[a;b] \in \sigma(\mathcal{O})$ car $[a;b] = \displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left]a - \frac{1}{n}; b + \frac{1}{n}\right[$ *(très intéressant à démontrer ; utiliser pour cela le cours sur les nombres réels et les suites)*
   Petite histoire : **Boréliens,** en hommage au mathématicien français Emile Borel

Exercice 1 :

Soient Ω un ensemble quelconque, $\mathcal{F}_1$ une tribu sur Ω et $\mathcal{F}_2$ une seconde tribu sur Ω, montrer que $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ est une tribu sur Ω.

Exercice 2 :

Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leqslant b$. Montrer que $[a;b] = \displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left]a - \frac{1}{n}; b + \frac{1}{n}\right[$

Remarque 3 :

1. Les opérations pour lesquelles une tribu $\mathcal{F}$ est stable *(intersection, complémentation, réunion)* **correspondent à des opérations logiques** *(et, non, ou)*.
   Il est donc naturel d'utiliser la notion de tribu *(cf cours d'algèbre de Boole et de logique de L_0)*
2. Ω est l'ensemble des épreuves, ou **« événement certain »**
3. $\emptyset$ est **l'événement impossible**
4. Soit $A \in \mathcal{F}$, alors A est un événement ; **$\overline{A}$ est l'événement contraire de A** ;
5. $\omega \in A$ est un **événement élémentaire.**
6. Soient $A \in \mathcal{F}$ et $B \in \mathcal{F}$, alors $A \cap B$ est **la conjonction** de A et B.
7. Si $A \cap B = \emptyset$, on dit que les deux événements sont **incompatibles**.
8. Soient $A \in \mathcal{F}$ et $B \in \mathcal{F}$, alors $A \cup B$ est **la disjonction** de A et B

15.3 Espace probabilisé

15.3.1 Définition de probabilité

Soit $\{\Omega; \mathcal{F}\}$ un espace probabilisable.
On appelle probabilité sur $\{\Omega; \mathcal{F}\}$, une application $\mathbf{P}$ *ou fonction d'ensembles* de $\mathcal{F}$ dans l'intervalle $[0,1]$ telle que :

1. $\mathbf{P}(\Omega) = 1$
2. Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements de $\mathcal{F}$ deux à deux disjoints c'est à dire :

$$(m \neq n) \Rightarrow A_m \cap A_n = \emptyset$$

alors, $\mathbf{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{P}(A_n)$ (Somme d'une série)

La donnée du triplet $\{\Omega; \mathcal{F}; \mathbf{P}\}$ définit un espace probabilisé
Si Ω est un ensemble fini, la donnée du triplet $\{\Omega; \mathcal{F}; \mathbf{P}\}$ définit un espace probabilisé fini.

Remarque 4 :

1. La propriété
Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements de $\mathcal{F}$ deux à deux disjoints alors,

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{P}(A_n)$$

est évidemment vraie si la suite d'événements est finie ; nous avons donc aussi [3] :

$$(\forall A \in \mathcal{F})(\forall B \in \mathcal{F})(A \cap B = \emptyset \Longrightarrow \mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B))$$

2. Plus généralement :
Si $(A_n)_{0\leqslant n\leqslant p}$ est une suite d'événements de $\mathcal{F}$ deux à deux disjoints c'est à dire :

$$(m \neq n) \Longrightarrow A_m \cap A_n = \emptyset$$

alors, $\mathbf{P}\left(\bigcup_{n=0}^{p} A_n\right) = \sum_{n=0}^{p} \mathbf{P}(A_n)$

3. Supposons $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$ fini
   (a) Il est beaucoup plus simple, et c'est ce qu'on utilise de prendre $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$
   (b) Si on veut construire une probabilité $\mathbf{P}$ sur $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, il suffit de connaître, pour tout $\omega_i \in \Omega$, $\mathbf{P}(\{\omega_i\}) = p_i$, et nous devons avoir :

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(\{\omega_i\}) = \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

   (c) Lorsque Ω est fini, pour $A \subset \Omega$, nous avons la probabilité de l'événement A :

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{\omega_k \in A} \mathbf{P}(\omega_k)$$

3. Faire le lien avec les cardinaux : Si $A \cap B = \emptyset$, alors Card $(A \cup B) =$ Card $(A) +$ Card (B)

15.3.2 Théorème

Soit $\{\Omega;\mathcal{F};\mathbf{P}\}$ un espace probabilisé ; soient $A\in\mathcal{F}$ et $B\in\mathcal{F}$. Alors

1. $\mathbf{P}\left(\bar{A}\right)=1-\mathbf{P}\left(A\right)$
2. $\mathbf{P}\left(\emptyset\right)=0$
3. $A\subset B\Longrightarrow\mathbf{P}\left(A\right)\leqslant\mathbf{P}\left(B\right)$
4. $A\subset B\Longrightarrow\mathbf{P}\left(B\setminus A\right)=\mathbf{P}\left(B\right)-\mathbf{P}\left(A\right)$
5. $\mathbf{P}\left(A\cup B\right)=\mathbf{P}\left(A\right)+\mathbf{P}\left(B\right)-\mathbf{P}\left(A\cap B\right)$

Démonstration

La démonstration est élémentaire [4]

1. Nous avons : $\Omega=A\cup\bar{A}$; de plus, $\emptyset=A\cap\overline{A}$; donc : $\mathbf{P}\left(A\cup\overline{A}\right)=\mathbf{P}\left(A\right)+\mathbf{P}\left(\overline{A}\right)=1$
   Ce que nous voulions
2. Comme $\emptyset=\overline{\Omega}$, c'est fini !!
3. Supposons $A\subset B$; alors,
   $$B=\Omega\cap B=\left(A\cup\overline{A}\right)\cap B=\left(A\cap B\right)\cup\left(\overline{A}\cap B\right)=A\cup\left(\overline{A}\cap B\right)=A\cup\left(B\setminus A\right)$$
   Donc $\mathbf{P}\left(B\right)=\mathbf{P}\left(A\right)+\mathbf{P}\left(B\setminus A\right)$ et $\mathbf{P}\left(B\setminus A\right)=\mathbf{P}\left(B\right)-\mathbf{P}\left(A\right)$
   De plus, comme $\mathbf{P}\left(B\setminus A\right)\geqslant 0$, on a le résultat
4. $A\cup B=\left(A\setminus B\right)\cup\left(A\cap B\right)\cup\left(B\setminus A\right)$
   Donc, $\mathbf{P}\left(A\cup B\right)=\mathbf{P}\left(A\setminus B\right)+\mathbf{P}\left(A\cap B\right)+\mathbf{P}\left(B\setminus A\right)$
   Or, $A=\left(A\setminus B\right)\cup\left(A\cap B\right)$, et $B=\left(A\cap B\right)\cup\left(B\setminus A\right)$
   D'où $\mathbf{P}\left(B\right)=\mathbf{P}\left(A\cap B\right)+\mathbf{P}\left(B\setminus A\right)$, et, de même, $\mathbf{P}\left(A\right)=\mathbf{P}\left(A\cap B\right)+\mathbf{P}\left(A\setminus B\right)$, d'où, en remplaçant, on obtient :
   $$\mathbf{P}\left(A\cup B\right)=\mathbf{P}\left(A\right)-\mathbf{P}\left(A\cap B\right)+\mathbf{P}\left(A\cap B\right)+\mathbf{P}\left(B\right)-\mathbf{P}\left(A\cap B\right)$$
   C'est à dire $\mathbf{P}\left(A\cup B\right)=\mathbf{P}\left(A\right)+\mathbf{P}\left(B\right)-\mathbf{P}\left(A\cap B\right)$

Remarque 5 :

1. Si nous savons que $\mathbf{P}\left(\Omega\right)=1$, Ω peut ne pas être le seul événement A tel que $\mathbf{P}\left(A\right)=1$
   Si $A\subset\Omega$ est tel que $\mathbf{P}\left(A\right)=1$, A est dit : « **événement presque certain** »
2. De même, si nous sommes sûrs que $\mathbf{P}\left(\emptyset\right)=0$, ce n'est peut-être pas le seul événement A tel que $\mathbf{P}\left(A\right)=0$; si $A\subset\Omega$ est tel que $\mathbf{P}\left(A\right)=0$ A est alors dit : « **événement presque impossible** »
3. Si $A\subset B$, et si $\mathbf{P}\left(A\right)=\mathbf{P}\left(B\right)$, on n'a pas non plus forcément $A=B$

Exemple 4 :

Tarzan offre à Jane 2 livres $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$. La probabilité pour que Jane aime le livre $\mathcal{B}_1$ est 0,6 et pour que Jane aime le livre $\mathcal{B}_2$ est 0,4. La probabilité pour que Jane aime les deux livres est 0,2. Quelle est la probabilité pour que Jane n'aime ni l'un ni l'autre ?

Pour simplifier, appelons B_i l'événement $\{$Jane aime le livre $\mathcal{B}_i\}$
Alors, $\mathbf{P}\left(B_1\right)=0,6$ et $\mathbf{P}\left(B_2\right)=0,4$ et $\mathbf{P}\left(B_1\cap B_2\right)=0,2$
L'événement $\{$Jane n'aime ni le livre $\mathcal{B}_\infty$ ni le livre $\mathcal{B}_\in\}$ peut se traduire par :

$$\{\text{Jane n'aime ni le livre }\mathcal{B}_1\text{ni le livre }\mathcal{B}_2\}=\overline{B_1}\cap\overline{B_2}$$

Nous devons donc calculer $\mathbf{P}\left(\overline{B_1}\cap\overline{B_2}\right)$. Or, d'après les lois de Morgan, $\overline{B_1}\cap\overline{B_2}=\overline{B_1\cup B_2}$
et $\mathbf{P}\left(\overline{B_1}\cap\overline{B_2}\right)=1-\mathbf{P}\left(B_1\cup B_2\right)$
$\mathbf{P}\left(B_1\cup B_2\right)=\mathbf{P}\left(B_1\right)+\mathbf{P}\left(B_2\right)-\mathbf{P}\left(B_1\cap B_2\right)=0,6+0,4-0,2=0,8.$
Donc, $\mathbf{P}\left(\overline{B_1}\cap\overline{B_2}\right)=0,2$
Il a bien de la chance, Tarzan !!

4. Pour bien comprendre cette démonstration, et celles qui vont suivre, il ne faut surtout pas hésiter à faire des schémas

15.3.3 Proposition

Soit $\{\Omega; \mathcal{F}; \mathbf{P}\}$ un espace probabilisé
Alors, pour toute **suite croissante** $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements de $\mathcal{F}$, c'est à dire tels que $A_n \subset A_{n+1}$, nous avons : $\mathbf{P}\left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{P}(A_n)$

Démonstration

Soit donc $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante d'éléments de F.
On peut déjà remarquer, d'après le résultat 15.3.2 que la suite numérique $(\mathbf{P}(A_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante, majorée *(tout simplement par 1)* et donc convergente. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{P}(A_n)$ existe bien.
On construit la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'ensembles par : $F_0 = A_0$, $F_1 = A_1 \backslash A_0$, $F_2 = A_2 \backslash A_1$ et, plus généralement, par $F_n = A_n \setminus A_{n-1}$
C'est à dire que nous avons : $F_n = A_n \cap \overline{A_{n-1}}$

Cette construction nous amène donc deux choses : $\begin{cases} (m \neq n) \Rightarrow (F_m \cap F_n = \emptyset) \\ (\forall n \in \mathbb{N}) \left(\bigcup\limits_{k=0}^{n} F_k = \bigcup\limits_{k=0}^{n} A_k = A_n\right) \end{cases}$

Et nous avons donc, $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n$

Des axiômes de probabilités, nous obtenons $\mathbf{P}\left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n\right) = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{P}(F_n)$, c'est à dire $\mathbf{P}\left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{P}(F_n)$

Des cours sur les séries nous avons $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{P}(F_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \mathbf{P}(F_k)$

Or, $\sum\limits_{k=0}^{n} \mathbf{P}(F_k) = \mathbf{P}(F_0) + \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbf{P}(F_k) = \mathbf{P}(A_0) + \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbf{P}(A_k \setminus A_{k-1})$
Comme, puisque $A_k \subset A_{k+1}$, $\mathbf{P}(A_{k+1} \setminus A_k) = \mathbf{P}(A_{k+1}) - \mathbf{P}(A_k)$, nous avons

$$\sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}(F_k) = \mathbf{P}(A_0) + \sum_{k=1}^{n} (\mathbf{P}(A_k) - \mathbf{P}(A_{k-1})) = \mathbf{P}(A_n)$$

C'est à dire : $\mathbf{P}\left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{P}(F_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \mathbf{P}(F_k) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{P}(A_n)$
Q.E.D.

Remarque 6 :

1. Très prosaïquement, si $(A_n)_{0\leqslant n\leqslant p}$ est une suite finie et croissante d'événements de $\mathcal{F}$, c'est à dire tels que $A_n \subset A_{n+1}$, nous avons : $\mathbf{P}\left(\bigcup\limits_{n=0}^{p} A_n\right) = \mathbf{P}(A_p)$
2. De la même manière, si $(A_n)_{0\leqslant n\leqslant p}$ est une suite finie et décroissante d'événements de $\mathcal{F}$, c'est à dire tels que $A_{n+1} \subset A_n$, nous avons : $\mathbf{P}\left(\bigcup\limits_{n=0}^{p} A_n\right) = \mathbf{P}(A_0)$
3. Soit $\{A_n; n \in \mathbb{N}\}$ une famille dénombrable quelconque d'éléments de $\mathcal{F}$, alors

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{P}(A_n)$$

15.3.4 Proposition

Soit $\{\Omega; \mathcal{F}; \mathbf{P}\}$ un espace probabilisé
Alors, les propriétés suivantes sont équivalentes :

$\Longrightarrow$ Pour toute suite croissante $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements de $\mathcal{F}$, c'est à dire tels que $A_n \subset A_{n+1}$, nous avons : $\mathbf{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(A_n)$

$\Longrightarrow$ Pour toute suite décroissante $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements de $\mathcal{F}$, c'est à dire tels que $A_{n+1} \subset A_n$, nous avons : $\mathbf{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(A_n)$

Démonstration

1. **Supposons que, pour toute suite croissante $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements de $\mathcal{F}$, nous avons : $\mathbf{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(A_n)$**

   Nous allons démontrer que, pour toute suite décroissante $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements de $\mathcal{F}$, nous avons : $\mathbf{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(A_n)$

   (a) Soit donc $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements de $\mathcal{F}$, décroissante. Démontrons que la suite $\left(\overline{A_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
   Soit donc $x \in \overline{A_n}$; comme $x \notin A_n$, et comme $A_{n+1} \subset A_n$, $x \notin A_{n+1}$, c'est à dire $x \in \overline{A_{n+1}}$ et donc $\overline{A_n} \subset \overline{A_{n+1}}$ et la suite $\left(\overline{A_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante

   (b) Nous avons donc $\mathbf{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(\overline{A_n}\right) = 1 - \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(A_n)$

   (c) Par les lois de Morgan, nous avons $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}}$, donc, $\mathbf{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = 1 - \mathbf{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}\right)$

   (d) Ainsi :
   $$\mathbf{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = 1 - \mathbf{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}\right) = 1 - \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(\overline{A_n}\right) = 1 - \left(1 - \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(A_n)\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(A_n)$$

   Ce que nous voulions

2. **Supposons maintenant que, pour toute suite décroissante $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements de $\mathcal{F}$, nous avons : $\mathbf{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(A_n)$**

   Nous allons démontrer que, pour toute suite croissante $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements de $\mathcal{F}$, nous avons : $\mathbf{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(A_n)$

   (a) Soit donc $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements de $\mathcal{F}$, croissante. Démontrons que la suite $\left(\overline{A_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   Soit donc $x \in \overline{A_{n+1}}$; comme $x \notin A_{n+1}$, et comme $A_n \subset A_{n+1}$, $x \notin A_n$, c'est à dire $x \in \overline{A_n}$ et donc $\overline{A_{n+1}} \subset \overline{A_n}$ et la suite $\left(\overline{A_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante

   (b) Nous avons donc $\mathbf{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(\overline{A_n}\right) = 1 - \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(A_n)$

   (c) Par les lois de Morgan, nous avons $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}}$, donc, $\mathbf{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = 1 - \mathbf{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}\right)$

   (d) Ainsi :
   $$\mathbf{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = 1 - \mathbf{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}\right) = 1 - \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(\overline{A_n}\right) = 1 - \left(1 - \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(A_n)\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(A_n)$$

   Ce que nous voulions

Il y a donc équivalence entre les deux propositions

Remarque 7 :

Soit $\{A_n ; n \in \mathbb{N}\}$, une famille quelconque d'éléments de $\mathcal{F}$

1. Si $F_n = \bigcup\limits_{p=0}^{n} A_p$, alors la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante d'éléments de $\mathcal{F}$.

   En effet, nous avons $F_{n+1} = F_n \cup A_{n+1}$ et donc $F_n \subset F_{n+1}$

   D'après 15.3.3, nous avons $\mathbf{P}\left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{P}(F_n)$, tout en remarquant que $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$

2. De manière parallèle, si $G_n = \bigcap\limits_{p=0}^{n} A_p$, alors la suite $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante d'éléments de $\mathcal{F}$.

   En effet, nous avons $G_{n+1} = G_n \cap A_{n+1}$ et donc $G_{n+1} \subset G_n$

   D'après 15.3.3 et 15.3.4, nous avons $\mathbf{P}\left(\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} G_n\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{P}(G_n)$, tout en remarquant que $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} G_n = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$

3. Soit $F_n^1 = \bigcup\limits_{m\geqslant n} A_m$, alors la suite $\left(F_n^1\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante d'éléments de $\mathcal{F}$.

   En effet, nous avons $F_n^1 = \bigcup\limits_{m\geqslant n+1} A_m \cup A_n = F_{n+1}^1 \cup A_m$ et donc $F_{n+1}^1 = \bigcup\limits_{m\geqslant n+1} A_m \subset F_n^1$

   D'après 15.3.4, nous avons $\mathbf{P}\left(\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n^1\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(F_n^1\right)$

4. De manière similaire, soit $G_n^1 = \bigcap\limits_{m\geqslant n} A_m$, alors la suite $\left(G_n^1\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante d'éléments de $\mathcal{F}$.

   En effet, nous avons $G_{n+1}^1 = \bigcap\limits_{m\geqslant n+1} A_m = A_{n+1} \cap A_{n+2} \cup \cdots$ et $G_n^1 = \bigcap\limits_{m\geqslant n} A_m = A_n \cap A_{n+1} \cap A_{n+2} \cap \cdots = A_n \cap G_{n+1}^1$ et donc $G_n^1 \subset G_{n+1}^1$

   D'après 15.3.3, nous avons $\mathbf{P}\left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} G_n^1\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(G_n^1\right)$

D'où les définitions ci-après

15.3.5 Définition

Soit $\{A_n ; n \in \mathbb{N}\}$, une famille quelconque d'éléments de $\mathcal{F}$

1. On écrit $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$
2. On écrit $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$
3. On écrit $\limsup\limits_{n\to+\infty} A_n = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \left(\bigcup\limits_{m\geqslant n} A_m\right)$
4. On écrit $\liminf\limits_{n\to+\infty} A_n = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \left(\bigcap\limits_{m\geqslant n} A_m\right)$

Remarque 8 :

1. Nous avons, évidemment, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset A_n \subset \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$

2. Il faut se mettre en tête que $\limsup\limits_{n\to+\infty} A_n$ et $\liminf\limits_{n\to+\infty} A_n$ sont des événements de $\mathcal{F}$

3. Que veut dire $\omega \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \left(\bigcup\limits_{m\geqslant n} A_m\right)$, c'est à dire : que veut dire que $\omega \in \limsup\limits_{n\to+\infty} A_n$?

   Très simplement, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $m \geqslant n$ tel que $\omega \in A_m$
   Ce qui veut dire qu'il existe une infinité d'événements A_n tels que $\omega \in A_n$ *(il y a une infinité d'événements qui se réalisent)*

4. Que veut dire $\omega \in \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \left(\bigcap\limits_{m\geqslant n} A_m\right)$ c'est à dire $\omega \in \liminf\limits_{n\to+\infty} A_n$?

   Très simplement, qu'il existe un rang $n \in \mathbb{N}$ à partir duquel, pour tout $m \geqslant n$ $\omega \in A_m$
   Ce qui veut dire qu'à partir d'un rang $n \in \mathbb{N}$, tous les événements A_n sont tels que $\omega \in A_n$ *(tous les événements A_n sont réalisés)*

Exercice 3 :

A l'aide de la réunion, de l'intersection et de la complémentation, écrire les événements suivants :

1. L'un au moins des événements A, B et C est réalisé.
2. Un et un seul des événements A ou B se réalise
3. A et B se réalisent, mais pas C
4. Tous les événements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se réalisent
5. Il y a une infinité d'événements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui se réalisent.
6. L'un au moins des événements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se réalise
7. Seul un nombre fini d'événements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se réalisent
8. Il y a une infinité d'événements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui ne se réalisent pas
9. Tous les événements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se réalisent à partir d'un certain rang.

15.3.6 Proposition

Soit $\{A_n; n \in \mathbb{N}\}$, une famille quelconque d'éléments de $\mathcal{F}$; alors :

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset \liminf_{n\to+\infty} A_n \subset \limsup_{n\to+\infty} A_n \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(\bigcap_{m\geqslant n} A_m\right) \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(\bigcup_{m\geqslant n} A_m\right) \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$$

Démonstration

1. **Montrons que** $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \left(\bigcap\limits_{m\geqslant n} A_m\right)$

   Soit $x \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$; alors, il existe un $n \in \mathbb{N}$ (ici, $n = 0$) tel que $x \in \bigcap\limits_{m\geqslant n} A_m$.

   Donc, $x \in \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \left(\bigcap\limits_{m\geqslant n} A_m\right)$

2. **Montrons, maintenant que** $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\left(\bigcap_{m\geqslant n}A_m\right)\subset\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\left(\bigcup_{m\geqslant n}A_m\right)$

   Soit $\omega\in\liminf\limits_{n\to+\infty}A_n$, c'est à dire que $\omega\in\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\left(\bigcap_{m\geqslant n}A_m\right)$

   Il existe alors $n_0\in\mathbb{N}$, tel que $\omega\in\displaystyle\bigcap_{m\geqslant n_0}A_m$, c'est à dire que pour tout $m\in\mathbb{N}$, si $m\geqslant n_0$ alors $\omega\in A_m$.
   Soit $n\in\mathbb{N}$ et posons $p=\max\{n;n_0\}$; Alors, puisque $p\geqslant n_0$, $\omega\in A_p$.

   Ainsi, pour tout $n\in\mathbb{N}$, il existe $p\in\mathbb{N}$ tel que $\omega\in A_p$ et donc $\omega\in\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\left(\bigcup_{m\geqslant n}A_m\right)$

3. **Pour terminer, montrons que** $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\left(\bigcup_{m\geqslant n}A_m\right)\subset\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n$

   Soit $\omega\in\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\left(\bigcup_{m\geqslant n}A_m\right)$
   Ainsi, pour tout $n\in\mathbb{N}$, il existe $m\geqslant n$ tel que $\omega\in A_m$.
   Et donc, en posant $n=0$, il existe $p\geqslant 0$ tel que $\omega\in A_p$ et donc $\omega\in\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n$ et l'inclusion est démontrée.

La proposition est donc démontrée. Ce que nous voulions.

Remarque 9 :

Soit $\{\Omega;\mathcal{F};\mathbf{P}\}$ un espace probabilisé et $\{A_n;n\in\mathbb{N}\}$, une famille quelconque d'éléments de $\mathcal{F}$. Alors, d'après la proposition précédente et les propriétés 15.3.2, nous avons :

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}A_n\right)\leqslant\mathbf{P}\left(\liminf_{n\to+\infty}A_n\right)\leqslant\mathbf{P}\left(\limsup_{n\to+\infty}A_n\right)\leqslant\mathbf{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n\right)$$

La proposition ci-après est encore plus précise

15.3.7 Proposition

Soit $\{\Omega;\mathcal{F};\mathbf{P}\}$ un espace probabilisé et $\{A_n;n\in\mathbb{N}\}$, une famille quelconque d'éléments de $\mathcal{F}$. Alors :

$$\mathbf{P}\left(\liminf_{n\to+\infty}A_n\right)\leqslant\liminf_{n\to+\infty}\mathbf{P}\left(A_n\right)\leqslant\limsup_{n\to+\infty}\mathbf{P}\left(A_n\right)\leqslant\mathbf{P}\left(\limsup_{n\to+\infty}A_n\right)$$

Démonstration

1. On peut considérer $(\mathbf{P}(A_n))_{n\in\mathbb{N}}$ comme une suite numérique de nombres réels bornée, et donc, classiquement, nous avons :
$$\liminf_{n\to+\infty}\mathbf{P}\left(A_n\right)\leqslant\limsup_{n\to+\infty}\mathbf{P}\left(A_n\right)$$

2. Il faut donc montrer que $\mathbf{P}\left(\liminf\limits_{n\to+\infty}A_n\right)\leqslant\liminf\limits_{n\to+\infty}\mathbf{P}\left(A_n\right)$ et $\limsup\limits_{n\to+\infty}\mathbf{P}\left(A_n\right)\leqslant\mathbf{P}\left(\limsup\limits_{n\to+\infty}A_n\right)$

   (a) **Montrons que** $\mathbf{P}\left(\liminf\limits_{n\to+\infty}A_n\right)\leqslant\liminf\limits_{n\to+\infty}\mathbf{P}\left(A_n\right)$

Rappelons, tout d'abord que $\liminf\limits_{n\to+\infty} A_n = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}\left(\bigcap\limits_{m\geqslant n} A_m\right)$, et qu'en posant $B_n = \bigcap\limits_{m\geqslant n} A_m$, nous construisons une suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante.

En effet, $B_{n+1} = \bigcap\limits_{m\geqslant n+1} A_m$ et $B_n = \bigcap\limits_{m\geqslant n} A_m = A_n \cap \bigcap\limits_{m\geqslant n+1} A_m = A_n \cap B_{n+1}$ et donc $B_n \subset B_{n+1}$

D'après la proposition 15.3.3, nous avons $\mathbf{P}\left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{P}(B_n)$, c'est à dire :

$$\mathbf{P}\left(\liminf_{n\to+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(\bigcap_{m\geqslant n} A_m\right)$$

Or, $B_n = \bigcap\limits_{m\geqslant n} A_m \subset A_n$, et donc $\mathbf{P}(B_n) \leqslant \mathbf{P}(A_n)$, et par passage à la limite :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(B_n) \leqslant \liminf_{n\to+\infty} \mathbf{P}(A_n)$$

Et, en conclusion : $\mathbf{P}\left(\liminf\limits_{n\to+\infty} A_n\right) \leqslant \liminf\limits_{n\to+\infty} \mathbf{P}(A_n)$

(b) **Démontrons, maintenant que** $\limsup\limits_{n\to+\infty} \mathbf{P}(A_n) \leqslant \mathbf{P}\left(\limsup\limits_{n\to+\infty} A_n\right)$

Soit $B_n = \bigcup\limits_{m\geqslant n} A_m$. Alors, la suite d'événements $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante.

En effet, $B_{n+1} = \bigcup\limits_{m\geqslant n+1} A_m$ et donc $B_n = A_n \cup B_{n+1}$, c'est à dire que nous avons $B_{n+1} \subset B_n$

D'après les propositions 15.3.3 et 15.3.4, nous avons $\mathbf{P}\left(\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{P}(B_n)$

Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $A_n \subset B_n$, nous avons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(A_n) \leqslant \mathbf{P}(B_n)$. Cette inégalité étant conservée par le passage à la limite, nous avons aussi :

$$\liminf_{n\to+_infty} \mathbf{P}(A_n) \leqslant \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(B_n)$$

C'est à dire $\limsup\limits_{n\to+\infty} \mathbf{P}(A_n) \leqslant \mathbf{P}\left(\limsup\limits_{n\to+\infty} A_n\right)$

Ce que nous voulions

La proposition est démontrée

Exercice 4 :

Pour $\Omega = \mathbb{R}$, on considère les familles $\{A_n; n \in \mathbb{N}\}$, d'éléments de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, les boréliens de $\mathbb{R}$

1. $A_n = \left[\dfrac{-1}{n}; 3 + \dfrac{1}{n}\right]$
2. $A_n = \left[-2 - (-1)^n; 2 + (-1)^n\right]$

Dans ces deux cas, donner $\limsup\limits_{n\to+\infty} A_n$

15.3.8 Lemme de Borel-Cantelli

Soit $\{\Omega; \mathcal{F}; \mathbf{P}\}$ un espace probabilisé et $\{A_n; n \in \mathbb{N}\}$, une famille quelconque d'éléments de $\mathcal{F}$.
On suppose que la série numérique $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{P}(A_n)$ est convergente.
Alors $\limsup A_n$ est un ensemble négligeable, c'est à dire :

$$\mathbf{P}(\limsup A_n) = 0 \Longleftrightarrow \mathbf{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\left(\bigcup_{m\geqslant n} A_m\right)\right) = 0$$

Démonstration

Une première remarque consiste à écrire que si la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{P}(A_n)$ converge, alors $\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(A_n) = 0$

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$.

Nous avons toujours $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(\bigcup_{m\geqslant n} A_m \right) \subset \bigcup_{m\geqslant n_0} A_m$, et donc, alors :

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(\bigcup_{m\geqslant n} A_m \right) \right) \leqslant \mathbf{P}\left(\bigcup_{m\geqslant n_0} A_m \right)$$

Or, $\mathbf{P}\left(\bigcup_{m\geqslant n_0} A_m \right) \leqslant \sum_{m\geqslant n_0} \mathbf{P}(A_m)$, et cette inégalité est vraie pour tout $n_0 \in \mathbb{N}$.

L'expression $\sum_{m\geqslant n_0} \mathbf{P}(A_m)$ apparaît comme le reste de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{P}(A_n)$ qui est convergente. Donc $\lim_{n_0\to+\infty} \sum_{m\geqslant n_0} \mathbf{P}(A_m) = 0$

L'inégalité $\mathbf{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(\bigcup_{m\geqslant n} A_m \right) \right) \leqslant \mathbf{P}\left(\bigcup_{m\geqslant n_0} A_m \right)$ étant vraie pour tout n_0, nous en déduisons que $\mathbf{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(\bigcup_{m\geqslant n} A_m \right) \right) = 0$, c'est à dire $\mathbf{P}(\limsup A_n) = 0$

Remarque 10 :

Ce qui veut dire que la probabilité pour qu'une infinité d'événements A_n se réalisent est nulle, ou alors **P**-presque sûrement, seuls un nombre fini d'événements se réalisent.

15.4 A quoi sert cette formalisation ? Exemples de probabilité

Si les mathématiciens se donnent tant de peine pour faire une formalisation rigoureuse, c'est bien pour modéliser les cas réels, approcher la réalité, et, surprise, pour simplifier les problèmes

15.4.1 Problèmes d'échantillonnage

Beaucoup de problèmes élémentaires de probabilités concernent une expérience aléatoire consistant à tirer un « échantillon » dans un ensemble donné *(appelé souvent « population »)*. La modélisation la plus courante est le tirage de boules de couleurs diverses et variées dans des urnes.

Définissons précisément cette terminologie :

Soit S une population $S = \{s_1, \ldots, s_n\}$; on appelle :

1. Echantillon de taille r avec replacement, toute application de l'ensemble $\{1, \ldots, r\}$ dans S. Si on appelle Ω_1 l'ensemble des échantillons de taille r avec replacement, Card $\Omega_1 = n^r$
2. Echantillon de taille $r \leqslant n$ sans replacement, toute injection de l'ensemble $\{1, \ldots, r\}$ dans S. Si on appelle Ω_2 l'ensemble des échantillons de taille r avec replacement, Card $\Omega_2 = \dfrac{n\,!}{(n-r)\,!} = \mathrm{A}_n^r$
3. Sous population de taille $r \leqslant n$ tout sous ensemble de S de cardinal (ou d'ordre) r. Si on appelle Ω_3 l'ensemble des sous-population de taille r de S, Card $\Omega_3 = \dfrac{n\,!}{r\,!\,(n-r)\,!} = \dfrac{\mathrm{A}_n^r}{r\,!} = \mathrm{C}_n^r = \dbinom{n}{r}$

On remarque donc que nous tombons, dans ces cas, dans des problèmes de dénombrement.

15.4.2 Différents énoncés d'un même problème

Nous utilisons très souvent le pittoresque langage des boules et des urnes, mais, c'est souvent le même espace fondamental qui est mis en œuvre qui admet une grande variété d'interprétations pratiques.

Combien y-a-til de façons de placer r boules dans n urnes ?
Chaque urne peut avoir entre 0 et r boules. Donc :

$$\Omega = \{\text{Ensemble des applications de } \{1, \cdots, r\} \text{ dans } \{1, \cdots, n\}\}$$

Et $\text{Card } \Omega = n^r$

Nous listons, ci-après, un nombre de situations dans lesquelles les énoncés sont très différents. Toutes sont cependant, abstraitement, équivalents à la question de placer r boules dans n urnes.

1. **Les anniversaires**
   Si r personnes sont dans une pièce, les configurations possibles des dates anniversaires correspondent aux différentes applications de $\{1, \cdots, r\}$ dans $\{1, \cdots, 365\}$, c'est à dire, aux placements de r boules dans 365 urnes.
2. **Les accidents**
   Si nous devons classer r accidents en fonction des jours de la semaine, c'est comme ranger r boules dans 7 urnes.
3. **En biologie**
   Lorsque les cellules de la rétine sont exposées à la lumière, les photons jouent le role des boules et les cellules sont les urnes de notre modèle.
4. **L'ascenceur**
   Un ascenceur de r personnes desservant n étages ; les personnes jouent le rôle des boules et les étages celui des urnes
5. **Le jeu de dés**
   Les sorties possibles d'un lancer de r dés, correspondent au placement de r boules dans $n = 6$ urnes
6. **Répartition hommes-femmes**
   Dans un groupe de r personnes, la répartion hommes-femmes correspond à r boules dans $n = 2$ urnes.
7. **Répartition des fautes de frappe**
   r fautes d'impression dans n pages correspond à r boules dans n urnes.

15.4.3 Le jeu de pile ou face

Soit Ω un ensemble quelconque et $A \subset \Omega$; soit $\mathcal{F} = \left\{\emptyset; \Omega; A; \overline{A}\right\}$; on sait que c'est une tribu.
Soit $\mathbf{P} : \mathcal{F} \longrightarrow [0, 1]$, une probabilité telle que $\mathbf{P}(A) = p$; alors, $\mathbf{P}\left(\overline{A}\right) = q$, et nous avons $p + q = 1$; c'est le jeu de « pile ou face » ou la situation « échec ou succès »

Remarque 11 :

Si la pièce est équilibrée, $p = q = \dfrac{1}{2}$
En fait, le jeu de " pile ou face " peut se généraliser facilement par : « **un événement se réalise** » ou « **un événement ne se réalise pas** »

15.4.4 Le lancer de dés

On jette deux dés et on s'intéresse à l'événement : « La somme amenée est paire ». Comment formaliser cette situation ?

1. On prend comme espace fondamental : $\Omega = \{(i, j) \text{ où } 1 \leqslant i \leqslant 6 \text{ et } 1 \leqslant j \leqslant 6\}$.
   Tout se passe comme si nous avions différencié les deux dés.

2. En posant

$$P = \left\{ \begin{array}{l} (1,1)\ ;\ (1,3)\ ;\ (1,5)\ ;\ (2,2)\ ;\ (2,4)\ ;\ (2,6) \\ (3,1)\ ;\ (3,3)\ ;\ (3,5)\ ;\ (4,2)\ ;\ (4,4)\ ;\ (4,6) \\ (5,1)\ ;\ (5,3)\ ;\ (5,5)\ ;\ (6,2)\ ;\ (6,4)\ ;\ (6,6) \end{array} \right\}$$

ou, autre forme plus concise $P = \{(i,j) \text{ tel que } i+j \text{ est pair}\}$
On construit la tribu : $\mathcal{F} = \left\{\Omega\,;\,\emptyset\,;\,P\,;\,\overline{P}\right\}$

3. Quelle probabilité choisir ?
Celle induite par l'expérience ; ici, il y a la même probabilité d'obtenir l'un ou l'autre couple (on dit qu'il y a équiprobabilité)
Comme Card $\Omega = 36$, pour tout $(i,j) \in \Omega$, $\mathbf{P}\left(\{(i,j)\}\right) = \dfrac{1}{36}$ et

$$\mathbf{P}\,(P) = \frac{\text{Card } P}{\text{Card } \Omega} = \frac{\text{cas favorables}}{\text{cas possibles}} = \frac{1}{2}$$

Exercice 5 :

Dans les conditions de l'exemple 15.4.4 précédent, quelle est la probabilité pour que la somme amenée soit égale à 7 ?

15.4.5 Définition importante : l'équiprobabilité

Soit $\{\Omega; \mathcal{F}; \mathbf{P}\}$ un espace probabilisé fini.
On note : $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ et nous choisissons $\mathcal{F} = \mathcal{P}\,(\Omega)$.

1. Si on veut construire une probabilité $\mathbf{P}$ sur $\mathcal{F} = \mathcal{P}\,(\Omega)$, il suffit de connaître $\mathbf{P}\left(\{\omega_i\}\right) = p_i$, et nous devons avoir :

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}\left(\{\omega_i\}\right) = \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

Dans ces cas, $\mathbf{P}\,(A) = \displaystyle\sum_{\omega_A \in A} \mathbf{P}\,(\omega_A)$

2. Un cas particulier est le cas donc <u>le cas d'équiprobabilité</u> où, pour tout i, $\mathbf{P}\left(\{\omega_i\}\right) = p = \dfrac{1}{n}$; on dit donc que les événements sont équiprobables.

3. Autrement dit : nous avons, pour tout $\omega \in \Omega$, $\mathbf{P}\left(\{\omega\}\right) = \dfrac{1}{\text{Card } \Omega}$, et si $A \in \mathcal{F}$, nous avons $\mathbf{P}\,(A) = \dfrac{\text{Card } A}{\text{Card } \Omega}$

La locution <u>« tirer au hasard »</u> signifie que l'on a un espace probabilisé de ce type

Exemple 5 :

1. **Le jet d'une pièce n fois**
C'est le cas où on jette une pièce un nombre fini de fois ; si P désigne l'événement défini par l'apparition de la face « pile », et F, celle de '« face », l'espace fondamental est donné par les n-uplets $(P, P, F, F, \ldots, P, F)$; autrement dit, Ω est le produit cartésien $\Omega = \{P, F\}^n$

On lance une pièce 3 fois. Quelle est la probabilité pour qu'on ait au moins 2 fois FACE

L'espace fondamental est : $\Omega = \{P, F\}^3$ et Card $\Omega = 2^3 = 8$.
Si A est l'événement :

$$A = \{\text{On a au moins 2 fois FACE}\} = \{(F,F,F)\,;(F,F,P)\,;(F,P,F)\,;(P,F,F)\}$$

D'où $\mathbf{P}\,(A) = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$

2. *On considère un jeu de 52 cartes ; on en tire au hasard, 3 cartes. Quelle est la probabilité d'avoir au moins un as ?*

   (a) Il faut d'abord définir Ω ;

   $$\Omega = \{\text{Les sous ensembles de 3 cartes prises parmi les 52}\}$$

   Et on a alors, Card $\Omega = \mathrm{C}_{52}^3$
   On prend 3 cartes parmi les 48 qui ne sont pas des as.

   (b) L'événement :

   $$\{\text{Avoir au moins un as}\}$$

   est le contraire de

   $$\{\text{N'avoir aucun as}\}$$

   Il faut déterminer Card $(\{\text{N'avoir aucun as}\})$.

   Or, Card $(\{\text{N'avoir aucun as}\}) = \mathrm{C}_{48}^3$, donc, $\mathbf{P}(\{\text{N'avoir aucun as}\}) = \dfrac{\mathrm{C}_{48}^3}{\mathrm{C}_{52}^3} \simeq 0,782$.

   Donc, $\mathbf{P}(\{\text{Avoir au moins un as}\}) = 1 - \dfrac{\mathrm{C}_{48}^3}{\mathrm{C}_{52}^3} \simeq 1 - 0,782 = 0,218$

Exercice 6 :

On tire « au hasard » 5 cartes dans un jeu de 32.

1. Soit A l'événement : $A = \{\text{sur les 5 cartes tirées, 2 et 2 seulement sont des cœurs}\}$. Calculer $\mathbf{P}(A)$
2. Soit B l'événement : $B = \{\text{sur les 5 cartes tirées, au moins une carte est un trèfle}\}$. Calculer $\mathbf{P}(B)$
3. Soit C l'événement : $C = \{\text{le tirage donne 2 cœurs et 2 trèfles}\}$. Calculer $\mathbf{P}(C)$

Exercice 7 :

Sur 100 personnes ayant posé leur candidature à un poste de direction du service d'ingénierie d'une grande société industrielle, 55 ont une expérience en surveillance de projets dépassant le million d'euros (A), 35 ont un diplôme de 2ème cycle en ingénierie (B) et 10 ont à la fois l'expérience et le diplôme requis.

1. Schématiser cette situation à l'aide d'un diagramme de Venn.
2. Quelle est la probabilité qu'un candidat, choisi au hasard, ait uniquement le diplôme de 2ème cycle ? Identifier d'abord en notation ensembliste l'événement correspondant.
3. Quelle est la probabilité qu'un candidat ait, soit l'expérience en surveillance de projets de plus d'un million d'euros soit le diplôme de 2ème cycle ?
4. Quelle est la probabilité qu'une personne choisie au hasard parmi les candidats n'ait ni l'expérience en surveillance requise, ni diplôme de 2ème cycle en ingénierie

15.5 Cas où Ω est dénombrable infini

C'est le cas d'expériences infinies ; par exemple, on répète la même expérience indéfiniment.

Si $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n, \ldots\} = (\omega_n)_{n \geqslant 1}$, pour que $\mathbf{P}$ soit une probabilité, il faut donc que

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbf{P}(\{\omega_n\}) = 1$$

La dernière expression est la somme d'une série numérique

15.5.1 Exemples de de probabilité sur un ensemble dénombrable infini

1. La loi de Poisson sur $\mathbb{N}$
   On appelle loi de Poisson une loi définie pour tout $k \in \mathbb{N}$ par :
$$\mathbf{P}(\{k\}) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k\,!} \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}$$
2. Loi géométrique sur $\mathbb{N}$
   On appelle loi géométrique de paramètre r, une loi définie pour tout $k \in \mathbb{N}$ par :
$$\mathbf{P}(\{k\}) = r(1-r)^k \text{ où } 0 < r < 1$$

Remarque 12 :

1. **La loi de Poisson est bien une probabilité ;** en effet :
$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbf{P}(\{k\}) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k\,!} = e^{-\lambda}\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{\lambda^k}{k\,!}$$
   Or, nous avons : $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{\lambda^k}{k\,!} = e^{\lambda}$; ce qui montre que $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbf{P}(\{k\}) = e^{-\lambda}e^{\lambda} = 1$
2. **La loi géométrique est bien une loi de probabilité** ; en effet,
$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbf{P}(\{k\}) = \sum_{k\in\mathbb{N}} r(1-r)^k = r\sum_{k\in\mathbb{N}} (1-r)^k$$
   Or, nous savons que si $|x| < 1$, alors $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} x^k = \frac{1}{1-x}$; donc
$$r\sum_{k\in\mathbb{N}} (1-r)^k = \frac{r}{1-(1-r)} = \frac{r}{r} = 1$$

Exemple 6 :

On lance un dé équilibré à 6 faces indéfiniment. A_n est l'événement :
$$A_n = \{\text{La face numérotée 6 apparaît pour la première fois au } n\text{-ième lancer }\}$$
L'événement A_n est réalisé lorsque, pour les $n-1$ premiers lancers, apparaissent toute autre face que le 6, et le 6 apparaissant pour la première fois au lancer numéro n.

Donc, $\mathbf{P}(A_n) = \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \times \frac{1}{6} = \left(1-\frac{1}{6}\right)^{n-1} \times \frac{1}{6}$; la loi géométrique modélise un temps d'attente.

Vérifions que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \mathbf{P}(A_n) = 1$

Nous avons :
$$\begin{aligned}
\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \mathbf{P}(A_n) &= \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \mathbf{P}(A_n) = \sum_{n\geqslant 1} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \times \frac{1}{6} \\
&= \frac{1}{6}\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{5}{6}\right)^{n} \\
&= \frac{1}{6} \times \frac{1}{1-\frac{5}{6}} \\
&= \frac{1}{6} \times \frac{1}{\frac{1}{6}} = 1
\end{aligned}$$

Ce que nous voulions

15.6 Exercices complémentaires

15.6.1 Sur le dénombrement

Il n' y a pas ce classique chapitre sur le dénombrement que l'on voit dans tous les cours de probabilité élémentaire. Nous l'avons vu dans le premier chapitre de L_0. Je vous propose ces quelques exercices pour vous replonger dans ce bain d'eau froide qu'est le dénombrement

Exercice 8 :

Combien peut-on former de numéros d'au plus 4 chiffres choisis parmi $\{1, 2, 3, 4\}$? Parmi ces numéros, combien ont-ils tous leurs chiffres distincts ?

Exercice 9 :

On considère un jeu de 52 cartes, composées de 4 couleurs ; il y a 13 cartes par couleur (c'est le jeu habituel !!). On appelle « main » , tout sous-ensemble de 13 cartes

1. Combien y-a-t-il de mains en tout ?
2. Combien y-a-t-il de mains contenant les 4 as ? Au moins un as ?
3. Combien y-a-t-il de mains ne contenant aucun cœur ? 3 carreaux au plus ?

Exercice 10 :

Une ville de 100 000 habitants compte trois journaux locaux :
- Le journal I
- Le journal II
- Le journal III

Le tableau suivant donne la proportion des lecteurs pour ces journaux :

Journaux	Proportions [en %]
I	10
II	30
III	05
I et II	8
I et III	2
II et III	4
I et II et III	1

1. Trouver le nombre de personnes ne lisant qu'un seul journal
2. Trouver le nombre de personnes qui lisent au moins deux journaux
3. Combien de personnes ne lisent aucun journal ?
4. II est un quotidien du soir, tandis que I et III sortent le matin.
   (a) Combien de personnes lisent au moins un journal du matin, plus celui du soir ?
   (b) Combien de personnes lisent un journal du matin seulement et le journal du soir ?

Exercice 11 :

Comme l'écrit la publicité de « La Française des Jeux » le jeu de **rapido** est simple : Cochez, Misez, Gagnez ; le tout en prenant son petit café, avouez que c'est facile !!
En quoi consiste ce "jeu" ? Vous avez deux grilles de nombres :
- La grille A constituée de nombres de 1 à 20 : $A = \{1, 2, \ldots, 19, 20\}$ Dans cette grille A, vous cochez 8 numéros.
- La grille B constituée de nombres de 1 à 4 : $B = \{1, 2, 3, 4\}$ Dans cette grille B, vous cochez 1 seul numéro.

Vous gagnez si vous avez les 8 bons numéros dans la grille A et le numéro de la grille B.
En supposant, ce dont nous ne doutons pas, « **La Française des Jeux** » totalement honnête, combien y-a-t-il de combinaisons possibles ?

Exercice 12 :

Une association comprend 35 adhérents (16 femmes et 19 hommes). Cette association a un bureau composé du président, du vice-président et d'un trésorier ; aucun des postes n'est cumulable.

1. Quel est le nombre de bureaux possibles ?
2. Quel est le nombre de bureaux
   (a) Dans le cas où le poste de vice-président est occupé par une femme ?
   (b) Dans le cas où le président et le trésorier sont des hommes ?
   (c) Dans le cas où le président et le vice-président ont des sexes différents ?
   (d) Quel est le nombre de bureaux possibles, sachant que le président est un homme, le vice président une femme, et que MrX.... Refuse de siéger avec Mme Y.....

Exercice 13 :

1. Le congrès *(réunion des députés et des sénateurs)* a décidé de créer un comité Théodule *(ce n'est pas la première fois)*, c'est à dire un comité composé de 3 députés et de 5 sénateurs pris dans un groupe de 7 députés et 8 sénateurs. Combien de comités Théodule peuvent être ainsi constitués.
2. Combien peut-on constituer de comités différents de 8 personnes :
   (a) Comportant au moins un député ?
   (b) Comportant au moins un sénateur
3. Les 8 personnes étant choisies, de combien de manières peut-on choisir parmi ces 8 personnes, un président, un vice-président et un sécrétaire.

Exercice 14 :

Une maîtresse de maison donne régulièrement d'excellents dîners où elle invite toujours 5 personnes. Or, elle a 11 bons amis à recevoir (tous célibataires)

1. Combien de groupes de 5 personnes peut-elle constituer ?
2. Deux de ses bons amis, Christophe et Nathalie, se marient. Elle ne peut donc plus ne les recevoir qu'ensembles ou pas du tout. De combien de façons différentes peut-elle faire ses invitations ?
3. Deux ans plus tard, Christophe et Nathalie divorcent et ne peuvent, bien sûr, plus se voir. De combien de façons notre maîtresse de maison peut-elle encore organiser ses dîners ?

Exercice 15 :

Paradoxe de Galilée
On lance 3 dés, et on regarde la somme obtenue. On observe que les totaux 9 et 10 peuvent être obtenus de la façon suivante :

Total 9 :	**1-2-6**	**1-3-5**	**1-4-4**	**2-2-5**	**2-3-4**	**3-3-3**
Total 10 :	**1-3-6**	**1-4-5**	**2-3-5**	**2-4-4**	**3-3-4**	**2-6-2**

10 est plus fréquemment obtenu que 9 : pourquoi ?

Exercice 16 :

E est un ensemble fini de cardinal n et $A \subset E$ de cardinal p

1. Quel est le nombre de parties de E contenant A ?
2. Quel est le nombre de parties de E ne rencontrant pas A ?

Exercice 17 :

On considère une urne contenant a boules blanches et b boules noires ; on suppose toutes les boules indiscernables entre elles ; on tire les boules, unes à unes, jusqu'à vider l'urne.

1. Combien y-a-t-il de façons de vider l'urne ?
2. Combien y-a-t-il de séries de tirages qui amène la dernière boule noire en k-ième position ?
3. En sommant les nombres trouvés dans la question 2, établir une égalité remarquable.

Exercice 18 :

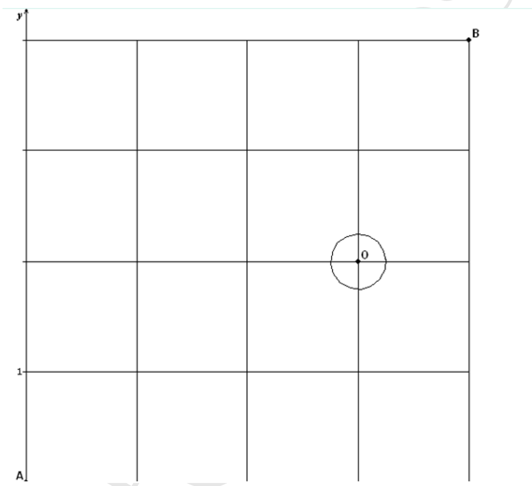

Figure 15.1 –

On considère le plan, rapporté à deux systèmes d'axes $(\mathrm{O}x, \mathrm{O}y)$.
Etant donnés 2 points A et B à coordonnées entières positives on appelle chemin joignant A à B, tout p-uplet $(M_1, \ldots, M_p)$ où $(M_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ a pour coordonnées $(x_i, y_i) \in \mathbb{N}^2$ et $M_1 = A$ et $M_p = B$ et $\begin{cases} x_{i+1} = x_i + 1 \\ y_{i+1} = y_i \end{cases}$ ou bien $\begin{cases} x_{i+1} = x_i \\ y_{i+1} = y_i + 1 \end{cases}$

1. Soit $\mathrm{B}(p, q)$ un point du plan. Combien y-a-t-il de chemins joignant l'origine O à $\mathrm{B}(p, q)$?
2. On suppose $a < p$ et $b < q$. Combien y-a-t-il de chemins allant de $A(a, b)$ à $B(p, q)$?
3. Soit O le point de coordonnées $O(i, j)$ où $a < i < p$ et $b < j < q$.Combien de chemins passant par O pouvons nous prendre pour aller de A à B ?

15.6.2 Sur les axiômes de probabilité

Exercice 19 :

Une urne contient huit boules blanches, six boules noires, cinq boules rouges et une boule verte et on en tire 3 simultanément.

1. Définir l'espace fondamental et en donner son cardinal
2. Quelle est la probabilité pour que les boules tirées soient toutes 3 de couleurs différentes ?
3. Quelle est la probabilité pour qu'elles soient toutes 3 de même couleur ?

Exercice 20 :

Une épreuve consiste à lancer deux dés indiscernables et bien équilibrés.

1. Quel est l'espace fondamental (ou espace des épreuves) Ω ? En donner le cardinal.
2. Soit A l'événement :
$$A = \{\text{Au moins un dé donne un nombre pair}\}$$
Donner $\mathbf{P}(A)$
3. Soit B l'événement :
$$B = \{\text{La somme des dés donne un nombre pair}\}$$
Donner $\mathbf{P}(B)$
4. (a) Décrire, par une phrase l'événement $A \cap B$, puis donner $\mathbf{P}(A \cap B)$
   (b) Les événements A et B sont-ils indépendants ?

Exercice 21 :

Eugène et Diogène ont l'habitude de se retrouver chaque jeudi soir autour d'un verre, pas loin d'un tonneau, et de décider de tirer à pile ou face qui règle l'addition.
Eugène, le brave Eugène, se lamente d'avoir dû payer les quatre dernières additions. Diogène lui propose alors de modifier la règle :

Il propose à Eugène de lancer la pièce 5 fois de suite
et de ne payer que si apparaît une suite d'au moins 3 piles consécutifs ou 3 faces consécutifs

Eugène se félicite d'avoir un si bon ami. Qu'en pensez vous ? Pour vous forger une opinion :

1. Caractériser l'espace fondamental ou univers des possibles Ω
2. Caractériser l'ensemble des cas favorables et en donner le cardinal
3. Conclure

Exercice 22 :

Quelques égalités ou inégalités
Pour ces 3 questions indépendantes, on considère le même espace probabilisé $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}\}$

1. Soient E_i, avec $i = 1, \ldots, n$, n événements. Montrez l'inégalité de Boole :
$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(E_i)$$
2. Deux événements A et B sont tels que : $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(B) = 0,75$. Quel est le maximum de $\mathbf{P}(A \cap B)$? Quel est son minimum ?
3. Montrez l'inégalité de Bonferroni :
$$\mathbf{P}(E \cap F) \geqslant \mathbf{P}(E) + \mathbf{P}(F) - 1$$
4. (a) Démontrer que $\mathbf{P}\left(E \cap \overline{F}\right) = \mathbf{P}(E) - \mathbf{P}(E \cap F)$
   (b) Démontrer que $\mathbf{P}\left(\overline{E} \cap \overline{F}\right) = 1 - \mathbf{P}(E) - \mathbf{P}(F) + \mathbf{P}(E \cap F)$

Exercice 23 :

Soit $\{\Omega; \mathcal{F}; \mathbf{P}\}$ un espace probabilisé.
Montrer que, pour tout $A \in \mathcal{F}$ et $B \in \mathcal{F}$, nous avons :
$$\mathbf{P}(A \cup B) + \mathbf{P}\left(A \cup \overline{B}\right) + \mathbf{P}\left(\overline{A} \cup B\right) + \mathbf{P}\left(\overline{A} \cup \overline{B}\right) = 3$$

Exercice 24 :

On jette trois dés non pipés et parfaitement équilibrés.

1. Décrire l'espace fondamental Ω
2. Calculer la probabilité d'obtenir au moins un as
3. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins 2 faces portant le même chiffre ?
4. Quelle est la probabilité pour que la somme des points marqués sur les trois faces soit paire

Exercice 25 :

Un certain composant électronique est classé défectueux s'il présente l'un ou l'autre des types de défauts suivants :

— Défaut critique
— Défaut majeur
— Défaut mineur

Le tableau qui suit présente la compilation effectuée par le département « Assurance-Qualité » sur une période de plusieurs mois. Notons que plusieurs types de défauts peuvent se présenter sur un même composant.

Pourcentage de composants	Types de défauts
46%	Critique (A)
40%	Majeur (B)
36%	Mineur (C)
10%	Critique et Majeur
20%	Critique et Mineur
15%	Majeur et Mineur
4%	Critique, Majeur et Mineur

Dans un lot de 100 composants, on prélève un composant au hasard.

1. Indiquer sur un diagramme de Venn, la répartition des composants selon leurs types de défauts.
2. Quelle est la probabilité que le composant choisi ne présente qu'un défaut critique ? qu'un défaut mineur ?
3. Quelle est la probabilité que ce composant présente un défaut majeur et un défaut mineur mais aucun défaut critique ?
4. Quelle est la probabilité que ce composant présente un défaut critique ou un défaut mineur ?
5. Sur 100 composants, combien de composants sans aucun type de défaut peut-on espérer trouver ?

Exercice 26 :

Une urne contient 3 boules : 1 blanche, 1 verte et 1 rouge.
L'expérience consiste à tirer une boule de l'urne, noter sa couleur, la remettre dans l'urne. Cette opération est renouvelée n fois, avec $n \geqslant 3$

1. Quelle est la probabilité pour avoir au moins une boule de chaque couleur ?
2. Quelle est la probabilité pour que les 2 boules extrêmes soient de même couleur ?

Exercice 27 :

On suppose qu'une année a 365 jours *(on ne tient pas compte des années bissextiles)*.
Montrer, qu'il y a plus d'une chance sur 2 pour que, sur un groupe de 23 personnes, 2 de ces personnes soient nées le même jour.
Que dire d'un groupe de 22 personnes ?

Exercice 28 :

Une urne contient 8 jetons numérotés de 1 à 8. Nous en tirons 3 simultanément, au hasard. Quelle est la probabilité pour que la somme des numéros tirés soit supérieure ou égale à la somme des numéros restants ?

Exercice 29 :

Dans une bibliothèque, n livres sont exposés sur une étagère rectiligne et répartis au hasard. Parmi ces n livres, k sont du même auteur A, les autres étant d'auteurs tous différents. Calculez la probabilité qu'au moins p livres se retrouvent côte à côte, lorsque $n = 20$, $k = 3$ et $p = 3$

Exercice 30 :

Soient f et g deux applications de Ω dans $\mathbb{R}$. Montrer que :

$$\{\omega \in \Omega \text{ tel que } f(\omega) + g(\omega) \geqslant \varepsilon\} \subset \left\{\omega \in \Omega \text{ tel que } g(\omega) \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right\} \cup \left\{\omega \in \Omega \text{ tel que } f(\omega) \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right\}$$

Exercice 31 :

Partie 1 : Dénombrement Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé une fois pour toutes

1. Pour $1 \leqslant k \leqslant n$, montrer que le nombre de k-uplets d'entiers naturels $(i_1, \ldots, i_k)$ tels que $1 \leqslant i_1 < i_2 < i_3 < \ldots < i_{k-1} < i_k \leqslant n$ est $\mathrm{C}_n^k = \binom{n}{k}$
2. On note E l'ensemble des k-uplets d'entiers naturels $(i_1, \ldots, i_k)$ tels que $1 \leqslant i_1 \leqslant i_2 \leqslant i_3 \leqslant \ldots \leqslant i_{k-1} \leqslant i_k \leqslant n$ et F l'ensemble des k-uplets d'entiers naturels $(j_1, \ldots, j_k)$ tels que $1 \leqslant j_1 < j_2 < j_3 < \ldots < j_{k-1} < j_k \leqslant n + k - 1$
   Soit $\Phi : E \to F$ qui, à $(i_1, \ldots, i_k) \in E$ fait correspondre $(j_1, \ldots, j_k) \in F$ défini par : $\Phi[(i_1, \ldots, i_k)] = (j_1, \ldots, j_k)$ tel que :
   $$\begin{cases} j_1 = i_1 \\ j_2 = i_2 + 1 \\ \vdots \\ j_l = i_l + (l-1) \\ \vdots \\ j_k = i_k + (k-1) \end{cases}$$
   Montrer que $\Phi : E \to F$ est une bijection et donner $\operatorname{card}(E)$

Partie 2 Une urne contient des boules numérotées de 1 à N.. On effectue une suite infinie de tirages avec remise, et on note $u_1, \ldots, u_n, \ldots$ la liste des numéros successifs obtenus. C'est à dire que l'on obtient une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ d'entiers naturels compris entre 1 et N avec $N \geqslant 2$

1. Soit A_n l'événement
   $A_n = \{$ Les n premiers tirages successifs amènent des numéros qui vont en ordre croissant au sens large$\}$
   Calculer $\mathbf{P}(A_n)$; on convient que $\mathbf{P}(A_1) = 1$
2. Démontrer que la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \mathbf{P}(A_n)$ converge
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons $A_{n+1} \subset A_n$
4. Montrer que $\mathbf{P}\left(\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}^*} A_n\right) = 0$; en donner une interprétation.

Exercice 32 :

Une urne renferme N boules identiques numérotées de 1 à N ; on tire successivement n boules, sans les remettre $(1 \leqslant n \leqslant N)$

1. On suppose $3 \leqslant n$; déterminer la probabilité pour que "la 3° boule porte le numéro k"
2. On suppose $i \leqslant n$; déterminer la probabilité pour que "la i° boule porte le numéro k"

Exercice 33 :

Un joueur a le choix entre les deux paris suivants :

1° pari : Jeter 6 dés, et gagner s'il "sort" au moins un as

2° pari : Jeter 12 dés, et gagner s'il "sort" au moins deux as

Calculez la probabilité de gagner dans chaque cas, les issues possibles étant supposées équiprobables.

Exercice 34 :

Soit $a > 1$. On définit le réel $\zeta(a)$ par : $\zeta(a) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^a}$. Cette fonction ζ a été étudiée en 7.4.4

Nous pouvons alors définir une probabilité $\mathbf{P}_a$ sur $\mathbb{N}$ en posant, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $\mathbf{P}_a(\{k\}) = \frac{1}{\zeta(a)\, k^a}$

1. Vérifier que $\mathbf{P}_a$ une probabilité ; on dit que $\mathbf{P}_a$ suit la loi ζ
2. Si $m \in \mathbb{N}^*$, on note $m\mathbb{N}^*$ l'ensemble $m\mathbb{N}^* = \{km, k \in \mathbb{N}^*\}$ de ses multiples non nuls. Calculer $\mathbf{P}_a(2\mathbb{N}^*)$.
3. Généraliser.
4. Démontrer qu'il n'existe pas de probabilité uniforme sur $\mathbb{N}$.

15.7 Quelques exercices corrigés

Comme souvent, nous ne donnons pas la correction de tous les exercices. Beaucoup sont très simples, et juste un peu d'attention suffit pour les corriger.

Exercice 2 :

Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leqslant b$. Montrer que $[a;b] = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \left]a-\frac{1}{n};b+\frac{1}{n}\right[$

1. **Clairement, nous avons $[a;b] \subset \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \left]a-\frac{1}{n};b+\frac{1}{n}\right[$**

   En effet, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, nous avons $a-\frac{1}{n} < a < b < b+\frac{1}{n}$, et donc, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, nous avons $[a;b] \subset \left]a-\frac{1}{n};b+\frac{1}{n}\right[$, c'est à dire $[a;b] \subset \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \left]a-\frac{1}{n};b+\frac{1}{n}\right[$

2. **Démontrons que nous avons $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \left]a-\frac{1}{n};b+\frac{1}{n}\right[\subset [a;b]$**

   Soit $x \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \left]a-\frac{1}{n};b+\frac{1}{n}\right[$; il faut donc montrer que $x\in[a;b]$

   Supposons le contraire, c'est à dire $x \notin [a;b]$; dans ce cas, $x<a$ ou $x>b$.

   → Supposons $x > a$; il existe alors $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $0 < \frac{1}{n_0} < a-x$, c'est à dire tel que $0 < x < a - \frac{1}{n_0}$, et donc $x \notin \left]a-\frac{1}{n_0};b+\frac{1}{n_0}\right[$

   Il existe donc $n_0\in\mathbb{N}^*$ tel que $x \notin \left]a-\frac{1}{n_0};b+\frac{1}{n_0}\right[$, c'est à dire $x \notin \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \left]a-\frac{1}{n};b+\frac{1}{n}\right[$

   Il y a donc contradiction et donc $x \geqslant a$

   → On démontrerait de la même manière que $x \leqslant b$

   → Donc $x\in[a;b]$

   Ce qui veut dire que $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \left]a-\frac{1}{n};b+\frac{1}{n}\right[\subset [a;b]$

En conclusion, $[a;b] = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \left]a-\frac{1}{n};b+\frac{1}{n}\right[$

Exercice 3 :

C'est un exercice somme toute, très banal, mais néanmoins important ; il traite de cette relation entre es événements et leur formalisation

A l'aide de la réunion, de l'intersection et de la complémentation, écrire les événements suivants :

1. *L'un au moins des événements A, B et C est réalisé.*

   Très facile ; c'est $A\cup B\cup C$

2. *Un et un seul des événements A ou B se réalise*

   Ce ci veut donc dire que si A se réalise, B ne se réalise pas et que si B se réalise, A ne se réalise pas. C'est donc :

   $$\left(\overline{A}\cap B\right)\cup\left(A\cup\overline{B}\right) = A\Delta B$$

3. *A et B se réalisent, mais pas C*

   Bon, ben, c'est $A\cap B\cap\overline{C}$

4. *Tous les événements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se réalisent*

   C'est simplement $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$

5. *Il y a une infinité d'événements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui se réalisent.*

   Ce qui veut dire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $m \in \mathbb{N}$, avec $m \geqslant n$ tel que A_m soit réalisé, ce qui se traduit par :

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\left(\bigcup_{m\geqslant n} A_m\right) = \limsup_{n\to+\infty} A_n$$

6. *L'un au moins des événements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se réalise*

   Il existe donc $n \in \mathbb{N}$ tel que A_n se réalise ; c'est donc $\bigcup\limits_{n_i n\mathbb{N}} A_n$

7. *Seul un nombre fini d'événements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se réalisent*

   Il existe donc un entier $m \in \mathbb{N}$ tel que si $m \geqslant n$, A_m ne se réalise pas. Donc, c'est :

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\left(\bigcap_{m\geqslant n} \overline{A_m}\right) = \liminf_{n\to+\infty} \overline{A_n} = \overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\left(\bigcup_{m\geqslant n} A_m\right)} = \overline{\limsup_{n\to+\infty} A_n}$$

8. *Il y a une infinité d'événements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui ne se réalisent pas*

   Ce qui veut dire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe un entier $m \geqslant n$ tel que A_m ne se réalise pas ; c'est donc :

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\left(\bigcup_{m\geqslant n} \overline{A_m}\right) = \limsup_{n\to+\infty} \overline{A_n}$$

9. *Tous les événements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se réalisent à partir d'un certain rang.*

   Ce qui veut dire qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que si $m \geqslant n$, A_m est réalisé ; c'est donc

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\left(\bigcap_{m\geqslant n} A_m\right) = \liminf_{n\to+\infty} A_n = \overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\left(\bigcup_{m\geqslant n} \overline{A_m}\right)} = \overline{\limsup_{n\to+\infty} \overline{A_n}}$$

Exercice 4 :

Pour $\Omega = \mathbb{R}$, on considère les familles $\{A_n ; n \in \mathbb{N}\}$, d'éléments de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, les boréliens de $\mathbb{R}$; dans les deux cas suivants, donner $\limsup\limits_{n\to+\infty} A_n$

1. $A_n = \left[\dfrac{-1}{n} ; 3 + \dfrac{1}{n}\right]$

   Par définition de $\limsup\limits_{n\to+\infty} A_n$, nous avons $\limsup\limits_{n\to+\infty} A_n = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}}\left(\bigcup\limits_{m\geqslant n} A_m\right)$

   Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons $\dfrac{-1}{n} < \dfrac{-1}{n+1}$ et $3 + \dfrac{1}{n+1} < 3 + \dfrac{1}{n}$ et donc $A_{n+1} \subset A_n$, de telle sorte que $\bigcup\limits_{m\geqslant n} A_m = A_n$, et donc $\limsup\limits_{n\to+\infty} A_n = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \left[\dfrac{-1}{n} ; 3 + \dfrac{1}{n}\right] = [0;3]$

2. $A_n = \left[-2 - (-1)^n ; 2 + (-1)^n\right]$

   Il faut remarquer 2 choses : $A_{2n} = [-2-1; 2+1] = [-3;3]$ et $A_{2n+1} = [-2-(-1) ; 2+(-1)] = [-1;1]$.

   D'où $\bigcup\limits_{m\geqslant n} A_m = [-3;3]$, et donc, forcément, $\limsup\limits_{n\to+\infty} A_n = [-3;3]$

15.7.1 Sur le dénombrement

Exercice 8 :

Combien peut-on former de numéros d'au plus 4 chiffres choisis parmi $\{1,2,3,4\}$? Parmi ces numéros, combien ont-ils tous leurs chiffres distincts ?

1. **Combien peut-on former de numéros d'au plus 4 chiffres choisis parmi** $\{1,2,3,4\}$
   L'important est donc de modéliser.
   (a) Les nombres à 1 chiffre sont bien entendu 4
   (b) Les nombres à 2 chiffres peuvent être $\{11,12,21,\ldots\}$ Comment modéliser cette situation ? ? Un

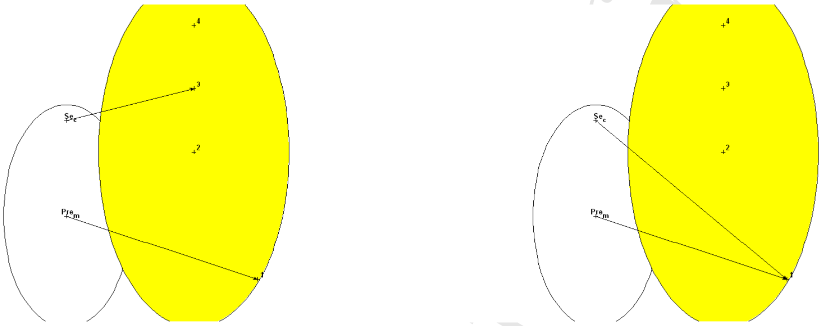

FIGURE 15.2 – Modélisation des nombres 13 et 11

   nombre à 2 chiffres pris dans l'ensemble $\{1,2,3,4\}$ peut être modélisé comme une application d'un ensemble à deux éléments $\{P,S\}$ dans l'ensemble $\{1,2,3,4\}$. Il y a donc $4^2=16$ tels nombres
   (c) De même, il y a $4^3=64$ nombres à 3 chiffres pris parmi $\{1,2,3,4\}$ et $4^4=256$ nombres à 4 chiffres pris parmi $\{1,2,3,4\}$
   (d) Il y a donc, en tout $4+4^2+4^3+4^4=340$ nombres d'au plus 4 chiffres choisis parmi $\{1,2,3,4\}$
2. **Parmi ces numéros, combien ont-ils tous leurs chiffres distincts ?**
   (a) Pour les nombres à 1 chiffre, ils sont 4
   (b) Un nombre à 2 chiffres distincts pris dans l'ensemble $\{1,2,3,4\}$ peut être modélisé comme une injection *(l'ordre est important :* $12\neq 21$*)* d'un ensemble à deux éléments $\{P,S\}$ dans l'ensemble $\{1,2,3,4\}$. Il y a donc $\mathrm{A}_4^2=12$ tels nombres
   (c) De même, il y a $\mathrm{A}_4^3=24$ nombres à 3 chiffres distincts pris parmi $\{1,2,3,4\}$ et $\mathrm{A}_4^4=4!=24$ nombres à 4 chiffres distincts pris parmi $\{1,2,3,4\}$
   (d) Il y a donc en tout $4+12+24+24=64$ nombres avec tous leurs chiffres distincts

Exercice 9 :

On considère un jeu de 52 cartes, composées de 4 couleurs ; il y a 13 cartes par couleur (c'est le jeu habituel ! !). On appelle « main », tout sous-ensemble de 13 cartes

1. Combien y-a-t-il de mains en tout ?
2. Combien y-a-t-il de mains contenant les 4 as ? Au moins un as ?
3. Combien y-a-t-il de mains ne contenant aucun cœur ? 3 carreaux au plus ?

1. **Combien y-a-t-il de mains en tout ?**
   Qu'est ce que c'est qu'une « main » ? En fait, c'est un sous-ensemble de 13 éléments d'un ensemble de cartes. Il y a donc C_{52}^{13} tels sous-ensembles.

2. **Combien y-a-t-il de mains contenant les 4 as ?**
Pour résoudre cette question, il faut isoler les 4 as des 48 autres cartes qui ne sont pas des as. Il y a donc C_{48}^{9} façons de choisir 4 cartes parmi les cartes qui ne sont pas des as, et une seule façon ($\mathrm{C}_4^4 = 1$) de prendre les 4 as parmi les 4 cartes qui sont des as. Il y a donc $\mathrm{C}_4^4 \times \mathrm{C}_{48}^{9} = \mathrm{C}_{48}^{9}$ mains contenant les 4 as
3. **Combien y-a-t-il de mains contenant au moins un as ?**
Il y a deux façons de résoudre le problème : en utilisant les événements contraires ou en recensant précisément les différents événements.
En utilisant l'événement contraire L'événement {Avoir au moins un as} est l'événement contraire de {N'avoir aucun as}. N'avoir aucun as, veut dire qu'on prend 0 as parmi les 4 as, et 13 cartes, parmi les 48 cartes qui ne sont pas des as. Donc,
$$\text{Card }\{\text{N'avoir aucun as}\} = \mathrm{C}_4^0 \times \mathrm{C}_{48}^{13} = \mathrm{C}_{48}^{13}$$
Donc, le nombre de mains qui contiennent au moins un as, est le nombre de mains total, moins le nombre de mains qui ne contiennent aucun as.Donc
$$\boxed{\text{Card }\{\text{Avoir au moins un as}\} = \mathrm{C}_{52}^{13} - \mathrm{C}_{48}^{13}}$$
En recensant précisément les différents événements Qu'est ce que c'est qu'avoir au moins un as ? C'est :
— Avoir exactement un as
— **Ou** Avoir exactement 2 as
— **Ou**Avoir exactement 3 as
— **Ou** Avoir exactement 4 as
Pour $1 \leqslant k \leqslant 4$, avoir exactement k as, c'est prendre k as parmi les 4 cartes qui sont des as, et $13-k$ cartes parmi les 48 autres cartes qui ne sont pas des as. Donc, Card {Avoir exactement k as} $= \mathrm{C}_4^k \times \mathrm{C}_{48}^{13-k}$
Donc $\boxed{\text{Card }\{\text{Avoir au moins un as}\} = \mathrm{C}_4^1 \times \mathrm{C}_{48}^{12} + \mathrm{C}_4^2 \times \mathrm{C}_{48}^{11} + \mathrm{C}_4^3 \times \mathrm{C}_{48}^{10} + \mathrm{C}_4^4 \times \mathrm{C}_{48}^{9}}$
Bien entendu, nous avons : $\mathrm{C}_{52}^{13} - \mathrm{C}_{48}^{13} = \mathrm{C}_4^1 \times \mathrm{C}_{48}^{12} + \mathrm{C}_4^2 \times \mathrm{C}_{48}^{11} + \mathrm{C}_4^3 \times \mathrm{C}_{48}^{10} + \mathrm{C}_4^4 \times \mathrm{C}_{48}^{9}$, et nous avons alors l'égalité :
$$\mathrm{C}_{52}^{13} = \mathrm{C}_{48}^{13} + \mathrm{C}_4^1 \times \mathrm{C}_{48}^{12} + \mathrm{C}_4^2 \times \mathrm{C}_{48}^{11} + \mathrm{C}_4^3 \times \mathrm{C}_{48}^{10} + \mathrm{C}_4^4 \times \mathrm{C}_{48}^{9}$$
Qui est un cas particulier d'une égalité plus générale : $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} \mathrm{C}_{n'}^{k} \mathrm{C}_{n}^{p-k} = \mathrm{C}_{n+n'}^{p}$
4. **Combien y-a-t-il de mains ne contenant aucun cœur ?**
La résolution sera au soin du lecteur ; c'est le même esprit que n'avoir aucun as.

Exercice 16 :

Ce n'est pas un exercice qui pose de grosses difficultés, mais que, souvent, les étudiants ont eu du mal à comprendre

E est un ensemble fini de cardinal n et $A \subset E$ de cardinal p

1. *Quel est le nombre de parties de E contenant A ?*
2. *Quel est le nombre de parties de E ne rencontrant pas A ?*

Nous allons répondre aux 2 questions en même temps

→ Soit $B \subset E$ et $A \subset B$; alors $B = A \cup (B \setminus A)$. Il faut donc dénombrer tous les sous-ensembles de E du type $B \setminus A$.

→ Il y a donc $n - p$ éléments de E qui ne sont pas dans A, et donc les ensembles $B \subset E$ qui contiennent A sont du type :

$$\begin{gathered} B_0 = A \\ B_1 = A \cup \{x_1\} \text{ où } x_1 \notin A \\ B_1 = A \cup \{x_1, x_2\} \text{ où } x_1 \notin A \text{ et } x_2 \notin A \\ \vdots \\ B_1 = A \cup \{x_1, x_2, \cdots, x_{n-p}\} \text{ où } x_1, x_2, \ldots x_{n-p} \notin A \end{gathered}$$

Il faut donc dénombrer tous les sous-ensembles de $E \setminus A$ qui ont k éléments pour $k = 0, 1, \cdots, n-p$

$\rightarrow$ Bien entendu, il y a $\mathrm{C}_{n-k}^{k} = \begin{pmatrix} n-k \\ k \end{pmatrix}$ sous ensembles de $E \setminus A$ qui ont k éléments et le nombre de sous-ensembles de E qui contiennent A est donc :

$$\sum_{k=0}^{n-k} \begin{pmatrix} n-k \\ k \end{pmatrix} = 2^{n-k}$$

C'est exactement le nombre de sous ensembles de $E \Delta A$, c'est à dire que $2^{n-k} = \text{Card } (\mathcal{P}(E \setminus A))$

$\rightarrow$ $2^{n-k} = \text{Card } (\mathcal{P}(E \setminus A))$ est exactement le nombre de parties de E ne rencontrant pas

Exercice 17 :

On considère une urne contenant a boules blanches et b boules noires ; on suppose toutes les boules indiscernables entre elles ; on tire les boules, unes à unes, jusqu'à vider l'urne.

1. *Combien y-a-t-il de façons de vider l'urne ?*

   Il faut essayer de modéliser. En fait, chaque tirage est une succession de boules noires et de boules blanches. Il faut donc qu'elles prennent place dans un « mot » de longueur $a+b$ ou dans $a+b$ cases ; le schéma ci-dessous tente de modéliser un tirage, les tirages commençt à gauche :

   $$\underbrace{\boxed{N \mid B \mid B \mid \ldots \mid \ldots \mid N \mid N \mid B}}_{\text{avec } a+b \text{ « cases »}}$$

   Un tirage, c'est donc une façon de distribuer les a boules noires *(ou les b boules blanches)* dans $a+b$ cases

   Il y a donc $\mathrm{C}_{a+b}^{a} = \binom{a+b}{a}$ tirages possibles.

   Il faut remarquer que $\mathrm{C}_{a+b}^{a} = \mathrm{C}_{a+b}^{b} \Longleftrightarrow \binom{a+b}{a} = \binom{a+b}{b}$, ce qui est logique : il n'y a aucune raison de privilégier une couleur par rapport à une autre !

2. *Combien y-a-t-il de séries de tirages qui amène la dernière boule noire en k-ième position ?*

   $\Rightarrow$ Première remarque, nous devons avoir $k \geqslant a$

   $\Rightarrow$ Si la dernière boule noire est dans la case numéro k, les $(a-1)$ autres boules se répartissent dans les $(k-1)$ premières cases

   $\Rightarrow$ Il y a donc $\mathrm{C}_{a-1}^{k-1} = \binom{a-1}{k-1}$ tirages qui mettent une boule noire en k-ième position.

3. *En sommant les nombres trouvés dans la question 2, établir une égalité remarquable.*

   $\Rightarrow$ Quel que soit le tirages, il y aura toujours une dernière boule noire ; l'emplacement de la dernière boule noire va du numéro $k = a$ à $k = a+b$

   $\Rightarrow$ Nous avons donc $\mathrm{C}_{a+b}^{a} = \sum_{k=a}^{a+b} \mathrm{C}_{k-1}^{a-1} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a+b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ b \end{pmatrix} = \sum_{k=a}^{a+b} \begin{pmatrix} k-1 \\ a-1 \end{pmatrix}$

Exercice 18 :

On considère le plan, rapporté à deux systèmes d'axes $(\mathrm{O}x, \mathrm{O}y)$.

Etant donnés 2 points A et B à coordonnées entières positives on appelle chemin joignant A à B, tout p-uplet $(M_1, \ldots, M_p)$ où $(M_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ a pour coordonnées $(x_i, y_i) \in \mathbb{N}^2$ et $M_1 = A$ et $M_p = B$ et $\begin{cases} x_{i+1} = x_i + 1 \\ y_{i+1} = y_i \end{cases}$ ou bien $\begin{cases} x_{i+1} = x_i \\ y_{i+1} = y_i + 1 \end{cases}$

1. *Soit $\mathrm{B}(p, q)$ un point du plan. Combien y-a-t-il de chemins joignant l'origine O à $\mathrm{B}(p, q)$?*

   Si nous considérons un mobile qui part de l'origine vers un point $B(p, q)$, les seules possibilités d'y arriver étant d'avancer d'une unité, il y aura donc p déplacements horizontaux et q déplacements verticaux, c'est à dire $(p+q)$ déplacements en tout.

   Le nombre de chemins joignant O à B est le nombre de façons de placer$p$ déplacements horizontaux dans $(p+q)$ déplacements ; c'est donc $\mathrm{C}_{p+q}^{p} = mathrmC_{p+q}^{q} = \binom{p+q}{p}$

2. *On suppose $a < p$ et $b < q$. Combien y-a-t-il de chemins allant de $A(a,b)$ à $B(p,q)$?*

   Pas plus difficile ; il y a, ici, $(p-a)+(q-b) = (p+q)-(a+b)$ déplacements.
   Il y a donc $\mathrm{C}_{(p+q)-(a+b)}^{p-a} = \mathrm{C}_{(p+q)-(a+b)}^{q-b} = \binom{(p+q)-(a+b)}{p-a}$ allant de A à B

3. *Soit O le point de coordonnées $O(i,j)$ où $a < i < p$ et $b < j < q$.Combien de chemins passant par O pouvons nous prendre pour aller de A à B ?*

   Nous regardons le nombre de chemins de allant de A à O et le nombre de chemins allant de O à B, c'est à dire :

$$\mathrm{C}_{(i+j)-(a+b)}^{i-a} + \mathrm{C}_{(p+q)-(i+j)}^{p-i} = \binom{(p+q)-(i+j)}{p-i} + \binom{(i+j)-(a+b)}{i-a}$$

15.7.2 Sur les axiômes de probabilité

Exercice 19 :

Une urne contient huit boules blanches, six boules noires, cinq boules rouges et une boule verte et on en tire 3 simultanément.

1. *Définir l'espace fondamental et en donner son cardinal*
2. *Quelle est la probabilité pour que les boules tirées soient toutes 3 de couleurs différentes ?*
3. *Quelle est la probabilité pour qu'elles soient toutes 3 de même couleur ?*

1. **Définir l'espace fondamental et en donner son cardinal**
   On tire, ici, 3 boules ; on fait donc des sous ensembles de 3 éléments pris parmi 20 ; donc

$$\Omega = \{\text{Les sous ensembles de 3 éléments pris parmi } 20\}$$

   et donc $\mathrm{Card}\ \Omega = \binom{20}{3} = \mathrm{C}_{20}^{3} = \dfrac{20!}{3!17!} = \dfrac{18 \times 19 \times 20}{6} = 1140$

2. **Quelle est la probabilité pour que les boules tirées soient toutes 3 de couleurs différentes ?**
   Soit A l'événement : $A = \{\text{Les boules tirées soient toutes 3 de couleurs différentes}\}$. Sachant qu'il y a 4 couleurs, les possibilités sont multiples, et il faut donc travailler sur des événements élémentaires. Il y a, en fait : $\mathrm{C}_4^3 = 4$ tels événements élémentaires :
   — $A_1 = \{\text{Le tirage donne 1 boule blanche, 1 boule noire, 1 boule rouge}\}$
   — $A_2 = \{\text{Le tirage donne 1 boule blanche, 1 boule noire, 1 boule verte}\}$
   — $A_3 = \{\text{Le tirage donne 1 boule blanche, 1 boule verte, 1 boule rouge}\}$
   — $A_4 = \{\text{Le tirage donne 1 boule noire, 1 boule verte, 1 boule rouge}\}$
   Et, nous avons $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = \mathbf{P}(A_1) + \mathbf{P}(A_2) + \mathbf{P}(A_3) + \mathbf{P}(A_4)$
   À chaque fois, nous avons $\mathbf{P}(A_i) = \dfrac{\mathrm{Card}\ A_i}{\mathrm{Card}\ \Omega}$, de telle sorte que

$$\mathbf{P}(A) = \frac{\mathrm{Card}\ (A_1) + \mathrm{Card}\ (A_2) + \mathrm{Card}\ (A_3) + \mathrm{Card}\ (A_4)}{\mathrm{Card}\ \Omega}$$

   Or :

   — $\mathrm{Card}\ A_1 = \mathrm{C}_8^1 \times \mathrm{C}_6^1 \times \mathrm{C}_5^1 = 8 \times 6 \times 5 = 240$
   — $\mathrm{Card}\ A_2 = \mathrm{C}_8^1 \times \mathrm{C}_6^1 \times \mathrm{C}_1^1 = 8 \times 6 \times 1 = 48$
   — $\mathrm{Card}\ A_3 = \mathrm{C}_8^1 \times \mathrm{C}_1^1 \times \mathrm{C}_5^1 = 8 \times 1 \times 5 = 40$
   — $\mathrm{Card}\ A_4 = \mathrm{C}_6^1 \times \mathrm{C}_1^1 \times \mathrm{C}_5^1 = 6 \times 1 \times 5 = 30$

   D'où $\boxed{\mathbf{P}(A) = \dfrac{358}{1140} = 0,314}$

3. **Quelle est la probabilité pour qu'elles soient toutes 3 de même couleur ?**
   Soit B l'événement : $B = \{\text{Les 3 boules tirées soient toutes de même couleur}\}$.
   — $B_1 = \{\text{Le tirage donne 3 boules blanches}\}$

— $B_2 = \{$Le tirage donne 3 boules noires$\}$
— $B_3 = \{$Le tirage donne 3 boules rouges$\}$
— Comme il n'y a qu'une seule boule verte dans l'urne, il est impossible d'avoir 3 boules vertes

Et, nous avons $\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(B_1 \cup B_2 \cup B_3) = \mathbf{P}(B_1) + \mathbf{P}(B_2) + \mathbf{P}(B_3)$

À chaque fois, nous avons $\mathbf{P}(B_i) = \dfrac{\text{Card } B_i}{\text{Card } \Omega}$, de telle sorte que

$$\mathbf{P}(B) = \frac{\text{Card } (B_1) + \text{Card } (B_2) + \text{Card } (B_3)}{\text{Card } \Omega}$$

Or :

— Card $B_1 = \mathrm{C}_8^3 = \dfrac{8!}{3! \times 5!} = \dfrac{6 \times 7 \times 8}{6} = 56$
— Card $B_2 = \mathrm{C}_6^3 = \dfrac{6!}{3! \times 3!} = \dfrac{4 \times 5 \times 6}{6} = 20$
— Card $B_3 = \mathrm{C}_5^3 = \dfrac{5!}{3! \times 2!} = \dfrac{3 \times 4 \times 5}{6} = 8$

D'où $\boxed{\mathbf{P}(B) = \dfrac{84}{1140} = 0,074}$

Exercice 20 :

Une épreuve consiste à lancer deux dés indiscernables et bien équilibrés.

1. *Quel est l'espace fondamental (ou espace des épreuves) Ω ? En donner le cardinal.*
2. *Soit A l'événement :*
$$A = \{\text{Au moins un dé donne un nombre pair}\}$$
Donner $\mathbf{P}(A)$
3. *Soit B l'événement :*
$$B = \{\text{La somme des dés donne un nombre pair}\}$$
Donner $\mathbf{P}(B)$
4. (a) *Décrire, par une phrase l'événement $A \cap B$, puis donner $\mathbf{P}(A \cap B)$*
   (b) *Les événements A et B sont-ils indépendants ?*

1. **Quel est l'espace fondamental (ou espace des épreuves) Ω ? En donner le cardinal.**
Comme toujours dans ces cas, il est facile de formaliser cet espace Ω ; on distingue toujours les dés.
Ainsi, nous avons :
$$\Omega = \{(i, j) \text{ tels que } 1 \leqslant i \leqslant 6 \text{ et } 1 \leqslant j \leqslant 6\}$$
De telle sorte que $\sharp(\Omega) = 36$
2. **Soit A l'événement : $A = \{$Au moins un dé donne un nombre pair$\}$ Donner $\mathbf{P}(A)$**
Il est plus facile de s'intéresser à l'événement contraire, à savoir : $\overline{A} = \{$Aucun dé ne donne un nombre pair$\}$
Or,$\overline{A} = \{(i, j) \text{ tels que } i = 1, i = 3, i = 5 \text{ et } j = 1, j = 3, j = 5\}$, et donc $\sharp\left(\overline{A}\right) = 9$, et donc $\mathbf{P}\left(\overline{A}\right) = \dfrac{9}{36} = \dfrac{1}{4}$, d'où $\boxed{\mathbf{P}(A) = \dfrac{3}{4}}$
3. **Soit B l'événement : $B = \{$La somme des dés donne un nombre pair$\}$ Donner $\mathbf{P}(B)$**
Ici, sans difficulté, $\boxed{\mathbf{P}(B) = \dfrac{1}{2}}$
4. (a) **Décrire, par une phrase l'événement $A \cap B$, puis donner $\mathbb{P}(A \cap B)$**
— Tout d'abord,$A \cap B$ est l'ensemble des résultats dont la somme est paire et qui comporte au moins une face paire. Donc, $A \cap B$ est l'ensemble des lancers dont les deux faces sont paires.
— Comme tout à l'heure, nous avons $\boxed{\mathbf{P}(A \cap B) = \dfrac{9}{36} = \dfrac{1}{4}}$

(b) **Les événements A et B sont-ils indépendants ?**

Les événements A et B sont indépendants si et seulement si $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) \times \mathbf{P}(B)$.

Or, $\mathbf{P}(A) \times \mathbf{P}(B) = \dfrac{3}{4} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{8}$, ce qui est bien différent de $\mathbf{P}(A \cap B)$.
Les événements A et B ne sont pas indépendants

Exercice 21 :

Eugène et Diogène ont l'habitude de se retrouver chaque jeudi soir autour d'un verre, pas loin d'un tonneau, et de décider de tirer à pile ou face qui règle l'addition.
Eugène, le brave Eugène, se lamente d'avoir dû payer les quatre dernières additions. Diogène lui propose alors de modifier la règle :

Il propose à Eugène de lancer la pièce 5 fois de suite
et de ne payer que si apparaît une suite d'au moins 3 piles consécutifs ou 3 faces consécutifs

Eugène se félicite d'avoir un si bon ami. Qu'en pensez vous ? Pour vous forger une opinion :

1. *Caractériser l'espace fondamental ou univers des possibles Ω*
2. *Caractériser l'ensemble des cas favorables et en donner le cardinal*
3. *Conclure*

1. **Caractériser l'espace fondamental ou univers des possibles Ω**
   Ici, c'est très simple, c'est l'ensemble des quintuplets formés de F ou de P, c'est à dire que Ω est le produit cartésien $\Omega = \{F, P\}^5$
2. **Caractériser l'ensemble des cas favorables et en donner le cardinal**
   Ce n'est pas une question très difficile, mais elle nécessite une grande attention. Je vais proposer la bonne solution, puis une solution fausse, et je vais dire pourquoi elle est fausse :

   (a) **Solution correcte**

   Premièrement, si un lancer donne 3 « face » au moins, sur 5 lancers, il ne pourra jamais donner 3 « pile ». Donc nous regardons le cas des lancers qui donnent « face », puis nous multiplierons par 2 pour envisager tous les cas.

   i. Regardons les lancers qui donnent 3 « face » consécutifs. Ils sont du type
   $$(P, F, F, F, P), (F, F, F, P, P), (P, P, F, F, F)$$
   ii. Regardons les lancers qui donnent 4 « face » dont 3 consécutifs. Ils sont du type
   $$(F, F, F, F, P), (F, F, F, P, F)\,(F, P, F, F, F), (P, F, F, F, F)$$
   iii. Il n'y a qu'un seul lancer qui ne donne que des « face »

   Il y a donc 8 lancers qui donnent 3 « face »consécutifs et donc, en tout, 16 lancers qui donnent 3 piles consécutifs ou 3 faces consécutifs

   (b) **Fausse solution**

   On appelle A l'ensemble des cas favorables. A pourrait être caractérisé par les quintuplets (F, F, F, X, Y),(X, F, F, F, Y) ou (X, Y, F, F, F) où $X \in \{F, P\}$ et $Y \in \{F, P\}$, c'est à dire que X et Y prennent n'importe quelle valeur F ou P. On recommencerait de la même manière avec le P de *"pile"*
   Il y a $4 = 2^2$ quintuplets du type (F, F, F, X, Y) ; de même qu'il y en a 4 du type (X, F, F, F, Y) ou 4 du type (X, Y, F, F, F). Le problème est le même avec P.
   Ainsi, $\text{card}A = \left(3 \times 2^2\right) \times 2 = 3 \times 2^3 = 24$

   Ce raisonnement est faux, car, il compte plusieurs fois le même lancer :
   Par exemple, en prenant la situation (F, F, F, X, Y), si $X = Y = F$, nous avons le lancer (F, F, F, F, F) que nous retrouvons dans la situation (X, F, F, F, Y) où nous faisons une nouvelle fois $X = Y = F$

Il faut donc être prudent et rigoureux

3. **Conclure**

   Il faut donner la probabilité de A. Ainsi :

$$\mathbf{P}\left(A\right) = \frac{\text{Cas favorables}}{\text{Cas possibles}} = \frac{2^4}{2^5} = \frac{1}{2}$$

   La conclusion est très simple : Diogène est un gredin qui se joue de son ami, car le risque *(pour l'un ou pour l'autre)* est exactement le même!....Mais, Eugène est un mauvais joueur en n'acceptant pas l'équiprobabilité qu'implique le lancer d'une simple pièce équilibrée; il devrait faire plus de probabilités.

Exercice 26 :

Une urne contient 3 boules : 1 blanche, 1 verte et 1 rouge.
L'expérience consiste à tirer une boule de l'urne, noter sa couleur, la remettre dans l'urne. Cette opération est renouvelée n fois, avec $n \geqslant 3$

Il faut d'abord définir l'espace fondamental Ω et en donner le cardinal.
Ω est l'ensemble des applications de l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$ dans $\{R, V, B\}$ où R désigne la couleur rouge, V la couleur verte et B la couleur blanche, et donc Card $\Omega = 3^n$

1. *Quelle est la probabilité pour avoir au moins une boule de chaque couleur ?*

   Soit A l'événement $A = \{\text{Avoir une boule de chaque couleur}\}$. Nous allons étudier $\overline{A}$.
   $\overline{A}$ est l'événement « le tirage est bicolore » ou « le tirage est unicolore ». Nous allons écrire $\overline{A} = B \cup C$ où :

$$B = \{\text{tirage unicolor}\} \text{ et } C = \{\text{Tirage bicolor}\}$$

   On voit, tout de suite que $B \cap C = \emptyset$
   Nous avons $C = \{RV\} \cup \{RB\} \cup \{BV\}$ où $\{RV\}$ est le tirage bicolor « Rouge, Vert » $\{BV\}$ est le tirage bicolor « Blanc, Vert » et $\{RB\}$ est le tirage bicolor « Rouge, Blanc »
   Nous avons Card $(\{RB\}) = 2^n - 2$ puisque nous devons enlever les tirages unicolor « rouge » ou « blanc »
   Donc, Card $C = 3\left(2^n - 2\right)$.
   D'où $\mathbf{P}\left(\overline{A}\right) = \dfrac{3 + 3\left(2^n - 2\right)}{3^n} = \dfrac{2^n - 1}{3^{n-1}}$ D'où

$$\mathbf{P}\left(A\right) = 1 - \mathbf{P}\left(\overline{A}\right) = 1 - \frac{2^n - 1}{3^{n-1}} = \frac{3^{n-1} - 2^n + 1}{3^{n-1}}$$

2. *Quelle est la probabilité pour que les 2 boules extrêmes soient de même couleur ?*

   Si le premier et le dernier tirage ont même couleur, alors il reste $(n-2)$ places pour les boules de n'importe quelle couleur R, V, B. Il y a donc 3^{n-2} tirage qui donne une couleur au premier tirage et la même couleur au dernier tirage.
   Il y a donc $3 \times 3^{n-2} = 3^{n-1}$ tirages qui donnent que les 2 boules extrêmes soient de même couleur.
   Donc, si D est l'événement $D = \{\text{Les 2 boules extrêmes soient de même couleur }\}$, nous avons $\mathbf{P}\left(D\right) = \dfrac{3^{n-1}}{3^n} = \dfrac{1}{3}$

Exercice 27 :

On suppose qu'une année a 365 jours (on ne tient pas compte des années bissextiles).
Montrer, qu'il y a plus d'une chance sur 2 pour que, sur un groupe de 23 personnes, 2 de ces personnes soient nées le même jour.
Que dire d'un groupe de 22 personnes ?

C'est un exercice des plus classiques. En donner un corrigé est un exercice des plus normal!!

⇒ Quel modèle pour cette question ? ?
Si nous numérotons les jours de l'année, nous avons $Annee = \{j_1, j_2, \ldots, j_{365}\}$ et $Groupe = \{g_1, g_2, \ldots, g_{23}\}$.
Une configuration particulière, est une application de l'ensemble *Groupe* dans l'ensemble *Annee*.
Et donc Ω est l'ensemble des applications de *Groupe* dans *Annee*, et donc Card $\Omega = (365)^{23}$

⇒ Cette fois-ci, nous considérons l'événement $A = \{2$ personnes sont nées le même jour$\}$ et surtout son événement contraire $\overline{A} = \{$ Aucune personne n'est née le même jour$\}$
Une configuration particulière pour $\overline{A}$ est une injection de l'ensemble *Groupe* dans l'ensemble *Annee* et donc Card $\overline{A} = A_{365}^{23}$ et donc $\mathbf{P}\left(\overline{A}\right) = \dfrac{A_{365}^{23}}{(365)^{23}}$ et

$$\mathbf{P}(A) = 1 - \mathbf{P}\left(\overline{A}\right) = 1 - \frac{A_{365}^{23}}{(365)^{23}} \approx 0,55173$$

⇒ Dans un même raisonnement, si *Groupe* est un ensemble de 22 personnes, $\mathbf{P}(A) = 0,4757$

Exercice 28 :

Une urne contient 8 jetons numérotés de 1 à 8. Nous en tirons 3 simultanément, au hasard. Quelle est la probabilité pour que la somme des numéros tirés soit supérieure ou égale à la somme des numéros restants ?

⇒ Toujours la même question : quel est l'espace fondamental Ω ?
Ω est l'ensemble des sous ensembles de 3 éléments pris parmi 8 et donc Card $\Omega = \mathrm{C}_8^3 = \binom{8}{3}$

⇒ On considère les couples (a, b, c), tels que $a < b < c$ et nous nous intéressons à la somme $a + b + c$ donnée par ce tirage et nous cherchons les triplets (a, b, c) tels que

$$a + b + c \geqslant 36 - (a + b + c) \Longleftrightarrow 2(a + b + c) \geqslant 36 \Longleftrightarrow a + b + c \geqslant 18$$

⇒ On recense donc les triplets (a, b, c) tels que $a + b + c \geqslant 18$. Ce sont donc :

3, 8, 7	5, 8, 7	6, 8, 7
4, 8, 6	5, 8, 6	
4, 7, 8	5, 7, 6	

Et donc $\mathbf{P}(A) = \dfrac{7}{56} = \dfrac{1}{8}$

Exercice 30 :

Soient f et g deux applications de Ω dans $\mathbb{R}$. Montrer que :

$$\{\omega \in \Omega \textit{ tel que } f(\omega) + g(\omega) \geqslant \varepsilon\} \subset \left\{\omega \in \Omega \textit{ tel que } g(\omega) \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right\} \cup \left\{\omega \in \Omega \textit{ tel que } f(\omega) \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right\}$$

⇒ Tout d'abord, nous avons $X \subset Y \Longleftrightarrow \overline{Y} \subset \overline{X}$
  ⋆ Supposons $X \subset Y$ et montrons $\overline{Y} \subset \overline{X}$
  Soit donc $x \in \overline{Y}$; alors, $x \notin Y$, et comme $X \subset Y$, nous avons aussi $x \notin X$ et donc $x \in \overline{X}$
  Ainsi, si $x \in \overline{Y}$ alors $x \in \overline{X}$ et donc $\overline{Y} \subset \overline{X}$
  ⋆ Supposons $\overline{Y} \subset \overline{X}$, alors $\overline{\overline{X}} \subset \overline{\overline{Y}} \Longleftrightarrow X \subset Y$

⇒ Et donc $A \subset (B \cup C) \Longleftrightarrow \overline{(B \cup C)} \subset \overline{A} \Longleftrightarrow \overline{B} \cap \overline{C} \subset \overline{A}$

⇒ Ainsi, pour démontrer que

$$\{\omega \in \Omega \text{ tel que } f(\omega) + g(\omega) \geqslant \varepsilon\} \subset \left\{\omega \in \Omega \text{ tel que } g(\omega) \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right\} \cup \left\{\omega \in \Omega \text{ tel que } f(\omega) \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right\}$$

Nous démontrerons :

$$\overline{\left\{\omega \in \Omega \text{ tel que } g(\omega) \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right\} \cup \left\{\omega \in \Omega \text{ tel que } f(\omega) \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right\}} \subset \overline{\{\omega \in \Omega \text{ tel que } f(\omega) + g(\omega) \geqslant \varepsilon\}}$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\overline{\left\{\omega \in \Omega \text{ tel que } g(\omega) \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right\}} \cap \overline{\left\{\omega \in \Omega \text{ tel que } f(\omega) \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right\}} \subset \overline{\{\omega \in \Omega \text{ tel que } f(\omega) + g(\omega) \geqslant \varepsilon\}}$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\left\{\omega \in \Omega \text{ tel que } g(\omega) < \frac{\varepsilon}{2}\right\} \cap \left\{\omega \in \Omega \text{ tel que } f(\omega) < \frac{\varepsilon}{2}\right\} \subset \{\omega \in \Omega \text{ tel que } f(\omega) + g(\omega) < \varepsilon\}\}$$

Ce qui sera équivalent.
Soit donc $\omega \in \left\{\omega \in \Omega \text{ tel que } g(\omega) < \frac{\varepsilon}{2}\right\} \cap \left\{\omega \in \Omega \text{ tel que } f(\omega) < \frac{\varepsilon}{2}\right\}$, alors $g(\omega) < \frac{\varepsilon}{2}$ et $f(\omega) < \frac{\varepsilon}{2}$ et donc :

$$g(\omega) + f(\omega) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Et donc $\omega \in \{\omega \in \Omega \text{ tel que } f(\omega) + g(\omega) < \varepsilon\}$
Ce que nous voulions

Exercice 31 :

Partie 1 : Dénombrement
Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé une fois pour toutes

1. *Pour $1 \leqslant k \leqslant n$, montrer que le nombre de k-uplets d'entiers naturels $(i_1, \ldots, i_k)$ tels que $1 \leqslant i_1 < i_2 < i_3 < \ldots < i_{k-1} < i_k \leqslant n$ est $C_n^k = \binom{n}{k}$*

   Pour modéliser, et se représenter le contexte de l'épreuve, on peut supposer que nous avons une urne composée de n boules numérotées de 1 à n et que nous en tirions k.
   Bien entendu, toutes les boules tirées n'ont pas le même numéro, et il est possible de les ranger par ordre croissant et nous obtenons ainsi un k-uplet d'entiers naturels $(i_1, \ldots, i_k)$ tels que $1 \leqslant i_1 < i_2 < i_3 < \ldots < i_{k-1} < i_k \leqslant n$
   Il y a $C_n^k = \binom{n}{k}$ façons de tirer k boules parmi n et il y a donc $C_n^k = \binom{n}{k}$ k-uplets d'entiers naturels $(i_1, \ldots, i_k)$ tels que $1 \leqslant i_1 < i_2 < i_3 < \ldots < i_{k-1} < i_k \leqslant n$

2. *On note E l'ensemble des k-uplets d'entiers naturels $(i_1, \ldots, i_k)$ tels que $1 \leqslant i_1 \leqslant i_2 \leqslant i_3 \leqslant \ldots \leqslant i_{k-1} \leqslant i_k \leqslant n$ et F l'ensemble des k-uplets d'entiers naturels $(j_1, \ldots, j_k)$ tels que $1 \leqslant j_1 < j_2 < j_3 < \ldots < j_{k-1} < j_k \leqslant n + k - 1$*
   Soit $\Phi : E \longrightarrow F$ qui, à $(i_1, \ldots, i_k) \in E$ fait correspondre $(j_1, \ldots, j_k) \in F$ défini par : $\Phi[(i_1, \ldots, i_k)] = (j_1, \ldots, j_k)$ tel que :

$$\left\{\begin{array}{rl} j_1 = & i_1 \\ j_2 = & i_2 + 1 \\ \vdots & \vdots \\ j_l = & i_l + (l-1) \\ \vdots & \vdots \\ j_k = & i_k + (k-1) \end{array}\right.$$

   Montrer que $\Phi : E \longrightarrow F$ est une bijection et donner $\operatorname{card}(E)$

   En voilà une question qu'elle est bonne !! Et c'est à ce moment que nous nous apercevons de l'importance de la résolution de la question 1
   Montrons donc que $\Phi : E \longrightarrow F$ est une bijection.
   $\Rightarrow$ Montrons que Φ est injective
   Soient donc 2 k-uplets $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ et $(i'_1, i'_2, \ldots, i'_k)$ de E tels que $\Phi[(i_1, i_2, \ldots, i_k)] = \Phi[(i'_1, i'_2, \ldots, i'_k)]$.
   Rappelons que $1 \leqslant i_1 \leqslant i_2 \leqslant i_3 \leqslant \ldots \leqslant i_{k-1} \leqslant i_k \leqslant n$ et $1 \leqslant i'_1 \leqslant i'_2 \leqslant i'_3 \leqslant \ldots \leqslant i'_{k-1} \leqslant i'_k \leqslant n$.

Nous avons alors, pour tour l tel que $1 \leqslant l \leqslant k$:

$$i_l + (l-1) = i'_l + (l-1) \Longleftrightarrow i_l = i'_l$$

Et donc, nous avons $(i_1, i_2, \ldots, i_k) = (i'_1, i'_2, \ldots, i'_k)$; Φ est donc injective

$\Rightarrow$ Montrons que Φ est surjective

Soit donc $(j_1, j_2, \ldots, j_k)$ un k-uplet de F. Rappelons que $j_1 < j_2 < \ldots < j_k$
Existe-t-il un k-uplet $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ de E tel que $\Phi\left[(i_1, \ldots, i_k)\right] = (j_1, \ldots, j_k)$?
Si ce k-uplet $(i_1, i_2, \ldots, i_k) \in E$ existe, alors, nous avons $j_l = i_l + (l-1)$ et nous choisissons donc $i_l = j_l - (l-1) = j_l + 1 - l$.
Il faut, maintenant, montrer que $i_l \leqslant i_{l+1}$. Or :

$$i_{l+1} - i_l = j_{l+1} + 1 - l - 1 - j_l - 1 + l = j_{l+1} - j_l - 1$$

Or, de $j_l < j_{l+1}$, nous tirons $j_{l+1} - j_l \geqslant 1$ et donc $j_{l+1} - j_l - 1 \geqslant 0$, c'est à dire

$$i_{l+1} - i_l \geqslant 0 \Longleftrightarrow i_{l+1} \geqslant i_l$$

Φ est donc surjective

Nous concluons que Φ est bijective et que Card E = Card F ; de la question 1, Card $F = \mathrm{C}_{n+k-1}^{k} = \binom{n+k-1}{k}$.
D'où Card $E = \mathrm{C}_{n+k-1}^{k} = \binom{n+k-1}{k}$

Partie 2 *Une urne contient des boules numérotées de 1 à N. On effectue une suite infinie de tirages avec remise, et on note $u_1, \ldots, u_n, \ldots$ la liste des numéros successifs obtenus. C'est à dire que l'on obtient une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'entiers naturels compris entre 1 et N avec $N \geqslant 2$.*

1. *Soit A_n l'événement*

   $$A_n = \{ \text{ Les } n \text{ premiers tirages successifs amènent des numéros qui vont en ordre croissant au sens large}\}$$

   Calculer $\mathbf{P}(A_n)$; on convient que $\mathbf{P}(A_1) = 1$

   On considère les n premiers tirages. Le nombre de tirages possibles lors de ces n premiers tirages est l'ensemble des applications de $\{1, \ldots, n\}$ dans l'ensemble $\{1, \ldots, N\}$.
   On recherche donc les n-uplets $(u_1, \ldots, u_n)$ qui sont rangés en ordre croissnt au sens large, c'est à dire tels que $u_1 \leqslant u_2 \leqslant \ldots \leqslant u_n$.
   D'après la question 1, ils sont au nombre de $\mathrm{C}_{n+N-1}^{n} = \binom{n+N-1}{n}$, et donc :

   $$\boxed{\mathbf{P}(A_n) = \frac{\mathrm{C}_{n+N-1}^{n}}{N^n} = \frac{\binom{n+N-1}{n}}{N^n}}$$

2. *Démontrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \mathbf{P}(A_n)$ converge*

   Nous allons utiliser le critère de D'Alembert :

   $$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\mathrm{C}_{n+N}^{n+1}}{N^{n+1}} \times \frac{N^n}{\mathrm{C}_{n+N-1}^{n}} = \frac{(n+N)! \times n! \times (N-1)!}{(n+1)! \times (N-1)! \times N \times (N+n-1)!} = \frac{n+N}{N(n+1)}$$

   Maintenant, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n+N}{N(n+1)} = \dfrac{1}{N}$, et comme $\dfrac{1}{N} < 1$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} v_n$ converge

3. *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons $A_{n+1} \subset A_n$*

   Soit $\omega \in A_{n+1}$.
   Que représente ω ?
   ω est une suite finie de $n+1$ entiers compris entre 1 et N tels que $u_1 \leqslant u_2 \leqslant \cdots \leqslant u_n \leqslant u_{n+1}$
   Nous avons, en particulier $u_1 \leqslant u_2 \leqslant \cdots \leqslant u_n$, ce qui montre que $\omega \in A_n$ et donc $A_{n+1} \subset A_n$

4. *Montrer que* $\mathbf{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} A_n\right) = 0$ *; en donner une interprétation.*

   D'après le lemme de Borel-Cantelli vu en 15.3.8, comme la série $\sum_{n\geqslant 1} \mathbf{P}(A_n)$ est convergente, nous avons $\mathbf{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\left(\bigcup_{m\geqslant n} A_m\right)\right) = 0$

   Comme $A_{n+1} \subset A_n$, la suite d'événements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante et donc, $\bigcup_{m\geqslant n} A_m = A_n$, d'où nous tirons que $\mathbf{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = 0$

   Ce qui veut dire que **P**-presque sûrement, il se produira une décroissance stricte dans la suite des numérons tirés et donc que seuls un nombre fini d'événements A_n se réalisent.

Exercice 34 :

Soit $a > 1$. *On définit le réel* $\zeta(a)$ *par :* $\zeta(a) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^a}$.

Nous pouvons alors définir une probabilité $\mathbf{P}_a$ *sur* $\mathbb{N}$ *en posant, pour tout* $k \in \mathbb{N}^*$ *:* $\mathbf{P}_a(\{k\}) = \frac{1}{\zeta(a)\, k^a}$

1. *Vérifier que* $\mathbf{P}_a$ *une probabilité*

   Il faut prouver que $\mathbf{P}_a(\mathbb{N}^*) = 1$.
   Or, $\mathbb{N}^* = \bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} \{k\}$ et donc

   $$\mathbf{P}_a(\mathbb{N}^*) = \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \mathbf{P}_a(\{k\}) = \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{\zeta(a)\, k^a} = \frac{1}{\zeta(a)} \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{k^a} = \frac{1}{\zeta(a)} \times \zeta(a) = 1$$

   Ce que nous voulions

2. *Si* $m \in \mathbb{N}^*$, *on note* $m\mathbb{N}^*$ *l'ensemble* $m\mathbb{N}^* = \{km, k \in \mathbb{N}^*\}$ *de ses multiples non nuls. Calculer* $\mathbf{P}_a(2\mathbb{N}^*)$.

   Qu'est ce que $2\mathbb{N}^*$?
   En fait, $2\mathbb{N}^* = \bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} \{2k\}$ et donc

   $$\mathbf{P}_a(2\mathbb{N}^*) = \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \mathbf{P}_a(\{2k\}) = \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{\zeta(a)\,(2k)^a} = \frac{1}{\zeta(a)\, 2^a} \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{k^a} = \frac{1}{\zeta(a)\, 2^a} \times \zeta(a) = \frac{1}{2^a}$$

3. *Généraliser.*

   Comme tout à l'heure, pour $m \in \mathbb{N}^*$, nous avons $m\mathbb{N}^* = \bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} \{mk\}$ et donc

   $$\mathbf{P}_a(m\mathbb{N}^*) = \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \mathbf{P}_a(\{mk\}) = \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{\zeta(a)\,(mk)^a} = \frac{1}{\zeta(a)\, m^a} \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{k^a} = \frac{1}{\zeta(a)\, m^a} \times \zeta(a) = \frac{1}{m^a}$$

   Un tout petit peu plus loin
   Juste un petit exemple qui ne fait pas avancer le schmilbililic.
   Nous avons $6\mathbb{N}^* \subset 2\mathbb{N}^*$ et donc $\mathbf{P}_a(6\mathbb{N}^*) \leqslant \mathbf{P}_a(2\mathbb{N}^*)$, c'est à dire $\frac{1}{6^a} \leqslant \frac{1}{2^a}$
   Est ce que nous avons vraiment fait avancer la science ?

4. *Démontrer qu'il n'existe pas de probabilité uniforme sur* $\mathbb{N}$.

   Soit **P** cette probabilité ; supposons que pour tout $k \in \mathbb{N}$, nous ayons $\mathbf{P}(\{k\}) = p$ où $0 < p < 1$

- ⋆ Nous devons avoir $\sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbf{P}(\{k\}) = 1$, c'est à dire que la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbf{P}(\{k\})$ est convergente. Or si nous considérons les sommes partielles $S_n = \sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}(\{k\}) = \sum_{k=0}^{n} p = (n+1)\,p$ et nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty} = +\infty$
  La série est donc non-convergente
- ⋆ On peut aussi s'intéresser au terme général de cette série qui est le terme constant p, lequel ne converge pas vers 0.

Il n'existe donc pas de probabilité uniforme sur $\mathbb{N}$

Chapitre 16

Indépendance, conditionnement

16.1 Exemples d'introduction

16.1.1 Premier exemple

Comment doit-on modifier la probabilité que l'on attribue à un événement lorsque l'on dispose d'une information supplémentaire ? Le concept de probabilité conditionnelle permet de répondre à cette question.

Enoncé de l'exemple

On considère une famille qui a 2 enfants ; on suppose qu'à chaque naissance, il y a équiprobabilité d'avoir une fille ou un garçon. Quelle est la probabilité pour que le second soit un garçon, sachant que l'aîné est une fille ?

Quel est, dans cette situation, l'espace fondamental ? Il est simple :

$$\Omega = \{(G, F), (G, G), (F, G), (F, F)\}$$

Nous savons *(et nous en sommes même sûrs)* que l'aînée est une fille. Nous avons donc, en fait, un nouvel espace fondamental : nous sommes donc dans la situation : $\Omega' = \{(F, G), (F, F)\}$; donc, la probabilité pour que le second soit un garçon, sachant que aîné est une fille est de $\dfrac{1}{2}$

16.1.2 Second exemple

On lance 2 dés, numérotés de 1 à 6 et on s'intéresse à la somme des dés. Quelle est la probabilité pour que l'un des dés soit un 2, alors que la somme est 6

Quel est, dans cette situation, l'espace fondamental ? Il est moins simple, mais très explicite :

$$\Omega = \{(i, j) \text{ tels que } 1 \leqslant i \leqslant 6 \text{ et } 1 \leqslant j \leqslant 6\} :$$

Nous avons $\text{Card } \Omega = 36$

Nous savons que la somme est 6 ; comme précédemment, nous sommes donc dans la situation :

$$\Omega' = \{(1, 5) ; (5, 1) ; (2, 4) ; (4, 2) ; (3, 3)\}$$

Donc, les « tirages » qui ont un 2 sont : $X = \{(2, 4) ; (4, 2)\}$, et la probabilité pour que l'un des dés ait un 2, alors que le somme est 6 est : $\dfrac{\text{Card } X}{\text{Card } \Omega'} = \dfrac{2}{5}$

16.2 Probabilités conditionnelles

16.2.1 Première définition

Soit $\{\Omega; \mathcal{F}; \mathbf{P}\}$ un espace probabilisé, et soit $A \in \mathcal{F}$ tel que $\mathbf{P}(A) > 0$
On appelle probabilité conditionnelle d'un événement $B \in \mathcal{F}$ sachant A, le nombre

$$\mathbf{P}(B/A) = \frac{\mathbf{P}(B \cap A)}{\mathbf{P}(A)}$$

16.2.2 Proposition

L'application $\mathbf{P}_A$:

$$\begin{cases} \mathbf{P}_A : \mathcal{F} & \longrightarrow \quad [0; +1] \\ \qquad B & \longmapsto \quad \mathbf{P}_A(B) = \mathbf{P}(B/A) = \dfrac{\mathbf{P}(B \bigcap A)}{\mathbf{P}(A)} \end{cases}$$

est une probabilité

Démonstration

Nous allons vérifier, dans cette démonstration, tous les axiômes de probabilité.

1. On va démontrer que $\mathbf{P}_A(\Omega) = 1$
   Rien de plus simple :
   $$\mathbf{P}_A(\Omega) = \mathbf{P}(\Omega/A) = \frac{\mathbf{P}(\Omega \bigcap A)}{\mathbf{P}(A)}$$
   Comme $A \subset \Omega$, $\Omega \cap A = A$, donc
   $$\mathbf{P}_A(\Omega) = \mathbf{P}(\Omega/A) = \frac{\mathbf{P}(\Omega \bigcap A)}{\mathbf{P}(A)} = \frac{\mathbf{P}(A)}{\mathbf{P}(A)} = 1$$
2. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements de $\mathcal{F}$ deux à deux disjoints
   C'est à dire : $(m \neq n) \Longrightarrow A_m \cap A_n = \emptyset$
   On va montrer que $\mathbf{P}_A\left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{P}_A(A_n)$
   Il faut commencer par évaluer $\mathbf{P}_A\left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)$; nous avons, d'après la définition 16.2.1
   $$\mathbf{P}_A\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \frac{\mathbf{P}\left(\left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \cap A\right)}{\mathbf{P}(A)}$$
   Or, par la distributivité de l'intersection par rapport à la réunion, $\left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \cap A = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} (A_n \cap A)$
   Donc, $\mathbf{P}\left(\left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \cap A\right) = \mathbf{P}\left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} (A_n \cap A)\right)$
   Comme, par hypothèse, nous avons $(m \neq n) \Longrightarrow A_m \cap A_n = \emptyset$, nous avons aussi :
   $$(m \neq n) \Rightarrow (A_m \cap A) \cap (A_n \cap A) = \emptyset$$
   D'où : $\mathbf{P}\left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} (A_n \cap A)\right) = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{P}(A_n \cap A)$ *(propriété des probabilités)*

Nous en déduisons donc :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_A\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) &= \frac{\mathbf{P}\left(\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)\cap A\right)}{\mathbf{P}(A)} \\
&= \frac{1}{\mathbf{P}(A)}\sum_{n\in\mathbb{N}}\mathbf{P}(A_n\cap A) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{\mathbf{P}(A_n\cap A)}{\mathbf{P}(A)} \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}}\mathbf{P}(A_n/A) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}}\mathbf{P}_A(A_n)
\end{aligned}$$

Ce que nous voulions

Remarque 1 :

1. Si $\mathbf{P}(B) = 0$, alors $\mathbf{P}(B/A) = \dfrac{\mathbf{P}(B\cap A)}{\mathbf{P}(A)} = 0$, car $(A\cap B)\subset B$, et $\mathbf{P}(A\cap B)\leqslant \mathbf{P}(B)$, donc $\mathbf{P}(B\cap A) = 0$
2. Nous avons toujours l'égalité : $\mathbf{P}(A)\times\mathbf{P}(B/A) = \mathbf{P}(B\cap A)$

16.2.3 Corollaire

Ce corollaire traite des conséquences du fait que $\mathbf{P}_A$ est **une nouvelle probabilité**

Soit $\{\Omega;\mathcal{F};\mathbf{P}\}$ un espace probabilisé et $A\in\mathcal{F}$ tel que $\mathbf{P}(A)\neq 0$. Alors, la probabilité conditionnelle vérifie :

1. $\mathbf{P}(\Omega/A) = 1$, $\mathbf{P}(\emptyset/A) = 0$ et si $A\subset B$, alors $\mathbf{P}(B/A) = 1$
2. Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ forment une famille d'éléments de $\mathcal{F}$ deux à deux disjoints, alors
$$\mathbf{P}\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n} X_i\right)/A\right) = \sum_{i=1}^{n}\mathbf{P}(X_i/A)$$
3. Pour tout $B\in\mathcal{F}$, nous avons $\mathbf{P}\left(\overline{B}/A\right) = 1-\mathbf{P}(B/A)$
4. Pour tout $X\in\mathcal{F}$ et tout $Y\in\mathcal{F}$, si $X\subset Y$, alors $\mathbf{P}(X/A)\leqslant\mathbf{P}(Y/A)$
5. Pour tout $X\in\mathcal{F}$ et tout $Y\in\mathcal{F}$, nous avons $\mathbf{P}(X\cup Y/A) = \mathbf{P}(X/A)+\mathbf{P}(Y/A)-\mathbf{P}(X\cap Y/A)$
6. Pour toute suite d'éléments $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de $\mathcal{F}$, nous avons
$$\mathbf{P}\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n} X_i\right)/A\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n}\mathbf{P}(X_i/A)$$
7. Pour toute **suite croissante** $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements de $\mathcal{F}$, c'est à dire tels que $X_n\subset X_{n+1}$, nous avons :
$$\mathbf{P}\left(\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n\right)/A\right) = \lim_{n\to+\infty}\mathbf{P}(X_n/A)$$
8. Pour toute suite décroissante $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements de $\mathcal{F}$, c'est à dire tels que $X_{n+1}\subset X_n$, nous avons :
$$\mathbf{P}\left(\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} X_n\right)/A\right) = \lim_{n\to+\infty}\mathbf{P}(X_n/A)$$

Démonstration

1. Le fait que $\mathbf{P}(\Omega/A) = 1$ et $\mathbf{P}(\emptyset/A) = 0$ vient essentiellement du fait que $\mathbf{P}_A$ est une probabilité.
Supposons, maintenant, que $A \subset B$. Alors $B \cap A = A$ et :
$$\mathbf{P}(B/A) = \frac{\mathbf{P}(B \cap A)}{\mathbf{P}(A)} = \frac{\mathbf{P}(A)}{\mathbf{P}(A)} = 1$$
2. L'item numéro 2 est la conséquence de la définition de probabilité vue en 15.3.1, et ce qui est vrai pour une infinité d'ensembles, l'est aussi pour un nombre fini.
3. D'après 15.3.2, nous avons pour toute probabilité $\mathbf{P}\left(\bar{A}\right) = 1 - \mathbf{P}(A)$, en particulier pour la probabilité $\mathbf{P}_A$. Et donc $\mathbf{P}\left(\overline{B}/A\right) = 1 - \mathbf{P}(B/A)$
4. Toujours d'après 15.3.2, nous avons pour toute probabilité $A \subset B \Longrightarrow \mathbf{P}(B \setminus A) = \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A)$, en particulier pour la probabilité $\mathbf{P}_A$. Et donc si $X \subset Y$, alors $\mathbf{P}(X/A) \leqslant \mathbf{P}(Y/A)$
5. Il suffit, une nouvelle fois de se retourner vers les résultats de 15.3.2
6. $\mathbf{P}\left(\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} X_i\right)/A\right) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbf{P}(X_i/A)$ est un résultat classique des propriétés des probabilités
7. Il suffit d'appliquer 15.3.3 à la probabilité $\mathbf{P}_A$
8. Il suffit d'appliquer 15.3.4 à la probabilité $\mathbf{P}_A$. Il faut remarquer que les 2 dernières propriétés sont équivalentes

Exercice 1 :

Voici une question très simple, tout ce qu'il y a de plus proche de la définition. Application directe, donc
Soient $\{\Omega; \mathcal{F}; \mathbf{P}\}$ un espace probabilisé, $A \in \mathcal{F}$ et $B \in \mathcal{F}$ tels que $\mathbf{P}(A) \neq 0$ et $\mathbf{P}(B) \neq 0$.
Démontrer que si $\mathbf{P}(A/B) \geqslant \mathbf{P}(A)$, alors $\mathbf{P}(B/A) \geqslant \mathbf{P}(B)$

Exercice 2 :

Revenons à l'exemple 16.1.1 de l'introduction.
$\longrightarrow$ Si H est l'événement « La famille a au moins un garçon »
$\longrightarrow$ Si K est l'événement « La famille a 2 garçons »
$\longrightarrow$ Si L est l'événement « L'aîné est un garçon »
Calculer : $\mathbf{P}(H/L)$; $\mathbf{P}(L/H)$; $\mathbf{P}(L/K)$

Résolution de l'exercice

1. Si H est l'événement « La famille a au moins un garçon », nous avons $H = \{(G,G); (G,F); (F,G)\}$, et si L est l'événement « L'aîné est un garçon », nous avons $L = \{(G,G); (G,F)\}$ et $H \cap L = \{(G,G); (G,F)\}$
Comme $\mathbf{P}(H/L) = \dfrac{\mathbf{P}(H \cap L)}{\mathbf{P}(L)}$, que $\mathbf{P}(H \cap L) = \dfrac{1}{2}$ et que $\mathbf{P}(L) = \dfrac{1}{2}$, nous avons $\dfrac{\mathbf{P}(H \cap L)}{\mathbf{P}(L)} = 1$
Le résultat n'est rien d'autre que de plus normal, puisque si nous savons que l'aîné est un garçon, nous savons déjà qu'elle a au moins un garçon !!
2. Cette fois ci, $\mathbf{P}(L/H) = \dfrac{\mathbf{P}(H \cap L)}{\mathbf{P}(H)}$; or, $\mathbf{P}(H) = \dfrac{3}{4}$ et donc $\mathbf{P}(L/H) = \dfrac{2}{3}$
Cette question est juste pour faire remarquer que $\mathbf{P}(H/L) \neq \mathbf{P}(L/H)$
3. Sans surprise $\mathbf{P}(L/K) = 1$!!!
Remarquer que $L \subset K$*, et que, de manière générale, si* $A \subset B$*, alors* $\mathbf{P}(A/B) = 1$

Exemple 1 :

Une urne contient n boules dont b sont blanches et r sont rouges. On tire simultanément 2 boules de cette urne, et soit R l'événement

$$R = \{\text{les 2 boules tirées sont rouges}\}$$

Calculer $\mathbf{P}(R)$

Nous allons utiliser 2 méthodes pour résoudre cette question.

Méthode 1 Méthode classique, habituelle : $\dfrac{\text{cas favorables}}{\text{cas possibles}} = \dfrac{\mathrm{C}_r^2}{\mathrm{C}_n^2} = \dfrac{r(r-1)}{n(n-1)}$

Méthode 2 On considère cette fois-ci que les 2 boules sont tirées l'une après l'autre. On s'intéresse aux événements suivants :

$$R_1 = \{\text{la première boule tirée est rouge}\}\,; \quad R_2 = \{\text{la seconde boule tirée est rouge}\}$$

On calcule donc $\mathbf{P}(R_1 \cap R_2) = \mathbf{P}(R_1) \times \mathbf{P}(R_2/R_1) = \dfrac{r}{n} \times \dfrac{r-1}{n-1}$

16.3 Formule des Bayes, formule des probabilités totales

16.3.1 Généralisation de la formule des probabilités composées

Soit $\{\Omega; \mathcal{F}; \mathbf{P}\}$ un espace probabilisé et $A_1, A_2, \ldots, A_n$, n événements de $\mathcal{F}$ tels que $\mathbf{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) \neq 0$. Alors :

$$\mathbf{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = \mathbf{P}(A_1) \times \mathbf{P}(A_2/A_1) \times \mathbf{P}(A_3/A_1 \cap A_2) \times \cdots \times \mathbf{P}(A_n/A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1})$$

Démonstration

Comme, pour tout $k = 1, \cdots, n$, nous avons $(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n \subset A_k$ et comme $\mathbf{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) \neq 0$, alors $\mathbf{P}(A_k) \neq 0$; nous avons aussi, et pour les mêmes raisons $\mathbf{P}(A_1 \cap A_2) \neq 0$,....,$\mathbf{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \neq 0$, de telle sorte que nous pouvons calculer les différentes probabilités conditionnelles.
Nous avons :

$$\mathbf{P}(A_1) \times \mathbf{P}(A_2/A_1) \times \mathbf{P}(A_3/A_1 \cap A_2) \times \cdots \times \mathbf{P}(A_n/A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1})$$
$$=$$
$$\mathbf{P}(A_1) \times \frac{\mathbf{P}(A_2 \cap A_1)}{\mathbf{P}(A_1)} \times \frac{\mathbf{P}(A_3 \cap A_1 \cap A_2)}{\mathbf{P}(A_1 \cap A_2)} \times \cdots \times \frac{\mathbf{P}(A_n \cap A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1})}{\mathbf{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1})}$$

En simplifiant, successivement, nous avons

$$\mathbf{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = \mathbf{P}(A_1) \times \mathbf{P}(A_2/A_1) \times \mathbf{P}(A_3/A_1 \cap A_2) \times \cdots \times \mathbf{P}(A_n/A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1})$$

Ce que nous voulions

16.3.2 Proposition : formule des probabilités totales

Soit $\{\Omega; \mathcal{F}; \mathbf{P}\}$ un espace probabilisé, et soit $A \in \mathcal{F}$ tel que $0 < \mathbf{P}(A) < 1$
Alors, pour tout $B \in \mathcal{F}$,

$$\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(B/A)\,\mathbf{P}(A) + \mathbf{P}\left(B/\overline{A}\right)\mathbf{P}\left(\overline{A}\right)$$

Démonstration

On retrouve la méthode de cette démonstration dans plusieurs situations.
Retenons toujours que $\Omega = B \cup \overline{B}$, et que donc, pour $B \in \mathcal{F}$, nous avons :

$$B = B \cap \Omega = B \cap \left(A \cup \overline{A}\right) = (B \cap A) \cup \left(B \cap \overline{A}\right)$$

Donc, comme $(B \cap A) \cap \left(B \cap \overline{A}\right) = \emptyset$

$$\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(B \cap A) + \mathbf{P}\left(B \cap \overline{A}\right) = \mathbf{P}(B/A)\,\mathbf{P}(A) + \mathbf{P}\left(B/\overline{A}\right)\mathbf{P}\left(\overline{A}\right)$$

Q.E.D.

Remarque 2 :

C'est une relation à utiliser si la réalisation de B dépend d'autres événements

Exemple 2 :

Exercice résolu

Soient U_1 et U_2 2 urnes

- ⋆ *La première urne U_1 contient b_1 boules blanches et n_1 boules noires*
- ⋆ *La seconde urne U_2 contient b_2 boules blanches et n_2 boules noires.*

On choisit l'une des 2 urnes au hasard puis, on tire 2 boules dans l'urne choisie.

On retrouve, ici, cette locution ≪ au hasard ≫, voulant dire qu'il y a équiprobabilité dans le choix des urnes ; comment procéder ? En jetant une pièce équilibrée, par exemple !

Quelle est la probabilité pour que les deux boules soient blanches ?

Résolution de cet exercice

Soit A_1, A_2 et B les événements : $A_1 = \{\text{le tirage se fait dans } U_1\}$, $A_2 = \{\text{le tirage se fait dans } U_2\}$, et $B = \{\text{les 2 boules tirées sont blanches}\}$

Il faut remarquer que $A_1 = \overline{A_2}$, et que $\mathbf{P}(A_1) = \mathbf{P}(A_2) = \dfrac{1}{2}$; donc :

$$\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(B/A_1)\,\mathbf{P}(A_1) + \mathbf{P}(B/A_2)\,\mathbf{P}(A_2)$$

Or, $\mathbf{P}(B/A_1) = \dfrac{\mathrm{C}_{b_1}^2}{\mathrm{C}_{b_1+n_1}^2}$ et $\mathbf{P}(B/A_2) = \dfrac{\mathrm{C}_{b_2}^2}{\mathrm{C}_{b_2+n_2}^2}$, et donc, $\mathbf{P}(B) = \dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{\mathrm{C}_{b_1}^2}{\mathrm{C}_{b_1+n_1}^2} + \dfrac{\mathrm{C}_{b_2}^2}{\mathrm{C}_{b_2+n_2}^2}\right\}$

16.3.3 Formule de Bayes

Soit $\{\Omega; \mathcal{F}; \mathbf{P}\}$ un espace probabilisé, et soit $A \in \mathcal{F}$ tel que $\mathbf{P}(A) > 0$. Soit $B \in \mathcal{F}$, tel que $\mathbf{P}(B) > 0$
Alors, $\mathbf{P}(A/B) = \dfrac{\mathbf{P}(B/A)\,\mathbf{P}(A)}{\mathbf{P}(B/A)\,\mathbf{P}(A) + \mathbf{P}\left(B/\overline{A}\right)\mathbf{P}\left(\overline{A}\right)}$

Démonstration

Nous avons : $\mathbf{P}(A/B) = \dfrac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)}$.
Pour le calcul de $\mathbf{P}(B)$, il suffit ensuite d'utiliser la formule des probabilités totales de 16.3.2

Exemple 3 :

Retour à l'exemple précédent 16.3.2
On constate que les deux boules tirées sont blanches. Quelle est la probabilité pour que ces deux boules proviennent de l'urne U_1 ?

On veut donc calculer $\mathbf{P}(A_1/B)$; or, $\mathbf{P}(A_1/B) = \dfrac{\mathbf{P}(B/A_1)\,\mathbf{P}(A_1)}{\mathbf{P}(B/A_1)\,\mathbf{P}(A_1) + \mathbf{P}(B/A_2)\,\mathbf{P}(A_2)}$

Or, $\mathbf{P}(B/A_1)\,\mathbf{P}(A_1) = \frac{1}{2}\left\{\frac{\mathrm{C}_{b_1}^2}{\mathrm{C}_{b_1+n_1}^2}\right\}$ et $\mathbf{P}(B/A_2)\,\mathbf{P}(A_2) = \frac{1}{2}\left\{\frac{\mathrm{C}_{b_2}^2}{\mathrm{C}_{b_2+n_2}^2}\right\}$

D'où le calcul !!

16.3.4 Système complet d'événements

Soit $\{\Omega; \mathcal{F}\}$ un espace probabilisable

On appelle système complet d'événements une famille $\{A_n; n \in \mathbb{N}\}$ d'éléments de $\mathcal{F}$ tels que :

1. Ils sont deux à deux incompatibles, c'est à dire : $(m \neq n) \Longrightarrow (A_n \cap A_m = \emptyset)$
2. Et $\bigcup\limits_{n_i n\mathbb{N}} A_n = \Omega$

Remarque 3 :

1. La définition de système complet étant donnée pour une suite infinie d'événements, elle est tout autant valable pour un nombre fini d'événements $\{A_k; 1 \leqslant k \leqslant n\}$ où nous avons :
   (a) Pour tout $i = 1, \cdots, n$ et tout $j = 1, \cdots, n$, $(i \neq j) \Longrightarrow (A_i \cap A_j = \emptyset)$
   (b) Et $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k = \Omega$
2. Pour tout $A \in \mathcal{F}$, la famille $\left\{A, \overline{A}\right\}$ forme un système complet d'événements.

16.3.5 Formule des probabilités totales, généralisation

Soit $\{\Omega; \mathcal{F}; \mathbf{P}\}$ un espace probabilisé et $\{A_n; n \in \mathbb{N}\}$ un système complet d'éléments de $\mathcal{F}$.

Alors,

Pour tout $B \in \mathcal{F}$, nous avons $\mathbf{P}(B) = \sum\limits_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{P}(B/A_n)\,\mathbf{P}(A_n)$

Démonstration

Nous avons $B = B \cap \Omega = B \cap \left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} (A_n \cap B)$ par distributivité.

Comme pour $m \neq n$, nous avons $(A_n \cap B) \cap (A_m \cap B) = \emptyset$, nous avons :

$$\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_n \cap B)\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{P}(A_n \cap B)$$

D'après les résultats sur les probabilités conditionnelles, nous avons $\mathbf{P}(A_n \cap B) = \mathbf{P}(B/A_n) \times \mathbf{P}(A_n)$.

Donc :

$$\mathbf{P}(B) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{P}(B/A_n) \times \mathbf{P}(A_n)$$

16.3.6 Formule de Bayes, généralisation

Soit $\{\Omega; \mathcal{F}; \mathbf{P}\}$ un espace probabilisé et $\{A_n; n \in \mathbb{N}\}$ un système complet d'éléments de $\mathcal{F}$.

Alors,

Pour tout $B \in \mathcal{F}$, et tout $i \in \mathbb{N}$, nous avons

$$\mathbf{P}(A_i/B) = \frac{\mathbf{P}(B/A_i)\,\mathbf{P}(A_i)}{\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{P}(B/A_n)\,\mathbf{P}(A_n)}$$

Démonstration

Classiquement, $\mathbf{P}\left(A_i/B\right) = \dfrac{\mathbf{P}\left(A_i \cap B\right)}{\mathbf{P}\left(B\right)} = \dfrac{\mathbf{P}\left(B/A_i\right)\mathbf{P}\left(A_i\right)}{\mathbf{P}\left(B\right)}$

Or, $B = B \cap \Omega = B \cap \left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \left(A_n \cap B\right)$ par distributivité.

Et donc, comme en 16.3.5 : $\mathbf{P}\left(B\right) = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{P}\left(B/A_n\right) \times \mathbf{P}\left(A_n\right)$

D'où, nous obtenons $\mathbf{P}\left(A_i/B\right) = \dfrac{\mathbf{P}\left(B/A_i\right)\mathbf{P}\left(A_i\right)}{\mathbf{P}\left(B\right)} = \dfrac{\mathbf{P}\left(B/A_i\right)\mathbf{P}\left(A_i\right)}{\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{P}\left(B/A_n\right)\mathbf{P}\left(A_n\right)}$

Ce que nous voulions

Exemple 4 :

Une puce se déplace par sauts successifs sur les sommets d'un triangle équilatéral. Ce triangle est reproduit dans figure 16.1.
Au temps $t = 0$, la puce est en O. Puis, elle saute en l'un des points A, B ou C de façon équiprobable. Par la suite, au temps $t = n$, elle saute, du point où elle se trouve en l'un des autres points voisins de façon équiprobable.

1. *Calculer la probabilité pour que la puce revienne en O, pour la première fois, au temps $t = n$*
2. *Calculer la probabilité de l'événement « La puce revient en O ».*

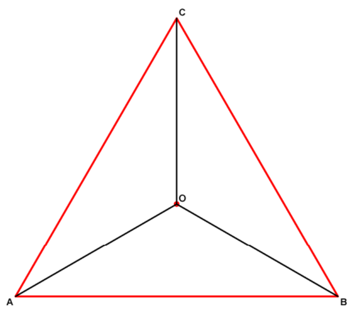

FIGURE 16.1 – Le Triangle et la puce

1. Pour $k \in \mathbb{N}$, nous posons $A_k = \{$La puce est en O à l'instant $t = k\}$; clairement, si $i \neq j$, alors $A_i \cap A_j = \emptyset$
   → Clairement, $\mathbf{P}\left(A_0\right) = 1$ et $\mathbf{P}\left(A_1\right) = 0$
   → L'événement « La puce revient en O, pour la première fois, au temps $t = n$ » est donné par $\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_{n-1}} \cap A_n$
   → D'après la formule des probabilités totales, nous avons :
   $$\begin{aligned}&\mathbf{P}\left(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_{n-1}} \cap A_n\right)\\ &= \mathbf{P}\left(\overline{A_1}\right) \times \mathbf{P}\left(\overline{A_2}/\overline{A_1}\right) \times \mathbf{P}\left(\overline{A_3}/\overline{A_1} \cap \overline{A_2}\right) \times \cdots \times \mathbf{P}\left(A_n/\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_{n-1}}\right)\end{aligned}$$
   → Nous avons donc $\mathbf{P}\left(\overline{A_1}\right) = 1$
   → Regardons $\mathbf{P}\left(\overline{A_2}/\overline{A_1}\right)$
   On sait que nous avons $\overline{A_1}$, ce qui veut dire qu'à l'époque $t = 1$, la puce n'est pas sur le point O, mais sur les points A, B ou C ; et à $t = 2$, elle n'est toujours pas en O
   Donc $\mathbf{P}\left(\overline{A_2}/\overline{A_1}\right) = \dfrac{2}{3}$

→ De manière générale, si $\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_{k-1}}$ est réalisé, ceci veut dire qu'au temps $t = k-1$, la puce n'est pas en O, mais sur les points A, B ou C et donc $\mathbf{P}\left(\overline{A_k} / \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_{k-1}}\right) = \dfrac{2}{3}$

→ Plus loin, nous avons, cette fois-ci, et de manière évidente $\mathbf{P}\left(A_n / \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_{n-1}}\right) \dfrac{1}{3}$

→ Donc :

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\left(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_{n-1}} \cap A_n\right) \\ = \mathbf{P}\left(\overline{A_1}\right) \times \mathbf{P}\left(\overline{A_2} / \overline{A_1}\right) \times \mathbf{P}\left(\overline{A_3} / \overline{A_1} \cap \overline{A_2}\right) & \times \cdots \times \mathbf{P}\left(A_n / \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_{n-1}}\right) \\ & = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} \times \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Ainsi, la probabilité pour que la puce revienne en O, pour la première fois, au temps $t = n$ est $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-2} \dfrac{1}{3}$

2. L'événement « La puce revient en O » est donné par $B = \bigcup\limits_{n \geqslant 2} A_n$.

   Et donc $\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}\left(\bigcup\limits_{n \geqslant 2} A_n\right) = \sum\limits_{n \geqslant 2} \mathbf{P}(A_n) = \sum\limits_{n \geqslant 2} \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-2} \dfrac{1}{3}$

   Or :

$$\sum_{n \geqslant 2} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \sum_{n \geqslant 2} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} = \frac{1}{3} \sum_{n \geqslant 0} \left(\frac{2}{3}\right)^{n} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 1$$

   Ainsi, presque sûrement, la puce revient en O.

Exercice 3 :

Un questionnaire à choix multiples propose m réponses pour chaque question. Soit p la probabilité qu'un étudiant connaisse la réponse à une question donnée. S'il ignore la réponse, il choisit au hasard l'une des réponses proposées. Quelle est pour le correcteur la probabilité qu'un étudiant connaisse vraiment la bonne réponse lorsqu'il l'a donnée ?

Exercice 4 :

Un test sanguin a une probabilité de 0.95 de détecter un certain virus lorsque celui ci est effectivement présent. Il donne néanmoins un faux résultat positif pour 1% des personnes non infectées. Si 0.5% de la population est porteuse du virus, quelle est la probabilité qu'une personne ait le virus sachant qu'elle a un test positif ?

Exercice 5 :

Cet exercice, qui ne pose aucune difficulté, se veut être une approche du paragraphe suivant
Soit $\{\Omega; \mathcal{F}; \mathbf{P}\}$ un espace probabolisé, $A \in \mathcal{F}$ et $B \in \mathcal{F}$ tels que $\mathbf{P}(A) \neq 0$ et $\mathbf{P}(B) \neq 0$
Montrez que les trois égalités suivantes sont équivalentes :

1. $\mathbf{P}(B|A) = \mathbf{P}(B)$
2. $\mathbf{P}(A|B) = \mathbf{P}(A)$
3. $\mathbf{P}(A|B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$

16.4 Notion d'indépendance

16.4.1 Définition

Soit $\{\Omega; \mathcal{F}; \mathbf{P}\}$ un espace probabilisé.
Deux événements $A \in \mathcal{F}$ et $B \in \mathcal{F}$ sont dits indépendants si et seulement si :

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) \times \mathbf{P}(B)$$

16.4.2 Proposition

Soit $\{\Omega; \mathcal{F}; \mathbf{P}\}$ un espace probabilisé, $A \in \mathcal{F}$ et $B \in \mathcal{F}$ tel que $\mathbf{P}(B) \neq 0$
Alors $A \in \mathcal{F}$ et $B \in \mathcal{F}$ sont indépendants si et seulement si : $\mathbf{P}(A/B) = \mathbf{P}(A)$

Démonstration

1. Supposons A et B indépendants,
   Alors $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) \times \mathbf{P}(B)$ et donc
   $$\mathbf{P}(A/B) = \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)} = \frac{\mathbf{P}(A) \times \mathbf{P}(B)}{\mathbf{P}(B)} = \mathbf{P}(A)$$
2. Réciproquement, supposons $\mathbf{P}(A/B) = \mathbf{P}(A)$;
   Nous avons, toujours $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A/B) \times \mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A) \times \mathbf{P}(B)$
   Les événements A et B sont donc indépendants.

Exemple 5 :

On jette deux fois le même dé. Les événements

$$A = \{\text{Nous obtenons un chiffre pair au premier lancer}\} \text{ et } B = \{\text{Nous obtenons 1 au second lancer}\}$$

sont indépendants.

En effet
L'espace fondamental est, ici, $\Omega = \{(i, j) \text{ avec } 1 \leqslant i \leqslant 6 \text{ et } 1 \leqslant j \leqslant 6\}$
Nous avons Card $\Omega = 36$.
Nous choisissons $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ et pour probabilité $\mathbf{P}$, la probabilité uniforme sur Ω
Clairement, $A = \{(2, j), (4, j), (6, j) \text{ avec } 1 \leqslant j \leqslant 6\}$; Card $A = 18$ et $\mathbf{P}(A) = \dfrac{18}{36} = \dfrac{1}{2}$.
De même, $B = \{(i, 1) \text{ avec } 1 \leqslant 6 \leqslant 6\}$; Card $B = 6$ et $\mathbf{P}(B) = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$
Nous avons alors $A \cap B = \{(2, 1); (4, 1); (6, 1)\}$, d'où

$$\text{Card } (A \cap B) = 3 \text{ et } \mathbf{P}(A \cap B) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

Nous avons bien $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) \times \mathbf{P}(B)$ et les événements A et B sont indépendants

Exemple 6 :

Si $A \in \mathcal{F}$ et $B \in \mathcal{F}$ sont tels que $\mathbf{P}(A) \neq 0$,$\mathbf{P}(B) \neq 0$ et $A \cap B = \emptyset$, alors, A et B ne sont pas indépendants puisque $\mathbf{P}(A \cap B) = 0$ alors que $\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B) \neq 0$; nous n'avons donc pas $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) \times \mathbf{P}(B)$. Ainsi, 2 événements incompatibles A et B (c'est à dire tels que $A \cap B = \emptyset$) et tels que $\mathbf{P}(A) \neq 0$ et $\mathbf{P}(B) \neq 0$ ne sont jamais indépendants

Exercice 6 :

1. Soient $\{\Omega; \mathcal{F}; \mathbf{P}\}$ un espace probabilisé et deux événements $A \in \mathcal{F}$ et $B \in \mathcal{F}$ indépendants ; montrer que $\overline{A}$ et B sont indépendants, ainsi que $\overline{A}$ et $\overline{B}$
2. Montrer que 2 événements $A \in \mathcal{F}$ et $B \in \mathcal{F}$ sont indépendants si et seulement si $\mathbf{P}(A/B) = \mathbf{P}\left(A/\overline{B}\right)$

Remarque 4 :

L'indépendance de deux événements A et B n'est pas une propriété intrinsèque aux événements, elle est toujours relative au modèle $\{\Omega; \mathcal{F}; \mathbf{P}\}$ qui a été choisi.

Illustration par un exemple

$\Rightarrow$ *Une urne contient 12 boules numérotées de 1 à 12. On en tire une au hasard et on considère les événements :*

$$A = \{\textit{Tirage d'un nombre pair}\} \text{ et } B = \{\textit{Tirage d'un multiple de 3}\}$$

L'espace probabilisé qui s'impose naturellement ici est $\Omega = \{1, \ldots, 12\}$ muni de la probabilité uniforme. Les événements A et B s'écrivent : $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$, $B = \{3, 6, 9, 12\}$ et $A \cap B = \{6, 12\}$.

Ainsi, $\mathbf{P}(A) = \dfrac{6}{12} = \dfrac{1}{2}$, $\mathbf{P}(B) = \dfrac{4}{12} = \dfrac{1}{3}$ et $\mathbf{P}(A \cap B) = \dfrac{2}{12} = \dfrac{1}{6}$.

Nous avons donc $\mathbf{P}(A \cap B) = \dfrac{1}{6} = \mathbf{P}(B) \times \mathbf{P}(A)$ et A et B sont indépendants.

$\Rightarrow$ *On rajoute maintenant dans l'urne une boule numérotée treize et on recommence l'expérience*

Si les événements A et B restent les mêmes, **le modèle a changé**.

Nous avons toujours les mêmes événements $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$, $B = \{3, 6, 9, 12\}$ et $A \cap B = \{6, 12\}$, mais l'espace fondamental Ω_1 a changé. Nous avons $\Omega_1 = \{1, \ldots, 12, 13\}$, de telle sorte que $\mathbf{P}(A) = \dfrac{6}{13}$, $\mathbf{P}(B) = \dfrac{4}{13}$ et $\mathbf{P}(A \cap B) = \dfrac{2}{13}$

Nous avons $\mathbf{P}(A \cap B) \neq \mathbf{P}(B) \times \mathbf{P}(A)$ et A et B **ne sont pas indépendants.**

16.4.3 Définition d'événements indépendants dans leur ensemble

Soit $\{\Omega; \mathcal{F}; \mathbf{P}\}$ un espace probabilisé

1. Soient $A_1, \ldots, A_n$, n événements de $\mathcal{F}$.
   On dit que $A_1, \ldots, A_n$ sont indépendants dans leur ensemble (ou mutuellement indépendants ou totalement indépendants), si, pour tout sous-ensemble $I \subset \{1, \ldots, n\}$, $\mathbf{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} \mathbf{P}(A_i)$
2. Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements de $\mathcal{F}$. On dit que ces événements sont mutuellement indépendants si et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille d'événements $A_1, \ldots, A_n$, sont mutuellement indépendants

Remarque 5 :

1. Si $E_1, \ldots, E_n$ sont n événements totalement indépendants, alors
$$\mathbf{P}(E_1 \cap E_2 \cap \ldots \cap E_n) = \mathbf{P}(E_1) \times \mathbf{P}(E_2) \times \cdots \times \mathbf{P}(E_n)$$
2. Si n événements sont indépendants dans leur ensemble alors, ils le sont 2 à 2, mais la réciproque est fausse, comme on peut le voir dans l'exercice ci-dessous.

Exercice 7 :

On jette 2 dés à 6 faces non truqués et on considère les événements suivants :

- $\triangleright$ $A_1 = \{\text{le premier dé donne un nombre pair}\}$
- $\triangleright$ $A_2 = \{\text{le second dé donne un nombre pair}\}$
- $\triangleright$ $A_3 = \{\text{la somme des dés donne un nombre pair}\}$

Montrer que A_1 et A_2 sont indépendants, que A_1 et A_3 sont indépendants, que A_3 et A_2 sont indépendants, mais que A_1 et A_2 et A_3 ne sont pas indépendants dans leur ensemble.

16.4.4 Epreuve de Bernouilli

On appelle épreuve de Bernouilli, une expérience aléatoire pour laquelle Ω a 2 éléments

Remarque 6 :

1. Si $\Omega = \{a; b\}$, il suffit de connaître $\mathbf{P}(\{a\}) = p$ et donc, $\mathbf{P}(\{b\}) = 1 - p = q$
2. Le schéma de Bernouilli est adapté aux expériences dans lesquelles il n'y a que deux issues possibles : **Echec** ou **succès**

16.4.5 Loi Binômiale

Soit $\Omega = \{a, b\}$ un univers associé à une épreuve de Bernouilli ; on pose $\mathbf{P}(\{a\}) = p$ et $\mathbf{P}(\{b\}) = 1 - p = q$.
L'événement $\{a\}$ est considéré comme un succès.
L'univers associé à la répétition de n épreuves de Bernouilli, identiques et indépendantes est le produit cartésien $\Omega^n = (\{a, b\})^n$
La probabilité pour obtenir k succès (ou k fois $\{a\}$) est $\mathrm{C}_n^k p^k (1-p)^{n-k} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

Démonstration

On étudie pour le cas particulier $n = 3$ Imaginez que l'on répète trois fois la même opération qui n'a que deux choix : réussite ou succès. Combien de possibilités d'événements avons nous ? Bien évidemment : 2^3
L'évenement " avoir deux succès " est donné par : $\{(a, a, b) ; (a, b, a) ; (b, a, a)\}$; chacun des événements élémentaire de " avoir deux succès " a pour probabilité p^2q ; donc, $\mathbf{P}(\{\text{avoir deux succès}\}) = 3p^2q$

Cas général Un événement élémentaire ω d'une répétition de n épreuves de Bernouilli identiques et indépendantes est donné par une succession de $\{a\}$ ou de $\{b\}$; on a donc

$$\omega = (a, b, b, a, \ldots, b, b, a)$$

où ω est un " mot " de longueur n
Nous avons donc un espace fondamental E défini par :

$$E = \{\omega = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \text{ où } y_i \in \{a, b\}\}$$

C'est à dire $E = \Omega^n$ E est donc l'ensemble des suites finies d'éléments de $\{a, b\}$
L'évenement " avoir k succès " est donné par : $\{(a, a, \ldots, b) ; \ldots ; (a, \ldots, b, a) ; (b, a, \ldots, a)\}$; où les mots ω ont une longueur de n chacun des événements élémentaires de « avoir $k$succès »a pour probabilité $p^k q^{n-k}$.
Avoir k succès, c'est placer k $\{a\}$ dans n emplacements, et il y a C_n^k façons de le faire, donc,

$$\mathbf{P}(\{\text{avoir } k \text{ succès}\}) = \mathrm{C}_n^k p^k q^{n-k}$$

Exemple 7 :

On réalise une séquence infinie d'épreuves de Bernouilli indépendantes. Chaque épreuve donne soit un succès avec la probabilité p, soit un échec avec la probabilité $1 - p$
Quelle est la probabilité pour que :

1. *Il survienne au moins un succès parmi les n premières épreuves*
2. *Qu'il survienne exactement k succès parmi les n premières épreuves*
3. *Que toutes les épreuves donnent un succès*

Résolution

1. **Quelle est la probabilité pour qu'il survienne au moins un succès parmi les n premières épreuves**
Comme souvent, dans de tels problèmes, nous allons nous intéresser à l'événement contraire : ≪ Il n'y a aucun succès pendant les n épreuves ≫
Considérons l'événement $E_i = \{\text{la } i\text{-ème épreuve donne un échec}\}$; alors l'événement ≪ Il n'y a aucun succès pendant les n épreuves ≫est donné par : $E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_n = \bigcap\limits_{i=1}^{n} E_i$, et
$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} E_i\right) = \mathbf{P}\left(E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_n\right) \overset{\text{Indépendance}}{=} \mathbf{P}\left(E_1\right) \times \mathbf{P}\left(E_2\right) \times \cdots \mathbf{P}\left(E_n\right) = (1-p)^n$$
Ainsi, la probabilité pour qu'il survienne au moins un succès parmi les n premières épreuves est $1 - (1-p)^n$
2. **Quelle est la probabilité pour qu'il survienne exactement k succès parmi les n premières épreuves**
La résolution de cette question est une autre démonstration du théorème 16.4.5
Considérons une séquence de n épreuves qui comprennent k succès, et donc $n-k$ échecs, ces échecs et ces succès apparaissants dans un ordre bien précis. Cette séquence apparaîtra avec la probabilité $p^k (1-p)^{n-k}$. Comme il y a $\binom{n}{k}$ telles séquences qui sont les façons de placer k succès et $n-k$ échecs parmi n épreuves.
La probabilité demandée est donc $\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$
3. **Quelle est la probabilité pour que toutes les épreuves donnent un succès**
L'événement ≪ Toutes les épreuves donnent un succès ≫ peut se traduire par :
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\overline{E_n}$ est réalisé, et en termes ensemblistes, cet événement se traduit par : $\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} \overline{E_n}$
Considérons l'événement $X_n = \bigcap\limits_{k=1}^{n} \overline{E_n}$ qui est l'événement ≪ **n'avoir que des succès lors des n premières épreuves** ≫ ; la probabilité de X_n est donnée par :
$$\mathbf{P}\left(X_n\right) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} \overline{E_n}\right) \overset{\text{Indépendance}}{=} \mathbf{P}\left(\overline{E_1}\right) \times \mathbf{P}\left(\overline{E_2}\right) \times \cdots \times \mathbf{P}\left(\overline{E_n}\right) = p^n$$
D'autre part, nous avons $X_{n+1} \subset X_n$, car, **si** nous n'avons que des succès lors des $n+1$ premières épreuves **alors** nous n'avons que des succès lors des n premières épreuves.
L'événement ≪ Toutes les épreuves donnent un succès ≫ se traduisant par : $\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} \overline{E_n} = \bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} X_n$, d'après la proposition 15.3.4,
$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} X_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(X_n\right) = \lim_{n\to\infty} p^n = \begin{cases} 0 \text{ si } p < 1 \\ 1 \text{ si } p = 1 \end{cases}$$

16.5 Exercices

Exercice 8 :

On considère des nombres décimaux a et b appartenant à l'intervalle $]0, 1[$, tels que $10a$ et $10b$ sont des nombres entiers. Une <u>urne rouge</u> contient $10a$ boules rouges et $10(1-a)$ boules noires et une <u>urne noire</u> contient $10b$ boules rouges et $10(1-b)$ boules noires.
Les boules étant indiscernables les unes des autres, on effectue une suite de tirages au hasard d'une boule dans l'une des deux urnes selon les règles suivantes :

— Le premier tirage a lieu dans l'une des deux urnes prise au hasard *(On admet l'équiprobabilité.)*
— Après chaque tirage dans une urne, la boule est remise dans la même urne ;
— Pour tout nombre entier naturel n, le $n+1$-ième tirage a lieu dans l'urne de la couleur de la boule tirée au n-ième tirage.

Pour tout nombre entier strictement positif n, on désigne par R_n l'évènement

$$\ll \underline{\text{On tire une boule rouge au } n\text{-ième tirage}} \gg$$

Et par N_n l'évènement

$$\ll \underline{\text{On tire une boule noire au } n\text{-ième tirage}} \gg$$

1. Calculer les probabilités $\mathbf{P}(R_1)$ et $\mathbf{P}(N_1)$
2. Expliquer pourquoi, pour tout entier naturel n strictement supérieur à 1,nous avons :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P}(R_n) \\ \mathbf{P}(N_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 1-a & 1-b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{P}(R_{n-1}) \\ \mathbf{P}(N_{n-1}) \end{pmatrix}$$

Exercice 9 :

Le gérant d'un magasin d'informatique a reçu un lot de boites de CD-ROM. 5% de ces boîtes sont abîmées. Le gérant estime que :
— 60% des boîtes abîmées contiennent au moins un CD-ROM défectueux.
— 98% des boîtes non abîmées ne contiennent aucun CD-ROM défectueux.

Un client achète une boite du lot. On désigne par A l'événement : ≪ La boite est abimée ≫ et par B l'événement ≪ La boite achetée contient au moins un disque défectueux ≫.

Exercice 10 :

Une compagnie d'assurance répartit ses clients en trois classes de risques :
— $R1$ est la classe des ≪ bons risques ≫
— $R2$ est la classe des ≪ risques moyens ≫
— $R3$ est la classe des ≪ mauvais risques ≫

Les effectifs de ces trois classes représentent
— 20% de la population totale pour la classe $R1$
— 50% pour la classe $R2$
— 30% pour la classe $R3$

Les statistiques indiquent que les probabilités d'avoir un accident au cours de l'année pour une personne de l'une de ces trois classes sont respectivement de 0,05, 0,15 et 0,30.

Exercice 11 :

Soit $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}\}$ un espace probabilisé.
Soient A et B deux événements tels que

$$\mathbf{P}(A) = \frac{2}{3} \text{ et } \mathbf{P}(B) = \frac{5}{6}$$

1. Démontrez que $\mathbf{P}(A \cap B) \geqslant \dfrac{1}{2}$
2. Les événements A et B sont-ils incompatibles ?
3. On suppose $\mathbf{P}(A \cap B) = \dfrac{5}{9}$.
   (a) Les événements A et B sont-ils indépendants ?
   (b) Donner $\mathbf{P}(A/B)$

Exercice 12 :

Soit $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}\}$ un espace probabilisé.
Soient A et B deux événements tels que

$$\mathbf{P}(A) = \frac{1}{3} \text{ et } \mathbf{P}(B) = \frac{1}{2}$$

Calculer $\mathbf{P}(A \cup B)$ dans chacun des cas suivants :

1. A et B sont des événements incompatibles
2. A et B sont des événements indépendants
3. L'événement A implique l'événement B.
4. $\mathbf{P}(A/B) = \dfrac{1}{2}$

Exercice 13 :

Soit $\{\Omega; \mathcal{F}; \mathbf{P}\}$ un espace probabilisé et A et B deux éléments de $\mathcal{F}$. Montrer que :

1. Si $\mathbf{P}(A) = 1$, alors, il est indépendant de lui-même
2. Si $\mathbf{P}(A) = 0$, alors, il est indépendant de tout événement
3. Si A est indépendant de lui-même, alors $\mathbf{P}(A) = 1$ ou $\mathbf{P}(A) = 0$
4. Si A et$B$ sont tels que $\mathbf{P}(A) = 0$ et $\mathbf{P}(B) = 0$, alors $\mathbf{P}(A \cup B) = 0$
5. Si A et$B$ sont indépendants et disjoints, alors $\mathbf{P}(A) = 0$ ou $\mathbf{P}(B) = 0$.

Exercice 14 :

Soit $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}\}$ un espace probabilisé

1. Soit $A \in \mathcal{F}$ tel que $\mathbf{P}(A) > 0$; On appelle $\mathbf{P}^A$ la probabilité conditionnelle sachant A.
   Soit $B \in \mathcal{F}$ tel que $\mathbf{P}^A(B) > 0$; démontrer que $\mathbf{P}^A(X/B) = \dfrac{\mathbf{P}^A(X \bigcap B)}{\mathbf{P}^A(B)} = \mathbf{P}(X/B \cap A)$
2. Démontrer que pour tout événement $A \in \mathcal{F}$, $B \in \mathcal{F}$ et $C \in \mathcal{F}$

$$\mathbf{P}(A \cap B/C) = \mathbf{P}(A/C)\,\mathbf{P}(B/A \cap C)$$

Exercice 15 :

$\{\Omega; \mathbb{F}; \mathbf{P}\}$ est un espace probabilisé, et A et B 2 événements de probabilité respective $\mathbf{P}(A)$ et $\mathbf{P}(B)$.

1. Calculer la probabilité de $\mathbf{P}\left(\left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(\overline{A} \cap B\right)\right)$, en fonction de $\mathbf{P}(A)$, $\mathbf{P}(B)$ et $\mathbf{P}(A \cap B)$
2. On suppose $\mathbf{P}(B) \neq 0$; montrer que $\mathbf{P}(A/B) + \mathbf{P}\left(\overline{A}/B\right) = 1$

Exercice 16 :

Un joueur a le choix entre les deux paris suivants :

1°pari : Jeter 6 dés, et gagner s'il "sort" au moins un as

2°pari : Jeter 12 dés, et gagner s'il "sort" au moins deux as

Calculez la probabilité de gagner dans chaque cas, les issues possibles étant supposées équiprobables.

Exercice 17 :

Assume that E and F are two events with positive probabilities. Show that if $\mathbf{P}(E|F) = \mathbf{P}(E)$, then $\mathbf{P}(F|E) = \mathbf{P}(F)$

Exercice 18 :

Le roi vient d'une famille de 2 enfants ; quelle est la probabilité pour que l'autre enfant soit sa soeur ?

Exercice 19 :

Let $\Omega = \{a, b, c, d, e, f, \}$. Assume that $\mathbf{P}(a) = \mathbf{P}(b) = 1/8$ and $\mathbf{P}(c) = \mathbf{P}(d) = \mathbf{P}(e) = \mathbf{P}(f) = 3/16$. Let A, B, and C be the events $A = \{d, e, a\}$, $B = \{c, e, a\}$, $C = \{c, d, a\}$.
Show that $\mathbf{P}(A \cap B \cap C) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)\mathbf{P}(C)$ but no two of these events are independent.

Exercice 20 :

Une population d'une ville compte 48% d'hommes et 52% de femmes ; on sait que 5% des hommes et 3% des femmes sont atteint d'une maladie M.

1. Quelle est la proportion de personnes de la ville atteint de la maladie M ?
2. On prend une personne au hasard, et on constate qu'elle est atteinte de la maladie M ; quelle est la probabilité pour que ce soit une femme ?

Exercice 21 :

La firme Computex a déposé auprès du ministère de l'Education Nationale deux cahiers de charge séparés pour la fourniture de mobilier informatique et de micro-ordinateurs. L'entreprise estime à 60% ses chances d'obtenir le contrat de fourniture de mobilier informatique. Si ce contrat lui est alloué, la firme évalue ses chances à 2 sur 3 d'obtenir le contrat des micro-ordinateurs. Toutefois, si le contrat de fourniture de mobilier informatique lui échappe, elle estime quand même à 30% ses chances de se voir octroyer le contrat des micro-ordinateurs.

1. Quelle est la probabilité pour que Computex obtienne les deux contrats ?
2. Quelle est la probabilité que Computex n'obtienne que le contrat des microordinateurs ?
3. Quelle est la probabilité que Computex obtienne le contrat des micro-ordinateurs (qu'il ait obtenu ou non le contrat de fourniture de mobilier informatique) ?
4. Computex vient d'annoncer qu'il a obtenu le marché des micro-ordinateurs. Quelle est la probabilité qu'il ait obtenu celui du mobilier informatique ?

Exercice 22 :

Dans une population on sait que la probabilité de naissance d'un garçon est de 0,52, que par ailleurs que 2% des filles et 1% des garçons présentent une luxation congénitale de la hanche.

1. On note F l'évènement $F = \{\text{Naissance d'une fille}\}$ et L l'évènement $L = \{\text{Avoir une luxation de la hanche}\}$. Les évènements F et L sont-ils indépendants ?
2. Calculer la probabilité pour qu'un nouveau-né présentant une luxation soit une fille.

Exercice 23 :

Un système composé de n modules est dit être un $k \lhd n$ système si et seulement si le système fonctionne si au moins k ($k \leqslant n$) modules sur les n sont en état de fonctionner.
On suppose que tous les modules fonctionnent de manière indépendante les uns des autres avec la même probabilité p.

1. Calculer la probabilité pour qu'un système $2 \lhd 4$ fonctionne
2. Même question pour un système $3 \lhd 5$
3. Généraliser pour un système $k \lhd n$

Exercice 24 :

La probabilité pour qu'une machine tombe en panne au cours d'un mois est $p = 0,06$; une entreprise possède 10 machines de ce type. Quelle est la probabilité pour qu'au cours du prochain mois,

1. Toutes les machines tombent en panne
2. Au moins 2 machines tombent en panne

Exercice 25 :

Critiquer le raisonnement suivant :
En lançant une fléchette, j'ai une chance sur deux d'atteindre la cible, donc, en lançant la fléchette deux fois, j'atteindrai la cible à coup sûr.

Exercice 26 :

On lance 2 dés distincts numérotés de 1 à 6 ; soient x_1 et x_2 les nombres fournis par ces 2 dés

1. Calculez $\mathbf{P}(\{x_1 + x_2 = 5\})$ et $\mathbf{P}(\{x_1 + x_2 = 7\})$
2. Si on lance les 2 dés 3 fois de suite, quelle est la probabilité pour que $y = x_1 + x_2$ prenne au moins une fois la valeur 5 et une fois la valeur 7

Exercice 27 :

1. On lance deux dés cubiques numérotés de 1 à 6, et nous considérons la somme amenée par ce lancer. On appelle A l'événement $A = \{\text{La somme amenée est 6}\}$, et B l'événement $B = \{\text{La somme amenée est 7}\}$.
   Donner $\mathbf{P}(A)$ et $\mathbf{P}(B)$
2. Lénaïg et Erwann jouent au jeu suivant :

   On lance 2 dés cubiques ; pour gagner, Lénaïg doit obtenir 6 exactement, et pour gagner, Erwann doit obtenir 7 exactement.

   Si aucun des deux n'a gagné, on recommence à jouer

   C'est Lénaïg qui commence à jouer *(ce qui veut dire Lénaïg joue à tous les lancers impairs, et que Erwann joue à tous les lancers pairs)*.

   Les lancers sont bien entendu supposés tous indépendants les uns des autres.

   On appelle A_k l'événement :$A_k = \{$ Lénaïg gagne au *k-ième* lancer$\}$ et B_k l'événement : $B_k = \{$Erwann gagne au *k-ième* lancer$\}$

   En écrivant les événements A_k et B_k sous forme d'intersection et de complémentation, calculer $\mathbf{P}(A_k)$ et $\mathbf{P}(B_k)$
3. Ecrire les événements {Lénaïg gagne} et {Erwann gagne}
4. En déduire $\mathbf{P}(\{\text{Lénaïg gagne}\})$ et $\mathbf{P}(\{\text{Erwann gagne}\})$

Exercice 28 :

Un laboratoire a mis au point un alcool-test. Les premiers résultats sont les suivants :
- 2% des personnes contrôlées par la police sont réellement en état d'ébriété
- 95 fois sur 100 l'alcool-test s'est révélé positif, alors qu'une personne était réellement en état d'ébriété.
- 95 fois sur 100 l'alcool-test s'est révélé négatif, alors qu'une personne n'était pas en état d'ébriété

1. Une personne est contrôlée par la police ; quelle est la probabilité pour que le test soit positif ?
2. Calculez la probabilité pour qu'une personne ne soit pas en état d'ébriété sachant que le test est positif.
3. Calculez la probabilité pour qu'une personne soit en état d'ébriété sachant que le test est négatif.

Exercice 29 :

On lance n dés non pipés ; A_n l'événement : $A_n = \{\text{Le total des numéros amenés est pair}\}$; montrer que la suite $(\mathbf{P}(A_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite constante.

Exercice 30 :

1. On considère les suites numériques réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = au_n + b \end{cases}$$

avec $a \neq 1$

   (a) Démontrez que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = u_n - \dfrac{b}{1-a}$ est une suite géométrique de raison a

   (b) En déduire que

$$u_n = a^n\left(u_0 - \frac{b}{1-a}\right) + \frac{b}{1-a}$$

2. On s'intéresse à la transmission d'un information binaire, c'est à dire d'une information ne pouvant prendre que 2 valeurs : 0 ou 1
On admet que le procédé de transmission entre 2 individus A et B *(ou encore, entre 2 "stations" A et B)* est tel que, lorsque A émet une valeur de l'information à destination de B, B reçoive cette information avec la probabilité p, et donc l'autre information avec la probabilité $q = 1 - p$; on a, bien entendu, $p \in]0, 1[$.
Soit $n \in \mathbb{N}$
On considère $n + 1$ individus successifs : $i_0, i_1, \ldots, i_n$
L'information émise par i_0 à destination de i_1 est elle-même transmise par i_1 à i_2, et ainsi de suite jusqu'à i_n.
Pour $k \in \{1, \cdots, n\}$, on note A_k l'événement

$$A_k = \{\text{L'individu } i_k \text{ reçoit la même information que celle émise par } i_0\}$$

et p_k est la probabilité $\mathbf{P}(A_k)$; on pose $p_0 = 1$

   (a) En écrivant $A_{k+1} = A_{k+1} \cap \left(A_k \cup \overline{A_k}\right)$, exprimer p_{k+1} en fonction de p_k

   (b) En déduire l'expression de p_n en fonction de n et p.

   (c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$. Que conclure ?

Exercice 31 :

Chaîne de Markov [1]

Monsieur IKCX, possède depuis plusieurs années un téléphone portable. Il étudie l'évolution de sa consommation sur plusieurs mois. Pour $n \in \mathbb{N}$, on appelle A_n l'événement

$$A_n = \{\text{Monsieur IKCX dépasse son forfait au mois N° } n\}$$

Nous avons, pour $n > 1$:

$$\begin{cases} \mathbf{P}(\{A_n/A_{n-1}\}) = \dfrac{1}{5} \\ \mathbf{P}\left(\{A_n/\overline{A_{n-1}}\}\right) = \dfrac{2}{5} \\ \mathbf{P}(\{A_1\}) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Nous posons ensuite $\mathbf{P}(\{A_n\}) = a_n$ et $V_n = \begin{pmatrix} a_n \\ 1 - a_n \end{pmatrix}$

1. Démontrer que $V_{n+1} = MV_n$ où M est la matrice $M = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$. M est appelée **matrice stochastique** ou **matrice de transition**

1. Les chaînes de Markov seront mieux étudiées dans le chapitre **??**

2. Démontrer que $V_n = M^{n-1}V_1$
3. On pose $P = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ avec $a+b=1$; Résoudre l'équation $P = M \times P$; on dit que P est le vecteur de probabilité invariant par M
4. D'après la question 1 nous avons la relation : $a_{n+1} = \dfrac{-1}{5}a_n + \dfrac{2}{5}$
   Donner $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$; faire le lien avec la question 3

Exercice 32 :

Une pièce de monnaie amène " pile " avec la probabilité p et " face " avec la probabilité $q = 1-p$; on lance indéfiniment cette pièce, et les lancers successifs sont indépendants.

1. A_n est l'événement : $A_n = \{$"pile" sort pour la 1ère fois au n-ième lancer$\}$; Calculer $(\mathbf{P}(A_n))_{n\in\mathbb{N}}$
2. Soit B l'événement : $B = \{$On obtient "pile"$\}$ Montrer que cet événement est quasi-certain
3. Soit C l'événement :
   $$C = \{\text{On obtient "pile" pour la première fois au bout d'un nombre pair de lancers}\}$$
   Montrer que $C = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} A_{2k}$ et calculez $\mathbf{P}(C)$
4. Soit D l'événement :
   $$D = \{\text{On obtient "pile" pour la première fois au bout d'un nombre de lancers multiple de 3}\}$$
   Calculez $\mathbf{P}(D)$
5. Les événements C et D sont-ils indépendants ?

Exercice 33 :

On effectue des tirages dans une urne contenant initialement a boules blanches et b boules noires de la façon suivante :

On remet à chaque fois la boule tirée à laquelle on ajoute c boules de même couleur

1. Calculer la probabilité pour obtenir la **première** boule blanche au n-ième tirage *(utiliser l'événement $N_j = \{$On amène une boule noire au j-ème tirage$\}$)*
2. Soit C_m l'événement $C_m = \{$Les m premiers tirages amènent m boules noires$\}$. Exprimer C_m en fonction des N_j et donner $\mathbf{P}(C_m)$ sous forme de somme.
   Démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(\mathbf{P}(C_m)) = -\infty$
3. Soit C l'événement $C = \{$Il n'apparaît que des boules noires$\}$. Exprimer C en fonction des $(C_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ puis, conclure que $\mathbf{P}(C) = 0$.
4. Quelle est la valeur de $\sum\limits_{n\geqslant 1}\mathbf{P}(A_n)$. Interpréter ce résultat

Exercice 34 :

La ruine du joueur
Un joueur joue une série de manches indépendantes *(Dés, « Pile ou Face », etc....)*

- ▷ A chaque manche, il gagne 1€ avec la probabilité p et perd 1 € avec la probabilité $1-p$
- ▷ Le jeu s'arrête lorsque le joueur a gagné N € ou lorsqu'il est ruiné.

Nous notons u_k la probabilité qu'a le joueur d'être ruiné lorsqu'il possède k € au départ

1. On suppose $p \neq \dfrac{1}{2}$
   (a) Calculer u_0 et u_N

(b) Montrer que $u_k = pu_{k+1} + (1-p)\, u_{k-1}$

(c) En déduire que $u_k = \dfrac{\left(\frac{1-p}{p}\right)^k - \left(\frac{1-p}{p}\right)^N}{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^N}$

(d) Que se passe-t-il lorsque N tend vers $+\infty$

2. Reprendre les questions précédentes avec $p = \dfrac{1}{2}$

Exercice 35 :

Voici un exercice classique qui ne devrait poser aucune difficulté
Une urne U_1 contient une boule noire et cinq boules blanches.
Une urne U_2 contient quatre boules noires et deux boules blanches.
On tire une boule au hasard d'une des deux urnes. On note la couleur de la boule et on la replace dans l'urne.
Si la boule est blanche on effectue un autre tirage dans la même urne, sinon on tire une seconde boule dans l'autre urne.
On répète cette expérience une infinité de fois.
Soient A_n l'événement :

$$A_n = \{\text{Le } n\text{-ième tirage a lieu dans l'urne } U_1\}$$

et B_n l'événement :

$$B_n = \{\text{Le } n\text{-ième tirage amène une boule blanche}\}$$

1. (a) Calculer les probabilités conditionnelles $\mathbf{P}\left(A_n / A_{n-1}\right)$ et $\mathbf{P}\left(A_n / \overline{A_{n-1}}\right)$

   (b) Soit $p_n = \mathbf{P}\left(A_n\right)$. Etablir une relation de récurrence entre p_n et p_{n-1} et en déduire p_n

2. Soit $q_n = \mathbf{P}\left(B_n\right)$

   (a) Exprimer q_n en fonction de p_n

   (b) Calculer q_n

Exercice 36 :

Cet exercice vient en complément de la proposition 15.3.8 sur **le lemme de BOREL-CANTELLI**

1. Dans cette proposition, nous affirmions que, si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements d'un espace probabilisé $\{\Omega; \mathcal{F}; \mathbf{P}\}$ tels que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \mathbf{P}\left(A_n\right)$ converge, et si

$$B = \{\text{Une infinité d'événements } A_n \text{ se réalisent}\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(\bigcup_{p\geqslant n} A_p \right)$$

   alors, $\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}\left(\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \left(\bigcup\limits_{p\geqslant n} A_p \right) \right) = 0$
   En d'autres termes, **P**-presque sûrement, seuls un nombre fini d'événements A_n se produisent, autrement dit $\mathbf{P}\left(\overline{B}\right) = \mathbf{P}\left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \left(\bigcap\limits_{p\geqslant n} \overline{A_p} \right) \right) = 1$

2. Nous allons compléter la proposition 15.3.8 en supposant maintenant que les événements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont <u>mutuellement indépendants</u>, et que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \mathbf{P}\left(A_n\right)$ diverge, c'est à dire $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{p=0}^{n} \mathbf{P}\left(A_n\right) = +\infty$

   (a) On appelle $E_n = \bigcap\limits_{p\geqslant n} \overline{A_p}$, c'est à dire que $\overline{B} = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n$; montrer que la suite des événements $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, c'est à dire que $E_n \subset E_{n+l}$, et en déduire que $\mathbf{P}\left(\overline{B}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(E_n\right)$

(b) Démontrer que $\mathbf{P}\left(\bigcap_{p\geqslant n} \overline{A_p}\right) = \mathbf{P}(E_n) = \lim_{N\to+\infty} \prod_{p=n}^{N} \mathbf{P}\left(\overline{A_p}\right)$

(c) Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $0 \leqslant x < 1$ nous avons $\ln(1-x) \leqslant -x$; en déduire que :

$$\lim_{N\to+\infty}\left[\ln\left(\prod_{p=n}^{N} \mathbf{P}\left(\overline{A_p}\right)\right)\right] = \lim_{N\to+\infty} \ln\left(\mathbf{P}(F_N)\right) = -\infty$$

(d) Conclure que $\lim_{N\to+\infty} \prod_{p=n}^{N} \mathbf{P}\left(\overline{A_p}\right) = 0$, puis que $\mathbf{P}\left(\overline{B}\right) = 0$

On vient de montrer que si les événements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont mutuellement indépendants, et que la série $\sum_{n\geqslant 0} \mathbf{P}(A_n)$ diverge, alors $\mathbf{P}\left(\bigcap_{p\in\mathbb{N}}\left(\bigcup_{n\geqslant p} A_n\right)\right) = 1$, c'est à dire, que $\mathbf{P}$-presque sûrement, une infinité d'événements A_n se produisent.

3. **Application à un problème de « Pile ou Face »**
On lance une pièce de monnaie indéfiniment. La probabilité pour amener « PILE » est p et celle d'amener « FACE » est $q = 1 - p$

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$; on note A_n l'événement $A_n = \{$« PILE » apparaît au n-ième lancer$\}$ Donner $\mathbf{P}(A_n)$ et en déduire que la série $\sum_{n\geqslant 1} \mathbf{P}(A_n)$ diverge

Conclure que « PILE » apparaît une infinité de fois de façon quasi-certaine.

(b) Soit $m \in \mathbb{N}^*$ On note E_n l'événement :

$$E_n = \{\text{Les lancers } nm+1 \text{ à } nm+m \text{ amènent des PILE uniquement}\}$$

Donner $\mathbf{P}(E_n)$ et en déduire que la série $\sum_{n\geqslant 1} \mathbf{P}(E_n)$ diverge. Conclure que la séquence des m « PILE » consécutifs apparaît une infinité de fois.

4. **Application au mouvement d'une particule**
L'espace $\mathbb{R}^3$ est rapporté à un repère orthonormé $\left\{O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right\}$ et on considère une particule qui se déplace dans cet espace ; on tente de repérer sa position, <u>à temps entiers.</u>

⇒ En $t = 0$, elle est à l'origine O

⇒ En $t = n$, elle se trouve en $M_n = (x_n, y_n, z_n)$ <u>à coordonnées entières</u>.

⇒ En $t = n+1$, elle se trouve en $M_{n+1} = (x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1})$ où x_{n+1} est obtenu à partir de x_n en faisant varier x_n de $+1$ ou de -1 et, de même pour les 2 autres coordonnées.

⇒ La particule se retrouve donc de façon équiprobable à l'un des 8 sommets du cube dont $M_n = (x_n, y_n, z_n)$ est le centre, les mouvements successifs de la particules étants indépendants

(a) ▷ Soit E_n l'événement : $E_n = \{$La particule est dans le plan yOz au temps $t = 2n\}$
▷ Soit F_n l'événement : $F_n = \{$La particule est dans le plan xOz au temps $t = 2n\}$
▷ Soit G_n l'événement : $G_n = \{$La particule est dans le plan xOy au temps $t = 2n\}$
Calculer $\mathbf{P}(E_n)$, $\mathbf{P}(F_n)$ et $\mathbf{P}(G_n)$

(b) Soit A_n l'événement : $A_n = \{$La particule est en O au temps $t = 2n\}$ Calculer $\mathbf{P}(A_n)$

(c) On pose $v_n = \sqrt{n}\binom{2n}{n}\dfrac{1}{4^n}$ pour $n \geqslant 1$

i. Calculer $w_n = \ln\left(\dfrac{v_{n+1}}{v_n}\right)$

ii. Montrer que $w_n \underset{+\infty}{\approx} \dfrac{1}{8n^2}$; en déduire que la série $\sum_{n\geqslant 0} w_n$ converge, puis que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

iii. On pose $l = \lim_{n\to+\infty} v_n$; montrer que $\mathbf{P}(A_n) \underset{+\infty}{\approx} \dfrac{l^3}{n^{\frac{3}{2}}}$

iv. En utilisant le lemme de Borel-Cantelli, montrer que, $\mathbf{P}$-presque sûrement, seul un nombre fini d'événements A_n se produisent. Interpréter le résultat pour la particule.

16.6 Exercices corrigés

Nos ne corrigerons ici que certains exercices

Exercice 3 :

Un questionnaire à choix multiples propose m réponses pour chaque question. Soit p la probabilité qu'un étudiant connaisse la réponse à une question donnée. S'il ignore la réponse, il choisit au hasard l'une des réponses proposées. Quelle est pour le correcteur la probabilité qu'un étudiant connaisse vraiment la bonne réponse lorsqu'il l'a donnée ?

Notons :

$$B = \{\text{L'étudiant donne la bonne réponse}\} \text{ et } C = \{\text{L'étudiant connaît la bonne réponse}\}$$

Nous avons, tout de suite $\mathbf{P}(C) = p$, $\mathbf{P}(B/C) = 1$ et $\mathbf{P}\left(B/\overline{C}\right) = \dfrac{1}{m}$
En fait, nous cherchons $\mathbf{P}(C/B)$.
Nous avons :

$$\mathbf{P}(C/B) = \frac{\mathbf{P}(C\cap B)}{\mathbf{P}(B)} = \frac{\mathbf{P}(B/C)\times\mathbf{P}(C)}{\mathbf{P}(B/C)\times\mathbf{P}(C)+\mathbf{P}\left(B/\overline{C}\right)\times\mathbf{P}\left(\overline{C}\right)} = \frac{p}{p+\frac{1-p}{m}} = \frac{mp}{mp+1-p}$$

Exercice 4 :

Un test sanguin a une probabilité de 0.95 de détecter un certain virus lorsque celui ci est effectivement présent. Il donne néanmoins un faux résultat positif pour 1% des personnes non infectées. Si 0.5% de la population est porteuse du virus, quelle est la probabilité qu'une personne ait le virus sachant qu'elle a un test positif ?

C'est un exercice très classique dont nous retrouverons le thème dans d'autres exercices
Notons $V = \{\text{La personne testée est porteuse du virus}\}$ et $P = \{\text{Le test est positif}\}$
On cherche donc $\mathbf{P}(V|P)$
D'après l'énoncé, on sait que :

$$\mathbf{P}(V) = 0.005 \quad \mathbf{P}(P|V) = 0.95 \quad \mathbf{P}\left(P|\overline{V}\right) = 0.01$$

On en déduit :

$$\mathbf{P}(V|P) = \frac{\mathbf{P}(V\cap P)}{\mathbf{P}(P)} = \frac{\mathbf{P}(P|V)\times\mathbf{P}(V)}{\mathbf{P}(P|V)\times\mathbf{P}(V)+\mathbf{P}\left(P|\overline{V}\right)\times\mathbf{P}\left(\overline{V}\right)} = \frac{0.95\times 0.005}{0.95\times 0.005+0.01\times 0.995} \approx 0.323$$

Exercice 5 :

Soit $\{\Omega;\mathcal{F};\mathbf{P}\}$ un espace probabolisé, $A\in\mathcal{F}$ et $B\in\mathcal{F}$ tels que $\mathbf{P}(A)\neq 0$ et $\mathbf{P}(B)\neq 0$
Montrez que les trois égalités suivantes sont équivalentes :

1. $\mathbf{P}(B|A) = \mathbf{P}(B)$ *2.* $\mathbf{P}(A|B) = \mathbf{P}(A)$ *3.* $\mathbf{P}(A\cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$

1. **Démontrons que** $\mathbf{P}(B|A) = \mathbf{P}(B) \Longleftrightarrow \mathbf{P}(A\cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$
   ⋆ Supposons $\mathbf{P}(B|A) = \mathbf{P}(B)$
   Alors $\mathbf{P}(B|A) = \dfrac{\mathbf{P}(B\cap A)}{\mathbf{P}(A)} = \mathbf{P}(B) \Longrightarrow \mathbf{P}(B\cap A) = \mathbf{P}(B)\times\mathbf{P}(A)$
   ⋆ Réciproquement, supposons $\mathbf{P}(A\cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$
   Alors, $\mathbf{P}(B|A) = \dfrac{\mathbf{P}(B\cap A)}{\mathbf{P}(A)} = \dfrac{\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)}{\mathbf{P}(A)} = \mathbf{P}(B)$
   Nous avons donc $\mathbf{P}(B|A) = \mathbf{P}(B) \Longleftrightarrow \mathbf{P}(A\cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$
2. Nous montrerions de la même manière que $\mathbf{P}(A|B) = \mathbf{P}(A) \Longleftrightarrow \mathbf{P}(A\cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$
3. **Montrons maintenant que** $\mathbf{P}(B|A) = \mathbf{P}(B) \Longleftrightarrow \mathbf{P}(A|B) = \mathbf{P}(A)$

⋆ Supposons $\mathbf{P}(B|A) = \mathbf{P}(B)$

Alors $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$ et $\mathbf{P}(A|B) = \dfrac{A \cap B}{\mathbf{P}(B)} = \dfrac{\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)}{\mathbf{P}(B)} = \mathbf{P}(A)$

Donc, si $\mathbf{P}(B|A) = \mathbf{P}(B)$, alors $\mathbf{P}(A|B) = \mathbf{P}(B)$

⋆ Démontrer que si $\mathbf{P}(A|B) = \mathbf{P}(A)$ alors $\mathbf{P}(B|A) = \mathbf{P}(B)$ est semblable

Nous avons donc $\mathbf{P}(B|A) = \mathbf{P}(B) \iff \mathbf{P}(A|B) = \mathbf{P}(A)$

En conclusion, les 3 égalités sont équivalentes

Exercice 8 :

On considère des nombres décimaux a et b appartenant à l'intervalle $]0,1[$, tels que $10a$ et $10b$ sont des nombres entiers. Une urne rouge contient $10a$ boules rouges et $10(1-a)$ boules noires et une urne noire contient $10b$ boules rouges et $10(1-b)$ boules noires.

Les boules étant indiscernables les unes des autres, on effectue une suite de tirages au hasard d'une boule dans l'une des deux urnes selon les règles suivantes :

- *Le premier tirage a lieu dans l'une des deux urnes prise au hasard* (On admet l'équiprobabilité.)
- *Après chaque tirage dans une urne, la boule est remise dans la même urne ;*
- *Pour tout nombre entier naturel n, le $n+1$-ième tirage a lieu dans l'urne de la couleur de la boule tirée au n-ième tirage.*

Pour tout nombre entier strictement positif n, on désigne par R_n l'évènement

« *On tire une boule rouge au n-ième tirage* »

Et par N_n l'évènement

« *On tire une boule noire au n-ième tirage* »

.

1. *Calculer les probabilités $\mathbf{P}(R_1)$ et $\mathbf{P}(N_1)$*

   R_1 est l'événement : $R_1 = \{$On tire une boule rouge au premier tirage $\}$. D'où vient cette boule rouge ? Cette boule rouge vient de l'urne rouge ou bien de l'urne noire.
   On appelle $UR = \{$On tire une boule dans l'urne rouge $\}$ et $UN = \{$On tire une boule dans l'urne noire$\}$, nous avons :
   $$R_1 = R_1 \cap (UR \cup UN) = (R_1 \cap UR) \cup (R_1 \cap UN)$$
   C'est à dire, en passant au probabilité :
   $$\mathrm{P}(R_1) = \mathrm{P}(R_1 \cap UR) + \mathrm{P}(R_1 \cap UN) = \mathrm{P}(R_1|UR)\,\mathrm{P}(UR) + \mathrm{P}(R_1|UN)\,\mathrm{P}(UN)$$
   Sans le dire, nous avons redémontré la formule des probabilités totales.
   Numériquement, $\mathrm{P}(UR) = \mathrm{P}(UN) = \dfrac{1}{2}$, $\mathrm{P}(R_1|UR) = \dfrac{10a}{10} = a$ et $\mathrm{P}(R_1|UN) = \dfrac{10b}{10} = b$, et donc
   $$\boxed{\mathrm{P}(R_1) = \frac{a+b}{2}}$$
   De la même manière,
   $$\mathrm{P}(N_1) = \mathrm{P}(N_1|UR)\,\mathrm{P}(UR) + \mathrm{P}(N_1|UN)\,\mathrm{P}(UR)$$
   Numériquement, $\mathrm{P}(N_1|UR) = \dfrac{10(1-a)}{10} = 1-a$ et $\mathrm{P}(N_1|UN) = \dfrac{10(1-b)}{10} = 1-b$, et donc
   $$\boxed{\mathrm{P}(R_1) = 1 - \frac{a+b}{2}}$$
   En fait, et c'est totalement évident, $R_1 = \overline{N_1}$

2. *Expliquer pourquoi, pour tout entier naturel n strictement supérieur à 1,nous avons :*

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P}(R_n) \\ \mathbf{P}(N_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 1-a & 1-b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{P}(R_{n-1}) \\ \mathbf{P}(N_{n-1}) \end{pmatrix}$$

On appelle UR_n, l'événement : $UR_n = \{$On tire une boule dans l'urne rouge au n-ième tirage$\}$ et UN_n, l'événement : $UN_n = \{$On tire une boule dans l'urne noire au n-ième tirage$\}$.
En rappelant les conditions du tirage exposées dans l'énoncé :

> Pour tout nombre entier naturel n, le n-ième tirage a lieu dans l'urne de la couleur de la boule tirée au $n-1$-ième tirage.

Ainsi, si nous tirons une boule dans l'urne rouge au n-ième tirage, ceci signifie qu'au $n-1$ième tirage, nous avons obtenu une boule rouge, et donc : $\mathrm{P}(UR_n) = \mathrm{P}(R_{n-1})$; de même, $\mathrm{P}(UN_n) = \mathrm{P}(N_{n-1})$
Nous pouvons utiliser la formule des probabilités totales :

$$\mathrm{P}(R_n) = \mathrm{P}(R_n \cap UR_n) + \mathrm{P}(R_n \cap UN_n) = \mathrm{P}(R_n|UR_n)\,\mathrm{P}(UR_n) + \mathrm{P}(R_n|UN_n)\,\mathrm{P}(UN_n)$$

Evaluons $\mathrm{P}(R_n|UR_n)$:
On sait qu'on tire une boule dans l'urne rouge. Quelle est la probabilité pour obtenir une boule rouge dans cette urne ? Cette quantité a déjà été calculée :$\mathrm{P}(R_n|UR_n) = a$; de même, $\mathrm{P}(R_n|UN_n) = b$; de telle sorte que :

$$\mathrm{P}(R_n) = a\mathrm{P}(R_{n-1}) + b\mathrm{P}(N_{n-1})$$

N_n est l'événement contraire de R_n, et donc $\mathrm{P}(N_n) = 1 - \mathrm{P}(R_n)$, d'où

$$\mathrm{P}(N_n) = 1 - (a\mathrm{P}(R_{n-1}) + b\mathrm{P}(N_{n-1}))$$

De $\mathrm{P}(N_{n-1}) + \mathrm{P}(R_{n-1}) = 1$, nous tirons :

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(N_n) &= 1 - (a\mathrm{P}(R_{n-1}) + b\mathrm{P}(N_{n-1})) \\ &= \mathrm{P}(N_{n-1}) + \mathrm{P}(R_{n-1}) - (a\mathrm{P}(R_{n-1}) + b\mathrm{P}(N_{n-1})) \\ &= (1-a)(R_{n-1}) + (1-b)\,\mathrm{P}(N_{n-1}) \end{aligned}$$

En synthèse, nous avons :

$$\begin{cases} \mathrm{P}(R_n) = & a\mathrm{P}(R_{n-1}) + b\mathrm{P}(N_{n-1}) \\ \mathrm{P}(N_n) = & (1-a)(R_{n-1}) + (1-b)\,\mathrm{P}(N_{n-1}) \end{cases}$$

Ce qui se traduit tout à fait bien, matriciellement, par :

$$\boxed{\begin{pmatrix} \mathbf{P}(R_n) \\ \mathbf{P}(N_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 1-a & 1-b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{P}(R_{n-1}) \\ \mathbf{P}(N_{n-1}) \end{pmatrix}}$$

Exercice 9 :

Le gérant d'un magasin d'informatique a reçu un lot de boites de CD-ROM. 5% de ces boîtes sont abîmées. Le gérant estime que :

- *60% des boîtes abîmées contiennent au moins un CD-ROM défectueux.*
- *98% des boîtes non abîmées ne contiennent aucun CD-ROM défectueux.*

Un client achète une boite du lot. On désigne par A l'événement : « La boite est abimée » et par B l'événement « La boite achetée contient au moins un disque défectueux ».

1. *Donner les probabilités de*

   $\rightarrow$ $\mathbf{P}(A)$ *et* $\mathrm{P}(\overline{A})$

   Il est clair, que d'après l'énoncé, $\mathbf{P}(A) = 0,05$ et donc que $\mathrm{P}(\overline{A}) = 0,95$

→ $\mathbf{P}(B|A)$

On sait que la boite est abimée ; il y a donc 60% de chances pour qu'elle contienne un CD-ROM défectueux. Donc $\mathbf{P}(B|A) = 0,6$

→ $\mathbf{P}\left(B|\overline{A}\right)$

Cette fois ci, on sait que la boite n'est pas abimée et que 98% de ces boites ne contiennent aucun CD défectueux. Nous avons donc $\mathbf{P}\left(B|\overline{A}\right) = 0,02$

→ $\mathbf{P}\left(\overline{B}|A\right)$

La probabilité conditionnelle est une probabilité. Donc $\mathbf{P}\left(\overline{B}|A\right) = 1 - \mathbf{P}(B|A)$, c'est à dire que $\mathbf{P}\left(\overline{B}|A\right) = 1 - 0,6 = 0,4$

→ $\mathbf{P}\left(\overline{B}|\overline{A}\right)$

De la même manière, $\mathbf{P}\left(\overline{B}|\overline{A}\right) = 1 - \mathbf{P}\left(B|\overline{A}\right) = 0,98$

2. *Le client constate qu'un des CD-ROM acheté est défectueux. Quelle est a la probabilité pour qu'il ait acheté une boite abimée ?*

   On doit calculer $\mathbf{P}(A|B)$ que jusqu'ici, on n'a pas calculé. Or, en utlisant la formule de Bayes, on a le résultat.
   Redémontrons cette formule.
   Nous avons $\mathbf{P}(A|B) = \dfrac{\mathbf{P}(A\cap B)}{\mathbf{P}(B)} = \dfrac{\mathbf{P}(B|A)\,\mathbf{P}(A)}{\mathbf{P}(B)}$
   Nous connaissons $\mathbf{P}(B|A)$ et $\mathbf{P}(A)$, mais nous ne connaissons pas $\mathbf{P}(B)$. Or,
   $$B = B\cap\left(A\cup\overline{A}\right) = (B\cap A)\cup\left(B\cap\overline{A}\right)$$
   Et donc,
   $$\begin{aligned}\mathbf{P}(B) &= \mathbf{P}(B\cap A) + \mathbf{P}\left(B\cap\overline{A}\right)\\ &= \mathbf{P}(B|A)\,\mathbf{P}(A) + \mathbf{P}\left(B|\overline{A}\right)\mathbf{P}\left(\overline{A}\right)\\ &= 0,03 + 0,190 = 0,193\end{aligned}$$
   C'est la formule des probabilités totales D'où $\mathbf{P}(A|B) = \dfrac{\mathbf{P}(B|A)\,\mathbf{P}(A)}{\mathbf{P}(B)} = \dfrac{0,03}{0,193} = 0,155$

Exercice 10 :

Une compagnie d'assurance répartit ses clients en trois classes de risques :

- *$R1$ est la classe des « bons risques »*
- *$R2$ est la classe des « risques moyens »*
- *$R3$ est la classe des « mauvais risques »*

Les effectifs de ces trois classes représentent

- *20% de la population totale pour la classe $R1$*
- *50% pour la classe $R2$*
- *30% pour la classe $R3$*

Les statistiques indiquent que les probabilités d'avoir un accident au cours de l'année pour une personne de l'une de ces trois classes sont respectivement de 0,05, 0,15 et 0,30.

1. *Quelle est la probabilité qu'une personne choisie au hasard dans la population ait un accident dans l'année ?*

   On appelle A, l'événement $A = \{$ Avoir un accident$\}$. D'après l'énoncé, nous avons :
   $$\mathbf{P}(A|R1) = 0,05 \qquad \mathbf{P}(A|R2) = 0,15 \qquad \mathbf{P}(A|R3) = 0,30$$
   Ce qu'on cherche, c'est, en fait : $\mathbf{P}(A)$; or :
   $$A = A\cap(R1\cup R2\cup R3) = (A\cap R1)\cup(A\cap R2)\cup(A\cap R3)$$
   Donc $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A\cap R1)+\mathbf{P}(A\cap R2)+\mathbf{P}(A\cap R3)$. Or, pour $i = 1,2,3$, $\mathbf{P}(A\cap Ri) = \mathbf{P}(A|Ri)\times\mathbf{P}(Ri)$, de telle sorte que :
   $$\begin{aligned}\mathbf{P}(A) &= \mathbf{P}(A|R1)\times\mathbf{P}(R1) + \mathbf{P}(A|R2)\times\mathbf{P}(R2) + \mathbf{P}(A|R3)\times\mathbf{P}(R3)\\ &= 0,05\times 0,2 + 0,15\times 0,50 + 0,30\times 0,30\\ &= 0,175\end{aligned}$$

Donc, $\boxed{\mathbf{P}(A) = 0,175}$

2. *Si M.Martin n'a pas eu d'accident cette année, quelle est la probabilité qu'il soit un bon risque (qu'il appartienne à la classe $R1$) ?*

   Il faut, cette fois ci calculer $\mathbf{P}\left(R1|\overline{A}\right)$. Or, d'après la formule de Bayes,

$$\mathbf{P}\left(R1|\overline{A}\right) = \frac{\mathbf{P}\left(R1 \cap \overline{A}\right)}{\mathbf{P}\left(\overline{A}\right)} = \frac{\mathbf{P}\left(\overline{A}|R1\right) \times \mathbf{P}(R1)}{\mathbf{P}\left(\overline{A}\right)} = \frac{0,95 \times 0,2}{1 - 0,175} = 0,230$$

   Donc, $\boxed{\mathbf{P}\left(R1|\overline{A}\right) = 0,230}$

Exercice 14 :

Voici un exercice qui n'est pas très difficile ; l'objectif de cet exercice est de montrer que la probabilité conditionnelle $\mathbf{P}_A$ est une probabilité comme une autre, et qu'il n'est pas indécent de s'intéresser à la probabilité conditionnelle liée à cette probabilité $\mathbf{P}_A$
Ce sera aussi l'occasion de mettre en pratique les définitions de probabilité conditionnelle. C'est donc un exercice très proche du cours
Soit $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}\}$ un espace probabilisé

1. *Soit $A \in \mathcal{F}$ tel que $\mathbf{P}(A) > 0$; On appelle $\mathbf{P}_A$ la probabilité conditionnelle sachant A.*
   Soit $B \in \mathcal{F}$ tel que $\mathbf{P}_A(B) > 0$; démontrer que $\mathbf{P}_A(X/B) = \dfrac{\mathbf{P}_A(X \cap B)}{\mathbf{P}_A(B)} = \mathbf{P}(X/B \cap A)$

   C'est donc très simple :
   $\Rightarrow$ Nous avons $\mathbf{P}_A(X \cap B) = \dfrac{\mathbf{P}(X \cap B \cap A)}{\mathbf{P}(A)}$
   $\Rightarrow$ Et $\mathbf{P}_A(B) = \dfrac{\mathbf{P}(B \cap A)}{\mathbf{P}(A)}$
   Donc

$$\mathbf{P}_A(X/B) = \frac{\mathbf{P}_A(X \cap B)}{\mathbf{P}_A(B)} = \frac{\mathbf{P}(X \cap B \cap A)}{\mathbf{P}(A)} \times \frac{\mathbf{P}(A)}{\mathbf{P}(B \cap A)} = \frac{\mathbf{P}(X \cap B \cap A)}{\mathbf{P}(A \cap B)} = \mathbf{P}(X/B \cap A)$$

2. *Démontrer que pour tout événement $A \in \mathcal{F}$, $B \in \mathcal{F}$ et $C \in \mathcal{F}$*

$$\mathbf{P}(A \cap B/C) = \mathbf{P}(A/C) \times \mathbf{P}(B/A \cap C)$$

   Nous avons $\mathbf{P}(A \cap B/C) = \dfrac{\mathbf{P}(A \cap B \cap C)}{\mathbf{P}(C)}$.
   Nous avons, et de manière classique :

$$\mathbf{P}(A \cap B \cap C) = \mathbf{P}(B \cap (A \cap C)) = \mathbf{P}(A \cap C) \times \mathbf{P}(B/(A \cap C))$$

   Et donc :

$$\mathbf{P}(A \cap B/C) = \frac{\mathbf{P}(A \cap C) \times \mathbf{P}(B/(A \cap C))}{\mathbf{P}(C)} = \frac{\mathbf{P}(A \cap C)}{\mathbf{P}(C)} \times \mathbf{P}(B/(A \cap C)) = \mathbf{P}(A/C)\,\mathbf{P}(B/A \cap C)$$

   Ce que nous voulions

Exercice 16 :

Un joueur a le choix entre les deux paris suivants :

1°pari : *Jeter 6 dés, et gagner s'il "sort" au moins un as*

2°pari : *Jeter 12 dés, et gagner s'il "sort" au moins deux as*

Calculez la probabilité de gagner dans chaque cas, les issues possibles étant supposées équiprobables.

1. Nous allons appeler Ω_1 l'espace fondamental lié au premier pari.
   Très facilement, nous avons Card $\Omega = 6^6$
   On appelle A l'événement $A = \{\text{On obtient au moins un as}\}$; il est beaucoup plus facile de considérer l'événement contraire $\overline{A} = \{\text{On n'obtient aucun as}\}$.
   Nous avons Card $\overline{A} = 5^6$, et donc $\mathbf{P}\left(\overline{A}\right) = \dfrac{5^6}{6^6}$, d'où $\mathbf{P}(A) = 1 - \left(\dfrac{5}{6}\right)^6 \approx 0,665$
2. Itérons la démarche pour le second pari :
   Si nous appelons Ω_2 l'espace fondamental lié au second pari. Nous avons Card $\Omega = 6^{12}$
   On appelle A l'événement $A = \{\text{On obtient au moins un as}\}$, l'événement contraire $\overline{A} = \{\text{On n'obtient aucun as}\}$, nous avons Card $\overline{A} = 5^{12}$, et donc $\mathbf{P}\left(\overline{A}\right) = \dfrac{5^{12}}{6^{12}}$, d'où $\mathbf{P}(A) = 1 - \left(\dfrac{5}{6}\right)^{12} \approx 0,887$

Si nous poussons un peu plus loin l'étude, si nous lançons n dés, nous avons $\mathbf{P}(A) = 1 - \left(\dfrac{5}{6}\right)^n$; comme $0 < \dfrac{5}{6} < 1$, nous avons $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 - \left(\dfrac{5}{6}\right)^n = 1$; ainsi, plus il y a de dés, plus nous avons de chance que A se réalise

Exercice 18 :

Le roi vient d'une famille de 2 enfants ; quelle est la probabilité pour que l'autre enfant soit sa soeur ?

Si nous appelons Ω, l'espace fondamental, nous avons $\Omega = \{(G,G)\,;(G,F)\,;(F,G)\,,(F,F)\}$
Le roi étant, à priori, un garçon, nous restreignons l'espace fondamental Ω, à un autre espace fondamental $\Omega_1 = \{(G,G)\,;(G,F)\,;(F,G)\}$.
La probabilité pour que l'autre enfant soit sa soeur est donc de $\dfrac{2}{3}$
C'est le principe des probabilités conditionnelles que de réduire l'espace fondamental ; ce que nous avons fait ici, sans passer par la définition

Exercice 20 :

Une population d'une ville compte 48% d'hommes et 52% de femmes ; on sait que 5% des hommes et 3% des femmes sont atteint d'une maladie M.

C'est un exercice totalement classique !! Ici, l'espace fondamental Ω est constitué des habitants de la ville.
Appelons H l'ensemble des hommes de cette ville et $F = \overline{H}$ celui des femmes ; nous avons $\mathbf{P}(H) = 0,48$ et $\mathbf{P}(F) = 0,52 = 1 - \mathbf{P}(H)$.
Soit M l'ensemble des personnes malades de la maladie M. D'après l'énoncé, nous avons $\mathbf{P}(H \cap M) = 0,05$ et $\mathbf{P}(F \cap M) = 0,03$

1. *Quelle est la proportion de personnes de la ville atteint de la maladie M ?*

   Il faut, en fait, calculer $\mathbf{P}(M)$
   Nous avons $M = M \cap \Omega = M \cap (H \cup F) = (M \cap H) \cup (M \cap F)$. D'où :
   $$\mathbf{P}(M) = \mathbf{P}((M \cap H) \cup (M \cap F)) = \mathbf{P}(M \cap H) + \mathbf{P}(M \cap F) = 0,08$$
2. *On prend une personne au hasard, et on constate qu'elle est atteinte de la maladie M ; quelle est la probabilité pour que ce soit une femme ?*

   Il faut donc calculer $\mathbf{P}(F/M)$.
   C'est assez simple :
   $$\mathbf{P}(F/M) = \frac{\mathbf{P}(M \cap F)}{\mathbf{P}(M)} = \frac{0.03}{0.08} = \frac{3}{8} = 0,375$$

Exercice 21 :

La firme Computex a déposé auprès du ministère de l'Education Nationale deux cahiers de charge séparés pour la fourniture de mobilier informatique et de micro-ordinateurs. L'entreprise estime à 60% ses chances d'obtenir le contrat de fourniture de mobilier informatique. Si ce contrat lui est alloué, la firme évalue ses chances à 2 sur 3 d'obtenir le contrat des micro-ordinateurs. Toutefois, si le contrat de fourniture de mobilie informatique lui échappe, elle estime quand même à 30% ses chances de se voir octroyer le contrat des micro-ordinateurs.

On appelle MI l'événement $MI = \{\text{Obtenir le marché du mobilier informatique}\}$ et O, l'évenement $O = \{\text{Obtenir le marché des micro-ordinateurs}\}$

D'après lénoncé, nous avons $\mathbf{P}(MI) = 0,6$, $\mathbf{P}(O/MI) = \dfrac{2}{3}$ et $\mathbf{P}\left(O/\overline{MI}\right) = 0,3$

1. *Quelle est la probabilité pour que Computex obtienne les deux contrats ?*

   Ici, il faut calculer $\mathbf{P}(O \cap MI)$

   Or, $\mathbf{P}(O/MI) = \dfrac{\mathbf{P}(O \cap MI)}{\mathbf{P}(MI)}$ et donc $\mathbf{P}(O \cap MI) = \mathbf{P}(O/MI) \times \mathbf{P}(MI) = 0,6 \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{5} = 0,2$

2. *Quelle est la probabilité que Computex n'obtienne que le contrat des microordinateurs ?*

   Il faut, évaluer, ici $\mathbf{P}\left(O \cap \overline{MI}\right)$

   Comme tout à l'heure, $\mathbf{P}\left(O \cap \overline{MI}\right) = \mathbf{P}\left(O/\overline{MI}\right) \times \mathbf{P}\left(\overline{MI}\right) = \dfrac{2}{3} \times 0,4 = \dfrac{4}{15}$

3. *Quelle est la probabilité que Computex obtienne le contrat des micro-ordinateurs (qu'il ait obtenu ou non le contrat de fourniture de mobilier informatique) ?*

   Il faut donc calculer $\mathbf{P}(O)$

   C'est facile : $O = (O \cap MI) \cup \left(O \cap \overline{MI}\right)$, et donc

   $$\mathbf{P}(O) = \mathbf{P}(O \cap MI) + \mathbf{P}\left(O \cap \overline{MI}\right) = \frac{1}{5} + \frac{4}{15} = \frac{7}{15}$$

4. *Computex vient d'annoncer qu'il a obtenu le marché des micro-ordinateurs. Quelle est la probabilité qu'il ait obtenu celui du mobilier informatique ?*

   Il faut donc calculer $\mathbf{P}(MI/O)$. Or :

   $$\mathbf{P}(MI/O) = \frac{\mathbf{P}(MI \cap O)}{\mathbf{P}(O)} = \frac{0,2 \times 7}{15} = \frac{7}{75}$$

Exercice 22 :

Dans une population on sait que la probabilité de naissance d'un garçon est de 0,52, que par ailleurs que 2% des filles et 1% des garçons présentent une luxation congénitale de la hanche.

1. *On note F l'évènement $F = \{\text{Naissance d'une fille}\}$ et L l'évènement $L = \{\text{Avoir une luxation de la hanche}\}$. Les évènements F et L sont-ils indépendants ?*

   Nous posons, pour commencer $G = \{\text{Naissance d'un garçon}\} = \overline{F}$. Ré-écrivons les hypothèses ; nous avons :

   $\star$ $\mathbf{P}(F) = 0,48$ $\star$ $\mathbf{P}(G) = 0,52$ $\star$ $\mathbf{P}(L/G) = 0,01$ $\star$ $\mathbf{P}(L/F) = 0,02$

   Pour montrer que F et L sont indépendants, il nous faut montrer que $\mathbf{P}(F \cap L) = \mathbf{P}(F)\,\mathbf{P}(L)$. Or, nous ne connaissons pas $\mathbf{P}(L)$, ni $\mathbf{P}(F \cap L)$. il nous faut donc les calculer.

   $\Rightarrow$ Nous avons $\mathbf{P}(F \cap L) = \mathbf{P}(L/F) \times \mathbf{P}(F)$ et donc $\mathbf{P}(F \cap L) = 0,02 \times 0,48 = 0,0096$

   $\Rightarrow$ Nous avons $L = L \cap (F \cup G) = (L \cap F) \cup (L \cap G)$, et donc $\mathbf{P}(L) = \mathbf{P}(L \cap F) + \mathbf{P}(L \cap G)$
   Nous connaissons $\mathbf{P}(F \cap L)$, il nous faut, maintenant, connaître $\mathbf{P}(F \cap G)$

   Comme tout à l'heure, nous avons $\mathbf{P}(F \cap G) = \mathbf{P}(L/G) \times \mathbf{P}(G) = 0,01 \times 0,52 = 0,0052$

   D'où $\mathbf{P}(L) = 0,0052 + 0,0096 = 0,0148$

Donc, $\mathbf{P}(F \cap L) = 0,0096$ et $\mathbf{P}(F) \times \mathbf{P}(L) = 0,42 \times 0,0148 = 0,006216$
Les 2 évènements F et L ne sont clairement pas indépendants ?

2. *Calculer la probabilité pour qu'un nouveau-né présentant une luxation soit une fille.*

   Nous devons donc calculer $\mathbf{P}(F/L)$. Or, ceci ne pose pas grande difficulté :

$$\mathbf{P}(F/L) = \frac{\mathbf{P}(F \cap L)}{\mathbf{P}(L)} = \frac{0,0096}{0,0148} = \frac{24}{37} \approx 0,6486$$

Exercice 23 :

Un système composé de n modules est dit être un $k \lhd n$ système si et seulement si le système fonctionne si au moins k ($k \leqslant n$) modules sur les n sont en état de fonctionner. On suppose que tous les modules fonctionnent de manière indépendante les uns des autres avec la même probabilité p.
Calculer la probabilité pour qu'un système $k \lhd n$ fonctionne

$\Rightarrow$ La probabilité pourqu'il y ait exactement j machine à fonctionner est donnée par

$$\mathrm{C}_n^j p^j (1-p)^{n-j} = \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j}$$

Ainsi, la probabilité pour que le système fonctionne est donc :

$$\sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} = 1 - \sum_{j=0}^{k-1} \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j}$$

$\Rightarrow$ Une autre façon de voir le problème est de considérer les machines qui ne marchent pas.
Ainsi, la probabilité pourqu'il y ait exactement j machine à ne pas fonctionner est donnée par

$$\mathrm{C}_n^j (1-p)^j p^{n-j} = \binom{n}{j} (1-p)^j p^{n-j}$$

Ainsi, pour que le système fonctionne, il faut qu'il y ait au plus $k-1$ modules à ne pas fonctionner.
Donc, la probabilité pour que le système $k \lhd n$ fonctionne est donc donné par :

$$\sum_{j=0}^{k-1} \binom{n}{j} (1-p)^j p^{n-j} = p^n \sum_{j=0}^{k-1} \binom{n}{j} \left(\frac{1}{p} - 1\right)^j$$

Exercice 24 :

La probabilité pour qu'une machine tombe en panne au cours d'un mois est $p = 0,06$; une entreprise possède 10 machines de ce type. Quelle est la probabilité pour qu'au cours du prochain mois :

1. *Toutes les machines tombent en panne*
2. *Au moins 2 machines tombent en panne*

C'est une nouvelle fois, une application classique de la loi binômiale

1. **La probabilité pour que toutes les machines tombent en panne**

   Cette probabilité est simple ; elle est $P = (0.06)^{10} = 6 \times 10^{-14}$

2. **La probabilité pour que au moins 2 machines tombent en panne**

   Nous allons nous intéresser à l'événement contraire.
   L'événement contraire est donné par : « Il y a au plus 1 machine qui est en panne », c'est à dire 0 ou 1. Cette propabilité est donc :

$$P = \binom{10}{0} (0,06)^0 (1-0,06)^{10} + \binom{10}{1} (0,06)^1 (1-0,06)^9 = 0,5386 + 10 \times 0,06 \times 0,5730 = 0,8824$$

Exercice 25 :

Critiquer le raisonnement suivant :
En lançant une fléchette, j'ai une chance sur deux d'atteindre la cible, donc, en lançant la fléchette deux fois, j'atteindrai la cible à coup sûr.

On suppose le joueur lance 2 fois sa fléchette. Il y a deux façons de résoudre cette question

$\Rightarrow$ La première en considérant l'espace fondamental :

$$\Omega = \{(G, G) ; (G, P) ; (P, G) ; (P, P)\}$$

La première composante représentant le résultat du premier lancer et la seconde composante, celui du second lancer. D'après l'énoncé, il y a équiprobabilité pour chaque couple. Donc :

$$\text{Atteindre la cible à coup sûr} = \{(G, G) ; (G, P) ; (P, G)\}$$

Et $\mathbf{P}\left(\text{Atteindre la cible à coup sûr}\right) = \dfrac{3}{4}$
Le raisonnement est donc faux ! !

$\Rightarrow$ Une autre façon de faire est de considérer que chaque lancer est une épreuve de Bernouilli « Echec »« Succes » de paramètre $\dfrac{1}{2}$.
La loi de deux lancers consécutifs est donc une loi binômiale. L'évenement « Atteindre la cible à coup sûr » est donné par :

$$\{\text{Atteindre la cible exactement 2 fois}\} \cup \{\text{Atteindre la cible exactement 1 fois}\}$$

Donc :

$$\mathbf{P}\left(\text{Atteindre la cible à coup sûr}\right) = \binom{2}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \binom{2}{1}\left(\frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$$

$\Rightarrow$ Il eût été possible aussi d'utiliser l'événement contraire

Exercice 26 :

On lance 2 dés distincts numérotés de 1 à 6 ; soient x_1 et x_2 les nombres fournis par ces 2 dés

On peut d'ores et déjà s'intéresser à l'espace fondamental lié à cet expérience :

$$\Omega = \{(x_1, x_2) \text{ où } 1 \leqslant x_1 \leqslant 6 \text{ et } 1 \leqslant x_2 \leqslant 6\}$$

Dans ce schéma, x_1 est le résultat du premier dé, et x_2 celui du second.
Nous différencions donc les dés Evidemment, Card $\Omega = 36$

1. *Calculez $\mathbf{P}\left(\{x_1 + x_2 = 5\}\right)$ et $\mathbf{P}\left(\{x_1 + x_2 = 7\}\right)$*
   - ⋆ L'événement $\{x_1 + x_2 = 5\}$ est donné par :

     $$\{x_1 + x_2 = 5\} = \{(1, 4) ; (4, 1) ; (2, 3) ; (3, 2)\}$$

     Et donc $\mathbf{P}\left(\{x_1 + x_2 = 5\}\right) = \dfrac{4}{36} = \dfrac{1}{9}$
   - ⋆ De même, l'événement $\{x_1 + x_2 = 7\}$ est donné par :

     $$\{x_1 + x_2 = 7\} = \{(1, 6) ; (6, 1) ; (2, 5) ; (5, 2) ; (3, 4) ; (4, 3)\}$$

     Et donc $\mathbf{P}\left(\{x_1 + x_2 = 7\}\right) = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$
2. *Si on lance les 2 dés 3 fois de suite, quelle est la probabilité pour que $y = x_1 + x_2$ prenne au moins une fois la valeur 5 et une fois la valeur 7*

   Définissons l'espace fondamental lié à cette expérience. Ici, nous pouvons choisir :

   $$\Omega = \{(L_1, L_2, L_3) \text{ où } 2 \leqslant L_1 \leqslant 12; 2 \leqslant L_2 \leqslant 12 \text{ et } 1 \leqslant L_3 \leqslant 6\}$$

Ici, L_1 est le résultat du premier lancer des 2 dés, L_2 celui du second et L_3 celui du troisième.
Il faut remarquer qu'il n'y a pas équiprobabilité, puisque, par exemple $\mathbf{P}\left((7,7,7)\right) = \dfrac{1}{6^3}$ et $\mathbf{P}\left((5,5,5)\right) = \dfrac{1}{9^3}$.
Il faut maintenant définir l'événement $\{$Au moins une fois la valeur 5 et une fois la valeur 7$\}$; nous allons en faire le recensement :

- $\star$ Tout d'abord, exactement 2 fois la valeur 5 :

$$\{\text{Exactement 2 fois la valeur 5 et une fois la valeur 7}\} = \{(5,5,7)\,;(5,7,5)\,;(7,5,5)\}$$

Et nous avons, de manière simple :

$$\mathbf{P}\left(\{\text{Exactement une fois la valeur 5 et une fois la valeur 7}\}\right) = 3 \times \left(\frac{1}{9}\right)^2 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{162}$$

- $\star$ Ensuite, exactement 1 fois la valeur 5 :

$$\{\text{Exactement 1 fois la valeur 5 et une fois la valeur 7}\}$$
$$=$$
$$\{(5,\{\text{autre chose que 5 ou 7}\},7)\,;(\{\text{autre chose que 5 ou 7}\},7,5)\,;\cdots;(7,5,\{\text{autre chose que 5 ou 7}\})\}$$

Or, $\mathbf{P}\left(\{\text{autre chose que 5 ou 7}\}\right) = 1 - \left(\dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{6}\right) = \dfrac{13}{18}$
Et donc $\mathbf{P}\left((5,\{\text{autre chose que 5 ou 7}\},7)\right) = \dfrac{13}{18} \times \dfrac{1}{9} \times \dfrac{1}{6}$
D'où

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left(\{\text{Exactement 1 fois la valeur 5 et une fois la valeur 7}\}\right) &= 6 \times \mathbf{P}\left((5,\{\text{autre chose que 5 ou 7}\},7)\right)\\ &= \frac{13}{18} \times \frac{1}{9}\end{aligned}$$

Et donc :

$$\mathbf{P}\left(\{\text{Au moins une fois la valeur 5 et une fois la valeur 7}\}\right) = \frac{1}{162} + \frac{13}{18} \times \frac{1}{9} = \frac{7}{81}$$

Exercice 27 :

1. *On lance deux dés cubiques numérotés de 1 à 6, et nous considérons la somme amenée par ce lancer. On appelle A l'événement $A = \{$La somme amenée est 6$\}$, et B l'événement $B = \{$La somme amenée est 7$\}$. Donner $\mathbf{P}(A)$ et $\mathbf{P}(B)$*

   Les questions de cet exercice sont celles de celui qui précède ! L'espace fondamental est donc

   $$\Omega = \{(i,j) \text{ où } 1 \leqslant i \leqslant 6 \text{ et } 1 \leqslant j \leqslant 6\}$$

   Nous avons donc Card $\Omega = 36$
   - $\star$ $A = \{(1,5)\,;(5,1)\,;(2,4)\,;(4,2)\,;(3,3)\}$ et donc $\mathbf{P}(A) = \dfrac{5}{36}$
   - $\star$ $B = \{(1,6)\,;(6,1)\,;(2,5)\,;(5,2)\,;(3,4)\}$ et donc $\mathbf{P}(A) = \dfrac{5}{36}$

2. *Lénaïg et Erwann jouent au jeu suivant :*

   On lance 2 dés cubiques ; pour gagner, Lénaïg doit obtenir 6 exactement, et pour gagner, Erwann doit obtenir 7 exactement. Si aucun des deux n'a gagné, on recommence à jouer
   C'est Lénaïg qui commence à jouer (ce qui veut dire Lénaïg joue à tous les lancers impairs, et que Erwann joue à tous les lancers pairs).
   Les lancers sont bien entendu supposés tous indépendants les uns des autres.

   On appelle A_k l'événement :$A_k = \{$ Lénaïg gagne au k-ième lancer$\}$ et B_k l'événement : $B_k = \{$Erwann gagne au k-ième lancer$\}$

En écrivant les événements A_k et B_k sous forme d'intersection et de complémentation, calculer $\mathbf{P}(A_k)$ et $\mathbf{P}(B_k)$

Soit L_k l'événement $L_k = \{\text{Lénaïg obtient 6 au } k-\text{ième lancer}\}$. Alors, $\mathbf{P}(L_k) = \dfrac{5}{36}$

Soit E_k l'événement $E_k = \{\text{Erwann obtient 7 au } k-\text{ième lancer}\}$. Alors, $\mathbf{P}(E_k) = \dfrac{5}{36}$.

→ Recherche de $\mathbf{P}(A_k)$

Nous avons

$$A_k = \overline{L_1} \cap \overline{E_1} \cap \overline{L_2} \cap \overline{E_2} \cap \cdots \overline{L_{k-1}} \cap \overline{E_{k-1}} \cap L_k$$

Et donc

$$\mathbf{P}(A_k) = (1-\mathbf{P}(L_1))(1-\mathbf{P}(E_1))(1-\mathbf{P}(L_2))(1-\mathbf{P}(E_2))\times\cdots(1-\mathbf{P}(L_{k-1}))(1-\mathbf{P}(E_{k-1}))\mathbf{P}(L_k)$$

C'est à dire : $\mathbf{P}(A_k) = \left(1-\dfrac{5}{36}\right)^{2k-2} \times \dfrac{5}{36} = \left(\dfrac{31}{36}\right)^{2k-2} \times \dfrac{5}{36} = \dfrac{5}{36} \times \left(\dfrac{36}{31}\right)^2 \times \left(\dfrac{31}{36}\right)^{2k}$

→ Recherche de $\mathbf{P}(B_k)$

La démarche pour cette question est semblable, même s'il y a quelques différences.
Nous avons

$$B_k = \overline{L_1} \cap \overline{E_1} \cap \overline{L_2} \cap \overline{E_2} \cap \cdots \overline{L_{k-1}} \cap \overline{E_{k-1}} \cap \overline{L_k} \cap E_k$$

Et donc

$$\mathbf{P}(B_k) = (1-\mathbf{P}(L_1))(1-\mathbf{P}(E_1)) \times \cdots \times (1-\mathbf{P}(L_{k-1}))(1-\mathbf{P}(E_{k-1}))(1-\mathbf{P}(L_k))\mathbf{P}(E_k)$$

C'est à dire :

$$\mathbf{P}(B_k) = \left(1-\frac{5}{36}\right)^{2k-1} \times \frac{5}{36} = \left(\frac{31}{36}\right)^{2k-1} \times \frac{5}{36} = \frac{5}{36} \times \frac{36}{31} \times \left(\frac{31}{36}\right)^{2k} = \frac{5}{31} \times \left(\frac{31}{36}\right)^{2k}$$

3. *Ecrire les événements « Lénaïg gagne » et « Erwann gagne »*

   L'événement « Lénaïg gagne » peut s'écrire : il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que A_k soit réalisé qui peut donc s'écrire $\bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} A_k$.
   De même, l'événement « Erwann gagne » s'écrit $\bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} B_k$

4. *En déduire $\mathbf{P}(\{\text{Lénaïg gagne}\})$ et $\mathbf{P}(\{\text{Erwann gagne}\})$*

   ⋆ Nous avons donc $\mathbf{P}(\{\text{Lénaïg gagne}\}) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} A_k\right)$. Or :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} A_k\right) &= \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \mathbf{P}(A_k) \\
&= \frac{5}{36} \times \left(\frac{36}{31}\right)^2 \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \left(\frac{31}{36}\right)^{2k} \\
&= \frac{5}{36} \times \left(\frac{36}{31}\right)^2 \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \left(\left(\frac{31}{36}\right)^2\right)^k \\
&= \frac{5}{36} \times \left(\frac{36}{31}\right)^2 \times \frac{\left(\frac{31}{36}\right)^2}{1-\left(\frac{31}{36}\right)^2} \\
&= \frac{5}{36} \times \frac{36^2}{36^2-31^2} \\
&= \frac{5\times 36}{67\times 5} = \frac{36}{67} \approxeq 0,5373
\end{aligned}$$

⋆ De même, $\mathbf{P}\left(\{\text{Erwann gagne}\}\right) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} B_k\right)$. Or :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} B_k\right) &= \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \mathbf{P}(B_k) \\
&= \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{5}{31}\times\left(\frac{31}{36}\right)^{2k} = \frac{5}{31}\times\sum_{k\in\mathbb{N}^*}\left(\left(\frac{31}{36}\right)^2\right)^k \\
&= \frac{5}{31}\times\frac{\frac{31^2}{36^2}}{1-\frac{31^2}{36^2}} = \frac{5}{31}\times\frac{31^2}{36^2}\times\frac{36^2}{36^2-31^2} \\
&= \frac{5\times 31^2\times 36^2}{31\times 36^2\times 67\times 5} = \frac{31}{67} \approxeq 0,462686
\end{aligned}$$

Nous remarquons que $\mathbf{P}\left(\{\text{Lénaïg gagne}\}\right) = 1 - \mathbf{P}\left(\{\text{Erwann gagne}\}\right)$. Etonnant, non ?

Exercice 28 :

Un laboratoire a mis au point un alcool-test. Les premiers résultats sont les suivants :

⇒ *2% des personnes contrôlées par la police sont réellement en état d'ébriété*

⇒ *95 fois sur 100 l'alcool-test s'est révélé positif, alors qu'une personne était réellement en état d'ébriété.*

⇒ *95 fois sur 100 l'alcool-test s'est révélé négatif, alors qu'une personne n'était pas en état d'ébriété*

Ré-écrivons les hypothèses du problème. Appelons :

$$E = \{\text{Etre en état d'ébriété}\} \text{ et } P = \{\text{Le test est positif}\}$$

Nous avons, d'après l'énoncé :

$$\mathbf{P}(E) = 0,02 \quad \mathbf{P}(P/E) = 0,95 \quad \mathbf{P}\left(\overline{P}/\overline{E}\right) = 0,95$$

1. *Une personne est contrôlée par la police ; quelle est la probabilité pour que le test soit positif ?*

   Nous devons donc calculer $\mathbf{P}(P)$.
   A nouveau ; décomposons P. Nous avons $P = P\cap\left(E\cup\overline{E}\right) = (P\cap E)\cup\left(P\cap\overline{E}\right)$, et donc $\mathbf{P}(P) = \mathbf{P}(P\cap E) + \mathbf{P}\left(P\cap\overline{E}\right)$
   ⋆ Or $\mathbf{P}(P\cap E) = \mathbf{P}(P/E)\times\mathbf{P}(E) = 0,95\times 0,02 = 0,019$
   ⋆ De même $\mathbf{P}\left(P\cap\overline{E}\right) = \mathbf{P}\left(P/\overline{E}\right)\times\mathbf{P}\left(\overline{E}\right)$. La probabilité conditionnelle est une véritable probabilité, et donc $\mathbf{P}\left(P/\overline{E}\right) = 1-\mathbf{P}\left(\overline{P}/\overline{E}\right) = 1-0,95 = 0,05$
   Ainsi, $\mathbf{P}(P) = \mathbf{P}(P/E)\times\mathbf{P}(E) + \mathbf{P}\left(P/\overline{E}\right)\times\mathbf{P}\left(\overline{E}\right) = 0,019 + 0,05 = 0,069$

2. *Calculez la probabilité pour qu'une personne ne soit pas en état d'ébriété sachant que le test est positif.*

   Nous devons donc calculer $\mathbf{P}\left(\overline{E}/P\right)$. En fait, nous avons :

   $$\mathbf{P}\left(\overline{E}/P\right) = \frac{\mathbf{P}\left(\overline{E}\cap P\right)}{\mathbf{P}(P)} = \frac{\mathbf{P}\left(P/\overline{E}\right)\times\mathbf{P}\left(\overline{E}\right)}{\mathbf{P}(P)} = \frac{0,05\times 0,98}{0,069} \approxeq 0,7101$$

   C'est énooooOOOooorme

3. *Calculez la probabilité pour qu'une personne soit en état d'ébriété sachant que le test est négatif.*

   Sans être la même question que précédemment, la méthode est la même. Nous devons donc calculer $\mathbf{P}\left(E/\overline{P}\right)$. En fait, nous avons :

   $$\mathbf{P}\left(E/\overline{P}\right) = \frac{\mathbf{P}\left(E\cap\overline{P}\right)}{\mathbf{P}\left(\overline{P}\right)} = \frac{\mathbf{P}\left(\overline{P}/E\right)\times\mathbf{P}(E)}{\mathbf{P}\left(\overline{P}\right)} = \frac{0,05\times 0,02}{1-0,069} \approxeq 0,0010$$

   Ce qui est rassurant !!

Exercice 29 :

On lance n dés non pipés ; A_n est l'événement : $A_n = \{$Le total des numéros amenés est pair$\}$; montrer que la suite $(\mathbf{P}(A_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite constante.

Nous allons démontrer ce résultat par récurrence sur n

⇒ **Pour $n = 1$**

Il n'y a qu'un seul dé, et $A_1 = \{2, 4, 6\}$ et donc $\mathbf{P}(A_1) = \dfrac{1}{2}$

⇒ **Supposons, maintenant, que $\mathbf{P}(A_n) = \dfrac{1}{2}$**

⇒ **Etudions, maintenant, A_{n+1}**

Nous avons, maintenant, $n + 1$ dés et séparons les n premiers dés, du dernier. Appelons B_{n+1}, l'événement $B_{n+1} = \{$Le dernier dé amène un nombre pair$\}$. Alors :

$$A_{n+1} = A_{n+1} \cap \left(B_{n+1} \cup \overline{B_{n+1}}\right) = (A_{n+1} \cap B_{n+1}) \cup \left(A_{n+1} \cap \overline{B_{n+1}}\right)$$

Et ainsi,

$$\mathbf{P}(A_{n+1}) = \mathbf{P}(A_{n+1} \cap B_{n+1}) + \mathbf{P}\left(A_{n+1} \cap \overline{B_{n+1}}\right) = \mathbf{P}(A_{n+1}/B_{n+1}) \times \mathbf{P}(B_{n+1}) + \mathbf{P}\left(A_{n+1}/\overline{B_{n+1}}\right) \times \mathbf{P}\left(\overline{B_{n+1}}\right)$$

⋆ Etudions $\mathbf{P}(A_{n+1}/B_{n+1})$.

On sait que B_{n+1} est réalisé, c'est à dire que le $n+1$-ième dé amène un nombre pair. Pour que A_{n+1} soit réalisé, il faut donc que les n premiers dés amènent une somme paire aussi et donc,

$$\mathbf{P}(A_{n+1}/B_{n+1}) = \mathbf{P}(A_n) = \frac{1}{2}$$

⋆ Maintenant, $\mathbf{P}\left(A_{n+1}/\overline{B_{n+1}}\right)$.

On sait que $\overline{B_{n+1}}$ est réalisé, c'est à dire que le $n+1$-ième dé amène une somme impaire. Pour qu'alors A_{n+1} soit réalisé, il faut donc que les n premiers dés amènent une somme imppaire aussi et donc,

$$\mathbf{P}\left(A_{n+1}/\overline{B_{n+1}}\right) = \mathbf{P}\left(\overline{A_n}\right) = \frac{1}{2}$$

D'où $\mathbf{P}(A_{n+1}) = \mathbf{P}(A_{n+1}/B_{n+1}) \times \mathbf{P}(B_{n+1}) + \mathbf{P}\left(A_{n+1}/\overline{B_{n+1}}\right) \times \mathbf{P}\left(\overline{B_{n+1}}\right) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$

Donc $\mathbf{P}(A_{n+1}) = \dfrac{1}{2}$ et la suite $(\mathbf{P}(A_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite constante.

Exercice 30 :

On s'intéresse à la transmission d'un information binaire, c'est à dire d'une information ne pouvant prendre que 2 valeurs : 0 ou 1

On admet que le procédé de transmission entre 2 individus A et B (ou encore, entre 2 "stations" A et B) est tel que, lorsque A émet une valeur de l'information à destination de B, B reçoive cette information avec la probabilité p, et donc l'autre information avec la probabilité $q = 1 - p$; on a, bien entendu, $p \in]0, 1[$.

Soit $n \in \mathbb{N}$

On considère $n + 1$ individus successifs : $i_0, i_1, \ldots, i_n$

L'information émise par i_0 à destination de i_1 est elle-même transmise par i_1 à i_2, et ainsi de suite jusqu'à i_n.

Pour $k \in \{1, \cdots, n\}$, on note A_k l'événement

$$A_k = \{\text{L'individu } i_k \text{ reçoit la même information que celle émise par } i_0\}$$

et p_k est la probabilité $\mathbf{P}(A_k)$; on pose $p_0 = 1$

1. *En écrivant $A_{k+1} = A_{k+1} \cap \left(A_k \cup \overline{A_k}\right)$, exprimer p_{k+1} en fonction de p_k*

   Ici, tout est donné!!

   De $A_{k+1} = A_{k+1} \cap \left(A_k \cup \overline{A_k}\right)$, nous pouvons écrire $A_{k+1} = (A_{k+1} \cap A_k) \cup \left(A_{k+1} \cap \overline{A_k}\right)$ et donc

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(A_{k+1}) &= \mathbf{P}(A_{k+1} \cap A_k) + \mathbf{P}\left(A_{k+1} \cap \overline{A_k}\right) \\ &= \mathbf{P}(A_{k+1}/A_k)\,\mathbf{P}(A_k) + \mathbf{P}\left(A_{k+1}/\overline{A_k}\right)\mathbf{P}\left(\overline{A_k}\right) \\ &= \mathbf{P}(A_{k+1}/A_k)\,p_k + \mathbf{P}\left(A_{k+1}/\overline{A_k}\right)(1 - p_k)\end{aligned}$$

- ⋆ Etude de $\mathbf{P}\left(A_{k+1}/A_k\right)$
  On sait que l'événement A_k est réalisé, c'est à dire que L'individu i_k reçoit la même information que celle émise L'événement A_{k+1} signifie que l'individu i_{k+1} reçoit l'information émise par l'individu i_0 et que donc i_{k+1} reçoit l'information émise par l'individu i_k.
  Ainsi, $\mathbf{P}\left(A_{k+1}/A_k\right) = p$
- ⋆ Etude de $\mathbf{P}\left(A_{k+1}/\overline{A_k}\right)$
  Une fois l'exposé ci-dessus réalisé, il est aisé de voir que l'événement A_k n'est pas réalisé, c'est à dire que L'individu i_k n'a pas reçu la même information que celle émise par i_0 ; L'événement A_{k+1} signifie que l'individu i_{k+1} reçoit l'information émise par l'individu i_0 et que donc i_{k+1} n'a pas reçu l'information émise par l'individu i_k.
  Ainsi, $\mathbf{P}\left(A_{k+1}/\overline{A_k}\right) = 1-p$

Et donc

$$\mathbf{P}\left(A_{k+1}\right) = \mathbf{P}\left(A_{k+1}/A_k\right)p_k + \mathbf{P}\left(A_{k+1}/\overline{A_k}\right)(1-p_k) = p\times p_k + (1-p)(1-p_k) = (2p-1)\,p_k + (1-p)$$

2. *En déduire l'expression de p_n en fonction de n et p.*

   Nous avons, d'après la question précédente $p_{k+1} = (2p-1)\,p_k + (1-p)$.
   D'où

$$\begin{aligned} p_n = &\ (2p-1)^n\left(p_0 - \frac{1-p}{1-(2p-1)}\right) + \frac{1-p}{1-(2p-1)} \\ = &\ (2p-1)^n\left(p_0 - \frac{1-p}{2-2p}\right) + \frac{1-p}{2-2p} \\ = &\ (2p-1)^n\left(1-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \\ = &\ \frac{1}{2}(2p-1)^n + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

   Nous avons donc $p_n = \frac{1}{2}(2p-1)^n + \frac{1}{2}$

3. *Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$. Que conclure ?*

   Comme $0 < p < 1$, nous avons $-1 < 2p-1 < 1$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(2p-1)^n = 0$; d'où nous déduisons que $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \frac{1}{2}$
   Ceci sous-entend que, quels que soient les moyens utilisés pour faire parvenir un signal d'un point à un autre, et si les individus sont nombreux, la probabilité que le dernier individu reçoive le même signal que celui émit par le premier est toujours de $\frac{1}{2}$

Exercice 31 :

Monsieur IKCX, possède depuis plusieurs années un téléphone portable. Il étudie l'évolution de sa consommation sur plusieurs mois. Pour $n \in \mathbb{N}$, on appelle A_n l'événement

$$A_n = \{\textit{Monsieur IKCX dépasse son forfait au mois N° } n\}$$

Nous avons, pour $n > 1$:

$$\begin{cases} \mathbf{P}\left(\{A_n/A_{n-1}\}\right) = \frac{1}{5} \\ \mathbf{P}\left(\{A_n/\overline{A_{n-1}}\}\right) = \frac{2}{5} \\ \mathbf{P}\left(\{A_1\}\right) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Nous posons ensuite $\mathbf{P}\left(\{A_n\}\right) = a_n$ et $V_n = \begin{pmatrix} a_n \\ 1-a_n \end{pmatrix}$

1. *Démontrer que $V_{n+1} = MV_n$ où M est la matrice $M = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$.*

   Nous avons donc $a_{n+1} = \mathbf{P}(\{A_{n+1}\})$. Comme d'habitude, nous avons :

   ⋆ $A_{n+1} = A_{n+1} \cap \left(A_n \cup \overline{A_n}\right) = (A_{n+1} \cap A_n) \cup \left(A_{n+1} \cap \overline{A_n}\right)$

   D'où nous tirons, comme à chaque fois :

   $$\mathbf{P}(A_{n+1}) = \mathbf{P}(A_{n+1} \cap A_n) + \mathbf{P}\left(A_{n+1} \cap \overline{A_n}\right) = \mathbf{P}(A_{n+1}/A_n)\,\mathbf{P}(A_n) + \mathbf{P}\left(A_{n+1}/\overline{A_n}\right)\mathbf{P}\left(\overline{A_n}\right)$$

   D'où nous tirons :

   $$a_{n+1} = \frac{1}{5}a_n + \frac{2}{5}(1 - a_n)$$

   ⋆ $\overline{A_{n+1}} = \overline{A_{n+1}} \cap \left(A_n \cup \overline{A_n}\right) = \left(\overline{A_{n+1}} \cap A_n\right) \cup \left(\overline{A_{n+1}} \cap \overline{A_n}\right)$

   D'où nous tirons, comme à chaque fois :

   $$\mathbf{P}\left(\overline{A_{n+1}}\right) = \mathbf{P}\left(\overline{A_{n+1}} \cap A_n\right) + \mathbf{P}\left(\overline{A_{n+1}} \cap \overline{A_n}\right) = \mathbf{P}\left(\overline{A_{n+1}}/A_n\right)\mathbf{P}(A_n) + \mathbf{P}\left(\overline{A_{n+1}}/\overline{A_n}\right)\mathbf{P}\left(\overline{A_n}\right)$$

   D'où nous tirons :

   $$1 - a_{n+1} = \frac{4}{5}a_n + \frac{3}{5}(1 - a_n)$$

   Nous avons donc :

   $$V_{n+1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5}a_n + \frac{2}{5}(1 - a_n) \\ \frac{4}{5}a_n + \frac{3}{5}(1 - a_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ 1 - a_n \end{pmatrix}$$

   Nous avons donc bien $V_{n+1} = MV_n$ où M est la matrice $M = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$

2. *Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $V_n = M^{n-1}V_1$*

   C'est une question très simple qui se démontre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$

   ⇒ C'est vrai pour $n = 1$

   En effet, si nous posons $M^0 = \mathrm{Id}_2$, nous avons, bien sûr $V_1 = \mathrm{Id}_2 V_1 \iff V_1 = M^0 V_1$

   ⇒ Supposons que nous ayions $V_n = M^{n-1}V_1$

   ⇒ Etudions maintenant V_{n+1}

   Nous avons donc :

   $$V_{n+1} = MV_n = M\left(M^{n-1}V_1\right) = \left(M \times M^{n-1}\right)V_1 = M^n V_1$$

   Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $V_n = M^{n-1}V_1$

3. *On pose $P = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ avec $a + b = 1$; Résoudre l'équation $P = M \times P$*

   Nous avons

   $$\begin{aligned} P = M \times P &\iff \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} a = & \frac{1}{5}a + \frac{2}{5}b \\ b = & \frac{4}{5}a + \frac{3}{5}b \\ 1 = & a + b \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 2a - b = & 0 \\ a + b = & 1 \end{cases} \\ &\iff a = \frac{1}{3} \text{ et } b = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

4. *D'après la question 1 nous avons la relation :* $a_{n+1} = \dfrac{-1}{5}a_n + \dfrac{2}{5}$
Donner $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ *; faire le lien avec la question 3*
Nous avons $a_n = \left(\dfrac{-1}{5}\right)^{n-1}\left(a_1 - \dfrac{\frac{2}{5}}{1-\frac{2}{5}}\right) + \dfrac{\frac{2}{5}}{1-\frac{2}{5}} = \dfrac{1}{6}\times\left(\dfrac{-1}{5}\right)^{n-1} + \dfrac{1}{3}$
Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \dfrac{1}{3}$
Donc, lorsque n devient très grand, la probabilité pour que M. IKCX dépasse son forfait est de $\dfrac{1}{3}$; c'est la probabilité stationnaire.

Exercice 32 :

Une pièce de monnaie amène « pile » avec la probabilité p et « face » avec la probabilité $q = 1 - p$; on lance indéfiniment cette pièce, et les lancers successifs sont indépendants.

1. A_n *est l'événement :* $A_n = \{$*« pile » sort pour la 1ère fois au n-ième lancer*$\}$. *Calculer* $\left(\mathbf{P}\left(A_n\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$
On appelle $X_k = \{$« pile » sort au k-ième lancer$\}$. Nous avons $\mathbf{P}\left(X_k\right) = p$
Simplement, nous avons $A_n = \overline{X_1}\cap\overline{X_2}\cap\cdots\overline{X_{n-1}}\cap X_n$.
De l'indépendance, nous avons $\mathbf{P}\left(A_n\right) = \left(\prod\limits_{k=1}^{n-1}\mathbf{P}\left(\overline{X_k}\right)\right)\mathbf{P}\left(X_n\right) = (1-p)^{n-1}p$
Donc, $\mathbf{P}\left(A_n\right) = (1-p)^{n-1}p$
2. *Soit B l'événement :* $B = \{$*On obtient « pile »*$\}$ *Montrer que cet événement est quasi-certain*
B est réalisé s'il existe $k\in\mathbb{N}^*$ tel que A_k soit réalisé. Donc $B = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}^*} A_k$ et donc :
$$\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} A_k\right) = \sum_{k\geqslant 1}\mathbf{P}\left(A_k\right) = \sum_{k\geqslant 1}(1-p)^{k-1}p = p\sum_{k\geqslant 0}(1-p)^k = \frac{p}{1-(1-p)} = 1$$
Donc, $\mathbf{P}(B) = 1$ et B est un événement quasi certain
3. *Soit C l'événement :*
$$C = \{\textit{On obtient « pile » pour la première fois au bout d'un nombre pair de lancers}\}$$
Montrer que $C = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} A_{2k}$ *et calculez* $\mathbf{P}(C)$
L'événement C est réalisé s'il existe $k\in\mathbb{N}^*$ tel que l'événement A_{2k} est réalisé.
Et donc $C = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}^*} A_{2k}$. Alors
$$\begin{aligned}\mathbf{P}(C) = {} & \mathbf{P}\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} A_{2k}\right)\\ = {} & \sum_{k\geqslant 1}\mathbf{P}\left(A_{2k}\right)\\ = {} & \sum_{k\geqslant 1} p(1-p)^{2k-1}\\ = {} & \frac{p}{1-p}\sum_{k\geqslant 1}\left[(1-p)^2\right]^k\\ = {} & \frac{p}{1-p}\times\frac{(1-p)^2}{1-(1-p)^2}\\ = {} & \frac{p(1-p)}{1-(1-p)^2} = \frac{p(1-p)}{2p-p^2} = \frac{1-p}{2-p}\end{aligned}$$
D'où $\mathbf{P}(C) = \dfrac{1-p}{2-p}$

4. *Soit D l'événement :*

$$D = \{\text{On obtient} \ll \text{pile} \gg \text{ pour la première fois au bout d'un nombre de lancers multiple de 3}\}$$

Calculez $\mathbf{P}(D)$

Le raisonnement à tenir est le même que le précédent. Donc $D = \bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} A_{3k}$. Alors

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(D) &= \mathbf{P}\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} A_{3k}\right) \\
&= \sum_{k\geqslant 1} \mathbf{P}(A_{3k}) \\
&= \sum_{k\geqslant 1} p(1-p)^{3k-1} \\
&= \frac{p}{1-p} \sum_{k\geqslant 1} \left[(1-p)^3\right]^k \\
&= \frac{p}{1-p} \times \frac{(1-p)^3}{1-(1-p)^3} \\
&= \frac{p(1-p)^2}{1-(1-p^3+3p^2-3p)} = \frac{(1-p)^2}{p^2-3p+3}
\end{aligned}$$

D'où $\mathbf{P}(D) = \dfrac{(1-p)^2}{p^2-3p+3}$

5. *Les événements C et D sont-ils indépendants ?*

Les événements C et D sont indépendants si et seulement si $\mathbf{P}(C \cap D) = \mathbf{P}(C) \times \mathbf{P}(D)$
C'est quoi l'événement $C \cap D$?
C'est l'événement « On obtient « pile » pour la première fois au bout d'un nombre pair de lancers et d'un nombre de lancers multiple de 3 »
Ainsi, $C \cap D = \{\text{On obtient} \ll \text{pile} \gg \text{ pour la première fois au bout d'un nombre de lancers multiple de 6}\}$
Donc, $C \cap D = \bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} A_{6k}$. Alors :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(C \cap D) &= \mathbf{P}\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} A_{6k}\right) \\
&= \sum_{k\geqslant 1} \mathbf{P}(A_{6k}) \\
&= \sum_{k\geqslant 1} p(1-p)^{6k-1} \\
&= \frac{p}{1-p} \sum_{k\geqslant 1} \left[(1-p)^6\right]^k \\
&= \frac{p}{1-p} \times \frac{(1-p)^6}{1-(1-p)^6} \\
&= \frac{(1-p)^5}{1-(1-p)^6}
\end{aligned}$$

Donc $\mathbf{P}(C \cap D) = \dfrac{(1-p)^5}{1+(1-p)+(1-p)^2+(1-p)^3+(1-p)^4+(1-p)^5}$

$\mathbf{P}(C) \times \mathbf{P}(D) = \dfrac{1}{2-p} \times \dfrac{1}{p^2-3p+3} = \dfrac{1}{6-p^3-p^2-9p}$.

Comme $\dfrac{(1-p)^5}{1+(1-p)+(1-p)^2+(1-p)^3+(1-p)^4+(1-p)^5} \neq \dfrac{1}{6-p^3-p^2-9p}$, nous avons $\mathbf{P}(C \cap D) \neq \mathbf{P}(C) \times \mathbf{P}(D)$
Les événements C et D ne sont donc pas indépendants

Comment démontrer $\mathbf{P}(C\cap D)\neq \mathbf{P}(C)\times\mathbf{P}(D)$?
C'est juste une histoire de calculs...fastidieux.
Posons $q=1-p$
Alors $\mathbf{P}(C)=\dfrac{q}{1+q}$,$\mathbf{P}(D)=\dfrac{q^2}{1+q+q^2}$, et pour terminer, $\mathbf{P}(C\cap D)=\dfrac{q^5}{1+q+q^2+q^3+q^4+q^5}$.
La question devient alors : quand avons nous :

$$\frac{q}{1+q}\times\frac{q^2}{1+q+q^2}=\frac{q^3}{(1+q)(1+q+q^2)}=\frac{q^5}{1+q+q^2+q^3+q^4+q^5}$$

Cette dernière égalité étant équivalente à

$$\begin{gathered}\frac{1}{(1+q)(1+q+q^2)}=\frac{q^2}{1+q+q^2+q^3+q^4+q^5}\text{ puisque }q\neq 0\\ \Longleftrightarrow\\ q^2(1+q)\left(1+q+q^2\right)=1+q+q^2+q^3+q^4+q^5\\ \Longleftrightarrow\\ q^2+2q^3+2q^4+q^5=1+q+q^2+q^3+q^4+q^5\\ \Longleftrightarrow\\ q^3+q^4=1+q\Longleftrightarrow q^3(1+q)=1+q\\ \Longleftrightarrow\\ (1+q)\left(q^3-1\right)=0\end{gathered}$$

Ce qui n'est possible que si $q=1$, c'est à dire $p=0$, ce qui est impossible

Exercice 33 :

On effectue des tirages dans une urne contenant initialement a boules blanches et b boules noires de la façon suivante :

On remet à chaque fois la boule tirée à laquelle on ajoute c boules de même couleur

1. *Calculer la probabilité pour obtenir la **première** boule blanche au n-ième tirage*

   Comme proposé, nous posons $N_j=\{\text{On amène une boule noire au } j\text{-ème tirage}\}$ et si A_n est l'événement « On obtient la première boule blanche au n-ième tirage ».
   Il est clair que nous avons $A_n=N_1\cap N_2\cap\cdots\cap N_{n-1}\cap\overline{N_n}$
   Comme le tirage au moment k est fixé par résultats antérieurs, il est apparaît bon d'utiliser la formule des probabilités totales généralisée :

   $$\mathbf{P}(A_n)=\mathbf{P}(N_1)\times\mathbf{P}(N_2/N_1)\times\mathbf{P}(N_3/N_1\cap N_2)\times\cdots\times\mathbf{P}\left(\overline{N_n}/N_1\cap N_2\cap\dots N_{n-1}\right)$$

   Si les tirages 1 à $k-1$ amènent des boules noires, sachant qu'à chaque tirage, on ajoute c boules noires, juste avant le k-ième tirage, nous aurons ajouté $(k-1)c$ boules noires, de telle sorte que nous avons $b+(k-1)c$ boules noires. Il y a donc, dans l'urne, avant le k-ième tirage, $a+b+(k-1)c$ boules dont a boules blanches. Donc :

   $$\mathbf{P}(N_k/N_1\cap N_2\cap\dots N_{k-1})=\frac{b+(k-1)c}{a+b+(k-1)c}$$

   D'autre part, $\mathbf{P}(N_1)=\dfrac{b}{a+b}$ et $\mathbf{P}\left(\overline{N_n}/N_1\cap N_2\cap\dots N_{n-1}\right)=\dfrac{a}{a+b+(n-1)c}$. Donc :

   $$\begin{aligned}\mathbf{P}(A_n)&=\frac{b}{a+b}\times\frac{b+c}{a+b+c}\times\cdots\times\frac{b+(n-2)c}{a+b+(n-2)c}\times\frac{a}{a+b+(n-1)c}\\&=\frac{a}{a+b+(n-1)c}\times\prod_{k=0}^{n-2}\frac{b+kc}{a+b+kc}\end{aligned}$$

2. ⇒ *Soit C_m l'événement $C_m = \{$Les m premiers tirages amènent m boules noires$\}$. Exprimer C_m en fonction des N_j et donner $\mathbf{P}(C_m)$ sous forme de somme.*

   Nous avons $C_m = \bigcap_{k=1}^{m} N_k$. La difficulté, ici, est que les événements $(N_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$ ne sont pas indépendants. Nous allons donc utiliser les probabilités conditionnelles. Donc :

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{m} N_k\right) = \mathbf{P}(N_1) \times \mathbf{P}(N_2/N_1) \times \mathbf{P}(N_3/N_1 \cap N_2) \times \cdots \times \mathbf{P}(N_m/N_1 \cap N_2 \cap \ldots N_{m-1})$$

   Et donc, $\mathbf{P}(C_m) = \prod_{k=0}^{m-1} \dfrac{b+kc}{a+b+kc}$

   ⇒ *Démontrer que $\lim_{m\to+\infty} \ln(\mathbf{P}(C_m)) = -\infty$*

   Nous avons $\ln(\mathbf{P}(C_m)) = \ln\left(\prod_{k=0}^{m-1} \dfrac{b+kc}{a+b+kc}\right) = \sum_{k=0}^{n} \ln\left(\dfrac{b+kc}{a+b+kc}\right)$

   Rechercher $\lim_{m\to+\infty} \ln(\mathbf{P}(C_m))$, c'est étudier la convergence de la série $\sum_{k\geqslant 0} \ln\left(\dfrac{b+kc}{a+b+kc}\right)$.

   Nous avons $\dfrac{b+kc}{a+b+kc} = \dfrac{a+b+kc}{a+b+kc} - \dfrac{a}{a+b+kc} = 1 - \dfrac{a}{a+b+kc}$

   En $+\infty$, nous avons $\ln\left(\dfrac{b+kc}{a+b+kc}\right) = \ln\left(1 - \dfrac{a}{a+b+kc}\right) \underset{+\infty}{\approx} \dfrac{-a}{kc}$

   La série $\sum_{k\geqslant 1} \dfrac{-a}{kc}$ étant divergente, la série $\sum_{k\geqslant 0} \ln\left(\dfrac{b+kc}{a+b+kc}\right)$ est, elle aussi, divergente.

   Comme, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, nous avons $\dfrac{b+kc}{a+b+kc} < 1$, nous avons $\ln\left(\dfrac{b+kc}{a+b+kc}\right) < 0$ et donc $\sum_{k\geqslant 0} \ln\left(\dfrac{b+kc}{a+b+kc}\right) = -\infty$.

   En d'autres termes, $\lim_{m\to+\infty} \ln(\mathbf{P}(C_m)) = -\infty$

3. *Soit C l'événement $C = \{$Il n'apparaît que des boules noires$\}$. Exprimer C en fonction des $(C_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ puis, conclure que $\mathbf{P}(C) = 0$.*

   Clairement, si l'événement C est réalisé, alors, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, C_m est réalisé, et nous avons $C = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} C_m$.

   D'autre part, la suite d'événements $(C_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante, puisque si C_{m+1} est réalisé, ce qui veut dire que lors des $m+1$ premiers tirages, nous ne tirons que des boules noires, alors, en particulier, les m premiers tirages ne voient que des boules noires, et donc $C_{m+1} \subset C_m$

   D'après la proposition 15.3.4, nous avons $\mathbf{P}(C) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} C_m\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(C_m)$

   Nous venons de montrer que $\lim_{m\to+\infty} \ln(\mathbf{P}(C_m)) = -\infty$. Comme $\mathbf{P}(C_m) = e^{\ln(\mathbf{P}(C_m))}$, nous avons $\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(C_m) = 0$

   L'événement C est donc quasi-impossible.

4. *Quelle est la valeur de $\sum_{n\geqslant 1} \mathbf{P}(A_n)$. Interpréter ce résultat*

   Nous appelons A l'événement « Il apparaît une boule blanche »

   Nous avons $A = \overline{C}$ et donc $\mathbf{P}(A) = 1$.

   D'autre part, nous avons $A = \bigcup_{k\geqslant 1} A_k$, et de manière évidente, les événements $(A_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ sont 2 à 2 incompatibles. Donc,

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{k\geqslant 1} A_k\right) = \sum_{n\geqslant 1} \mathbf{P}(A_n) = 1$$

   Il est donc presque certain que l'un des événements A_k se produira.

Exercice 34 :

Un joueur joue une série de manches indépendantes (Dés, « Pile ou Face », etc....)

- ▷ *A chaque manche, il gagne 1€ avec la probabilité p et perd 1 € avec la probabilité $1-p$*
- ▷ *Le jeu s'arrête lorsque le joueur a gagné N € ou lorsqu'il est ruiné.*

Nous notons u_k la probabilité qu'a le joueur d'être ruiné lorsqu'il possède k € au départ

1. *On suppose $p \neq \dfrac{1}{2}$*

   (a) *Calculer u_0 et u_N*

   Nous commençons par des cas particuliers ; u_k est la probabilité qu'a le joueur d'être ruiné lorsqu'il possède k € au départ

   - ⋆ Si le joueur n'a que 0€lorsqu'il commence à jouer, il est déjà ruiné ! ! Et donc $u_0 = 1$
   - ⋆ Par le même raisonnement, si le joueur a N€ lorsqu'il commence à jouer, il doit s'arrêter avant de commencer ; et il n'est pas ruiné ! ! Et donc $u_N = 0$

   (b) *Montrer que $u_k = pu_{k+1} + (1-p)\,u_{k-1}$*

   Nous appelons E_k, l'événement :$E_k = \{$Le joueur est ruiné avec un capital initial de k€$\}$; nous avons $\mathbf{P}(E_k) = u_k$

   A est l'événement $A = \{$Le joueur gagne la première manche$\}$; alors

   $$E_k = E_k \cap \left(A \cup \overline{A}\right) = (E_k \cap A) \cup \left(E_k \cap \overline{A}\right)$$

   Et donc

   $$\mathbf{P}(E_k) = \mathbf{P}(E_k \cap A) + \mathbf{P}\left(E_k \cap \overline{A}\right) = \mathbf{P}(E_k/A)\,\mathbf{P}(A) + \mathbf{P}\left(E_k/\overline{A}\right)\mathbf{P}\left(\overline{A}\right)$$

   Il est clair que $\mathbf{P}(A) = p$ et que $\mathbf{P}\left(\overline{A}\right) = 1-p$

   - ⋆ <u>Etude de $\mathbf{P}(E_k/A)$</u>

     Le joueur est parti avec k€, mais nous savons qu'il a remporté la première manche et il a donc, maintenant, dans son escarcelle, $k+1$€ et donc, $\mathbf{P}(E_k/A) = u_{k+1}$
   - ⋆ Avec ce même raisonnement, nous avons $\mathbf{P}\left(E_k/\overline{A}\right) = u_{k-1}$

   D'où nous tirons :

   $$\mathbf{P}(E_k) = \mathbf{P}(E_k/A)\,\mathbf{P}(A) + \mathbf{P}\left(E_k/\overline{A}\right)\mathbf{P}\left(\overline{A}\right) = pu_k + (1-p)\,u_{k-1} \iff u_k = pu_{k+1} + (1-p)\,u_{k-1}$$

   (c) *En déduire que $u_k = \dfrac{\left(\frac{1-p}{p}\right)^k - \left(\frac{1-p}{p}\right)^N}{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^N}$*

   → La relation $u_k = pu_{k+1} + (1-p)\,u_{k-1} \iff pu_{k+1} - u_k + (1-p)\,u_{k-1} = 0$ est une relation linéaire qui définit bien la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

   L'équation caractéristique est donnée par $pr^2 - r + (1-p) = 0$ de discriminant $\Delta = 1 - 4p(1-p) = 4p^2 - 4p + 1 = (2p-1)^2$

   Comme $p \neq \dfrac{1}{2}$, nous avons $\Delta > 0$ et il existe donc 2 racines q_1 et q_2 à l'équation caractéristique.

   $$q_1 = \frac{1 + (2p-1)}{2p} = 1 \qquad q_2 = \frac{1 - (2p-1)}{2p} = \frac{2-2p}{2p} = \frac{1-p}{p}$$

   → Ainsi, pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifiant $pu_{k+1} - u_k + (1-p)\,u_{k-1} = 0$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$ tels que $u_n = \lambda q_1^n + \mu q_2^n = \lambda + \mu\left(\dfrac{1-p}{p}\right)^n$

→ Il faut, maintenant, préciser les valeurs de λ et μ. Nous avons que $u_0 = 1$ et $u_N = 0$, nous pouvons alors poser :

$$\left\{\begin{array}{rl} \lambda+\mu = & 1 \\ \lambda+\mu\left(\dfrac{1-p}{p}\right)^N = & 0 \end{array}\right.$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\left\{\begin{array}{rl} \lambda+\mu = & 1 \\ 1-\mu+\mu\left(\dfrac{1-p}{p}\right)^N = & 0 \end{array}\right.$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\mu = \frac{1}{1-\left(\dfrac{1-p}{p}\right)^N} \qquad \lambda = -\frac{\left(\dfrac{1-p}{p}\right)^N}{1-\left(\dfrac{1-p}{p}\right)^N}$$

→ D'où,

$$u_k = -\frac{\left(\dfrac{1-p}{p}\right)^N}{1-\left(\dfrac{1-p}{p}\right)^N} + \frac{\left(\dfrac{1-p}{p}\right)^k}{1-\left(\dfrac{1-p}{p}\right)^N} = \frac{\left(\dfrac{1-p}{p}\right)^k - \left(\dfrac{1-p}{p}\right)^N}{1-\left(\dfrac{1-p}{p}\right)^N}$$

(d) *Que se passe-t-il lorsque N tend vers $+\infty$*

⇒ Si $p < \dfrac{1}{2}$, ce qui veut dire que le joueur est défavorisé, nous avons alors $1-p > \dfrac{1}{2}$ et donc $\dfrac{1-p}{p} > 1$ et nous en déduisons que $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\left(\frac{1-p}{p}\right)^N = +\infty$ et donc $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\frac{\left(\frac{1-p}{p}\right)^k - \left(\frac{1-p}{p}\right)^N}{1-\left(\frac{1-p}{p}\right)^N} = 1$, c'est à dire $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} u_k = 1$

Ce qui veut dire, que, dans ce cas, si le joueur, partant d'une somme de k €, attend d'avoir N€ pour s'arrêter, a de plus en plus de chances d'être ruiné.

⇒ Si, cette fois ci $p > \dfrac{1}{2}$, nous avons alors $1-p < \dfrac{1}{2}$ et donc $\dfrac{1-p}{p} < 1$ et nous en déduisons que $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\left(\frac{1-p}{p}\right)^N = 0$ et donc $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\frac{\left(\frac{1-p}{p}\right)^k - \left(\frac{1-p}{p}\right)^N}{1-\left(\frac{1-p}{p}\right)^N} = \left(\frac{1-p}{p}\right)^k$, c'est à dire $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} u_k = \left(\frac{1-p}{p}\right)^k$

2. *Reprendre les questions précédentes avec $p = \dfrac{1}{2}$*

Cette fois-ci, le jeu est équitable.

→ Nous avons toujours la relation $u_k = pu_{k+1} + (1-p)\,u_{k-1} \Longleftrightarrow \dfrac{1}{2}u_{k+1} - u_k + \dfrac{1}{2}u_{k-1} = 0$.

L'équation caractéristique est donnée par $\dfrac{1}{2}r^2 - r + \dfrac{1}{2} = 0$ de discriminant $\Delta = 0$

Vous obtenons donc $q = 1$ comme racine double

→ Ainsi, pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifiant $\dfrac{1}{2}u_{k+1} - u_k + \dfrac{1}{2}u_{k-1} = 0$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$ tels que $u_n = \lambda + \mu n$

→ Il faut, maintenant, préciser les valeurs de λ et μ. Nous avons que $u_0 = 1$ et $u_N = 0$, nous pouvons alors poser :

$$\left\{\begin{array}{rl} \lambda = & 1 \\ \lambda+\mu N = & 0 \end{array}\right.$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\mu = \frac{-1}{N} \qquad \lambda = 1$$

→ D'où, dans le cas où $p = \dfrac{1}{2}$ $u_k = 1 - \dfrac{k}{N}$

→ Et donc $\lim\limits_{N \to +\infty} u_k = 1$

Ce qui veut dire que le joueur a de plus en plus de chances d'être ruiné, avec un jeu équitable, s'il attend d'amasser N€ pour N assez grand.

Exercice 35 :

Une urne U_1 contient une boule noire et cinq boules blanches.
Une urne U_2 contient quatre boules noires et deux boules blanches.
On tire une boule au hasard d'une des deux urnes. On note la couleur de la boule et on la replace dans l'urne.
Si la boule est blanche on effectue un autre tirage dans la même urne, sinon on tire une seconde boule dans l'autre urne.
On répète cette expérience une infinité de fois.
Soient A_n l'événement :

$$A_n = \{\textit{Le } n\textit{-ième tirage a lieu dans l'urne } U_1\}$$

et B_n l'événement :

$$B_n = \{\textit{Le } n\textit{-ième tirage amène une boule blanche}\}$$

1. (a) *Calculer les probabilités conditionnelles $\mathbf{P}\left(A_n/A_{n-1}\right)$ et $\mathbf{P}\left(A_n/\overline{A_{n-1}}\right)$*

→ Calcul de $\mathbf{P}\left(A_n/A_{n-1}\right)$

Nous savons qu'au tirage d'ordre $(n-1)$, nous avons fait un tirage dans l'urne U_1. La probabilité qu'au tirage d'ordre n nous puisions une boule à nouveau dans l'urne U_1 et donc nous avons $\mathbf{P}\left(A_n/A_{n-1}\right) = \dfrac{5}{6}$

→ Calcul de $\mathbf{P}\left(A_n/\overline{A_{n-1}}\right)$

Cette fois ci, nous savons que l'événement $\overline{A_{n-1}}$ est réalisé, et donc qu'au tirage d'ordre $(n-1)$, le tirage se fait dans l'urne U_2 et que le n-ième tirage se fera dans l'urne U_1. La question est donc de donner la probabilité de tirer une boule noire dans l'urne U_2, et donc $\mathbf{P}\left(A_n/\overline{A_{n-1}}\right) = \dfrac{2}{3}$

(b) *Soit $p_n = \mathbf{P}\left(A_n\right)$. Etablir une relation de récurrence entre p_n et p_{n-1} et en déduire p_n*

Comme d'habitude, nous écrivons :

$$A_n = A_n \cap \Omega = A_n \cap \left(A_{n-1} \cup \overline{A_{n-1}}\right) = \left(A_n \cap A_{n-1}\right) \cup \left(A_n \cap \overline{A_{n-1}}\right)$$

D'où

$$\mathbf{P}\left(A_n\right) = \mathbf{P}\left(A_n \cap A_{n-1}\right) + \mathbf{P}\left(A_n \cap \overline{A_{n-1}}\right) = \mathbf{P}\left(A_n/A_{n-1}\right)\mathbf{P}\left(A_{n-1}\right) + \mathbf{P}\left(A_n/\overline{A_{n-1}}\right)\mathbf{P}\left(\overline{A_{n-1}}\right)$$

C'est à dire $p_n = \dfrac{5}{6}p_{n-1} + \dfrac{2}{3}\left(1 - p_{n-1}\right) \Longleftrightarrow p_n = \dfrac{1}{6}p_{n-1} + \dfrac{2}{3}$

La suite $\left(p_n\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite du type $p_n = ap_{n-1} + b$, et d'après les études précédentes, nous avons :

$$p_n = \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}\left(p_1 - \frac{4}{5}\right) + \frac{4}{5}$$

C'est quoi p_1 ?... C'est la probabilité pour que le premier tirage se passe dans l'urne U_1, et nous avons donc $p_1 = \dfrac{1}{2}$

Et donc, pour conclure, $p_n = \left(\dfrac{1}{6}\right)^{n-1}\left(-\dfrac{3}{10}\right) + \dfrac{4}{5}$

2. *Soit $q_n = \mathbf{P}\left(B_n\right)$*

(a) *Exprimer q_n en fonction de p_n*

Comme $q_n = \mathbf{P}(B_n)$, nous allons nous intéresser à l'événement B_n. Nous avons, en effet, et comme d'habitude :

$$B_n = B_n \cap \Omega = B_n \cap \left(A_n \cup \overline{A_n}\right) = (B_n \cap A_n) \cup \left(B_n \cap \overline{A_n}\right)$$

Et donc, comme à chaque fois :

$$\mathbf{P}(B_n) = \mathbf{P}(B_n \cap A_n) + \mathbf{P}\left(B_n \cap \overline{A_n}\right) = \mathbf{P}(B_n/A_n)\,\mathbf{P}(A_n) + \mathbf{P}\left(B_n/\overline{A_n}\right)\mathbf{P}\left(\overline{A_n}\right)$$

→ Calcul de $\mathbf{P}(B_n/A_n)$
On sait que l'on "pioche" dans l'urne U_1, et donc quelle est la probabilité pour que l'on ait une boule blanche ? C'est simple !! Nous avons $\mathbf{P}(B_n/A_n) = \frac{5}{6}$

→ Calcul de $\mathbf{P}\left(B_n/\overline{A_n}\right)$

Avec le même raisonnement, nous avons $\mathbf{P}\left(B_n/\overline{A_n}\right) = \frac{1}{3}$

D'où nous avons $q_n = \frac{5}{6}p_n + \frac{1}{3}(1 - p_n) = \frac{1}{2}p_n + \frac{1}{3}$

(b) *Calculer q_n*

De $q_n = \frac{1}{2}p_n + \frac{1}{3}$, nous tirons que $q_n = \left(-\frac{3}{20}\right)\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} + \frac{11}{15}$

Exercice 36 :

Cet exercice vient en complément de la proposition 15.3.8 sur **le lemme de BOREL-CANTELLI**

1. *Dans cette proposition, nous affirmions que, si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements d'un espace probabilisé $\{\Omega; \mathcal{F}; \mathbf{P}\}$ tels que la série $\sum_{n\geqslant 0} \mathbf{P}(A_n)$ converge, et si*

$$B = \{\textit{Une infinité d'événements } A_n \textit{ se réalisent}\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(\bigcup_{p\geqslant n} A_p\right)$$

alors, $\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(\bigcup_{p\geqslant n} A_p\right)\right) = 0$
En d'autres termes, $\mathbf{P}$-presque sûrement, seuls un nombre fini d'événements A_n se produisent, autrement dit $\mathbf{P}\left(\overline{B}\right) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(\bigcap_{p\geqslant n} \overline{A_p}\right)\right) = 1$

2. *Nous allons compléter la proposition 15.3.8 en supposant maintenant que les événements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont mutuellement indépendants, et que la série $\sum_{n\geqslant 0} \mathbf{P}(A_n)$ diverge, c'est à dire $\lim_{n\to+\infty} \sum_{p=0}^{n} \mathbf{P}(A_n) = +\infty$*

Ré-écrivons ce que veut dire que les événements de la suite d'événements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont mutuellement indépendants :

A toute suite finie $A_{n_1}, A_{n_2}, \cdots, A_{n_p}$ d'événements extraits de la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, nous avons

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{p} A_{n_k}\right) = \prod_{k=1}^{p} \mathbf{P}(A_{n_k})$$

(a) *On appelle $E_n = \bigcap_{p\geqslant n} \overline{A_p}$, c'est à dire que $\overline{B} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$; montrer que la suite des événements $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, c'est à dire que $E_n \subset E_{n+l}$, et en déduire que $\mathbf{P}\left(\overline{B}\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(E_n)$*

$\rightarrow$ Montrons que $E_n \subset E_{n+l}$

Nous allons montrer que, de manière générale, si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'ensembles, alors la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $Y_n = \bigcap\limits_{p\geqslant n} X_p$ est une suite croissante, c'est à dire, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $Y_n \subset Y_{n+1}$.

En effet, nous avons $Y_n = \bigcap\limits_{p\geqslant n} X_p = \left(\bigcap\limits_{p\geqslant n+1} X_p\right) \cap X_n = Y_{n+1} \cap X_n$

Ainsi, si $\omega \in Y_n$, alors $\omega \in Y_{n+1} \cap X_n$ et donc $\omega \in Y_{n+1}$

Et nous avons donc $Y_n \subset Y_{n+1}$

Ainsi, de la manière dont est construite la suite $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$, elle est donc croissante, et donc nous avons $E_n \subset E_{n+l}$

$\rightarrow$ Montrons que $\mathbf{P}\left(\overline{B}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(E_n\right)$

Comme nous avons $\overline{B} = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n$. La suite $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant croissante, d'après 15.3.3 :

$$\mathbf{P}\left(\overline{B}\right) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(E_n\right)$$

Ce que nous voulions

(b) *Démontrer que* $\mathbf{P}\left(\bigcap\limits_{p\geqslant n} \overline{A_p}\right) = \mathbf{P}\left(E_n\right) = \lim\limits_{N\to+\infty} \prod\limits_{p=n}^{N} \mathbf{P}\left(\overline{A_p}\right)$

Soit $n \in \mathbb{N}$, fixé

Pour $N \in \mathbb{N}$, nous appelons $F_N = \bigcap\limits_{p=n}^{N} \overline{A_p}$

$\star$ Nous avons $F_{N+1} \subset F_N$

Il faut donc montrer que la suite $(F_N)_{N\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante ; nous avons, en effet :

$$F_{N+1} = \bigcap_{p=n}^{N+1} \overline{A_p} = \left(\bigcap_{p=k}^{k=N} \overline{A_p}\right) \cap \overline{A_{N+1}} = F_N \cap \overline{A_{N+1}}$$

Ainsi, si $\omega \in F_{N+1}$, alors $\omega \in F_N \cap \overline{A_{N+1}}$ et donc $\omega \in F_N$

La suite $(F_N)_{N\in\mathbb{N}^*}$ est donc décroissante.

$\star$ Nous avons aussi $\bigcap\limits_{N\in\mathbb{N}} F_N = \bigcap\limits_{p\geqslant n} \overline{A_p}$

Il n'est pas inintéressant de voir ce que deviennent les premiers indices pour comprendre ce qui se passe :

$$F_0 = \overline{A_k} \quad F_1 = \overline{A_k} \cap \overline{A_{k+1}} \quad F_N = \overline{A_k} \cap \overline{A_{k+1}} \cap \cdots \cap \overline{A_{k+N}}$$

Et donc, $\bigcap\limits_{N\in\mathbb{N}} F_N = \bigcap\limits_{p\geqslant n} \overline{A_p}$

$\star$ Nous avons donc, d'après 15.3.4, $\mathbf{P}\left(\bigcap\limits_{p\geqslant n} \overline{A_p}\right) = \mathbf{P}\left(\bigcap\limits_{N\in\mathbb{N}} F_N\right) = \lim\limits_{N\to+\infty} \mathbf{P}\left(F_N\right)$ et donc, $\mathbf{P}\left(E_n\right) = \lim\limits_{N\to+\infty} \mathbf{P}\left(F_N\right)$

$\star$ Or, les événements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant mutuellement indépendants :

$$\mathbf{P}\left(F_N\right) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{p=k}^{N} \overline{A_p}\right) = \prod_{p=k}^{N} \mathbf{P}\left(\overline{A_p}\right)$$

$\star$ D'où $\mathbf{P}\left(\bigcap\limits_{p\geqslant k} \overline{A_p}\right) = \mathbf{P}\left(E_n\right) = \lim\limits_{N\to+\infty} \mathbf{P}\left(F_N\right) = \lim\limits_{N\to+\infty} \prod\limits_{p=k}^{N} \mathbf{P}\left(\overline{A_p}\right)$

Ce que nous voulions

(c) *Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $0 \leqslant x < 1$ nous avons $\ln(1-x) \leqslant -x$; en déduire que :*

$$\lim_{N \to +\infty} \left[\ln \left(\prod_{p=n}^{N} \mathbf{P}\left(\overline{A_p}\right) \right) \right] = \lim_{N \to +\infty} \ln\left(\mathbf{P}\left(F_N\right)\right) = -\infty$$

$\Rightarrow$ Pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $0 \leqslant x < 1$ nous avons $\ln(1-x) \leqslant -x$

C'est une question simple, du niveau L_0.

Soit $\Phi : [0;1[\longrightarrow \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in [0;1[$, nous avons $\Phi(x) = \ln(1-x) + x$. De là, la dérivée de Φ donne $\Phi'(x) = \dfrac{-1}{1-x} + 1 = \dfrac{-x}{1-x}$.

Donc, pour tout $x \in [0;1[$, nous avons $\Phi'(x) \leqslant 0$, c'est à dire que Φ est décroissante.

Ainsi, $x \in [0;1[$, nous avons $\Phi(x) \leqslant \Phi(0) \Longleftrightarrow \ln(1-x) + x \leqslant 0 \Longleftrightarrow \ln(1-x) \leqslant -x$

$\Rightarrow$ Montrons que $\lim\limits_{N \to +\infty} \left[\ln \left(\prod\limits_{p=n}^{N} \mathbf{P}\left(\overline{A_p}\right) \right) \right] = -\infty$

$\star$ Nous avons $\mathbf{P}\left(\overline{A_p}\right) = 1 - \mathbf{P}(A_p)$ et

$$\ln \left(\prod_{p=n}^{N} \mathbf{P}\left(\overline{A_p}\right) \right) = \sum_{p=n}^{N} \ln\left(\mathbf{P}\left(\overline{A_p}\right)\right) = \sum_{p=n}^{N} \ln\left(1 - \mathbf{P}(A_p)\right)$$

$\star$ Comme $\ln(1-x) \leqslant -x$, nous avons $\ln(1 - \mathbf{P}(A_p)) \leqslant -\mathbf{P}(A_p)$, de telle sorte que $\sum\limits_{p=n}^{N} \ln(1 - \mathbf{P}(A_p)) \leqslant -\sum\limits_{p=n}^{N} \mathbf{P}(A_p)$

$\star$ Par hypothèse, la série $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{P}(A_n)$ diverge, donc, $\lim\limits_{N \to +\infty} -\sum\limits_{p=n}^{N} \mathbf{P}(A_p) = -\infty$, c'est à dire que $\lim\limits_{N \to +\infty} \sum\limits_{p=n}^{N} \ln(1 - \mathbf{P}(A_p)) = -\infty$ et donc, comme $\ln \left(\prod\limits_{p=n}^{N} \mathbf{P}\left(\overline{A_p}\right) \right) = \sum\limits_{p=n}^{N} \ln(1 - \mathbf{P}(A_p))$, nous avons $\lim\limits_{N \to +\infty} \left[\ln \left(\prod\limits_{p=n}^{N} \mathbf{P}\left(\overline{A_p}\right) \right) \right] = -\infty$, c'est à dire $\lim\limits_{N \to +\infty} \ln(\mathbf{P}(F_N)) = -\infty$

Ce que nous voulions

(d) *Conclure que $\lim\limits_{N \to +\infty} \mathbf{P}(F_N) = 0$, puis que $\mathbf{P}\left(\overline{B}\right) = 0$*

De $\lim\limits_{N \to +\infty} \ln(\mathbf{P}(F_N)) = -\infty =$, nous déduisons que $\lim\limits_{N \to +\infty} \mathbf{P}(F_N) = 0$. Comme $\mathbf{P}(E_n) = \lim\limits_{N \to +\infty} \mathbf{P}(F_N)$, nous avons donc $\mathbf{P}(E_n) = 0$

Nous avons vu que $\overline{B} = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} E_n$ et donc $\mathbf{P}\left(\overline{B}\right) \leqslant \sum\limits_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{P}(E_n) = 0$.

D'où, nous avons $\mathbf{P}\left(\overline{B}\right) = 0$ et $\mathbf{P}(B) = 1$

3. **Application à un problème de « Pile ou Face »**
On lance une pièce de monnaie indéfiniment. La probabilité pour amener « PILE » est p et celle d'amener « FACE » est $q = 1 - p$

(a) *Soit $n \in \mathbb{N}^*$; on note A_n l'événement $A_n = \{$« PILE » apparaît au n-ième lancer$\}$ Donner $\mathbf{P}(A_n)$ et en déduire que la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \mathbf{P}(A_n)$ diverge. Conclure que « PILE » apparaît une infinité de fois de façon quasi-certaine.*

Les lancers sont indépendants, et les événements $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont indépendants.

De plus, $\mathbf{P}(A_n) = p$ et donc, la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \mathbf{P}(A_n)$ est divergente.

D'après le second point du lemme de Borel-Cantelli, « PILE » apparait une infinité de fois de façon quasi-certaine. *(Il en est de même de « FACE » d'ailleurs)*

(b) *Soit $m \in \mathbb{N}^*$. On note E_n l'événement :*

$$E_n = \{\text{Les lancers } nm+1 \text{ à } nm+m \text{ amènent des PILE uniquement}\}$$

Donner $\mathbf{P}(E_n)$ et en déduire que la série $\sum_{n\geqslant 1} \mathbf{P}(E_n)$ diverge. Conclure que la séquence des m « PILE » consécutifs apparaît une infinité de fois.

⇒ Calcul de $\mathbf{P}(E_n)$
L'événement E_n peut s'écrire :

$$\begin{aligned} E_n &= A_{nm+1} \cap A_{nm+2} \cap A_{nm+3} \cap \cdots \cap A_{nm+m} \\ &= \bigcap_{k=1}^{m} A_{nm+k} \end{aligned}$$

Comme les événements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont indépendants, nous avons

$$\mathbf{P}(E_n) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{m} A_{nm+k}\right) = \prod_{k=1}^{m} \mathbf{P}(A_{nm+k}) = p^m$$

⇒ La série $\sum_{n\geqslant 1} \mathbf{P}(E_n)$ diverge
C'est assez évident, puisque p^m est constant ; si nous regardons les sommes partielles, $\sum_{k=1}^{n} p^m$, nous avons $\sum_{k=1}^{n} p^m = np^m$ et $\lim_{n\to+\infty} np^m = +\infty$

⇒ Conclure que la séquence des m « PILE » consécutifs apparaît une infinité de fois.
Nous sommes dans le cas du lemme de Borel-Cantelli ; donc la séquence de m « PILE » consécutifs apparaît une infinité de fois.

4. **Application au mouvement d'une particule**
L'espace $\mathbb{R}^3$ est rapporté à un repère orthonormé $\left\{O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right\}$ et on considère une particule qui se déplace dans cet espace ; on tente de repérer sa position, à temps entiers.
⇒ *En $t = 0$, elle est à l'origine O*
⇒ *En $t = n$, elle se trouve en $M_n = (x_n, y_n, z_n)$ à coordonnées entières.*
⇒ *En $t = n+1$, elle se trouve en $M_{n+1} = (x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1})$ où x_{n+1} est obtenu à partir de x_n en faisant varier x_n de $+1$ ou de -1 et, de même pour les 2 autres coordonnées.*
⇒ *La particule se retrouve donc de façon équiprobable à l'un des 8 sommets du cube dont $M_n = (x_n, y_n, z_n)$ est le centre, les mouvements successifs de la particules étants indépendants*

(a)
▷ *Soit E_n l'événement : $E_n = \{$La particule est dans le plan yOz au temps $t = 2n\}$*
▷ *Soit F_n l'événement : $F_n = \{$La particule est dans le plan xOz au temps $t = 2n\}$*
▷ *Soit G_n l'événement : $G_n = \{$La particule est dans le plan xOy au temps $t = 2n\}$*
Calculer $\mathbf{P}(E_n)$, $\mathbf{P}(F_n)$ et $\mathbf{P}(G_n)$

Nous allons résoudre cette question en calculant seulement $\mathbf{P}(E_n)$, les autres calculs étant les mêmes.
Si la particule est dans le plan yOz à $t = 2n$, ceci signifie que l'abscisse x_{2n} de la particule est $x_{2n} = 0$.
Ceci signifie donc que **l'abscisse** de la particule a varié n fois en $+1$ et n fois en -1. A chaque déplacement il y a une probabilité de $\frac{1}{2}$ que l'abscisse se déplace en $+1$ ou en -1 ; et il y a $C_{2n}^{n} = \binom{2n}{n}$ façon de placer le déplacement $+1$ parmi les $2n$ déplacements. Nous avons donc :

$$\mathbf{P}(E_n) = C_{2n}^{n} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} = \binom{2n}{n} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$$

Le raisonnement pour $\mathbf{P}(F_n)$ et $\mathbf{P}(G_n)$ est totalement semblable, et nous avons $\mathbf{P}(E_n) = \mathbf{P}(F_n) = \mathbf{P}(G_n)$

(b) *Soit A_n l'événement : $A_n = \{$La particule est en O au temps $t = 2n\}$ Calculer $\mathbf{P}(A_n)$*

Etre à l'origine c'est être, à la fois, dans les 3 plans yOz, xOz et xOy. Donc, $A_n = E_n \cap F_n \cap G_n$. De l'indépendance des événements,

$$\mathbf{P}(A_n) = \mathbf{P}(E_n \cap F_n \cap G_n) = \mathbf{P}(E_n) \times \mathbf{P}(F_n) \times \mathbf{P}(G_n) = \left[\binom{2n}{n} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\right]^3$$

(c) *On pose $v_n = \sqrt{n}\binom{2n}{n}\frac{1}{4^n}$ pour $n \geqslant 1$*

Il faut remarquer, ici, que $v_n = \sqrt{n}\mathbf{P}(E_n) \iff \mathbf{P}(E_n) = \dfrac{v_n}{\sqrt{n}}$

Comme $\mathbf{P}(A_n) = (\mathbf{P}(E_n))^3$, nous avons $\mathbf{P}(A_n) = \dfrac{(v_n)^3}{n^{\frac{3}{2}}}$

Nous introduisons, ici, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ pour étudier $\mathbf{P}(A_n)$

i. *Calculer $w_n = \ln\left(\dfrac{v_{n+1}}{v_n}\right)$*

$\Rightarrow$ Commençons par évaluer le rapport $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}$

$$\begin{aligned}
\frac{v_{n+1}}{v_n} &= \frac{\sqrt{n+1}\mathrm{C}_{2n+2}^{n+1}}{\sqrt{n}\mathrm{C}_{2n}^{n}} \times \frac{4^n}{4^{n+1}} \\
&= \frac{\sqrt{n+1}}{4\sqrt{n}} \times \frac{(2n+2)!n!n!}{(n+1)!\,(n+1)!\,(2n)!} \\
&= \frac{\sqrt{n+1}}{4\sqrt{n}} \times \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)(n+1)} \\
&= \frac{\sqrt{n+1}}{4\sqrt{n}} \times \frac{2(2n+1)}{(n+1)} \\
&= \frac{\sqrt{n+1}}{2\sqrt{n}} \times \frac{2n+1}{n+1} \\
&= \frac{2n+1}{2\sqrt{n(n+1)}}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Etudions, maintenant w_n

$$w_n = \ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right) = \ln\left(\frac{2n+1}{2\sqrt{n(n+1)}}\right) = \ln\left(1 + \left(\frac{2n+1}{2\sqrt{n(n+1)}} - 1\right)\right)$$

ii. *Montrer que $w_n \underset{+\infty}{\approx} \dfrac{1}{8n^2}$; en déduire que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} w_n$ converge, puis que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.*

$\Rightarrow$ Nous avons $w_n \underset{+\infty}{\approx} \dfrac{1}{8n^2}$

On appelle $u_n = \dfrac{2n+1}{2\sqrt{n(n+1)}} - 1$, ce qui veut dire que $w_n = \ln(1+u_n)$.

$\star$ Nous avons :

$$\frac{2n+1}{2\sqrt{n(n+1)}} = \frac{2n+1}{2n\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = \frac{1+\frac{1}{2n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}$$

Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n+1}{2\sqrt{n(n+1)}} = \lim\limits_{n\to+\infty} = \dfrac{1+\frac{1}{2n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = 1$, d'où nous tirons que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et que donc $w_n \underset{+\infty}{\approx} u_n$

$\star$ *Nous allons rechercher un équivalent de u_n en $+\infty$*

Pour commencer,

$$\begin{aligned}
u_n &= \frac{2n+1}{2\sqrt{n(n+1)}} - 1 \\
&= \frac{2n+1-2\sqrt{n(n+1)}}{2\sqrt{n(n+1)}} \\
&= \frac{\left(2n+1-2\sqrt{n(n+1)}\right)\left(2n+1+2\sqrt{n(n+1)}\right)}{2\sqrt{n(n+1)}\left(2n+1+2\sqrt{n(n+1)}\right)} \\
&= \frac{(2n+1)^2-4n(n+1)}{2(2n+1)\sqrt{n(n+1)}+4n(n+1)} \\
&= \frac{4n^2+4n+1-4n^2-4n}{(4n+2)\left(n\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)+4n^2+4n} \\
&= \frac{1}{(4n^2+2n)\sqrt{1+\frac{1}{n}}+4n^2+4n} \\
&= \frac{1}{4n^2\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)+2n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+2\right)}
\end{aligned}$$

D'après ce calcul, nous avons $u_n = \dfrac{1}{4n^2\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)+2n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+2\right)}$, et, en $+\infty$, nous avons $u_n \underset{+\infty}{\approx} \dfrac{1}{8n^2}$, et comme $w_n \underset{+\infty}{\approx} u_n$, par transitivité, nous avons $w_n \underset{+\infty}{\approx} \dfrac{1}{8n^2}$

$\Rightarrow$ <u>La série $\sum\limits_{n\geqslant 0} w_n$ converge</u>

La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{8n^2}$ est une série de Riemann convergente. Comme, en $+\infty$, nous avons $w_n \underset{+\infty}{\approx} \dfrac{1}{8n^2}$, nous en déduisons que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} w_n$ converge

$\Rightarrow$ <u>Montrons que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge</u>

Par construction de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$, nous avons $w_n = \ln v_{n+1} - \ln v_n$, et en nous intéressant aux suites partielles de la série convergente $\sum\limits_{n\geqslant 0} w_n$, nous avons :

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} w_n == \sum_{n=1}^{N} \ln v_{n+1} - \ln v_n = \ln v_{N+1} - \ln v_1$$

Si S est la somme de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} w_n$, nous avons $\lim\limits_{N\to+\infty} S_N = S$, et donc, de $\ln v_{N+1} = S_N + \ln v_1$, nous avons $v_{N+1} = v_1 e^{S_N}$ et donc $\lim\limits_{N\to+\infty} v_N = v_1 e^S = l$

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc.

iii. *On pose $l = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$; montrer que $\mathbf{P}(A_n) \underset{+\infty}{\approx} \dfrac{l^3}{n^{\frac{3}{2}}}$*

Nous avons établi que $\mathbf{P}(A_n) = \dfrac{(v_n)^3}{n^{\frac{3}{2}}}$, et nous avons donc bien $\mathbf{P}(A_n) \underset{+\infty}{\approx} \dfrac{l^3}{n^{\frac{3}{2}}}$

iv. *En utilisant le lemme de Borel-Cantelli, montrer que, $\mathbf{P}$-presque sûrement, seul un nombre fini d'événements A_n se produisent. Interpréter le résultat pour la particule.*

Comme $\mathbf{P}(A_n) \underset{+\infty}{\approx} \dfrac{l^3}{n^{\frac{3}{2}}}$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \mathbf{P}(A_n)$ dont le terme général est équivalent à celui d'une série de Riemann convergente est donc convergente.

D'après le lemme de Borel-Cantelli, comme la série $\sum_{n\geqslant 1} \mathbf{P}(A_n)$ est convergente, seuls un nombre fini d'événement A_n se réalisent, c'est à dire que **P**-presque sûrement, la trajectoire de la particule ne reviendra à l'origine qu'unn ombre fini de fois.

Chapitre 17

Variables aléatoires discrètes

Ce chapitre est une véritable introduction . Nous y étudierons de préférence les variables aléatoires réelles discrètes, mais plusieurs résultats seront vrais pour toutes les variables aléatoires réelles

17.1 Introduction

On considère l'espace fondamental $\Omega = \{(i,j) \text{ où } 1 \leqslant i \leqslant 6 \text{ et} 1 \leqslant j \leqslant 6\}$.
Cet ensemble modélise le lancer de deux dés.

⇒ On s'intéresse à la somme amenée par le jet des deux dés, c'est à dire qu'on considère l'application :

$$\left\{\begin{array}{lcl} S:\Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (i,j) & \longmapsto & S\left[(i,j)\right] = i+j \end{array}\right.$$

Nous avons, évidemment, $S(\Omega) = \{2, 3, \ldots, 12\}$
On s'intéresse aux ensembles réciproques, par exemple :

$$S^{-1}(\{2\}) = \{\omega \in \Omega \text{ tels que } S(\omega) = 2\} = \{(1,1)\}$$

Ou encore $S^{-1}(\{4\}) = \{(1,3), (3,1), (2,2)\}$.
Nous pouvons lier S, $S(\Omega)$ à la probabilité $\mathbf{P}$ en construisant une fonction ν définie par exemple par :

$$\nu(\{2\}) = \mathbf{P}\left(S^{-1}(\{2\})\right) = \mathbf{P}(\{(1,1)\}) = \frac{1}{36}$$

Et pourquoi pas, plus généralement, pour tout $x \in S(\Omega)$,

$$\nu(\{x\}) = \mathbf{P}\left(S^{-1}(\{x\})\right) = \mathbf{P}(\{\omega \in \Omega \text{ tels que } S(\omega) = x\})$$

Et nous aurions donc $\nu(\{4\}) = \dfrac{3}{36} = \dfrac{1}{12}$

⇒ Toujours pour le jet de 2 dés, on peut aussi s'intéresser à l'application :

$$\left\{\begin{array}{lcl} M:\Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (i,j) & \longmapsto & M\left[(i,j)\right] = \max\{i;j\} \end{array}\right.$$

Nous avons, cette fois ci $M(\Omega) = \{1, 2, 3, \ldots, 6\}$
Cette fois ci,

$$M^{-1}(\{3\}) = \{\omega \in \Omega \text{ tels que } M(\omega) = 3\} = \{(1,3);(3,1);(2,3);(3,2);(3,3)\}$$

Et dons $\mathbf{P}\left(M^{-1}(\{3\})\right) = \dfrac{5}{36}$

Dans l'étude des variables aléatoires réelles , nous noterons $\mathbf{P}\left(S^{-1}(\{x\})\right) = \mathbf{P}(\{S = x\})$, et donc $\mathbf{P}\left(M^{-1}(\{3\})\right) = \mathbf{P}(\{M = 3\})$

17.2 Définition générale de variable aléatoire réelle

17.2.1 Rappels

Ces résultats sont admis ; ils ont déjà été exposés en L_0. La démonstration pourra être refaite à titre d'exercice

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application quelconque. On appelle $\mathcal{P}(F)$ l'ensemble des parties de F.
Pour tout $A \in \mathcal{P}(F)$, on note comme d'habitude,

$$f^{-1}(A) = \{x \in E \text{ tel que } f(x) \in A\}$$

Alors,

1. $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ et $f^{-1}(F) = E$
2. Pour tout $A \in \mathcal{P}(F)$, $f^{-1}\left(\overline{A}\right) = \overline{f^{-1}(A)}$
3. Pour tout $A \in \mathcal{P}(F)$ et tout $B \in \mathcal{P}(F)$, nous avons :
   (a) $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$
   (b) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$
   (c) $A \subset B \Longrightarrow f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$

Remarque 1 :

Pour une fonction $f : E \longrightarrow F$, ce que nous avons avec la fonction réciproque, nous ne l'avons pas forcément avec la fonction directe.

17.2.2 Définition

Soit $\{\Omega; \mathcal{F}\}$ un espace probabilisable et $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une application quelconque.
X est appelée variable aléatoire réelle si et seulement si pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'événement

$$A = \{\omega \in \Omega \text{ tels que } X(\omega) \leqslant a\}$$

est un élément de la tribu $\mathcal{F}$

Remarque 2 :

Il va sans dire que, comme $A \in \mathcal{F}$, on peut calculer $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(\{\omega \in \Omega \text{ tels que } X(\omega) \leqslant a\})$

17.2.3 Proposition

Soit $\{\Omega; \mathcal{F}\}$ un espace probabilisable et $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle . Alors :

1. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\{\omega \in \Omega \text{ tels que } X(\omega) > a\} \in \mathcal{F}$
2. Pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $b \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\{\omega \in \Omega \text{ tels que } a < X(\omega) \leqslant b\} \in \mathcal{F}$
3. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\{\omega \in \Omega \text{ tels que } X(\omega) \geqslant a\} \in \mathcal{F}$
4. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\{\omega \in \Omega \text{ tels que } X(\omega) < a\} \in \mathcal{F}$
5. Pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $b \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\{\omega \in \Omega \text{ tels que } a \leqslant X(\omega) < b\} \in \mathcal{F}$
6. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\{\omega \in \Omega \text{ tels que } X(\omega) = a\} \in \mathcal{F}$
7. Pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $b \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\{\omega \in \Omega \text{ tels que } a \leqslant X(\omega) \leqslant b\} \in \mathcal{F}$
8. Pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $b \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\{\omega \in \Omega \text{ tels que } a < X(\omega) < b\} \in \mathcal{F}$

Démonstration

Soit $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, une variable aléatoire réelle .

1. D'après la définition 17.2.2, nous avons $A = \{\omega \in \Omega \text{ tels que } X(\omega) \leqslant a\} \in \mathcal{F}$, et donc par définition des tribus $\overline{A} \in \mathcal{F}$.
   Or, et en considérant 17.2.1 $\overline{A} = \{\omega \in \Omega \text{ tels que } X(\omega) > a\} \in \mathcal{F}$; d'où le résultat
2. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$; alors :
   $$\{\omega \in \Omega \text{ tels que } a < X(\omega) \leqslant b\} = \{\omega \in \Omega \text{ tels que } a < X(\omega)\} \cap \{\omega \in \Omega \text{ tels que } X(\omega) \leqslant b\}$$
   → Par définition, $\{\omega \in \Omega \text{ tels que } X(\omega) \leqslant b\} \in \mathcal{F}$
   → Par démonstration, $\{\omega \in \Omega \text{ tels que } a < X(\omega)\} \in \mathcal{F}$
   → D'après les propriétés de tribu de $\mathcal{F}$, nous avons $\{\omega \in \Omega \text{ tels que } a < X(\omega) \leqslant b\} \in \mathcal{F}$
3. Soit $A = \{\omega \in \Omega \text{ tels que } X(\omega) \geqslant a\}$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $A_n = \left\{\omega \in \Omega \text{ tels que } X(\omega) > a - \frac{1}{n}\right\}$; nous avons $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} A_n$
   → Pour commencer, nous avons $A \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} A_n$

   En effet, si $\omega \in A$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons $X(\omega) \geqslant a > a - \dfrac{1}{n}$ et donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\omega \in A_n$ et donc $\omega \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} A_n$.

   D'où nous tirons $A \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} A_n$

   → Ensuite, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} A_n \subset A$

   Soit $\omega \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} A_n$; alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X(\omega) > a - \dfrac{1}{n}$. Supposons que $\omega \notin A$, ce qui veut dire que $\omega \in \overline{A}$ et que $X(\omega) < a$.

   Il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $X(\omega) < a - \dfrac{1}{n_0} < a$ et donc, pour tout $n \geqslant n_0$, $\omega \notin A_n$, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse où $\omega \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} A_n$

   Donc $\omega \in A$ et donc $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} A_n \subset A$

   Par démonstration, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A_n \in \mathcal{F}$, et donc, d'après la proposition 15.2.7, nous avons $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} A_n \in \mathcal{F}$, et donc, en particulier $A \in \mathcal{F}$
4. Nous venons de démontrer que si $A = \{\omega \in \Omega \text{ tels que } X(\omega) \geqslant a\}$, alors $A \in \mathcal{F}$; d'après les propriétés de tribu, $\overline{A} \in \mathcal{F}$; comme $\overline{A} = \{\omega \in \Omega \text{ tels que } X(\omega) < a\}$, nous avons $\{\omega \in \Omega \text{ tels que } X(\omega) < a\} \in \mathcal{F}$
5. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$; Alors
   $$\{\omega \in \Omega \text{ tels que } a \leqslant X(\omega) < b\} = \{\omega \in \Omega \text{ tels que } a \leqslant X(\omega)\} \cap \{\omega \in \Omega \text{ tels que } X(\omega) < b\}$$
   Or :
   → $\{\omega \in \Omega \text{ tels que } a \leqslant X(\omega)\} \in \mathcal{F}$ par définition de variable aléatoire réelle
   → Nous avons démontré que :$\{\omega \in \Omega \text{ tels que } X(\omega) < b\} \in \mathcal{F}$
   D'après les propriétés de stabilité par intersection de la tribu $\mathcal{F}$, nous avons $\{\omega \in \Omega \text{ tels que } a \leqslant X(\omega) < b\} \in \mathcal{F}$
6. Pour continuer, nous avons :
   $$\{\omega \in \Omega \text{ tels que } X(\omega) = a\} = \{\omega \in \Omega \text{ tels que } X(\omega) \leqslant a\} \cap \{\omega \in \Omega \text{ tels que } X(\omega) \geqslant a\}$$
   → $\{\omega \in \Omega \text{ tels que } X(\omega) \leqslant a\} \in \mathcal{F}$ par définition de variable aléatoire réelle
   → Comme nous avons démontré que :$\{\omega \in \Omega \text{ tels que } X(\omega) \geqslant a\} \in \mathcal{F}$
   D'après les propriétés de stabilité par intersection de la tribu $\mathcal{F}$, nous avons $\{\omega \in \Omega \text{ tels que } X(\omega) = a\} \in \mathcal{F}$

La démonstration des autres points est similaire et est laissée en exercices

Remarque 3 :

1. Nous retiendons donc ceci :

   Soit $\{\Omega; \mathcal{F}\}$ un espace probabilisable et $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle .
   Quel que soit l'intervalle $I \subset \mathbb{R}$, $X^{-1}(I) = \{\omega \in \Omega \text{ tels que } X(\omega) \in I\}$ est un élément de la tribu $\mathcal{F}$

2. En fait, pour démontrer que X est une variable aléatoire réelle , il faut et il suffit de démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons $X^{-1}(]-\infty; x]) \in \mathcal{F}$, car tout intervalle $I \subset \mathbb{R}$ peut s'écrire comme réunion, intersection, complémentaires d'intervalles de telle sorte.

17.2.4 Notations

1. Pour $B \subset \mathbb{R}$, on note $\{X \in B\} = X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega \text{ tels que } X(\omega) \in B\}$
2. De même, on note $\{X \leqslant x\} = X^{-1}(]-\infty; x]) = \{\omega \in \Omega \text{ tel que} X(\omega) \leqslant x\}$
3. Pour $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, on note aussi

$$\{a \leqslant X \leqslant b\} = X^{-1}([a; b]) = \{\omega \in \Omega \text{ tel que } a \leqslant X(\omega) \leqslant b\}$$

Remarque 4 :

1. On a bien $\{X \in B\} \in \mathcal{F}$, $\{X \leqslant x\} \in \mathcal{F}$, $\{a \leqslant X \leqslant b\} \in \mathcal{F}$
2. Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $\{\Omega; \mathcal{F}; \mathbf{P}\}$. Nous avons, pour $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$:

$\{a < X < b\} =$	$\{X > a\} \cap \{X < b\}$
$\{a \leqslant X < b\} =$	$\{X \geqslant a\} \cap \{X < b\}$
$\{a < X \leqslant b\} =$	$\{X > a\} \cap \{X \leqslant b\}$
$\{a \leqslant X \leqslant b\} =$	$\{X \geqslant a\} \cap \{X \leqslant b\}$

Exemple 1 :

Des exemples de variables aléatoires réelles

1. On jette une pièce n fois ; alors, l'espace fondamental est donné par les n-uplets de la forme $(P, F, F, P, \ldots, F, P, F, P)$, c'est à dire que l'espace fondamental est le produit cartésien $\Omega = (\{P, F\})^n$.

   On peut considérer la variable aléatoire réelle X, qui à à $\omega \in \Omega$, fait correspondre $X(\omega) = k$ où k est **le nombre d'apparitions de** F. X est une variable aléatoire.

   X prend toutes les valeurs de 0 à n, et on écrit $X(\Omega) = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$
2. E est un jeu de 52 cartes duquel on en tire 5 *(cartes)* ; X est la variable aléatoire, qui, à chaque tirage $\omega \in \Omega$, désigne par $X(\omega)$ le **nombre d'as** dans le tirage ω. Les valeurs prises par X vont donc de 0 à 4 ; on écrit : $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$
3. Une variable aléatoire réelle X est dite **certaine** si c'est une application constante de Ω dans $\mathbb{R}$, c'est à dire que pour tout $\omega \in \Omega$, $X(\omega) = k$ avec $k \in \mathbb{R}$. Dans ces cas, nous avons $\{X = k\} = \Omega$ et $\{X \neq k\} = \emptyset$
4. Soit $\{\Omega; \mathcal{F}; \mathbf{P}\}$ un espace probabilisé et $A \in \mathcal{F}$. La **fonction indicatrice de l'ensemble** A notée 1_A définie par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 1_A : \Omega & \longrightarrow & \{0, 1\} \\ \omega & \longmapsto & 1_A(\omega) = \left\{\begin{array}{l} 1 \text{ si } \omega \in A \\ 0 \text{ si } \omega \notin A \end{array}\right. \end{array}\right.$$

   1_A est une variable aléatoire réelle

   Nous avons donc $\{1_A = 1\} = A$ et $\{1_A = 0\} = \overline{A}$
5. Soit $\{\Omega; \mathcal{F}\}$ un espace probabilisable et $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, $Y : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ deux variables aléatoires réelles

$\Rightarrow$ On peut définir la somme S de X et Y, pour tout $\omega \in \Omega$ par :

$$S(\omega) = X(\omega) + Y(\omega)$$

$\Rightarrow$ De même, il est possible de définir le produit P de X et Y, pour tout $\omega \in \Omega$ par :

$$P(\omega) = X(\omega) \times Y(\omega)$$

$\Rightarrow$ On peut aussi définir Z, le plus grand de X et Y, c'est à dire $Z = \sup(X, Y)$. Comment définir Z pour tout $\omega \in \Omega$? :

$$Z(\omega) = \sup(X(\omega), Y(\omega)) = \begin{cases} X(\omega) & \text{si } X(\omega) \geqslant Y(\omega) \\ Y(\omega) & \text{si } Y(\omega) \geqslant X(\omega) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ De même, on peut aussi définir T, le plus petit de X et Y, c'est à dire $T = \inf(X, Y)$. Comment définir T pour tout $\omega \in \Omega$? :

$$T(\omega) = \inf(X(\omega), Y(\omega)) = \begin{cases} X(\omega) & \text{si } X(\omega) \leqslant Y(\omega) \\ Y(\omega) & \text{si } Y(\omega) \leqslant X(\omega) \end{cases}$$

17.2.5 Propriétés

Soit $\{\Omega; \mathcal{F}\}$ un espace probabilisable et $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, $Y : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ deux variables aléatoires réelles

1. L'addition $S = X + Y$ est une variable aléatoire réelle
2. Le produit $P = X \times Y$ est une variable aléatoire réelle
3. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, λX est une variable aléatoire réelle
4. $\sup(X, Y)$ et $\inf(X, Y)$ sont des variables aléatoires réelles
5. Pour toute variable aléatoire réelle $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ et toute fonction continue $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction $g \circ X$ est une variable aléatoire réelle

Démonstration

Pour tout ce cours, nous admettons cette proposition. Nous l'admettrons aussi pour le cas discret.

Exemple 2 :

Si $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est une variable aléatoire réelle et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue

1. Si $g(x) = e^x$; la fonction $Y = g \circ X = e^X$ est une variable aléatoire réelle .
2. Si $g(x) = x^2$; la fonction $Y = g \circ X = X^2$ est une variable aléatoire réelle .
3. Si $g(x) = x^k$; la fonction $Y = g \circ X = X^k$ est une variable aléatoire.

Nous retrouverons les variables aléatoires réelles e^X, X^2 et X^k lorsque nous nous intéresserons aux moments des variables aléatoires réelles .

Exemple 3 :

1. Deux magasins A et B d'une chaîne ont un flux de clients égal respectivement à X et Y pour un mois donné. $X + Y$ représente alors le flux de clients sur l'ensemble des deux magasins pour le mois considéré.
2. On efectue une série infinie de lancers à **PILE** ou **FACE** avec une pièce de monnaie. On note X_k la variable aléatoire réelle qui vaut 1 si le k-ième lancer amène **PILE** et 0 s'il amène **FACE**.

   La variable aléatoire réelle $Y = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ représente (ou compte) le nombre de fois où **PILE** apparaît lors des n premiers lancers.

3. Des fournisseurs $F_1, F_2, \dots, F_n$, reçoivent respectivement $X_1, X_2, \dots, X_n$ clients. La variable aléatoire réelle $C = \sum_{k=1}^{n} X_k$ représente la nombre total de clients qui se rendent chez les fournisseurs $F_1, F_2, \dots, F_n$
4. Un mobile décrit une trajectoire du plan de façon aléatoire. Le plan rapporté à un système d'axes orthonormé (Ox, Oy) , on note X_n et Y_n les coordonnées du mobile à l'instant $t = n$. La variable aléatoire réelle $D_n = X_n^2 + Y_n^2$ représente le carré de la distance euclidienne du mobile à l'origine O à l'instant $t = n$.
   De même, $S_n = X_n \times Y_n$ est l'aire du rectangle dont 2 sommets opposés sont O et la position M_n du mobile à l'instant $t = n$.

17.2.6 Définition

Soit $\{\Omega; \mathcal{F}; \mathbf{P}\}$ un espace probabilisé et $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, une variable aléatoire réelle
On appelle Loi de probabilité de X, la donnée :

1. Des valeurs prises par X, c'est à dire $X(\Omega)$
2. De l'application $\nu : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \longrightarrow [0; 1]$ où $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est la tribu des boréliens de $\mathbb{R}$, définie par :

$$\begin{cases} \nu : \mathcal{B}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & [0;1] \\ \qquad B & \longmapsto & \nu(B) = \mathbf{P}\left(X^{-1}(B)\right) = \mathbf{P}(\{X \in B\}) \end{cases}$$

Remarque 5 :

1. La tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ des boréliens de $\mathbb{R}$ est la plus petite tribu contenant tous les ouverts de $\mathbb{R}$; cette tribu a été définie page 845
2. C'est bien parce que X est une variable aléatoire réelle que $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ et que nous pouvons définir $\mathbf{P}\left(X^{-1}(B)\right)$ et donc $\nu(B)$

17.2.7 Proposition

Soit $\{\Omega; \mathcal{F}; \mathbf{P}\}$ un espace probabilisé et $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, une variable aléatoire réelle
L'application $\nu : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \longrightarrow [0; 1]$ est bien une probabilité sur l'espace probabilisable $\{\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$
On dit que ν est la probabilité image de $\mathbf{P}$ par X, notée parfois $X(\mathbf{P})$ ou $\mathbf{P}_X$

Démonstration

Nous devons démontrer que $\nu(\mathbb{R}) = 1$ et que si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ deux à deux disjoints alors, $\nu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu(A_n)$

1. Montrons que $\nu(\mathbb{R}) = 1$
   Nous avons $\nu(\mathbb{R}) = \mathbf{P}(\{X \in \mathbb{R}\}) = \mathbf{P}\left(X^{-1}(\mathbb{R})\right) = \mathbf{P}(\Omega) = 1$.
   Et donc, $\nu(\mathbb{R}) = 1$
2. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de boréliens de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ deux à deux disjoints. Alors :

$$\nu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \mathbf{P}\left(X^{-1}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)\right)$$

   D'après les rappels de logique 17.2.1, nous avons :

$$X^{-1}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X^{-1}(A_n)$$

D'autre part, comme si $i \neq j$ alors $A_i \cap A_j = \emptyset$, nous avons aussi $X^{-1}(A_i) \cap X^{-1}(A_j) = \emptyset$, de telle sorte que

$$\mathbf{P}\left(X^{-1}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{P}\left(X^{-1}(A_n)\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu(A_n)$$

Nous avons donc $\nu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu(A_n)$

Et ν est bien une probabilité sur $\{\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$

17.3 Variables aléatoires discrètes

17.3.1 Définition

Soit $\{\Omega; \mathcal{F}\}$ un espace probabilisable et $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, une variable aléatoire réelle
On dit que X est une variable aléatoire réelle discrète si $X(\Omega)$ est un ensemble discret, c'est à dire si $X(\Omega)$ est l'ensemble des éléments d'une suite.
Autrement dit : $X(\Omega) = \left\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right\}$

Remarque 6 :

En fait, une variable aléatoire réelle X est discrète si :

1. $X(\Omega)$ est un ensemble fini, c'est à dire si $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ où $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n$, c'est à dire que les données sont rangées par ordre croissant : $x_i \leqslant x_{i+1}$
2. $X(\Omega)$ est un ensemble formé d'une suite strictement croissante $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ où $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n \leqslant \ldots$, c'est à dire que les données sont rangées par ordre croissant : $x_i \leqslant x_{i+1}$

Exemple 4 :

Exemples de variables aléatoires réelles discrètes

1. Dans le cas du lancer de deux dés, la variable aléatoire réelle S est une variable aléatoire réelle discrète, à valeurs dans $F = \{2, 3, \cdots, 11, 12\}$
2. Dans un jeu de 32 cartes, une « **main** » est un sous-ensemble de 8 cartes. X désigne le nombre d'as dans chaque main. X est une variable aléatoire réelle discrète à valeurs dans $\{0, 1, 2, 3, 4\}$

17.3.2 Proposition

Soit $\{\Omega; \mathcal{F}\}$ un espace probabilisable et $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, une application quelconque. On suppose que $X(\Omega)$ est discret

1. X est une variable aléatoire si et seulement si pour tout $x \in X(\Omega)$, $X^{-1}(\{x\}) \in \mathcal{F}$
2. **Notation :** pour $x \in \mathbb{R}$, on note $\{X = x\} = X^{-1}(\{x\}) = \{\omega \in \Omega \text{ tel que } X(\omega) = x\}$

Démonstration

On pose $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$

1. **On suppose X variable aléatoire**
   Pour $x_n \in X(\Omega)$, soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $x_{n-1} < a < x_n < b < x_{n+1}$;
   Alors, $\{x_n\} = [a; x_n] \cap [x_n; b]$, et, d'après les propriétés revues dans la proposition 17.2.1

$$X^{-1}(\{x_n\}) = X^{-1}([a; x_n] \cap [x_n; b]) = X^{-1}([a; x_n]) \cap X^{-1}([x_n; b])$$

   Donc, comme X est une variable aléatoire réelle , et d'après les propriétés de variable aléatoire réelle vues en 17.2.3 $X^{-1}\{x_n\} = \{X = x_n\} \in \mathcal{F}$

2. **On suppose que pour tout $x \in X(\Omega)$, $X^{-1}\{x\} \in \mathcal{F}$**
   Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$; nous allons montrer que $X^{-1}(I) \in \mathcal{F}$
   (a) Nous avons : $X^{-1}(I) = X^{-1}(I \cap X(\Omega))$
   Démontrons le
   i. Soit $\omega \in X^{-1}(I)$, alors $X(\omega) \in I$, et, évidemment, $X(\omega) \in X(\Omega)$ si bien que $X(\omega) \in I \cap X(\Omega)$
   Donc $\omega \in X^{-1}(I \cap X(\Omega))$; d'où $X^{-1}(I) \subset X^{-1}(I \cap X(\Omega))$
   ii. Soit $\omega \in X^{-1}(I \cap X(\Omega))$, alors $X(\omega) \in I \cap X(\Omega)$; en particulier $X(\omega) \in I$, et donc $\omega \in X^{-1}(I)$
   On a donc $X^{-1}(I \cap X(\Omega)) \subset X^{-1}(I)$
   Nous en concluons que $X^{-1}(I) = X^{-1}(I \cap X(\Omega))$
   (b) Comme, par hypothèse, $X(\Omega)$ est dénombrable, $I \cap X(\Omega)$ l'est aussi [1]
   On peut donc écrire $I \cap X(\Omega) = \bigcup_{k \in K} \{x_k\}$ où $K \subset \mathbb{N}$
   Donc, $X^{-1}(I \cap X(\Omega)) = X^{-1}\left(\bigcup_{k \in K} \{x_k\}\right) = \bigcup_{k \in K} X^{-1}(\{x_k\})$
   D'après l'hypothèse, $X^{-1}\{x\} \in \mathcal{F}$, donc, $X^{-1}(I \cap X(\Omega)) \in \mathcal{F}$, c'est à dire $X^{-1}(I) \in \mathcal{F}$

Remarque 7 :

Nous avons aussi : $\{X = x\} = \{X \geqslant x\} \cap \{X \leqslant x\}$

Exemple 5 :

Exercice résolu
Soit $\{\Omega; \mathcal{F}\}$ un espace probabilisable. On a admis que si $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, $Y : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ sont deux variables aléatoires réelles alors $X + Y$ est une variable aléatoire réelle
Montrer ce résultat dans le cas où X et Y sont à valeurs entières, c'est à dire dans le cas où $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}$.

Démonstration

Soit donc $X : \Omega \to \mathbb{N}$ et $Y : \Omega \to \mathbb{N}$ deux variables aléatoires.
Soit $k \in \mathbb{N}$, et on va démontrer que l'événement $\{X + Y = k\} \in \mathcal{F}$

Nous avons : $\{X + Y = k\} = \bigcup_{p=0}^{k} (\{X = p\} \cap \{Y = k - p\})$;

Des propriétés de variables aléatoires, nous avons : $\{X = p\} \in \mathcal{F}$ et $\{Y = k - p\} \in \mathcal{F}$; des propriétés de tribu de $\mathcal{F}$, on en déduit que $\{X = p\} \cap \{Y = k - p\} \in \mathcal{F}$, puis que $\bigcup_{p=0}^{k} (\{X = p\} \cap \{Y = k - p\}) \in \mathcal{F}$.
En conclusion, nous avons bien $\{X + Y = k\} \in \mathcal{F}$, c'est à dire que $X + Y$ est une variable aléatoire réelle

Exercice 1 :

Soient X et Y 2 variables aléatoires discrètes telles que : $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}$
Montrer que $Z = \sup(X, Y)$ est une variable aléatoire réelle

1. Si I est un intervalle borné, $I \cap X(\Omega)$ est un ensemble fini

17.3.3 Loi d'une variable aléatoire réelle discrète

Soit $\{\Omega; \mathcal{F}; \mathbf{P}\}$ un espace probabilisé et $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, une variable aléatoire réelle discrète
La loi de probabilité de X est définie par :

1. Des valeurs prises par X, c'est à dire $X(\Omega)$
2. La suite de nombres $(\mathbf{P}(\{X = x_n\}))_{n\in\mathbb{N}}$

17.3.4 Proposition

Soit $\{\Omega; \mathcal{F}; \mathbf{P}\}$ un espace probabilisé et $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, une variable aléatoire réelle discrète.
Alors, $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{P}(\{X = x_n\}) = 1$

Démonstration

Supposons que $X(\Omega) = \{x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots\}$ avec $x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_n \cdots$, nous avons $X(\Omega) = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \{x_n\}$ et donc :

$$\nu(X(\Omega)) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \{X = x_n\}\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \mathbf{P}(\{X = x_n\})$$

Comme $\nu(X(\Omega)) = 1$, nous avons $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \mathbf{P}(\{X = x_n\}) = 1$

Remarque 8 :

1. Si X est une variable aléatoire discrète, la loi de X est donnée et entièrement déterminée par la donnée, pour tout $x \in X(\Omega)$ de $\nu(\{x\}) = \mathbf{P}(\{X = x\})$
   Et nous devons avoir : $\sum\limits_{x\in X(\Omega)} \mathbf{P}(\{X = x\}) = 1$
2. Lorsque $X(\Omega) = \mathbb{N}$, nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{P}(\{X = n\}) = 0$ puisque la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{P}(\{X = n\})$ est convergente, et que nous avons même $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{P}(\{X = n\}) = 1$

Exemple 6 :

Exercice résolu
On reprend l'exemple de l'introduction, et nous cherchons la loi de S.
S est la somme amenée par les deux dés, c'est à dire qu'à chaque couple $(i, j) \in \Omega$, on fait correspondre $S[(i, j)] = i + j$.
Nous cherchons donc à préciser la loi de S

1. **Un élément de la loi de S est $S(\Omega)$**
   Nous avons, évidemment, $S(\Omega) = \{2, 3, \ldots, 12\}$.
2. **Un second élément de la loi de S est $\nu(\{k\}) = \mathbf{P}(\{S = k\})$**
   Il faut donc rechercher $\nu(\{k\}) = \mathbf{P}(\{S = k\})$, pour $k = 2, 3, \ldots, 12$

   Par exemple : $\nu(\{2\}) = \mathbf{P}(\{S = 2\}) = \mathbf{P}\left(S^{-1}(\{2\})\right) = \mathbf{P}(\{(1, 1)\}) = \dfrac{1}{36}$

   De même, $\nu(\{4\}) = \mathbf{P}(\{S = 4\}) = \mathbf{P}\left(S^{-1}(\{4\})\right) = \mathbf{P}(\{(1, 3), (3, 1), (2, 2)\}) = \dfrac{3}{36} = \dfrac{1}{12}$.

   On construit ainsi le tableau :

$\nu(\{2\})$	$\nu(\{3\})$	$\nu(\{4\})$	$\nu(\{5\})$	$\nu(\{6\})$	$\nu(\{7\})$
$\mathbf{P}(\{S = 2\})$		$\mathbf{P}(\{S = 4\})$			
$\dfrac{1}{36}$		$\dfrac{1}{12}$			

$\nu(\{8\})$	$\nu(\{9\})$	$\nu(\{10\})$	$\nu(\{11\})$	$\nu(\{12\})$

Complétez le !

Exercice 2 :

Soit X une variable aléatoire discrète dont les valeurs possibles sont 0, 1, 2, 3 et 4.

1. Dire laquelle parmi ces distributions de masse correspond à une loi de probabilité :

	x	0	1	2	3	4
a)	$\mathbf{P}[X=x]$	0.3	0.2	0.1	0.05	0.05
b)	$\mathbf{P}[X=x]$	0.4	0.1	0.1	0.1	0.3
c)	$\mathbf{P}[X=x]$	0.4	0.1	0.2	0.1	0.3

2. Pour la loi de probabilité retenue en 1), calculer $\mathbf{P}[2 \leqslant X \leqslant 4]$ et $\mathbf{P}[X \neq 0]$.
3. Si $\mathbf{P}[X=x] = 5(k-x)$ pour $x = 0; 1, \dots 4$, y a-t-il des valeurs de k qui permettent de définir $\mathbf{P}[X=x]$ comme une distribution de probabilités *(ou loi de probabilité)* ?

Exercice 3 :

Dans un jeu de 32 cartes, on tire au hasard 4 cartes, et simultanément. On appelle X l'application qui à chaque tirage associe le nombre de cœurs qu'il contient.
Définir un espace de probabilité tel que X soit une variable aléatoire réelle , et étudier la loi de probabilité de X

Exercice 4 :

Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n. On tire simultanément trois jetons de cette urne.
Soit X l'application qui à un tirage associe le plus grand des trois nombres figurant sur les jetons tirés.
Définir un espace de probabilité tel que X soit une variable aléatoire réelle , et étudier la loi de probabilité de X

Exercice 5 :

Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les réels $p_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$ peuvent être les coefficients d'une loi de probabilité.

17.4 Variables aléatoires discrètes classiques

17.4.1 Loi uniforme

Soit $\{\Omega; \mathcal{F}; \mathbf{P}\}$ un espace probabilisé et $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, une variable aléatoire réelle .
On dit que X, suit <u>une loi uniforme</u> si $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ et $\mathbf{P}(\{X = x_k\}) = \dfrac{1}{n}$

Remarque 9 :

1. Dans ce cas de loi uniforme, X est une variable aléatoire réelle discrète, finie.
2. Nous avons Card $X(\Omega) = n$ et pour tout $x \in X(\Omega)$, $\mathbf{P}(\{X = x\}) = \dfrac{1}{\text{Card } X(\Omega)}$
3. Un exemple classique de cette loi uniforme est la situation suivante :

   On considère une urne $\mathcal{U}$ qui contient n boules numérotées de 1 à n. On tire une boule au hasard de cette urne et X désigne le numéro de la boule tirée. Bien entendu :

⋆ $X(\Omega) = \{1, 2, 3, \cdots, n\}$ ⋆ Et $\mathbf{P}(\{X = k\}) = \dfrac{1}{n}$

17.4.2 Loi de Bernouilli

Soit $\{\Omega; \mathcal{F}; \mathbf{P}\}$ un espace probabilisé et $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, une variable aléatoire réelle .
On dit que X, suit une loi de Bernouilli de paramètre p si $X(\Omega) = \{0; 1\}$ et $\mathbf{P}(\{X = 1\}) = p$

Remarque 10 :

1. Une variable aléatoire réelle qui suit une loi de Bernouilli est donc une loi discrète, finie, à valeurs entières.
2. On a évidemment $\mathbf{P}(\{X = 0\}) = 1 - p$
3. Exemple de telles situations : le lancer d'une pièce de monnaie et **tous les cas de « réussite-échec »**
4. Soit $\{\Omega; \mathcal{F}; \mathbf{P}\}$ un espace probabilisé et $A \subset \mathcal{F}$.
   On définit la fonction indicatrice 1_A par
   $$\left\{\begin{array}{rcl} 1_A : \Omega & \longrightarrow & \{0, 1\} \\ \omega & \longmapsto & \left\{\begin{array}{l} 0 \text{ si } \omega \notin A \\ 1 \text{ si } \omega \in A \end{array}\right. \end{array}\right.$$
   1_A est une loi de Bernouilli de paramètre $\mathbf{P}(\{1_A = 1\}) = \mathbf{P}(A)$. A désigne, ici, le sous ensemble de Ω pour lequel il y a toujours « succès ».
5. Une autre écriture de la loi de Bernouilli, très utilisée dans la partie statistiques est donnée par :
   $$\mathbf{P}(\{X = x\}) = p^x (1 - p)^{1-x}$$
   où, bien entendu, $x \in \{0, 1\}$

17.4.3 Loi binomiale

Soit $\{\Omega; \mathcal{F}; \mathbf{P}\}$ un espace probabilisé et $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, une variable aléatoire réelle
On dit que X, suit une loi binomiale de paramètre n et p dite loi $\mathcal{B}(n, p)$ si

1. $X(\Omega) = \{0; 1; \ldots; n - 1; n\}$
2. $\mathbf{P}(\{X = k\}) = \mathrm{C}_n^k p^k (1 - p)^{n-k} = \dbinom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$

Remarque 11 :

1. Une variable aléatoire réelle qui suit une loi binômiale est une variable aléatoire réelle discrète, finie, à valeurs entières.
2. Première remarque à démontrer, c'est que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}(\{X = k\}) = 1$.
   Cette démonstration n'est pas difficile ; en effet :
   $$\begin{array}{rcl} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}(\{X = k\}) & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k p^k (1 - p)^{n-k} \\ & = & (p + (1 - p))^n \text{ (Binôme de Newton)} \\ & = & 1 \end{array}$$
3. C'est la loi d'une variable aléatoire égale au nombre de succès dans la répétition de n épreuves de Bernouilli.
   On choisit $\Omega = \{S; E\}^n = \{\omega = (y_1, \ldots, y_n) \text{ où } y_i = S \text{ ou } y_i = E\}$.
   On construit donc $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ où $X(\omega)$ est le nombre de S dans ω

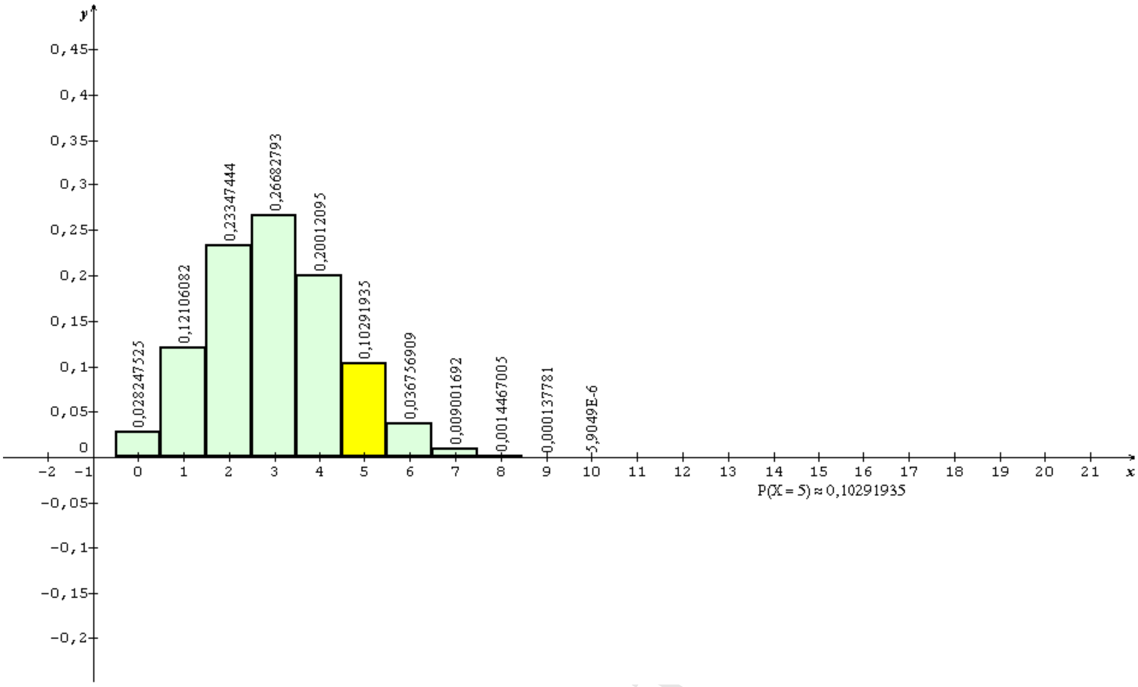

FIGURE 17.1 – L'histogramme d'une loi binômiale de paramètre $n = 10$ et $p = 0,3$

Exercice 6 :

Une urne contient 30 boules indiscernables au toucher. Il y a exactement 10 boules rouges.
On tire 6 boules, successivement, et avec remise dans cette urne *(on tire une boule, on la regarde dans le blanc des yeux, on note sa couleur, et on la remet dans l'urne ; on itère cette opération 6 fois)*
Déterminer la probabilité des événements suivants :

1. Il y a au moins une boule rouge
2. Il y a exactement une boule rouge

17.4.4 Loi hypergéométrique

Soit $\{\Omega; \mathcal{F}; \mathbf{P}\}$ un espace probabilisé et $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, une variable aléatoire réelle
On dit que X, suit une loi hypergéométrique de paramètre (n, a, b) où $n \in \mathbb{N}^*$, $a \in \mathbb{N}^*$, $b \in \mathbb{N}^*$ et $n \leqslant a + b$ si et seulement si

$$\begin{cases} X(\Omega) = \{\max(0; n-b)\ ;\ \min(a; n)\} \\ \mathbf{P}(\{X = k\}) = \dfrac{\mathrm{C}_a^k \mathrm{C}_b^{n-k}}{\mathrm{C}_{a+b}^n} \end{cases}$$

Remarque 12 :

1. Comme pour la loi binômiale, une variable aléatoire réelle qui suit une loi hypergéométrique est une variable aléatoire réelle discrète, finie, à valeurs entières.
2. Première remarque à démontrer, et elle est importante, c'est que $\displaystyle\sum_{k \in X(\Omega)} \mathbf{P}(\{X = k\}) = 1$

   En fait, le résultat vient de l'identité, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_a^k \mathrm{C}_b^{n-k} = \mathrm{C}_{a+b}^n$
3. Cette situation se rencontre dans les problèmes de proportion

Exercice 7 :

Une urne contient 10 boules, dont 4 blanches et 6 noires

1. On en tire 5 **sans remise**. Trouver la loi de la variable aléatoire réelle égale au nombre de boules blanches tirées.
2. On en tire 5 **avec remise**. Trouver la loi de la variable aléatoire réelle égale au nombre de boules blanches tirées.

17.4.5 Loi géométrique

*Voici un exemple où les valeurs prises par la variable aléatoire réelle X sont **dénombrables et non finies.***

Soit $\{\Omega; \mathcal{F}; \mathbf{P}\}$ un espace probabilisé et $X : \Omega \to \mathbb{R}$, une variable aléatoire réelle.
On dit que X, suit une loi géométrique de paramètre p si et seulement si

1. $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$
2. $\mathbf{P}(\{X = k\}) = p(1-p)^{k-1}$

Remarque 13 :

1. Il faut, bien entendu vérifier que $\displaystyle\sum_{k \in X(\Omega)} \mathbf{P}(\{X = k\}) = 1$.

   La démonstration est, ici, plutôt simple, c'est la somme de la **série géométrique** $\displaystyle\sum_{k \in \mathbb{N}^*} p(1-p)^{k-1}$.

   En effet, comme $0 < p < 1$, nous avons aussi $0 < 1 - p < 1$ et :

$$\sum_{k \in \mathbb{N}^*} p(1-p)^{k-1} = p \sum_{k \in \mathbb{N}^*} (1-p)^{k-1} = p \times \frac{1}{1-(1-p)} = p \times \frac{1}{p} = 1$$

2. Au jeu de « **pile ou face** » répété indéfiniment, X désignant **le rang** du premier succès suit une loi géométrique. La loi géométrique modélise donc un temps d'attente discret.

Exercice 8 :

Une urne contient n boules dont a boules blanches et $n - a$ boules noires. On tire, de cette urne, une boule, **avec remise**, jusqu'à l'apparition d'une boule blanche.
On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule blanche. Montrer que X est géométrique de paramètre $\dfrac{a}{n}$

17.4.6 Loi de Poisson

Soit $\{\Omega; \mathcal{F}; \mathbf{P}\}$ un espace probabilisé et $X : \Omega \to \mathbb{R}$, une variable aléatoire réelle.
On dit que X, suit une loi de Poisson de paramètre λ si et seulement si

$$\begin{cases} X(\Omega) = \mathbb{N} \\ \mathbf{P}(\{X = k\}) = \dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \end{cases}$$

Remarque 14 :

1. Voici un second exemple où les valeurs prises par la variable aléatoire réelle X sont **dénombrables et non finies.**
2. Il faut, bien entendu vérifier que $\displaystyle\sum_{k \in X(\Omega)} \mathbf{P}(\{X = k\}) = 1$.

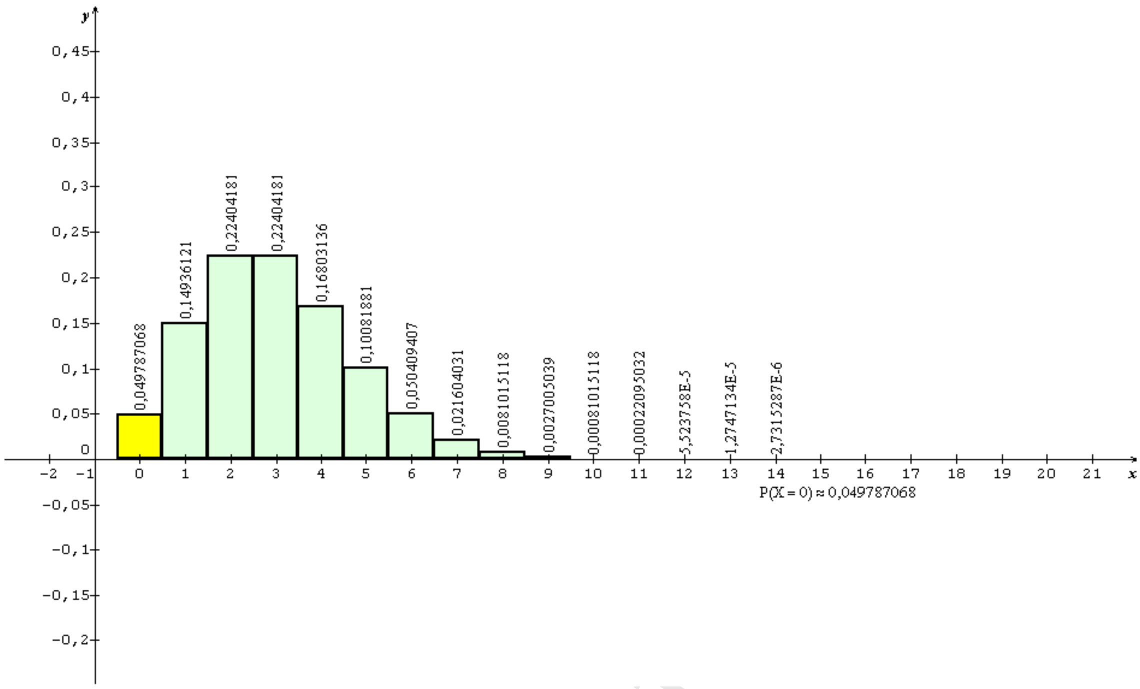

FIGURE 17.2 – L'histogramme d'une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 3$

Une fois de plus, ici c'est plutôt simple, c'est la somme d'une série liée à la **série exponentielle** :
Nous avons $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{\lambda^{\,k}}{k\,!} = e^{\lambda}$. Donc :

$$\begin{aligned}
\sum_{k\in X(\Omega)} \mathbf{P}\left(\{X = k\}\right) &= \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbf{P}\left(\{X = k\}\right) \\
&= \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{\lambda^{\,k} e^{\,-\lambda}}{k\,!} \\
&= e^{\,-\lambda} \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{\lambda^{\,k}}{k\,!} \\
&= e^{\,-\lambda} \times e^{\lambda} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Exercice 9 :

Les ingénieurs d'une fabrique d'horlogerie admettent que le nombre de défauts sur le boîtier d'une montre suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 4$.
On choisit une montre au hasard à la sortie d'une chaîne de montage. Calculez les probabilités des événements suivants :

1. Il n'y a aucun défaut
2. Le nombre de défauts est compris, au sens large, entre 4 et 8

17.5 Fonctions de répartition

17.5.1 Définition

Soit $\{\Omega; \mathcal{F}; \mathbf{P}\}$ un espace probabilisé et $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, une variable aléatoire réelle.
On appelle fonction de répartition de X, la fonction $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} F : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \quad x & \longmapsto & F(x) = \mathbf{P}(\{X \leqslant x\}) \end{cases}$$

Remarque 15 :

1. La fonction de répartition, pour plus de précision est souvent notée F_X
2. Comme déjà énoncé, $\{X \leqslant x\}$ est une écriture racoourcie pour $\{\omega \in \Omega \text{ tel que } X(\omega) \leqslant x\}$ qui est bien un élément de la tribu $\mathcal{F}$, compte tenu de la définition générale des variables aléatoires réelles puisque $\{\omega \in \Omega \text{ tel que } X(\omega) \leqslant x\} = X^{-1}(]-\infty, x])$ et nous pouvons donc calculer $\mathbf{P}(\{X \leqslant x\})$

17.5.2 Proposition

Soit $\{\Omega; \mathcal{F}; \mathbf{P}\}$ un espace probabilisé et $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, une variable aléatoire réelle , et soit $F_X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sa fonction de répartition.
Alors

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $0 \leqslant F_X(x) \leqslant +1$
2. F_X est croissante
3. En tout point $x \in \mathbb{R}$, F_X possède une limite à droite et une limite à gauche.
4. La fonction de répartition F_X est continue à droite en tout point $x_0 \in \mathbb{R}$
5. La fonction de répartition F_X est telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$

Démonstration

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $0 \leqslant F_X(x) \leqslant +1$
   Evidemment, puisque la fonction de répartition F_X est définie à partir d'une probabilité
2. F_X est croissante
   $\Rightarrow$ Soient $x \in \mathbb{R}$ et $x' \in \mathbb{R}$ tels que $x \leqslant x'$; alors, $\{X \leqslant x\} \subset \{X \leqslant x'\}$.
   En effet, soit $\omega \in \{X \leqslant x\}$, alors, $X(\omega) \leqslant x$ et, comme $x \leqslant x'$, alors, $X(\omega) \leqslant x'$, et donc $\omega \in \{X \leqslant x'\}$.
   En conclusion, $\{X \leqslant x\} \subset \{X \leqslant x'\}$
   $\Rightarrow$ Donc, $\mathbf{P}(\{X \leqslant x\}) \leqslant \mathbf{P}(\{X \leqslant x'\})$, c'est à dire $F_X(x) \leqslant F_X(x')$
   La fonction de répartition est donc bien une fonction croissante.
3. En tout point $x \in \mathbb{R}$, F_X possède une limite à droite et une limite à gauche.
   On a vu en L_1, que toute fonction monotone admettant en tout point de son domaine de définition, une limite à droite et une limite à gauche.
   Une fonction de répartition F_X est une fonction monotone croissante et admet donc une limite à droite et une limite à gauche.
4. La fonction de répartition F_X est continue à droite en tout point $x_0 \in \mathbb{R}$
   Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels, décroissante et telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = x_0$. Ceci veut donc dire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > x_0$
   Soit, maintenant, A_n, l'événement $A_n = \{x_0 < X \leqslant u_n\}$
   $\Rightarrow$ **Nous avons** $\mathbf{P}(A_n) = F_X(u_n) - F_X(x_0)$
   - ▷ L'événement $A_n = \{x_0 < X \leqslant u_n\}$ est exactement $\{x_0 < X \leqslant u_n\} = \{x_0 < X\} \cap \{X \leqslant u_n\}$, c'est à dire que $A_n = \{x_0 < X \leqslant u_n\} = \overline{\{X \leqslant x_0\}} \cap \{X \leqslant u_n\}$
   - ▷ Comme $x_0 < u_n$, nous avons $\{X \leqslant x_0\} \subset \{X \leqslant u_n\}$

▷ D'après les propriétés élémentaires des probabilités,

$$\mathbf{P}\left(\overline{\{X \leqslant x_0\}} \cap \{X \leqslant u_n\}\right) = \mathbf{P}\left(\{X \leqslant u_n\}\right) - \mathbf{P}\left(\{X \leqslant x_0\}\right)$$

C'est à dire $\mathbf{P}(A_n) = \mathbf{P}(\{x_0 < X \leqslant u_n\}) = F_X(u_n) - F_X(x_0)$
Ce que nous voulions

⇒ **Nous avons** $A_{n+1} \subset A_n$
Soit $\omega \in A_{n+1}$; alors, $x_0 < X(\omega) \leqslant u_{n+1}$, et comme $u_{n+1} \leqslant u_n$, nous avons aussi $x_0 < X(\omega) \leqslant u_n$, c'est à dire $\omega \in A_n$.
Donc, $A_{n+1} \subset A_n$

⇒ Maintenant, d'après 15.3.4 $\mathbf{P}\left(\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{P}(A_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(F_X(u_n) - F_X(x_0)\right)$

⇒ **Nous avons** $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset$
Supposons le contraire et soit $\omega \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$; alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\omega \in A_n$, et, toujours pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_0 < X(\omega) \leqslant u_n$
Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres réels, décroissante et telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = x_0$, il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que, si $n \geqslant N$, alors :

$$x_0 < u_n < \frac{x_0 + X(\omega)}{2} < X(\omega)$$

Et ainsi, si $n \geqslant N$, nous avons $X(\omega) \notin A_n$.
Il y a donc contradiction et $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset$

⇒ Donc $\mathbf{P}\left(\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = 0$, et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(F_X(u_n) - F_X(x_0)\right) = 0$.
Ce qui signifie que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(F_X(u_n) = F_X(x_0)\right)$ et que, donc, F_X est continue, à droite, en x_0

5. <u>La fonction de répartition F_X est telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$</u>

⇒ **On démontre que** $\lim\limits_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels, décroissante et telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.
Appelons B_n, l'événement $B_n = \{X \leqslant u_n\}$ et alors $\mathbf{P}(B_n) = F_X(u_n)$
▷ Tout d'abord, nous avons, sûrement $B_{n+1} \subset B_n$ puisque si $\omega \in B_{n+1}$, alors $X(\omega) \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$ et donc $\omega \in B_n$
▷ D'où, toujours d'après 15.3.4, $\mathbf{P}\left(\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{P}(B_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} F_X(u_n)$
▷ Et nous avons $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} B_n = \emptyset$.
En effet, supposons le contraire et soit $\omega \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} B_n$; alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\omega \in B_n$, et ceci veut donc dire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ $X(\omega) \leqslant u_n$.
Or, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N$, alors $u_n < X(\omega)$ et donc, si $n \geqslant N$, alors $\omega \notin B_n$, ce qui contredit avec l'hypothèse de départ.
Donc, $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} B_n = \emptyset$
Et nous retrouvons $\mathbf{P}\left(\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{P}(B_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} F_X(u_n) = 0$
D'où $\lim\limits_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$

⇒ **On démontre que** $\lim\limits_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$
Je vais faire une démonstration plus rapide parce que, sinon sembleble, elle est similaire aux deux précédentes
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels, croissante et telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
Appelons C_n, l'événement $C_n = \{X \leqslant u_n\}$ et alors $\mathbf{P}(C_n) = F_X(u_n)$
▷ Tout d'abord, nous avons, sûrement $C_n \subset C_{n+1}$ puisque si $\omega \in C_n$, alors $X(\omega) \leqslant u_n \leqslant u_{n+1}$ et donc $\omega \in C_{n+1}$

- ▷ Cette fois ci d'après 15.3.3, $\mathbf{P}\left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} C_n\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{P}(C_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} F_X(u_n)$
- ▷ Et nous avons $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} C_n = \Omega$.
  - ⋆ Clairement, nous avons $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} C_n \subset \Omega$
  - ⋆ Réciproquement, soit $\omega \in \Omega$; alors $X(\omega) \in \mathbb{R}$, et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N$, alors $u_n \geqslant X(\omega)$ et donc, si $n \geqslant N$, alors $\omega \in C_n$ et donc $\omega \in \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} C_n$.

  Ce qui nous autorise à conclure que $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} C_n = \Omega$

  Et nous retrouvons $\mathbf{P}\left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} C_n\right) = \mathbf{P}(\Omega) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{P}(C_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} F_X(u_n) = 1$

  D'où $\lim\limits_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$

Remarque 16 :

1. Pour démontrer la proposition 17.5.2, nous avons utilisé des techniques de **théorie de la mesure**, puisqu'en fait, une probabilité est aussi une mesure.
2. Pour compléter nous avons aussi démontré dans la proposition 17.5.2, que pour $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ nous avons $\mathbf{P}(\{a < X \leqslant b\}) = F_X(b) - F_X(a)$
3. Il faut noter que la proposition 17.5.2 est vraie pour toutes sortes de variables aléatoires réelles , discrètes ou non. La proposition ci-après n'est valable que pour les variables aléatoires réelles discrètes

17.5.3 Proposition : cas des variables aléatoires réelles discrètes

Soit $\{\Omega; \mathcal{F}; \mathbf{P}\}$ un espace probabilisé et $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, une variable aléatoire réelle discrète.
On suppose donc $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ avec $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n \leqslant \ldots$
Soit $F_X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sa fonction de répartition.
Alors

1. F_X est constante sur $[x_i; x_{i+1}[$
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1} \Longrightarrow F_X(x) = \sum\limits_{j=1}^{i} \mathbf{P}(\{X = x_j\})$, résultat qui s'exprime aussi ainsi :
$$F_X(x) = \mathbf{P}(\{X \leqslant x\}) = \sum_{x_i \leqslant x \text{ et } x_i \in X(\Omega)} \mathbf{P}(\{X = x_i\})$$
3. Nous avons $\mathbf{P}(\{X = x_i\}) = F_X(x_i) - F_X(x_{i-1})$

Démonstration

1. **Démonstration du point 1**

   Soient $x \in \mathbb{R}$ et $x' \in \mathbb{R}$ tels que $x_i \leqslant x < x' < x_{i+1}$.
   Nous avons :
   $$]-\infty; x'] =]-\infty; x] \cup]x; x']$$
   Des propriétés vues dans la proposition 17.2.1, nous avons :
   $$X^{-1}(]-\infty; x']) = X^{-1}(]-\infty; x]) \cup X^{-1}(]x; x'])$$
   C'est à dire que
   $$F_X(x') = F_X(x) \cup \mathbf{P}\left(X^{-1}(]x; x'])\right)$$
   Or, $X(\Omega) \cap]x; x'] = \emptyset$, donc $\mathbf{P}\left(X^{-1}(]x; x'])\right) = 0$, c'est à dire $F_X(x') = F_X(x)$

2. **Montrons que pour tout** $x \in \mathbb{R}$**,** $x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1} \Longrightarrow F_X(x) = \sum_{j=1}^{i} \mathbf{P}(\{X = x_j\})$

   En effet, $\{X \leqslant x\} = \{X = x_1\} \cup \{X = x_2\} \cup \cdots \cup \{X = x_i\}$
   Et comme, si $k \neq j$, nous avons $\{X = x_k\} \cap \{X = x_j\} = \emptyset$, nous avons le résultat.

3. **Montrons que nous avons** $\mathbf{P}(\{X = x_i\}) = F_X(x_i) - F_X(x_{i-1})$
   En effet,

$$\{X \leqslant x_i\} = \bigcup_{j=1}^{i} \{X = x_j\} = \bigcup_{j=1}^{i-1} \{X = x_j\} \cup \{X = x_i\} = \{X \leqslant x_{i-1}\} \cup \{X = x_i\}$$

   Alors, $F_X(x_i) = \mathbf{P}(\{X \leqslant x_{i-1}\}) + \mathbf{P}(\{X = x_i\}) = F_X(x_{i-1}) + \mathbf{P}(\{X = x_i\})$
   Et donc $\mathbf{P}(\{X = x_i\}) = F_X(x_i) - F_X(x_{i-1})$
   D'où le résultat

Remarque 17 :

Pour toutes **les variables aléatoires réelles discrètes telles que** $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x \leqslant x_1 \Longrightarrow F_X(x) = 0$
2. En écrivant $\mathbf{P}(\{X = x_i\}) = F_X(x_i) - F_X(x_{i-1})$, nous montrons que la fonction de répartition définit bien la loi de X

Exemple 7 :

Exemple du jet d'un dé à 6 faces

On lance un dé à 6 faces, équilibré ; on construit la variable aléatoire réelle $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ égale au numéro sorti lors du lancer ; on a donc $X(\Omega) = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ et, pour $k = 1, \ldots, 6$, $\mathbf{P}(\{X = k\}) = \dfrac{1}{6}$; on veut donc construire sa fonction de répartition

$$F_X(x) = \mathbf{P}(\{X \leqslant x\})$$

et nous avons donc, si $x < 1$ alors $F_X(x) = \mathbf{P}(\{X \leqslant x\}) = 0$.
De plus, si $x \in [1; 2[$, l'événement $\{X \leqslant x\}$ est l'événement $\{X = 1\}$ et donc,

$$F_X(x) = \mathbf{P}(\{X \leqslant x\}) = \mathbf{P}(\{X = 1\}) = \frac{1}{6}$$

De même, si $x \in [2; 3[$, l'événement $\{X \leqslant x\}$ est l'événement $\{X = 1\} \cup \{X = 2\}$ et donc,

$$F_x(x) = \mathbf{P}(\{X \leqslant x\}) = \mathbf{P}(\{X = 1\} \cup \{X = 2\}) = \mathbf{P}(\{X = 1\}) + \mathbf{P}(\{X = 2\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

Pour terminer, nous avons donc : si $x \in [3; 4[$ alors, $F_X(x) = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{2}$, si $x \in [4; 5[$, alors $F_X(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{2}{3}$, si $x \in [5; 6[$ alors $F_X(x) = \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{5}{6}$, et si $x \geqslant 6$ alors $F_X(x) = \dfrac{5}{6} + \dfrac{1}{6} = 1$.
Les résultats sont exposés dans le tableau ci-après :

x	$x < 1$	$x \in [1, 2[$	$x \in [2, 3[$	$x \in [3, 4[$	$x \in [4, 5[$	$x \in [5, 6[$	$x \geqslant 6$
$F(x)$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{6}$	1

D'où le graphe 17.3 qui est, dans notre cas une fonction étagée ou en escalier [2].

2. Pour les fonctions étagées ou en escalier, vous reférer à un cours d'intégration

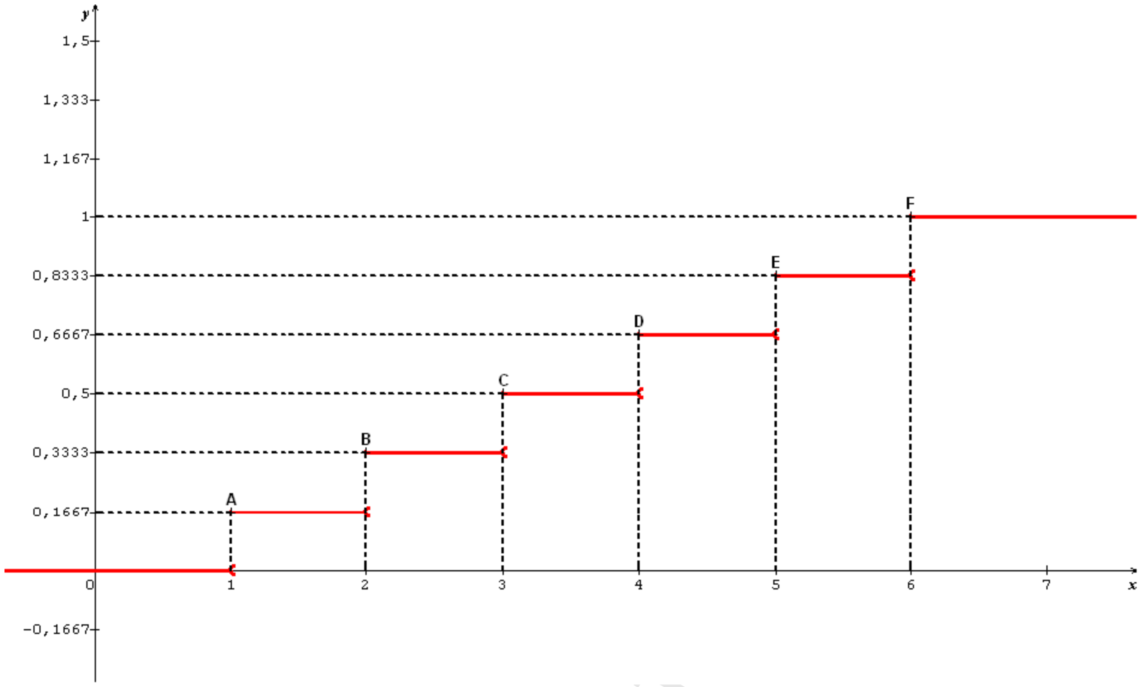

FIGURE 17.3 – Le graphe de la fonction de répartition du lancer de dés

Exercice 10 :

Soit $\{\Omega, \mathbb{F}, \mathbf{P}\}$ un espace probabilisé et $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle discrète de fonction de répartition F_X définie par :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } 0 \leqslant x < 1 \\ \dfrac{2}{3} & \text{si } 1 \leqslant x < 2 \\ \dfrac{11}{12} & \text{si } 2 \leqslant x < 3 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 3 \end{cases}$$

1. Construire le graphe de F_X
2. Donner $\mathbf{P}\left(\left\{X > \dfrac{1}{2}\right\}\right)$
3. Donner $\mathbf{P}(\{2 < X \leqslant 4\})$
4. Donner $\mathbf{P}(\{X = 1\})$

17.6 Moments d'une variable aléatoire réelle discrète

17.6.1 Définition dans le cas fini

Soit $\{\Omega;\mathcal{F};\mathbf{P}\}$ un espace probabilisé et $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, une variable aléatoire réelle discrète **prenant des valeurs finies.**
On suppose donc $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ avec $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n$

1. La moyenne ou espérance mathématique de X est le nombre

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{P}(\{X = x_i\})}$$

2. Pour $s \in \mathbb{N}^*$, on appelle moment d'ordre s de X, le nombre

$$\boxed{M_k(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^s \mathbf{P}(\{X = x_i\})}$$

Exemple 8 :

1. L'espérance d'une loi de Bernouilli de paramètre p :

$$\mathbb{E}(X) = 0 \times \mathbf{P}(\{X = 0\}) + 1 \times \mathbf{P}(\{X = 1\}) = 0 \times (1 - p) + 1 \times p = p$$

   L'espérance d'une loi de Bernouilli est donc égale au paramètre p
2. L'espérance de la fonction indicatrice 1_A est donnée par :

$$\mathbb{E}(1_A) = 0 \times \mathbf{P}(\{1_A = 0\}) + 1 \times \mathbf{P}(\{1_A = 1\}) = 0 \times \mathbf{P}\left(\overline{A}\right) + 1 \times \mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A)$$

3. Le moment d'ordre 2 d'une loi de Bernouilli de paramètre p est donné par :

$$M_2(X) = 0^2 \times \mathbf{P}(\{X = 0\}) + 1^2 \times \mathbf{P}(\{X = 1\}) = 0 \times (1 - p) + 1 \times p = p$$

Exercice 11 :

Une variable aléatoire X prend les valeurs 0, 2 et 4 avec les probabilités respectives $\frac{21}{32}$, $\frac{6}{32}$ et $\frac{5}{32}$.
Calculer l'espérance de X et son moment d'ordre 2.

Remarque 18 :

1. Dans le cas où $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ est fini, $\mathbb{E}(X)$ apparaît comme le barycentre[3] du système pondéré $\{(x_i, \mathbf{P}(\{X = x_i\}))\ \ i = 1, \ldots, n\}$
2. Une variable aléatoire réelle d'espérance nulle est appelée centrée.

Exercice 12 :

Soit Y une variable aléatoire réelle à valeurs dans $\mathbb{N}$, majorée par un réel $M > 0$.
Montrer que $\mathbb{E}(Y) \leqslant M\mathbf{P}(\{Y \geqslant 1\})$

3. Ou centre de gravité

17.6.2 Définition dans le cas infini dénombrable

Soit $\{\Omega; \mathcal{F}; \mathbf{P}\}$ un espace probabilisé et $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, une variable aléatoire réelle discrète.
On suppose donc $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ avec $x_1 < x_2 < \ldots < x_n < \ldots$

1. On dit que X admet une espérance mathématique (ou une moyenne) si la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n \mathbf{P}(\{X = x_n\})$ converge absolument, c'est à dire si la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n| \mathbf{P}(\{X = x_n\})$ converge.
   On note alors
   $$\boxed{\mathbb{E}(X) = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n \mathbf{P}(\{X = x_n\})}$$
   Le nombre $\mathbb{E}(X)$ est appelé espérance ou moyenne de X
2. De même, on dit que X admet un moment d'ordre $s \in \mathbb{N}^*$ si la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n^s \mathbf{P}(\{X = x_n\})$ est absolument convergente, c'est à dire si la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^s \mathbf{P}(\{X = x_n\})$ converge.
   On appelle alors moment d'ordre s de X, le nombre
   $$\boxed{M_k(X) = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n^s \mathbf{P}(\{X = x_n\})}$$

Remarque 19 :

Même dans le cas discret, infini, une variable aléatoire réelle d'espérance nulle est appelée centrée.

17.6.3 Proposition

Soit $\{\Omega; \mathcal{F}; \mathbf{P}\}$ un espace probabilisé
On appelle variable aléatoire réelle certaine, une variable aléatoire réelle $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que, pour tout $\omega \in \Omega$, $X(\omega) = \lambda$.
Alors, la moyenne d'une variable aléatoire réelle certaine est λ, c'est à dire $\mathbb{E}(X) = \lambda$

Démonstration

Nous avons $\mathbb{E}(X) = \lambda \mathbf{P}(\{X = \lambda\})$.
Remarquons que $\{X = \lambda\} = \Omega$ puisque X est une variable aléatoire réelle certaine, et donc $\mathbb{E}(X) = \lambda$

Exercice 13 :

Quels sont les moments d'ordre s d'une variable aléatoire réelle certaine ?

Remarque 20 :

Il existe des variables aléatoires réelles qui n'admettent pas d'espérance.

Soit $\{\Omega; \mathcal{F}; \mathbf{P}\}$ un espace probabilisé et $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{N}^*$ une variable aléatoire réelle telle que $\mathbf{P}(\{X = n\}) = \dfrac{1}{n(n+1)}$. On sait déjà que $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n(n+1)} = 1$
Cette variable aléatoire réelle n'admet pas d'espérance, puisque
$$\sum_{n\geqslant 1} n \times \mathbf{P}(\{X = n\}) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{n}{n(n+1)} = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n+1}$$
La série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n+1}$ est une série divergente, et donc $\mathbb{E}(X)$ n'existe pas.

17.6.4 Proposition

Soit $\{\Omega;\mathcal{F};\mathbf{P}\}$ un espace probabilisé et $X:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle discète
On suppose Ω dénombrable, c'est à dire $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\cdots,\omega_n,\cdots\}$ avec $\omega_1<\omega_2<\omega_3<\cdots<\omega_n<\cdots$
et que $\mathbb{E}(X)$ existe
Alors, $\mathbb{E}(X)=\sum\limits_{n\geqslant 1}X(\omega_i)\,\mathbf{P}(\{\omega_i\})$

Démonstration

Nous allons noter $X(\Omega)=\{x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n,\cdots,\}$ avec $x_1<x_2<x_3<\cdots<x_n,\cdots,$

- ▷ Si $\mathbb{E}(X)$ existe, alors la série $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}^*}|x_k|\,\mathbf{P}(\{X=x_k\})$ converge et donc, $\mathbb{E}(X)=\sum\limits_{k\in\mathbb{N}^*}x_k\mathbf{P}(\{X=x_k\})$
- ▷ L'événement $\{X=x_k\}$ est donné par :

$$\{X=x_k\}=\{\omega\in\Omega\text{ tels que }X(\omega)=x_k\}=\{\omega_{k_1},\omega_{k_2},\omega_{k_3},\cdots,\omega_{k_p},\cdots\}=\bigcup_{p\in\mathbb{N}^*}\{\omega_{k_p}\}$$

De telle sorte que $\mathbf{P}(\{X=x_k\})=\mathbf{P}\left(\bigcup\limits_{p\in\mathbb{N}^*}\{\omega_{k_p}\}\right)=\sum\limits_{k\in\mathbb{N}^*}\mathbf{P}\left(\{\omega_{k_p}\}\right)$

- ▷ Comme, pour tout $p\in\mathbb{N}^*$, nous avons $X\left(\omega_{k_p}\right)=x_k$, nous avons :

$$x_k\mathbf{P}(\{X=x_k\})=\sum_{k\in\mathbb{N}^*}x_k\mathbf{P}\left(\{\omega_{k_p}\}\right)=\sum_{p\in\mathbb{N}^*}X\left(\omega_{k_p}\right)\mathbf{P}\left(\{\omega_{k_p}\}\right)$$

Et donc,

$$\mathbb{E}(X)=\sum_{k\in\mathbb{N}^*}x_k\mathbf{P}(\{X=x_k\})=\sum_{k\in\mathbb{N}^*}\left(\sum_{p\in\mathbb{N}^*}X\left(\omega_{k_p}\right)\mathbf{P}\left(\{\omega_{k_p}\}\right)\right)=\sum_{n\in\mathbb{N}^*}X(\omega_n)\,\mathbf{P}(\{\omega_n\})$$

Ce que nous voulions

Remarque 21 :

1. Bien entendu, cette proposition n'est valable que lorsque Ω est dénombrable ; c'est d'ailleurs le cas le plus général de ce cours.
2. Si Ω est dénombrable, c'est à dire si $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\cdots,\omega_n,\cdots\}$, alors $\mathbb{E}(X)$ existe si et seulement si la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}X(\omega_i)\,\mathbf{P}(\{\omega_i\})$ converge absolument

17.6.5 Proposition

Soit $\{\Omega;\mathcal{F};\mathbf{P}\}$ un espace probabilisé. On suppose Ω dénombrable, c'est à dire $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\cdots,\omega_n,\cdots\}$
avec $\omega_1<\omega_2<\omega_3<\cdots<\omega_n<\cdots$
Soient $X:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$ et $Y:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$ 2 variables aléatoires réelles discrètes telles que $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}(Y)$ existent
Alors, $\mathbb{E}(X+Y)$ existe et $\mathbb{E}(X+Y)=\mathbb{E}(X)+\mathbb{E}(Y)$

Démonstration

- ▷ Si $\mathbb{E}(X)$ existe, alors la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}|X(\omega_n)|\,\mathbf{P}(\{\omega_n\})$ converge ; de même, $\mathbb{E}(Y)$ existe, alors la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}|Y(\omega_n)|\,\mathbf{P}(\{\omega_n\})$ converge
- ▷ Maintenant,

$$\begin{aligned}|(X+Y)(\omega_n)|\,\mathbf{P}(\{\omega_n\})=&\ |X(\omega_n)+Y(\omega_n)|\,\mathbf{P}(\{\omega_n\})\\ \leqslant&\ (|X(\omega_n)|+|Y(\omega_n)|)\,\mathbf{P}(\{\omega_n\})=|X(\omega_n)|\,\mathbf{P}(\{\omega_n\})+|Y(\omega_n)|\,\mathbf{P}(\{\omega_n\})\end{aligned}$$

▷ Les séries $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} |X(\omega_n)| \mathbf{P}(\{\omega_n\})$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} |Y(\omega_n)| \mathbf{P}(\{\omega_n\})$ étant convergentes, il en est de même de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} |(X+Y)(\omega_n)| \mathbf{P}(\{\omega_n\})$, et donc $\mathbb{E}(X+Y)$ existe

▷ Et, pour terminer :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X+Y) = & \sum_{n\in\mathbb{N}^*} (X+Y)(\omega_n) \mathbf{P}(\{\omega_n\}) \\
= & \sum_{n\in\mathbb{N}^*} X(\omega_n) + Y(\omega_n) \mathbf{P}(\{\omega_n\}) \\
= & \sum_{n\in\mathbb{N}^*} X(\omega_n) \mathbf{P}(\{\omega_n\}) + \sum_{n\in\mathbb{N}^*} Y(\omega_n) \mathbf{P}(\{\omega_n\}) \\
= & \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)
\end{aligned}$$

Remarque 22 :

Ce résultat est toujours applicable pour Ω dénombrable ; dans le chapitre suivant, nous démontrerons le même résultat, mais dans un cas plus général.

Etude des moyennes des lois classiques

17.6.6 Moyenne d'une loi de Bernouilli

Soit $\{\Omega; \mathcal{F}; \mathbf{P}\}$ un espace probabilisé et $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, une variable aléatoire réelle de Bernouilli de paramètre p
Alors $\mathbb{E}(X) = p$

Démonstration

Nous avons

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) = & \ 0 \times \mathbf{P}(\{X=0\}) + 1 \times \mathbf{P}(\{X=1\}) \\
= & \ 1 \times \mathbf{P}(\{X=1\}) \\
= & \ p
\end{aligned}$$

17.6.7 Moyenne d'une loi binomiale

Soit $\{\Omega; \mathcal{F}; \mathbf{P}\}$ un espace probabilisé et $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, une variable aléatoire réelle qui suit une loi binomiale de paramètre n et p, $\mathcal{B}(n,p)$
Alors $\mathbb{E}(X) = np$

Démonstration

Par définition de l'espérance (ou de la moyenne !!), nous avons :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{n} k\mathrm{C}_n^k p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} k\mathrm{C}_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

Or,

$$\begin{aligned}
k\mathrm{C}_n^k = & \frac{k \times n!}{k! \times (n-k)!} \\
= & \frac{n!}{(k-1)! \times (n-k)!} \\
= & \frac{n \times (n-1)!}{(k-1)! \times ((n-1)-(k-1))!} \\
= & n\mathrm{C}_{n-1}^{k-1}
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \sum_{k=1}^{n} n\mathrm{C}_{n-1}^{k-1} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \sum_{k=1}^{n} np\mathrm{C}_{n-1}^{k-1} p^{k-1} (1-p)^{((n-1)-(k-1))}\end{aligned}$$

C'est à dire que :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \sum_{k=1}^{n} np\mathrm{C}_{n-1}^{k-1} p^{k-1} (1-p)^{((n-1)-(k-1))} \\ &= np\sum_{k=1}^{n} \mathrm{C}_{n-1}^{k-1} p^{k-1} (1-p)^{((n-1)-(k-1))} \\ &= np\,(p+(1-p))^{n-1} = np\end{aligned}$$

On en conclue donc que $\mathbb{E}(\{X\}) = np$

17.6.8 Moyenne de la loi géométrique

Ici, nous avons à étudier une loi à valeurs dénombrables donc discrètes infinies

Soit $\{\Omega; \mathcal{F}; \mathbf{P}\}$ un espace probabilisé et $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{N}^*$, une variable aléatoire réelle qui suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0; 1[$,
Alors $\mathbb{E}(X)$ existe et $\mathbb{E}(X) = \dfrac{1}{p}$

Démonstration

Par définition de l'espérance, nous avons

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n\geqslant 1} n\mathbf{P}(\{X=n\}) = \sum_{n\geqslant 1} np(1-p)^{n-1} = p\sum_{n\geqslant 1} n(1-p)^{n-1}$$

Dans l'étude des séries entières, nous avons vu que si $|x| < 1$ alors $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$; nous appliquons alors ce résultat au calcul de l'espérance :

$$\mathbb{E}(X) = p\sum_{n\geqslant 1} n(1-p)^{n-1} = p \times \frac{1}{(1-(1-p))^2} = \frac{1}{p}$$

17.6.9 Moyenne d'une loi de Poisson

Soit $\{\Omega; \mathcal{F}; \mathbf{P}\}$ un espace probabilisé et $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{N}$, une variable aléatoire réelle qui suit une loi de Poisson de paramètre λ,
Alors $\mathbb{E}(X)$ existe et $\mathbb{E}(X) = \lambda$

Démonstration

Par définition de l'espérance, nous avons

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \sum_{n\geqslant 0} n\mathbf{P}(\{X=n\}) \\ &= \sum_{n\geqslant 1} n\frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} \\ &= e^{-\lambda}\sum_{n\geqslant 1} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \\ &= \lambda e^{-\lambda}\sum_{n\geqslant 1} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}\end{aligned}$$

Nous avons vu, en étudiant les séries entières, que : $\sum_{n\geqslant 0} \frac{\lambda^n}{n!} = e^{\lambda}$ et on applique ce résultat au calcul de l'espérance :

$$\mathbb{E}(X) = \lambda e^{-\lambda} \sum_{n\geqslant 1} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{n\geqslant 0} \frac{\lambda^n}{n!} = \lambda e^{-\lambda} \times e^{\lambda} = \lambda$$

17.6.10 Variables aléatoires discrètes et positives

1. Soit $\{\Omega; \mathcal{F}; \mathbf{P}\}$ un espace probabilisé et $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle .
   On dit que X est positive, si, pour tout $\omega \in \Omega$, $X(\omega) \geqslant 0$, c'est à dire que $\mathbf{P}(\{X \geqslant 0\}) = 1$
2. Soit X une variable aléatoire réelle discrète et positive telle que $\sum_{x\in X(\Omega)} |x| \mathbf{P}(\{X = x\})$ existe. Alors,
   (a) $\mathbb{E}(X) \geqslant 0$
   (b) Si $\mathbb{E}(X) = 0$, alors $\mathbf{P}(\{X = 0\}) = 1$

Démonstration

1. On montre que $\mathbb{E}(X) \geqslant 0$
   Nous avons :
$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x\in X(\Omega)} x\mathbf{P}(\{X = x\}) = \sum_{\substack{x\in X(\Omega)\\ x<0}} x\mathbf{P}(\{X = x\}) + \sum_{\substack{x\in X(\Omega)\\ x\geqslant 0}} x\mathbf{P}(\{X = x\})$$
   Or, $\bigcup_{\substack{x\in X(\Omega)\\ x<0}} \{X = x\} = \{X < 0\}$. Comme $\mathbf{P}(\{X < 0\}) = 0$, nous avons, pour tout $x \in X(\Omega)$ tel que $x < 0$, $\mathbf{P}(\{X = x\}) = 0$, et donc $\mathbb{E}(X) = \sum_{\substack{x\in X(\Omega)\\ x\geqslant 0}} x\mathbf{P}(\{X = x\})$
   Comme $x \geqslant 0$ et $0 \leqslant \mathbf{P}(\{X = x\}) \leqslant +1$, nous avons $\mathbb{E}(X) \geqslant 0$
2. Montrons que si $\mathbb{E}(X) = 0$, alors $\mathbf{P}(\{X = 0\}) = 1$
   Supposons $X \geqslant 0$ et $\mathbb{E}(X) = 0$. Alors, de $\mathbb{E}(X) = \sum_{x\in X(\Omega)} x\mathbf{P}(\{X = x\})$, nous déduisons que :
$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) = & \ 0 \times \mathbf{P}(\{X = 0\}) + \sum_{\substack{x\in X(\Omega)\\ x>0}} x\mathbf{P}(\{X = x\}) \\ = & \sum_{\substack{x\in X(\Omega)\\ x>0}} x\mathbf{P}(\{X = x\})\end{aligned}$$
   Or, pour tout $x \in X(\Omega)$ tel que $x > 0$, $x\mathbf{P}(\{X = x\}) \leqslant \mathbb{E}(X) = 0$, nous avons $\mathbf{P}(\{X = x\}) = 0$.
   Donc, $\mathbf{P}(\{X > 0\}) = 0$.
   Or, $X(\Omega) = \{X = 0\} \cup \{X > 0\}$, et donc $\mathbf{P}(X(\Omega)) = \mathbf{P}(\{X = 0\}) + \mathbf{P}(\{X > 0\})$. Comme $\mathbf{P}(X(\Omega)) = 1$ et $\mathbf{P}(\{X > 0\}) = 0$, nous en déduisons $\mathbf{P}(\{X = 0\}) = 1$

Remarque 23 :

Le dernier point dit que si, pour une variable aléatoire réelle discrète positive X, l'espérance est nulle, alors la variable aléatoire réelle X est presque sûrement nulle.

Exercice 14 :

Soit $\{\Omega; \mathcal{F}; \mathbf{P}\}$ un espace probabilisé, X et Y, 2 variables aléatoires réelles discrètes définies sur Ω telles que, pour tout $\omega \in \Omega$, $X(\omega) \geqslant Y(\omega)$ *(qui s'écrit aussi $X \geqslant Y$)*. Démontrer que $\mathbb{E}(X) \geqslant \mathbb{E}(Y)$

Exemples de calculs de moments d'ordre 2 pour les lois classiques

17.6.11 Moments d'une loi binomiale

Soit $\{\Omega; \mathcal{F}; \mathbf{P}\}$ un espace probabilisé et $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, une variable aléatoire réelle qui suit une loi binomiale de paramètre n et p $\mathcal{B}(n,p)$
Alors

1. La variable aléatoire réelle X admet des moments de tous ordres
2. En particulier, le moment d'ordre 2 de X est $M_2(X) = np[1 + (n-1)p]$

Démonstration

1. Par définition des moments d'ordre s, nous avons :

$$M_s(X) = \sum_{k=0}^{n} k^s \mathrm{C}_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

C'est une somme finie qui ne pose pas de question de convergence. Reste à calculer ces moments !!

2. Calculons $M_2(X)$, le moment d'ordre 2
Par définition d'un moment d'ordre 2, nous avons

$$M_2(X) = \sum_{k=0}^{n} k^2 \mathbf{P}(\{X = k\}) = \sum_{k=0}^{n} k^2 \mathrm{C}_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

Nous avons $k^2 = k(k-1) + k$ et donc

$$\begin{aligned}
k^2 \mathrm{C}_n^k &= [k(k-1) + k] \mathrm{C}_n^k \\
&= k(k-1) \mathrm{C}_n^k + k\mathrm{C}_n^k \\
&= \frac{k(k-1) \times n!}{k! \times (n-k)!} + k\mathrm{C}_n^k \\
&= n(n-1) \times \frac{(n-2)!}{(k-2)! \times (n-k)!} + k\mathrm{C}_n^k \\
&= n \times (n-1) \times \frac{(n-2)!}{(k-2)! \times ((n-2)-(k-2))!} + k\mathrm{C}_n^k \\
&= n \times (n-1) \mathrm{C}_{n-2}^{k-2} + k\mathrm{C}_n^k
\end{aligned}$$

De telle sorte que :

$$\begin{aligned}
M_2(X) &= n \times (n-1) \sum_{k=2}^{n} \mathrm{C}_{n-2}^{k-2} p^k (1-p)^{n-k} + \sum_{k=1}^{n} k\mathrm{C}_n^k p^k (1-p)^{n-k} \\
&= n \times (n-1) \sum_{k=0}^{n-2} p^2 \mathrm{C}_{n-2}^{k} p^{k-2} (1-p)^{((n-2)-(k-2))} + \mathbb{E}(X)
\end{aligned}$$

C'est à dire que :

$$\begin{aligned}
M_2(X) &= n \times (n-1) \times p^2 \sum_{k=0}^{n-2} \mathrm{C}_{n-2}^{k} p^k (1-p)^{((n-2)-(k-2))} + np \\
&= n \times (n-1) \times p^2 (p + (1-p))^{n-2} + np = n \times (n-1) \times p^2 + np
\end{aligned}$$

On en conclue donc que $M_2(X) = n \times (n-1) \times p^2 + np = np[1 + (n-1)p]$

17.6.12 Moments de la loi géométrique

Soit $\{\Omega; \mathcal{F}; \mathbf{P}\}$ un espace probabilisé et $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{N}^*$, une variable aléatoire réelle qui suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0;1[$
Alors

1. X admet des moments de tous ordres
2. En particulier, le moment d'ordre 2 de X est $M_2(X) = \dfrac{2-p}{p^2}$

Démonstration

1. Par définition des moments d'ordre s, nous avons :
$$M_s(X) = \sum_{n \geqslant 1} n^s p (1-p)^{n-1}$$
C'est une série numérique dont nous allons étudier la convergence.
En appelant $u_n = n^s p (1-p)^{n-1}$, nous allons utiliser le critère de d'Alembert.
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^s p (1-p)^n}{n^s p (1-p)^{n-1}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^s (1-p)$$
Nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^s (1-p) = 1-p$.
Comme $0 < 1-p < 1$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n = \sum\limits_{n\geqslant 1} n^s p (1-p)^{n-1}$ est donc convergente et donc $M_s(X)$ existe pour tout $s \in \mathbb{N}$
2. Calculons $M_2(X)$, le moment d'ordre 2
Calculons, par exemple, $M_2(X)$; par définition d'un moment d'ordre 2, nous avons
$$M_2(X) = \sum_{n\geqslant 1} n^2 \mathbf{P}(\{X=n\}) = \sum_{n\geqslant 1} n^2 p (1-p)^{n-1}$$
Nous avons, à nouveau, $n^2 = n(n-1) + n$ et donc
$$\begin{aligned} M_2(X) &= \sum_{n\geqslant 1} (n(n-1)+n) p (1-p)^{n-1} \\ &= \sum_{n\geqslant 1} n(n-1) p (1-p)^{n-1} + \sum_{n\geqslant 1} np(1-p)^{n-1} \\ &= p(1-p) \sum_{n\geqslant 1} n(n-1)(1-p)^{n-2} + \mathbb{E}(X) \\ &= p(1-p) \sum_{n\geqslant 1} n(n-1)(1-p)^{n-2} + \frac{1}{p} \end{aligned}$$
Il faut maintenant étudier $\sum\limits_{n\geqslant 1} n(n-1)(1-p)^{n-2}$
Dans l'étude des séries entières, nous avons, pour $|x| < 1$, $\sum\limits_{n\geqslant 1} n(n-1) x^{n-2} = \dfrac{2}{(1-x)^3}$, et donc
$$\sum_{n\geqslant 1} n(n-1)(1-p)^{n-2} = \frac{2}{(1-(1-p))^3} = \frac{2}{p^3}$$
Et donc, $p(1-p) \sum\limits_{n\geqslant 1} n(n-1)(1-p)^{n-2} = \dfrac{2p(1-p)}{p^3} = \dfrac{2(1-p)}{p^2}$
De telle sorte que :
$$M_2(X) = \frac{2(1-p)}{p^2} + \frac{1}{p} = \frac{2-p}{p^2}$$
On en conclue donc que $M_2(X) = \dfrac{2-p}{p^2}$

17.6.13 Moments d'une loi de Poisson

Soit $\{\Omega; \mathcal{F}; \mathbf{P}\}$ un espace probabilisé et $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{N}$, une variable aléatoire réelle qui suit une loi de Poisson de paramètre λ
Alors

1. X admet des moments de tous ordres
2. En particulier, le moment d'ordre 2 de X est $M_2(X) = \lambda(\lambda+1)$

Démonstration

1. $M_s(X)$ existe pour tout $s \in \mathbb{N}$
   Par définition des moments d'ordre s, nous avons :
$$M_s(X) = \sum_{n\geqslant 0} n^s \mathbf{P}(\{X=n\}) = \sum_{n\geqslant 0} n^s \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} = e^{-\lambda}\sum_{n\geqslant 0} n^s \frac{\lambda^n}{n!}$$
   $\sum_{n\geqslant 1} n^s \frac{\lambda^n}{n!}$ est une série numérique dont nous allons étudier la convergence.
   En appelant $u_n = n^s \frac{\lambda^n}{n!}$, nous allons utiliser le critère de d'Alembert.
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^s \lambda^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{n^s \lambda^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^s \frac{\lambda}{n+1}$$
   Nous avons $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^s \frac{\lambda}{n+1} = 0.$
   La série $\sum_{n\geqslant 0} u_n = \sum_{n\geqslant 0} n^s \frac{\lambda^n}{n!}$ est donc convergente et donc $M_s(X)$ existe pour tout $s \in \mathbb{N}$
2. Calculons $M_2(X)$, le moment d'ordre 2
   Nous allons, une nouvelle fois, utiliser la même procédure de démonstration
   Calculons, par exemple, $M_2(X)$; par définition d'un moment d'ordre 2, nous avons
$$M_2(X) = \sum_{n\geqslant 0} n^2 \mathbf{P}(\{X=n\}) = \sum_{n\geqslant 0} n^s \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} = e^{-\lambda}\sum_{n\geqslant 0} n^s \frac{\lambda^n}{n!}$$
   Nous avons, à nouveau, $n^2 = n(n-1)+n$ et donc
$$\begin{aligned} M_2(X) &= \sum_{n\geqslant 0} (n(n-1)+n)\frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!} \\ &= \sum_{n\geqslant 2} n(n-1)\frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!} + \sum_{n\geqslant 1} n\frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!} \\ &= \sum_{n\geqslant 2}\frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{(n-2)!} + \mathbb{E}(X) \\ &= e^{-\lambda}\lambda^2 \sum_{n\geqslant 2}\frac{\lambda^{n-2}}{(n-2)!} + \lambda \\ &= e^{-\lambda}\lambda^2 \sum_{n\geqslant 0}\frac{\lambda^n}{n!} + \lambda \end{aligned}$$
   Comme $\sum_{n\geqslant 0}\frac{\lambda^n}{n!} = e^{\lambda}$, nous avons :
$$M_2(X) = e^{-\lambda}\lambda^2 e^{\lambda} + \lambda = \lambda^2 e^{\lambda} + \lambda = \lambda(\lambda+1)$$
   On en conclue donc que $M_2(X) = \lambda(\lambda+1)$

Exercice 15 :

Soit $\alpha > 1$, réel. On considère $\zeta(\alpha) = \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ qui est une série de Riemann convergente.

Soit $\{\Omega; \mathcal{F}; \mathbf{P}\}$ un espace probabilisé et $X_\alpha : \Omega \longrightarrow \mathbb{N}^*$ une variable aléatoire réelle telle que $\mathbf{P}(\{X_\alpha = n\}) = \frac{1}{\zeta(\alpha)} \times \frac{1}{n^\alpha}$

1. Vérifier que $\sum_{n \geqslant 1} \mathbf{P}(\{X_\alpha = n\}) = 1$
2. Démontrer que X_α admet des moments d'ordre $s \in \mathbb{N}$ si et seulement si $s < \alpha - 1$.

17.6.14 Proposition

Soit $\{\Omega; \mathcal{F}; \mathbf{P}\}$ un espace probabilisé et $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle discète
Si X admet un moment d'ordre $s \in \mathbb{N}$, alors, pour tout $r \in \mathbb{N}$ tel que $r \leqslant s$, X admet un moment d'ordre r

Démonstration

1. Comme X est une variable aléatoire réelle discrète, nous notons $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$ avec $x_1 < x_2 < \cdots < x_n < \cdots$
2. Nous avons $M_s(X)$ qui existe, c'est à dire que la série $\sum_{n \geqslant 1} |x_n|^s \mathbf{P}(\{X = x_n\})$ est convergente et nous devons montrer que si $r \in \mathbb{N}$ tel que $r \leqslant s$, alors la série $\sum_{n \geqslant 1} |x_n|^r \mathbf{P}(\{X = x_n\})$ converge
3. Premières remarques :
   $\rightarrow$ Si $|x_k| \geqslant 1$, alors $|x_k|^s \geqslant |x_k|^r \geqslant 1$, et, donc $|x_k|^r \leqslant 1 + |x_k|^s$
   $\rightarrow$ Et maintenant, si $|x_k| < 1$, alors $|x_k|^s \leqslant |x_k|^r < 1$, et, même dans ce cas, $|x_k|^r \leqslant 1 + |x_k|^s$
   $\rightarrow$ Et donc, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, nous avons $|x_k|^r \leqslant 1 + |x_k|^s$
4. La série $\sum_{n \geqslant 1} (1 + |x_n|^s) \mathbf{P}(\{X = x_n\})$ est convergente.

   En effet, par hypothèse, la série $\sum_{n \geqslant 1} |x_n|^s \mathbf{P}(\{X = x_n\})$ est convergente et comme $\sum_{n \geqslant 1} \mathbf{P}(\{X = x_n\}) = 1$, cette série est aussi convergente et la série somme $\sum_{n \geqslant 1} (1 + |x_n|^s) \mathbf{P}(\{X = x_n\})$ est bien convergente.
   Comme $0 \leqslant |x_k|^r \mathbf{P}(\{X = x_n\}) \leqslant (1 + |x_n|^s) \mathbf{P}(\{X = x_n\})$, la série $\sum_{n \geqslant 1} |x_n|^r \mathbf{P}(\{X = x_n\})$ est donc convergente
   Ainsi, X admet un moment d'ordre r

17.6.15 Proposition

Soit $\{\Omega; \mathcal{F}; \mathbf{P}\}$ un espace probabilisé et $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle discète telle que

$$X(\Omega) = \{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\} \text{ avec } x_1 < x_2 < \cdots < x_n < \cdots$$

Soit $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, une fonction numérique de domaine $\mathcal{D}_\varphi$ et telle que $X(\Omega) \subset \mathcal{D}_\varphi$
Alors :

1. $\varphi \circ X$ est ne variable aléatoire réelle discrète définie sur $\{\Omega; \mathcal{F}; \mathbf{P}\}$ et telle que
$$\varphi \circ X(\Omega) = \{\varphi(x_1), \varphi(x_2), \cdots, \varphi(x_n), \cdots\}$$
Les valeurs $\varphi(x_k)$ pouvant être répétées
2. Pour tout nombre $u_j \in \varphi \circ X(\Omega)$, nous avons :
$$\mathbf{P}(\{\varphi \circ X = u_j\}) = \sum_{\substack{x_k \in X(\Omega) \\ \varphi(x_k) = u_j}} \mathbf{P}(\{X = x_k\})$$

Démonstration

Nous notons, pour cette démonstration $\{u_1, u_2, \cdots, u_n, \cdots\}$ l'ensemble des **valeurs distinctes** prises par $\varphi \circ X$.

1. Il nous faut démontrer que $\varphi \circ X$ est une variable aléatoire réelle , c'est à dire que si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, alors $\{\varphi \circ X \in I\} \in \mathcal{F}$
Soit donc $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle
(a) Pour commencer, on suppose $\varphi \circ X(\Omega) \cap I = \{u_j\}$
C'est à dire que l'intersection de $\varphi \circ X(\Omega)$ et de I est réduite à un singleton. Alors :
$$\{\varphi \circ X \in I\} = \{\omega \in \Omega \text{ tels que } \varphi \circ X(\omega) \in I\} = \{\omega \in \Omega \text{ tels que } \varphi \circ X(\omega) = u_j\} = \{\varphi \circ X = u_j\}$$
Soit $\{x_k;\ k \in \mathbb{N}\}$ l'ensemble des valeurs de $X(\Omega)$ telles que $\varphi(x_k) = u_j$. *(Ces valeurs $\{x_k;\ k \in \mathbb{N}\}$ peuvent en nombre fini ou infini)*
Posons aussi, pour $k \in \mathbb{N}$, $A_k = \{\omega \in \Omega \text{ tels que } X(\omega) = x_k\} = \{X = x_k\}$.
Alors, $\{\varphi \circ X = u_j\} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{X = x_k\}$
Comme X est une variable aléatoire réelle , alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, nous avons $\{X = x_k\} \in \mathcal{F}$ et donc, d'après les propriétés de tribu, $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{X = x_k\} \in \mathcal{F}$.
Et donc $\{\varphi \circ X = u_j\} \in \mathcal{F}$
(b) On suppose, maintenant, que $\varphi \circ X(\Omega) \cap I = \left\{u_{j_1}, u_{j_2}, \cdots, u_{j_p}, \cdots,\right\}$ *(éventuellement une infinité)*
Alors $\{\varphi \circ X \in I\} = \{\omega \in \Omega \text{ tels que } \varphi \circ X(\omega) \in I\} = \bigcup_{l \in \mathbb{N}^*} \{\varphi \circ X = u_{j_l}\}$
Nous venons de montrer $\{\varphi \circ X = u_j\} \in \mathcal{F}$, et donc, toujours par propriété des tribus, $\bigcup_{l \in \mathbb{N}^*} \{\varphi \circ X = u_{j_l}\} \in \mathcal{F}$
$\varphi \circ X$ est donc une variable aléatoire réelle .
2. Montrons que $\mathbf{P}(\{\varphi \circ X = u_j\}) = \sum_{\substack{x_k \in X(\Omega) \\ \varphi(x_k) = u_j}} \mathbf{P}(\{X = x_k\})$
Nous venons de montrer que $\{\varphi \circ X = u_j\} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{X = x_k\}$ où les $\{x_k;\ k \in \mathbb{N}\}$ sont tels que $\varphi(x_k) = u_j$, et donc
$$\mathbf{P}(\{\varphi \circ X = u_j\}) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \mathbf{P}(\{X = x_k\})$$

Qui peut être résumé par :

$$\mathbf{P}\left(\{\varphi \circ X = u_j\}\right) = \sum_{\substack{x_k \in X(\Omega) \\ \varphi(x_k) = u_j}} \mathbf{P}\left(\{X = x_k\}\right)$$

Ce que nous voulions

Exemple 9 :

Si X est une loi de Bernouilli, la variable aléatoire réelle $Y = 2X - 1$ est telle que $Y = \varphi \circ X$ où $\varphi(x) = 2x - 1$.
Nous avons $Y(\Omega) = \{-1; +1\}$ et $\mathbf{P}(\{Y = -1\}) = \mathbf{P}(\{X = 0\}) = 1 - p$ et $\mathbf{P}(\{Y = +1\}) = \mathbf{P}(\{X = +1\}) = p$
Cette variable est appelée **variable de Rademacher**

17.6.16 Proposition

Soit $\{\Omega; \mathcal{F}; \mathbf{P}\}$ un espace probabilisé. On considère :
- $\Rightarrow$ $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, une variable aléatoire réelle discrète
- $\Rightarrow$ Soit $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, une fonction numérique de domaine $\mathcal{D}_\varphi$ et telle que $X(\Omega) \subset \mathcal{D}_\varphi$

Alors
1. La variable aléatoire réelle $\varphi \circ X$ admet une espérance mathématique si et seulement si la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \varphi(x_n) \mathbf{P}(\{X = x_n\})$ est absolument convergente.
2. Dans le cas où cette espérance existe, nous avons $\mathbb{E}(\varphi \circ X) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \varphi(x_n) \mathbf{P}(\{X = x_n\})$

Démonstration

Comme souvent, jusqu'ici, nous écrivons $\varphi \circ X(\Omega) = \{u_1, u_2, u_3, \cdots, u_n, \cdots\}$ avec $u_1 < u_2 < u_3 < \cdots < u_n < \cdots$.

1. Nous appelons aussi $I_j = \{x_k \in X(\Omega) \text{ tels que } \varphi(x_k) = u_j\}$; c'est donc l'ensemble des antécédents de u_j dans $X(\Omega)$. I_j est un ensemble dénombrable.
   D'après la proposition 17.6.15, nous avons $\mathbf{P}(\{\varphi \circ X = u_j\}) = \sum_{x_k \in I_j} \mathbf{P}(\{X = x_k\})$
2. La variable aléatoire réelle admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{j \in \mathbb{N}} |u_j| \mathbf{P}(\{\varphi \circ X = u_j\})$ converge.
   Pour chaque $j \in \mathbb{N}$, nous avons $|u_j| \mathbf{P}(\{\varphi \circ X = u_j\}) = \sum_{x_k \in I_j} |u_j| \mathbf{P}(\{X = x_k\})$
3. Soit $N \in \mathbb{N}$. Nous nous intéressons aux sommes partielles $U_N = \sum_{j=1}^{N} |u_j| \mathbf{P}(\{\varphi \circ X = u_j\})$. Alors :

$$\begin{aligned} U_N = \sum_{j=1}^{N} |u_j| \mathbf{P}(\{\varphi \circ X = u_j\}) &= \sum_{j=1}^{N} \left(\sum_{x_k \in I_j} |u_j| \mathbf{P}(\{X = x_k\}) \right) \\ &= \sum_{x_k \in \left(\bigcup_{j=1}^{N} I_j\right)} |\varphi(x_k)| \mathbf{P}(\{X = x_k\}) \end{aligned}$$

4. Supposons la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \varphi(x_n) \mathbf{P}(\{X = x_n\})$ absolument convergente.

Alors, $U_N \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} |\varphi(x_n)| \mathbf{P}(\{X = x_n\})$ et $\lim_{N\to+\infty} U_N$ existe, c'est à dire que la série $Sum_{j\geqslant 1} |u_j| \mathbf{P}(\{\varphi \circ X = u_j\})$ est convergente et que $\varphi \circ X$ admet une moyenne

5. Nous avons $\mathbb{E}(\varphi \circ X) = \sum_{j\geqslant 1} u_j \mathbf{P}(\{\varphi \circ X = u_j\}) = \sum_{x_k \in \left(\bigcup_{j\geqslant 1} I_j\right)} \varphi(x_k) \mathbf{P}(\{X = x_k\}) = \sum_{k\geqslant 1} \varphi(x_k) \mathbf{P}(\{X = x_k\})$
6. Nous avons bien $\mathbb{E}(\varphi \circ X) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \varphi(x_n) \mathbf{P}(\{X = x_n\})$

Exemple 10 :

1. **Comment calculer $\mathbb{E}\left(X^2\right)$?**

   Ici, c'est simple, on a $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, avec $\varphi(x) = x^2$, et donc $\mathbb{E}\left(X^2\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} (x_n)^2 \mathbf{P}(\{X = x_n\})$

   On peut remarquer que $M_2(X) = \mathbb{E}\left(X^2\right)$
2. Plus généralement, pour les moments d'ordre $s \in \mathbb{N}$, si $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ qui à x fait correspondre $\varphi(x) = x^s$, nous avons démontré en 17.6.15 que $\varphi \circ X$ était aussi une variable aléatoire réelle dont on pouvait, d'après 17.6.16 calculer l'espérance :

$$\mathbb{E}(\varphi \circ X) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \varphi(x_n) \mathbf{P}(\{X = x_n\}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} (x_n)^s \mathbf{P}(\{X = x_n\}) = M_s(X)$$

   Pour les moments d'ordre s, la notation $M_s(X) = \mathbb{E}(X^s)$ est donc justifiée ; c'est celle qui sera le plus souvent utilisée

Exercice 16 :

1. Soit $\{\Omega; \mathcal{F}; \mathbf{P}\}$ un espace probabilisé et $A \in \mathcal{F}$. On considère $1_A : \Omega \longrightarrow \{0, 1\}$, la fonction indicatrice de l'ensemble A. Donner $M_k(1_A)$ pour tout k
2. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, une fonction bornée. On appelle $M = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$. Montrer que

$$\sum_{x\in X(\Omega)} |f(x)| \mathbf{P}(\{X = x\}) \leqslant M$$

Exercice 17 :

Soit X une variable aléatoire réelle qui suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0; 1[$, c'est à dire que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\mathbf{P}(\{X = n\}) = p(1-p)^{n-1}$
Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et on pose $Y = \min(X, m)$, c'est à dire que Y est du type $Y = \varphi \circ X$ où $\varphi(x) = \min(x, m)$

1. Donner la loi de Y
2. Calculer $\mathbb{E}(Y)$

17.6.17 Proposition

Soit $\{\Omega; \mathcal{F}; \mathbf{P}\}$ un espace probabilisé et $X : \omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle discrète qui admet une espérance $\mathbb{E}(X)$

1. Pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $b \in \mathbb{R}$ nous avons $\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b$
2. En particulier $\mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X)) = 0$

Démonstration

Par hypothèse, la variable aléatoire réelle X admettant une espérance $\mathbb{E}(X)$, la série $\sum_{k\geqslant 0} |x_k| \mathbf{P}(\{X = x_k\})$ converge

1. En écrivant $Y = \varphi \circ X$, nous avons $\varphi(ax+b)$, et donc $\mathbb{E}(Y)$ n'existe que si la série $\sum_{k\geqslant 0} |ax_k + b| \mathbf{P}(\{X = x_k\})$ converge.
   Pour tout $k \in \mathbb{N}$, nous avons $|ax_k + b| \mathbf{P}(\{X = x_k\}) \leqslant |a| |x_k| \mathbf{P}(\{X = x_k\}) + |b| \mathbf{P}(\{X = x_k\})$.
   La série $\sum_{k\geqslant 0} |a| |x_k| \mathbf{P}(\{X = x_k\}) = |a| \sum_{k\geqslant 0} |x_k| \mathbf{P}(\{X = x_k\})$ est convergente.
   De même, la série $\sum_{k\geqslant 0} |b| \mathbf{P}(\{X = x_k\}) = |b| \sum_{k\geqslant 0} \mathbf{P}(\{X = x_k\}) = |b|$ est une série convergente.
   D'après la théorie des séries la série $\sum_{k\geqslant 0} |ax_k + b| \mathbf{P}(\{X = x_k\})$ converge
2. $\mathbb{E}(aX + b) = \sum_{k\geqslant 0} (ax_k + b) \mathbf{P}(\{X = x_k\}) = a \sum_{k\geqslant 0} x_k \mathbf{P}(\{X = x_k\}) + b \sum_{k\geqslant 0} \mathbf{P}(\{X = x_k\}) = a\mathbb{E}(X) + b$
3. $\mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X)) = \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(\mathbb{E}(X))$
   Nous avons $\mathbb{E}(X)$ qui est un nombre réel constant et donc $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X)) = \mathbb{E}(X)$
   D'où, donc, $\mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X)) = \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(\mathbb{E}(X)) = \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X) = 0$

17.7 Variance et écart-type

17.7.1 Définition

Soit $\{\Omega; \mathcal{F}; \mathbf{P}\}$ un espace probabilisé et $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, une variable aléatoire réelle discrète qui admet une moyenne $\mathbb{E}(X)$
On appelle variance de X, la quantité, si elle existe :

$$V(X) = \sigma^2(X) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right)$$

L'écart-type σ est la racine carrée de la variance :

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right)} = \sqrt{V(X)}$$

Remarque 24 :

1. La notation $V(X)$ pour la variance est plutôt utilisée en statistiques ; en probabilité, on lui préfère $\sigma^2(X)$, qui exprime bien le carré de l'écart-type ; **c'est la notation que nous adopterons**
2. L'ecart-type mesure la dispersion autour de $\mathbb{E}(X)$; c'est, dans une certaine mesure, une distance *(La distance, au sens des moindres carrés)*.
3. En utilisant la proposition 17.6.15, en posant $\varphi(x) = (x - \mathbb{E}(X))^2$, nous avons aussi, si X est une variable aléatoire réelle discrète avec $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$:

$$\sigma^2(X) = \mathbb{E}(\varphi \circ X) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \varphi(x_n) \mathbf{P}(\{X = x_n\}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} (x_n - \mathbb{E}(X))^2 \mathbf{P}(\{X = x_n\})$$

4. La variance est aussi appelée **moment centré d'ordre 2**
5. Plus généralement,**moment centré d'ordre** s est donné par :

$$\mu_s = \mathbb{M}_s(X - \mathbb{E}(X)) = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}(X))^s\right]$$

Exercice 18 :

1. Quelle est la variance d'une variable aléatoire réelle certaine ? Réciproquement, soit X une variable aléatoire réelle discrète et finie dont la variance est nulle. Montrer que X est une variable aléatoire réelle constante.
2. Soit $\{\Omega; \mathcal{F}; \mathbf{P}\}$ un espace probabilisé et $A \in \mathcal{F}$. On considère $1_A : \Omega \to \{0, 1\}$, la fonction indicatrice de l'ensemble A. Donner la variance $\sigma^2(1_A)$ de 1_A
3. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons l'inégalité $|x| \leqslant \dfrac{1+x^2}{2}$. Déduire de cette inégalité que si X est une variable aléatoire réelle telle que $\mathbb{E}\left(X^2\right)$ existe, alors $\mathbb{E}(X)$ existe.

Exercice 19 :

Soit X une variable aléatoire réelle telle que $X(\Omega) = \{-4,\ -3,\ 1,\ 2\}$ et dont la loi est donnée par le tableau suivant :

x_i	-4	-3	1	2
$\mathbb{P}(X = x_i)$	$0,10$	$0,15$	$0,65$	$0,10$

1. Calculez l'espérance et la variance de X
2. Définissez la fonction de répartition de X
3. Soit $\varphi : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \varphi : \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ h & \overset{\varphi}{\longmapsto} & \varphi(h) = \mathbb{P}(\{|X| \leqslant h\}) \end{array}\right.$$

Définissez la fonction φ

17.7.2 Théorème de Koenig

Avec le théorème de Koenig, nous avons un moyen plus simple de calculer la variance.

Soit $\{\Omega; \mathcal{F}; \mathbf{P}\}$ un espace probabilisé et $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, une variable aléatoire réelle discrète qui admet une espérance et une variance.
Alors, nous avons :

$$\sigma^2(X) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - (\mathbb{E}(X))^2$$

Démonstration

X étant une variable aléatoire réelle discrète, nous appelons $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$, avec toujours $x_1 < x_2 < \cdots < x_n < \cdots$
Par définition, nous avons $\sigma^2(X) = \sum_{n \in \mathbb{N}} (x_n - \mathbb{E}(X))^2 \mathbf{P}(\{X = x_n\})$.

Or, $(x_n - \mathbb{E}(X))^2 = x_n^2 - 2x_n\mathbb{E}(X) + (\mathbb{E}(X))^2$, et donc :

$$\begin{aligned} \sigma^2(X) &= \sum_{n \in \mathbb{N}} (x_n - \mathbb{E}(X))^2 \mathbf{P}(\{X = x_n\}) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n^2 \mathbf{P}(\{X = x_n\}) - 2\mathbb{E}(X) \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n \mathbf{P}(\{X = x_n\}) + \sum_{n \in \mathbb{N}} (\mathbb{E}(X))^2 \mathbf{P}(\{X = x_n\}) \end{aligned}$$

Or :

→ $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n^2 \mathbf{P}(\{X = x_n\}) = \mathbb{E}\left(X^2\right)$

→ $2\mathbb{E}(X) \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n \mathbf{P}(\{X = x_n\}) = 2\mathbb{E}(X) \times \mathbb{E}(X) = 2(\mathbb{E}(X))^2$, puisque $\mathbb{E}(X) = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n \mathbf{P}(\{X = x_n\})$

→ Et, pour terminer, $\sum_{n \in \mathbb{N}} (\mathbb{E}(X))^2 \mathbf{P}(\{X = x_n\}) = (\mathbb{E}(X))^2 \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{P}(\{X = x_n\}) = (\mathbb{E}(X))^2$, puisque $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{P}(\{X = x_n\}) = 1$

Ainsi : $\sigma^2(X) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - 2\left(\mathbb{E}(X)\right)^2 + \left(\mathbb{E}(X)\right)^2 = \mathbb{E}\left(X^2\right) - \left(\mathbb{E}(X)\right)^2$
Ce que nous voulions

Remarque 25 :

Cet énoncé est valable pour tout type de variables aléatoires réelles . Nous le verrons en progressant dans le cours de probabilité

Exemple 11 :

La variance d'une loi de Bernouilli de paramètre p est : $\sigma^2(X) = p(1-p)$

En effet, si X une variable aléatoire réelle qui suit une loi de Bernouilli de paramètre p ; alors, par le théorème de Koenig 17.7.2, nous avons : $\sigma^2(X) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - \mathbb{E}(X)^2$; nous connaissons $\mathbb{E}(X) = p$, il nous reste à calculer $\mathbb{E}\left(X^2\right)$

$$\mathbb{E}\left(X^2\right) = 0^2 \times \mathbf{P}(\{X=0\}) + 1^2 \times \mathbf{P}(\{X=1\}) = p$$

Donc, $\sigma^2(X) = p - p^2 = p(1-p)$

17.7.3 Proposition

Soit $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, une variable aléatoire réelle discrète qui admet une variance $\sigma^2(X)$
Alors, la variable aléatoire réelle $Y = aX + b$ a pour variance $\sigma^2(Y) = a^2\sigma^2(X)$

Démonstration

D'après la proposition 17.6.17 on sait déjà que $\mathbb{E}(Y)$ existe et que $\mathbb{E}(Y) = a\mathbb{E}(X) + b$, et donc que

$$Y - \mathbb{E}(Y) = aX + b - (a\mathbb{E}(X) + b) = a(X - \mathbb{E}(X))$$

Donc, nous avons $(Y - \mathbb{E}(Y))^2 = a^2(X - \mathbb{E}(X))^2$, et comme $\sigma^2(Y) = \mathbb{E}\left((Y - \mathbb{E}(Y))^2\right)$, nous avons

$$\sigma^2(Y) = \mathbb{E}\left(a^2(X - \mathbb{E}(X))^2\right)$$

En utilisant à nouveau la proposition 17.6.17 où nous avons démontré que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}(\lambda X) = \lambda\mathbb{E}(X)$, nous continuons :

$$\mathbb{E}\left(a^2(X - \mathbb{E}(X))^2\right) = a^2\mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right) = a^2\sigma^2(X)$$

Ce que nous voulions.

Remarque 26 :

Si $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, est une variable aléatoire réelle discrète qui admet une variance $\sigma^2(X)$ Alors, la variable aléatoire réelle $Y = aX + b$ a pour écart-type $\sigma(Y) = |a|\,\sigma(X)$

17.7.4 Définition de variable aléatoire réelle centrée réduite

Soit $\{\Omega; \mathcal{F}; \mathbf{P}\}$ un espace probabilisé et $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, une variable aléatoire réelle discrète qui admet une variance non nulle $\sigma^2(X)$ et donc une moyenne $\mathbb{E}(X)$
On appelle variable aléatoire réelle centrée réduite associée à X, la variable aléatoire réelle X^* définie par :

$$X^* = \frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$$

Remarque 27 :

1. Nous avons, et c'est facile à démontrer : $\mathbb{E}(X^*) = 0$ et $\sigma^2(X^*) = 1$
   $\Rightarrow$ **Nous avons** $\mathbb{E}(X^*) = 0$
   En effet, X^* peut s'écrire sous la forme $X^* = aX + b$ où $a = \dfrac{1}{\sigma(X)}$ et $b = \dfrac{-\mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$.
   De $X^* = aX + b$, nous tirons que $\mathbb{E}(X^*) = a\mathbb{E}(X) + b = \dfrac{\mathbb{E}(X)}{\sigma(X)} - \dfrac{\mathbb{E}(X)}{\sigma(X)} = 0$
   $\Rightarrow$ **Nous avons** $\sigma^2(X^*) = 1$
   Nous avons démontré en que $\sigma^2(X^*) = a^2\sigma^2(X) = \dfrac{1}{\sigma^2(X)} \times \sigma^2(X) = 1$
   Démonstration simple, en effet
2. Avoir recours à une variable aléatoire réelle centrée réduite est fortement utile au moment de l'utilisation des tables

Variance de lois discrètes classiques

17.7.5 Variance d'une loi binômialle

La variance d'une variable aléatoire réelle discrète suivant une loi binômiale $\mathcal{B}(n, p)$ est $\sigma^2(X) = np(1-p)$

Démonstration

Nous allons utiliser la formule de Koenig vue en 17.7.2
Il nous faut connaître moyenne et moment d'ordre 2. Ces deux quantités ont été calculées en 17.6.7 et en 17.6.11
$\rightarrow$ En 17.6.7, nous avons $\mathbb{E}(X) = np$
$\rightarrow$ Et en 17.6.11, nous avons $M_2(X) = \mathbb{E}\left(X^2\right) = np[1 + (n-1)p]$
D'où $\sigma^2(X) = np[1 + (n-1)p] - n^2p^2 = np(1 + (n-1)p - np) = np(1-p)$

17.7.6 Variance d'une loi géométrique

La variance d'une d'une variable aléatoire réelle discrète suivant une loi géométrique de paramètre p est $\sigma^2(X) = \dfrac{(1-p)}{p^2}$

Démonstration

Nous allons encore utiliser la formule de Koenig vue en 17.7.2
Il nous faut connaître moyenne et moment d'ordre 2. Ces deux quantités ont été calculées en 17.6.8 et en 17.6.12
$\rightarrow$ En 17.6.8, nous avons $\mathbb{E}(X) = \dfrac{1}{p}$
$\rightarrow$ Et en 17.6.12, nous avons $M_2(X) = \mathbb{E}\left(X^2\right) = \dfrac{2-p}{p^2}$
D'où $\sigma^2(X) = \dfrac{2-p}{p^2} - \dfrac{1}{p^2} = \dfrac{2-p-1}{p^2} = \dfrac{1-p}{p^2}$

17.7.7 Variance d'une loi de Poisson

La variance d'une variable aléatoire réelle discrète suivant une loi de Poisson de paramètre λ est $\sigma^2(X) = \lambda$

Démonstration

Toujours la formule de Koenig de la proposition 17.7.2
Il nous faut connaître moyenne et moment d'ordre 2. Ces deux quantités ont été calculées en 17.6.9 et en 17.6.13
$\rightarrow$ En 17.6.9, nous avons $\mathbb{E}(X) = \lambda$

$\rightarrow$ Et en 17.6.13, nous avons $M_2(X) = \mathbb{E}(X^2) = \lambda(\lambda+1)$
D'où $\sigma^2(X) = \lambda(\lambda+1) - \lambda^2 = \lambda$

17.7.8 Tableau des caractéristiques à retenir

Loi	Moyenne	Variance
Loi de Bernouilli de paramètre p	p	$p(1-p)$
Loi binômiale $\mathcal{B}(n,p)$	np	$np(1-p)$
Loi géométrique de paramètre p	$\dfrac{1}{p}$	$\dfrac{1-p}{p^2}$
Loi de Poisson de paramètre λ, $\mathcal{P}(\lambda)$	λ	λ

17.8 Premières inégalités en probabilités

17.8.1 Inégalité de Markov dans le cas discret

Soit $\{\Omega; \mathcal{F}; \mathbf{P}\}$ un espace probabilisé et $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, une variable aléatoire réelle discrète positive ou nulle *(C'est à dire que, pour tout $\omega \in \Omega$, nous avons $X(\omega) \geqslant 0$)*
Alors, pour tout $\alpha > 0$, nous avons $\mathbf{P}(\{X \geqslant \alpha\}) \leqslant \dfrac{\mathbb{E}(X)}{\alpha}$

Démonstration

Soit X une variable aléatoire réelle discrète infinie positive et admettant une espérance.
Comme d'habitude, nous notons $X(\Omega) = \{x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots\}$ avec $x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_n < \cdots$
Nous avons $\mathbb{E}(X) = \sum\limits_{k \geqslant 1} x_k \mathbf{P}(\{X = x_k\})$
Soit $\alpha > 0$. Nous faisons le découpage suivant :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k \geqslant 1} x_k \mathbf{P}(\{X = x_k\}) = \sum_{\substack{k \geqslant 1 \\ x_k \leqslant \alpha}} x_k \mathbf{P}(\{X = x_k\}) + \sum_{\substack{k \geqslant 1 \\ x_k \geqslant \alpha}} x_k \mathbf{P}(\{X = x_k\})$$

Alors, comme X est une variable aléatoire réelle à valeurs positives, nous avons $\mathbb{E}(X) \geqslant \sum\limits_{\substack{k \geqslant 1 \\ x_k \geqslant \alpha}} x_k \mathbf{P}(\{X = x_k\})$

Toujours parce que X est une variable aléatoire réelle à valeurs positives, nous avons

$$\sum_{\substack{k \geqslant 1 \\ x_k \geqslant \alpha}} x_k \mathbf{P}(\{X = x_k\}) \geqslant \sum_{\substack{k \geqslant 1 \\ x_k \geqslant \alpha}} \alpha \mathbf{P}(\{X = x_k\}) = \alpha \sum_{\substack{k \geqslant 1 \\ x_k \geqslant \alpha}} \mathbf{P}(\{X = x_k\})$$

Or, $\sum\limits_{\substack{k \geqslant 1 \\ x_k \geqslant \alpha}} \mathbf{P}(\{X = x_k\}) = \mathbf{P}(\{X \geqslant \alpha\})$
En synthèse, nous avons donc

$$\mathbb{E}(X) \geqslant \alpha \mathbf{P}(\{X \geqslant \alpha\}) \Longleftrightarrow \alpha \mathbf{P}(\{X \geqslant \alpha\}) \leqslant \mathbb{E}(X) \Longleftrightarrow \mathbf{P}(\{X \geqslant \alpha\}) \leqslant \frac{\mathbb{E}(X)}{\alpha}$$

Ce que nous voulions

Remarque 28 :

L'inégalité de Markov 17.8.1 est un résultat utile en probabilité qui donne des informations sur une distribution de probabilité.
L'aspect remarquable à ce sujet est que l'inégalité est valable pour toute distribution avec des valeurs positives, quelles que soient ses autres caractéristiques.
L'inégalité de Markov donne une limite supérieure pour le pourcentage de la distribution qui est au-dessus d'une valeur particulière.

Exemple : *Le nombre de pièces sortant d'une usine chaque jour, est une variable aléatoire réelle discrète de moyenne 100. On souhaite estimer la probabilité pour en sortir 200 demain.*
Quelle estimation obtenons nous de cette probabilité ?

Si X est la variable aléatoire réelle donnant la production du lendemain, nous devons donc évaluer $\mathbf{P}(\{X \geqslant 200\})$.

D'après l'inégalité de Markov, $\mathbf{P}(\{X \geqslant 200\}) \leqslant \dfrac{100}{200} = \dfrac{1}{2}$

17.8.2 Corollaire

Soit $\{\Omega; \mathcal{F}; \mathbf{P}\}$ un espace probabilisé et $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, une variable aléatoire réelle discrète qui admet un moment d'ordre $s \in \mathbb{N}^*$, c'est à dire que la série $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} |x_k|^s \, \mathbf{P}(\{X = x_k\})$ converge

Alors, pour tout $\alpha > 0$, nous avons $\mathbf{P}(\{|X|^s \geqslant \alpha\}) \leqslant \dfrac{\mathbb{E}(|X|^s)}{\alpha}$

Démonstration

Il suffit d'appliquer le théorème 17.8.1 à la variable aléatoire réelle $Y = |X|^s$. Nous avons Y qui est une variable aléatoire réelle positive et $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(|X|^s) = \displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} |x_k|^s \, \mathbf{P}(\{X = x_k\})$

Donc, pour tout $\alpha > 0$, $\mathbf{P}(\{Y \geqslant \alpha\}) \leqslant \dfrac{\mathbb{E}(Y)}{\alpha} \Longleftrightarrow \mathbf{P}(\{|X|^s \geqslant \alpha\}) \leqslant \dfrac{\mathbb{E}(|X|^s)}{\alpha}$

Ce que nous voulions

17.8.3 Théorème : Inégalité de Bienaymé-Tchébichev

Soit $\{\Omega; \mathcal{F}; \mathbf{P}\}$ un espace probabilisé et $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, une variable aléatoire réelle discrète qui admet une variance non nulle $\sigma^2(X)$ et donc une moyenne $\mathbb{E}(X)$
Alors, pour tout $\varepsilon > 0$

$$\mathbf{P}(\{|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant \varepsilon\}) \leqslant \frac{\sigma^2(X)}{\varepsilon^2}$$

Démonstration

Nous donnons 2 démonstrations à cette inégalité : une première qui utilise l'inégalité de Markov, et une seconde des plus classiques

1. **Utilisation de l'inégalité de Markov**

   On considère la variable aléatoire réelle $Y = (X - \mathbb{E}(X))^2$; cette variable aléatoire réelle admet une espérance puisque $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right) = \sigma^2(X)$.
   Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, en utilisant l'inégalité de Markov, nous avons :

   $$\mathbf{P}\left(\{Y \geqslant \varepsilon^2\}\right) \leqslant \frac{\mathbb{E}(Y)}{\varepsilon^2} \Longleftrightarrow \mathbf{P}\left(\left\{(X - \mathbb{E}(X))^2 \geqslant \varepsilon^2\right\}\right) \leqslant \frac{\sigma^2(X)}{\varepsilon^2}$$

   Comme nous avons $\left\{(X - \mathbb{E}(X))^2 \geqslant \varepsilon^2\right\} = \{|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant \varepsilon\}$, alors, nous avons bien

   $$\mathbf{P}(\{|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant \varepsilon\}) \leqslant \frac{\sigma^2(X)}{\varepsilon^2}$$

2. **Démonstration classique**

   Soit $\varepsilon > 0$
   Comme d'habitude, nous posons $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$, et I_ε l'ensemble des indices $n \in \mathbb{N}$ tels que si $n \in I_\varepsilon$, alors $|x_n - \mathbb{E}(X)| \geqslant \varepsilon$.
   Autrement dit, en langage formalisé, $I_\varepsilon = \{n \in \mathbb{N} \text{ tq } |x_n - \mathbb{E}(X)| \geqslant \varepsilon\}$. Nous avons bien $I_\varepsilon \subset \mathbb{N}$

Alors, en utilisant la définition de la variance,

$$\begin{aligned}\sigma^2(X) &= \sum_{n\in\mathbb{N}} (x_n - \mathbb{E}(X))^2\,\mathbf{P}(\{X = x_n\}) \\ &= \sum_{n\in I_\varepsilon} (x_n - \mathbb{E}(X))^2\,\mathbf{P}(\{X = x_n\}) + \sum_{n\notin I_\varepsilon} (x_n - \mathbb{E}(X))^2\,\mathbf{P}(\{X = x_n\})\end{aligned}$$

Comme $\sum\limits_{n\notin I_\varepsilon} (x_n - \mathbb{E}(X))^2\mathbf{P}(\{X = x_n\}) \geqslant 0$, nous avons

$$\sigma^2(X) \geqslant \sum_{n\in I_\varepsilon} (x_n - \mathbb{E}(X))^2\mathbf{P}(\{X = x_n\})$$

Or, si $n \in I_\varepsilon$, alors $|x_n - \mathbb{E}(X)| \geqslant \varepsilon$, nous avons aussi

$$n \in I_\varepsilon \Longrightarrow (x_n - \mathbb{E}(X))^2 \geqslant \varepsilon^2$$

En conclusion :

$$\sigma^2(X) \geqslant \sum_{n\in I_\varepsilon} (x_n - \mathbb{E}(X))^2\mathbf{P}(\{X = x_n\}) \geqslant \sum_{n\in I_\varepsilon} \varepsilon^2\mathbf{P}(\{X = x_n\})$$

Comme $\sum\limits_{n\in I_\varepsilon} \varepsilon^2\mathbf{P}(\{X = x_n\}) = \varepsilon^2 \sum\limits_{n\in I_\varepsilon} \mathbf{P}(\{X = x_n\})$ et que $\sum\limits_{n\in I_\varepsilon} \mathbf{P}(\{X = x_n\}) = \mathbf{P}(\{|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant \varepsilon\})$, nous avons bien

$$\sigma^2(X) \geqslant \varepsilon^2\mathbf{P}(\{|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant \varepsilon\})$$

Ce que nous voulions

Remarque 29 :

1. Cette inégalité est **très importante**, et nous la retrouverons souvent dans ce cours, en particulier lorsque nous étudierons les lois des grands nombres.
2. Une autre forme de ce théorème est plus parlante, et c'est celle ci :
   Elle est obtenue en posant $\varepsilon = \lambda\sigma$:
   Pour tout $\lambda > 0$,
   $$\mathbf{P}(\{|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant \lambda\sigma(X)\}) \leqslant \frac{1}{\lambda^2}$$
   Par exemple, en posant $\lambda = 2$, en écrivant $\mathbf{P}(\{|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant 2\sigma(X)\}) \leqslant \frac{1}{4}$, on exprime que la probabilité pour que les valeurs prises par la variable aléatoire réelle s'écartent de la moyenne de 2 fois l'écart type, est inférieure à $\frac{1}{4}$

Exercice 20 :

Le nombre de pièces sortant d'une usine en une journée est une variable aléatoire d'espérance 50. On veut estimer la probabilité que la production d'un jour donné dépasse 75 pièces.

1. En utilisant l'inégalité de Markov, quelle estimation obtient-on sur cette probabilité ?
2. Que peut-on dire de plus sur cette probabilité si on sait que la variance de la production quotidienne est 25 ?

Exercice 21 :

Soit $\{\Omega; \mathcal{F}; \mathbf{P}\}$ un espace probabilisé et $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, une variable aléatoire réelle discrète

1. On suppose que X suit une loi binômiale $\mathcal{B}\left(10, \frac{1}{2}\right)$. Trouver un majorant de la probabilité de l'événement $\{X \neq 5\} \cap \{X \neq 4\} \cap \{X \neq 6\}$
2. Qu'en est-il si nous supposons, cette fois-ci que X suit une loi binômiale $\mathcal{B}\left(100, \frac{1}{2}\right)$ pour l'événement $\{X \neq 50\} \cap \{X \neq 51\} \cap \{X \neq 49\}$

17.9 Fonctions génératrices

Dans ce paragraphe, on ne considère que les variables aléatoires réelles à valeur entières

17.9.1 Définition

Soit $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{N}$, une variable aléatoire réelle à valeurs entières.
On appelle fonction génératrice de X, la fonction $g_X : [-1;+1] \longrightarrow \mathbb{R}$, définie, pour tout $t \in [-1;+1]$, par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} g_X : [-1;+1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & g_X(t) = \mathbb{E}\left(t^X\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} t^n \mathbf{P}(\{X = n\}) \end{array}\right.$$

Remarque 30 :

1. g_X apparaît comme une série entière dont on peut rechercher le rayon de convergence.
Comme $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{P}(\{X = n\}) = 1$, il est évident que si $|t| < 1$, alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} t^n \mathbf{P}(\{X = n\})$ est convergente. Ce qui nous permet de dire que le rayon de convergence est au moins égal à 1. ainsi :
— g_X est-elle continue sur $[-1;+1]$
— g_X est-elle de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1;+1[$
2. D'après la théorie des séries entières, nous avons $\mathbf{P}(\{X = n\}) = \dfrac{g_X^{(n)}(0)}{n\,!}$, ce qui signifie que la fonction génératrice définit bien la loi de la variable aléatoire réelle .

Exemple 12 :

1. La loi de Bernouilli
Soit X une variable aléatoire réelle qui suit une loi de Bernouilli de paramètre p, alors
$$g_X(t) = \mathbb{E}\left(t^X\right) = t^0\mathbf{P}(\{X = 0\}) + t^1\mathbf{P}(\{X = 1\}) = (1-p) + tp$$
Ainsi, si X suit une loi de Bernouilli de paramètre p, $g_X(t) = (1-p) + tp$
2. La loi binômiale
Soit X une variable aléatoire réelle qui suit une loi binômiale de paramètre n et p, alors
$$\begin{aligned} \bullet\quad g_X(t) = \mathbb{E}\left(t^X\right) &= \sum_{k=0}^{n} t^k \mathrm{C}_n^k p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k (tp)^k (1-p)^{n-k} \\ &= (tp + 1 - p)^n \end{aligned}$$
Ainsi, si X suit une loi binômiale de paramètre n et p, $g_X(t) = ((1-p) + tp)^n$
3. La loi uniforme sur $\{1, \cdots, n\}$
Soit X une variable aléatoire réelle qui suit une loi uniforme sur $\{1, \cdots, n\}$; ceci veut dire que, pour tout $k \in \{1, \cdots, n\}$, $\mathbf{P}(\{X = k\}) = \dfrac{1}{n}$; alors
$$\begin{aligned} g_X(t) = \mathbb{E}\left(t^X\right) &= \sum_{k=0}^{n} t^k \mathbf{P}(\{X = k\}) \\ &= \sum_{k=0}^{n} t^k \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} t^k \\ &= \frac{1}{n}\left(\frac{1-t^{n+1}}{1-t}\right) \quad \text{somme des termes d'une suite géométrique} \end{aligned}$$

Ainsi, si X suit une loi uniforme sur $\{1, \cdots, n\}$, $g_X(t) = \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1-t^{n+1}}{1-t}\right)$

On peut remarquer, qu'à priori, g_X n'est pas définie pour $t = 1$. Mais, comme nous avons $\lim\limits_{\substack{t \to +1 \\ t < +1}} g_X(t) = +1$, nous pouvons poser, en prolongeant par continuité, $g_X(1) = +1$

4. La loi géométrique
   Soit X une variable aléatoire réelle qui suit une loi géométrique de paramètre p ; ceci veut dire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}(\{X = n\}) = p(1-p)^{n-1}$; alors

$$\begin{aligned} g_X(t) = \mathbb{E}\left(t^X\right) &= \sum_{n \geqslant 1} t^n \mathbf{P}(\{X = n\}) \\ &= \sum_{n \geqslant 1} t^n p(1-p)^{n-1} \\ &= tp \sum_{n \geqslant 1} t^{n-1}(1-p)^{n-1} \\ &= tp \sum_{n \geqslant 0} t^n (1-p)^n \end{aligned}$$

   La série $\sum\limits_{n \geqslant 0} t^n (1-p)^n$ ne converge que si $|t(1-p)| < +1$, c'est à dire si $|t| < \dfrac{+1}{1-p}$.

   En supposant cette condition remplie, nous avons $\sum\limits_{n \geqslant 0} t^n (1-p)^n = \dfrac{1}{1-(t(1-p))}$

   Ainsi, si X suit une loi géométrique de paramètre p, $g_X(t) = \dfrac{tp}{1-(t(1-p))}$

5. La loi de Poisson
   Soit X une variable aléatoire réelle qui suit une loi de Poisson de paramètre λ ; ceci veut dire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(\{X = n\}) = \dfrac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n\,!}$; alors

$$\begin{aligned} g_X(t) = \mathbb{E}\left(t^X\right) &= \sum_{n \geqslant 0} t^n \mathbf{P}(\{X = n\}) \\ &= \sum_{n \geqslant 0} t^n \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n\,!} \\ &= e^{-\lambda} \sum_{n \geqslant 0} \frac{(t\lambda)^n}{n\,!} \\ &= e^{-\lambda} \times e^{\lambda t} \\ &= e^{\lambda(t-1)} \end{aligned}$$

   Ici, il n'y a aucun problème de convergence.
   Ainsi, si X suit une loi de Poisson de paramètre λ, $g_X(t) = e^{\lambda(t-1)}$

17.9.2 Proposition

Soit X une variable aléatoire réelle à valeurs entières de fonction génératrice g_X
Si X admet un moment d'ordre 2, alors les dérivées $g'_X(1)$ et $g''_X(1)$ existent.
Dans ce cas, nous avons :
- $\mathbb{E}(X) = g'_X(1)$
- $\sigma^2(X) = g''_X(1) + g'_X(1) - (g'_X(1))^2$

Démonstration

On suppose que X admet un moment d'ordre 2 ; alors, d'après 17.6.14, X admet un moment d'ordre 1 *(c'est à dire que si $\mathbb{E}\left(X^2\right)$ existe, alors $\mathbb{E}(X)$ existe aussi)*

Nous avons donc $\sum\limits_{n \geqslant 0} n\mathbf{P}(\{X = n\}) < +\infty$ et $\sum\limits_{n \geqslant 0} n^2\mathbf{P}(\{X = n\}) < +\infty$

— La série dérivée $\sum_{n\geqslant 0} nt^{n-1}\mathbf{P}(\{X=n\})$ converge pour $|t|<+1$, et pour $|t|<+1$, nous avons $g_X'(t)=\sum_{n\geqslant 0} nt^{n-1}\mathbf{P}(\{X=n\})$.
Comme $\sum_{n\geqslant 0} n\mathbf{P}(\{X=n\})$ converge, d'après le théorème d'Abel sur les séries, nous avons

$$\lim_{\substack{t\to+1\\ t<+1}} g_X'(t)=\sum_{n\geqslant 0} n\mathbf{P}(\{X=n\})=\mathbb{E}(X)=g_X'(1)$$

— De la même manière, la série dérivée seconde $\sum_{n\geqslant 0} n(n-1)t^{n-2}\mathbf{P}(\{X=n\})$ converge pour $|t|<+1$, et pour $|t|<+1$, nous avons $g_X''(t)=\sum_{n\geqslant 0} n(n-1)t^{n-2}\mathbf{P}(\{X=n\})$.
Comme $\sum_{n\geqslant 0} n\mathbf{P}(\{X=n\})$ et $\sum_{n\geqslant 0} n^2\mathbf{P}(\{X=n\})$ convergent, nous avons

$$\sum_{n\geqslant 0} n^2\mathbf{P}(\{X=n\})-\sum_{n\geqslant 0} n\mathbf{P}(\{X=n\})=\sum_{n\geqslant 0} n(n-1)\mathbf{P}(\{X=n\})$$

La série $\sum_{n\geqslant 0} n(n-1)\mathbf{P}(\{X=n\})$ est donc convergente. D'après le théorème d'Abel sur les séries, nous avons

$$\lim_{\substack{t\to+1\\ t<+1}} g_X''(t)=\sum_{n\geqslant 0} n(n-1)\mathbf{P}(\{X=n\})=\mathbb{E}(X)=g_X''(1)=\mathbb{E}\left(X^2\right)-\mathbb{E}(X)$$

Ainsi $\sigma^2(X)=\mathbb{E}\left(X^2\right)-(\mathbb{E}(X))^2=g_X''(1)+g_X'(1)-(g_X'(1))^2$

Exemple 13 :

1. Loi de Bernouilli
Si X est une variable aléatoire réelle suivant une loi de Bernouilli de paramètre p, la fonction génératrice est donnée par $g_X(t)=(1-p)+tp$. Alors, $g_X'(t)=p$ et $g_X''(t)=0$.
Ainsi, nous avons $\mathbb{E}(X)=g_X'(1)=p$ et $\sigma^2(X)=g_X''(1)+g_X'(1)-(g_X'(1))^2=0+p-p^2=p(1-p)$
2. Loi Binômiale
Pour une loi binômiale $\mathcal{B}(n,p)$, nous avons $g_X(t)=((1-p)+tp)^n$, et donc :

— $g_X'(t)=np((1-p)+tp)^{n-1}$

— $g_X''(t)=n(n-1)p^2((1-p)+tp)^{n-2}$

D'où

— $g_X'(1)=np$

— $g_X''(1)=n(n-1)p^2$

Et nous en déduisons que $\mathbb{E}(X)=g_X'(1)=np$ et

$$\sigma^2(X)=n(n-1)p^2+np-n^2p^2=np-np^2=np(1-p)$$

Exercice 22 :

Calculer la fonction génératrice d'une variable aléatoire réelle X telle que $X(\Omega)=\{1,3\}$ et $\mathbf{P}(\{X=1\})=p$ où p tel que $0<p<1$. Quelle est l'espérance et la variance de cette variable aléatoire réelle ?

Exercice 23 :

On considère une variable aléatoire X de loi uniforme sur l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ *(exemple du lancer de dés)*

1. Calculer la fonction génératrice G_X de la variable aléatoire X.
2. Calculer les dérivées première et seconde de G_X.
3. En déduire l'espérance et la variance de X
4. Cette question généralise les questions précédentes
   On dit que X_n suit une loi uniforme discrète sur $\{1, \cdots, n\}$ si et seulement si pour tout entier $k \in \{1, \cdots, n\}$ on a $\mathbf{P}(\{X = k\}) = \dfrac{1}{n}$
   Déterminer la fonction génératrice G_{X_n} des variables aléatoires réelles X_n

17.10 Travaux dirigés

17.10.1 Applications directes du cours

Exercice 24 :

On lance une fois un dé non pipé.

1. X est la variable aléatoire égale au nombre de points du dé amené par le seul lancer.
   (a) Quelle est la loi de X ?
   (b) Quelle est la valeur moyenne de X ?
2. On suppose qu'on reçoit 15 euros si on obtient 1, rien si on obient 2, 3 ou 4, et 6 euros si on obtient 5 ou 6. Soit G la variable aléatoire égale au gain de ce jeu.
   (a) Quelle est la loi de G ?
   (b) Que vaut le gain moyen ?
3. On suppose maintenant qu'on reçoit 27 euros si on obtient un 1 et rien sinon. Préférez-vous jouer au jeu de la question 2 ou à celui-ci ? Pourquoi ?
4. On demande maintenant de miser 3 euros pour jouer au jeu de la question 2 dans lequel les gains ont été divisés par 2. Quel est l'espérance de votre gain net ?

Exercice 25 :

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire, aléatoirement, k boules en une seule prise.

1. Quel est l'espace fondamental et en donner le cardinal.
2. On note X la variable aléatoire réelle donnant le numéro de la plus petite boule tirée.
   (a) Quelles sont les valeurs prises par X ?
   (b) Pour $i \in X(\Omega)$, donner $\mathbf{P}(\{X = i\})$
3. Donner $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-k+1} \mathrm{C}_{n-i}^{k-1}$

Exercice 26 :

Le comité de sécurité d'une entreprise a collecté l'information qui suit concernant le nombre d'accidents du travail par jour, sur une période de 250 jours.

Nombre d'accidents par jour	**Nombre de jours**
0	34
1	68
2	68
3	45
4	24
5	9
6	2

1. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X définie par le « Nombre d'accidents en une journée » ainsi que sa fonction de répartition.
2. Quelle est la probabilité d'observer moins de 3 accidents en une journée ?
3. Le responsable du comité de sécurité précise qu'il y a 95 chances sur 100 qu'il se produise au plus 3 accidents en une journée. Cette affirmation est-elle juste ?
4. Quelles sont les chances sur 100 d'observer plus de 4 accidents en une journée ?
5. Calculer l'espérance mathématique et la variance de la variable X. Les interpréter.

Exercice 27 :

X est une variable aléatoire réelle discrète dont la loi est définie par le tableau suivant :

k	-1	0	1	2
$\mathbf{P}(\{X=k\})$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$

1. Calculer $\mathbb{E}(X)$, la moyenne de X, ainsi que $\sigma^2(X)$, la variance de X
2. Soit la variable aléatoire réelle $Y = X^2$ Quelle est la loi de probabilité de Y ?

Exercice 28 :

On considère un dé cubique truqué, de telle sorte que la probabilité d'obtenir la face numérotée k est proportionnelle à k (on suppose que les faces sont numérotées de 1 à 6).
Soit X la variable aléatoire associée au lancer de ce dé.

1. Déterminer la loi de X et calculer son espérance.
2. On pose $Y = \dfrac{1}{X}$. Déterminer la loi de Y et son espérance.

Exercice 29 :

On lance trois fois de suite un dé cubique à 6 faces.

1. Quel est l'espace de probabilité $\{\Omega; \mathcal{F}; \mathbf{P}\}$ lié à cette expérience ?
2. Soit X le nombre de valeurs distinctes obtenues pour un lancer : par exemple $X(2;6;1) = 3$ et $X(4;4;2) = 2$. Quelle est la loi de X ?

Exercice 30 :

X est une variable aléatoire réelle définie sur l'espace probabilisé $\{\Omega; \mathcal{F}; \mathbf{P}\}$ telle que $X(\Omega) = \{1, \ldots, n\}$, c'est à dire que X prend des valeurs entières comprises entre 1 et n.

1. Montrer que pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, nous avons $\{X \leqslant k-1\} \subset \{X \leqslant k\}$
2. Montrer que $\mathbf{P}(\{X=k\}) = \mathbf{P}(\{X \leqslant k\}) - \mathbf{P}(\{X \leqslant k-1\})$
3. On suppose $\mathbf{P}(\{X \leqslant k\}) = \dfrac{\lambda k(k-1)}{2n}$; quelle valeur donner à λ pour que $\mathbf{P}$ soit une probabilité ?
4. En déduire $\mathbf{P}(\{X=k\})$
5. Donner l'espérance mathématique de X

Exercice 31 :

Soit U une urne contenant n boules numérotées de 1 à n . On en tire p successivement, avec remise à chaque tirage.
On appelle X la variable aléatoire réelle égale au plus grand des numéros des boules ainsi tirées.
Pour $k \in \{1, \ldots, n\}$, donner $\mathbf{P}(\{X \leqslant k\})$, puis $\mathbf{P}(\{X=k\})$

Exercice 32 :

Chez STM, on a établi, sur une longue période, que le nombre de personnes absentes par semaine peut être modélisé par la loi suivante :

Nombre de personnes absentes x_i	$\mathbf{P}[X = x_i]$
0	0.05
1	0.09
2	0.15
3	0.34
4	0.21
5	0.12
6	0.03
7	0.01

1. Déterminer le taux moyen d'absentéisme.
2. Calculer la variance et l'écart-type de X.
3. S'il en coûte à l'entreprise 80 euros pour chaque absence, déterminer le coût moyen hebdomadaire ainsi que la variance du coût.

17.10.2 Exercices à travailler

Exercice 33 :

Soit $\{\Omega, \mathbb{F}, \mathbf{P}\}$ un espace probabilisé. Soit $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle.
Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on considère la fonction numérique

$$\varphi(\lambda) = \mathbb{E}\left[(X - \lambda)^2\right]$$

Démontrer que le minimum de φ est atteint en $\lambda = \mathbb{E}(X)$ et en donner une interprétation.

Exercice 34 :

On place un hamster *(jovial)* dans une cage. Il se trouve face à 5 portillons dont un seul lui permet de sortir de la cage. A chaque essai infructueux, il reçoit une décharge électrique et on le replace à l'endroit initial.

1. On suppose que le hamster ne soit pas doué d'apprentissage et qu'il choisisse donc de façon équiprobable entre les 5 solutions à chaque nouvel essai, déterminer la probabilité des événements :
   — Le hamster sort au premier essai.
   — Le hamster sort au troisième essai.
   — Le hamster sort au septième essai.
2. Le hamster mémorise maintenant les essais infructueux et choisit de façon équiprobable entre les portillons qu'il n'a pas encore essayés. On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre d'essais effectués.
   — Quelles valeurs peut prendre X ?
   — Déterminer sa loi de probabilité, et tracer sa fonction de répartition.
   — Déterminer $\mathbb{E}(X)$ et l'interpréter.

Exercice 35 :

Il y a certainement, parmi vous des spécialistes du casino, et cet exercice ne représente pas la réalité du jeu dans un tel établissement : ce n'est pas important.
Une roulette contient 36 cases numérotées de 1 à 36, dont 18 sont rouges, et 18 sont noires, plus une case numérotée 0 de couleur verte.
Un joueur qui mise sur la couleur rouge ou noire gagne 2 fois sa mise si la couleur sort.
Si ce joueur mise sur un numéro de 1 à 36 qui sort, il gagne 36 fois sa mise.
Toute mise sur le 0 est interdite.

1. Le joueur mise au hasard a Euros sur une couleur ; soit X_1 son gain. Trouver la loi de X_1, puis calculer l'espérance et la variance de X_1
2. Le joueur mise au hasard a Euros sur l'un des numéros de 1 à 36 ; soit X_2 son gain. Trouver la loi de X_2, puis calculer l'espérance et la variance de X_2
3. Si vous aviez a Euros à miser, le feriez vous sur un numéro ou une couleur ?

Exercice 36 :

Dans une entreprise, un contrôle visuel est effectué sur des plaques de laiton pour y détecter d'éventuelles tâches de cuivre, d'oxydation ou autres défectuosités apparentes. Selon le service d'Assurance-Qualité, il y a, en moyenne 1,7 défauts par plaque. En supposant que le nombre de défauts par plaque est distribué selon une loi de Poisson :

1. Quelle est l'expression de la loi de probabilité régissant le nombre de défauts par plaque et quelles sont les valeurs possibles de cette variable aléatoire ?
2. Sur 150 plaques contrôlées, quel serait vraisemblablement le nombre de plaques ne présentant aucun défaut ?
3. Quelle est la probabilité d'observer plus de 2 défauts par plaque ?

Exercice 37 :

Dans un hôpital parisien, il arrive en moyenne 1,25 personne à la minute aux urgences entre 9h et 12h. On prend pour variable aléatoire X le nombre de personnes observées à la minute à l'entrée de ce service et on admet que cette variable aléatoire obéit à une loi de Poisson.

1. k étant un entier naturel, déterminer la loi de probabilité qu'en une minute il arrive k personnes.
2. Déterminer les probabilités pour qu'en une minute il arrive :
   — 2 personnes.
   — 4 personnes et plus.
   — 3 personnes au moins.

Exercice 38 :

Un sac contient 10 jetons dont 4 rouges et 6 blancs.
On les extrait, un à un, sans remise.
On appelle X le rang du premier jeton rouge tiré.

1. Donner la loi de X, puis, calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\sigma^2(X)$
2. Reprendre la question précédente, en supposant que les tirages ont lieu avec remise.

Exercice 39 :

Le groupe AB est présent chez 0,6% des individus.
Lors d'une collecte de sang, combien faudrait-il faire de prélèvements pour que la probabilité de trouver au moins un flacon AB soit supérieure à 0.99 ?

Exercice 40 :

La société « Le Hasard » met à la disposition de ses clients internautes un jeu en ligne dont la page d'écran affiche une grille à 4 lignes et 4 colonnes.
Après une mise initiale de 2 Euros du joueur, une fonction aléatoire place au hasard, et successivement, quatre jetons $\diamondsuit$ dans 4 cases différentes.
La partie est gagnée si les quatre jetons sont alignés et le gagnant remporte 10 fois sa mise. Dans le cas contraire, la mise initiale est perdue pour le joueur.

	A	B	C	D
1	$\diamondsuit$			
2	$\diamondsuit$	$\diamondsuit$		
3				$\diamondsuit$
4				

On définit les événements H,V, D et N suivants :

— $H = \{$Les quatre jetons sont alignés horizontalement$\}$
— $V = \{$Les quatre jetons sont alignés verticalement$\}$
— $D = \{$Les quatre jetons sont alignés en diagonale$\}$
— $N = \{$Les quatre jetons ne sont pas alignés$\}$

1. Justifiez qu'il y a 1820 positionnements possibles des 4 jetons
2. Déterminez $\mathbf{P}(H)$, $\mathbf{P}(V)$ et $\mathbf{P}(D)$
3. En déduire $\mathbf{P}(N)$
4. On appelle Z la variable aléatoire égale au **gain de la société** lorsqu'une grille est jouée.
   (a) Quelle est la loi de Z ?
   (b) Quelle est l'espérance de gain de la société à chaque grille jouée ?

17.10.3 Exercices plus difficiles

Exercice 41 :

Une variante de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev
Soit X une variable aléatoire réelle . On suppose que X admet une espérance $\mathbb{E}(X) = m$ et une variance $\sigma^2(X) = \sigma^2$. On fixe $\alpha > 0$.

1. Soit $\lambda \geqslant 0$. Démontrer que $\mathbf{P}(\{X - m \geqslant \alpha\}) = \mathbf{P}(\{X - m + \lambda \geqslant \alpha + \lambda\})$.
2. Vérifier que $\mathbb{E}\left((X - m + \lambda)^2\right) = \sigma^2 + \lambda^2$.
3. Montrer que, pour tout $\lambda > 0$, $\mathbf{P}(\{X - m \geqslant \alpha\}) \leqslant \dfrac{\sigma^2 + \lambda^2}{\alpha^2 + \lambda^2 + 2\lambda\alpha}$.
4. En déduire que $\mathbf{P}(\{X - m \geqslant \alpha\}) \leqslant \dfrac{\sigma^2}{\alpha^2 + \sigma^2}$.
5. Démontrer que $\mathbf{P}(\{|X - m| \geqslant \alpha\}) \leqslant \dfrac{2\sigma^2}{\alpha^2 + \sigma^2}$. Quand obtient-on une meilleure inégalité que l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev ?

Exercice 42 :

1. On lance une piece jusqu'à ce que « pile » **apparaisse une seconde fois**. p est la probabilité d'apparition de « pile ». On suppose l'indépendance de tous les lancers. Soit X le nombre de lancers nécessaires.
   Démontrez que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}(\{X = n\}) = (n-1)\,p^2\,(1-p)^{n-2}$
2. On lance une piece jusqu'à ce que « pile » **apparaisse** k **fois**. p est la probabilité d'apparition de « pile ». On suppose l'indépendance de tous les lancers. Soit X le nombre de lancers nécessaires pour que « pile » apparaisse k fois.
   Démontrez que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}(\{X = n\}) = \mathrm{C}_{n-1}^{k-1} p^k (1-p)^{n-k}$

Exercice 43 :

Recherche de lois

1. Soit X, une variable aléatoire réelle à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que
$$(\forall n \in \mathbb{N}^*)\left(\mathbf{P}(\{X = n\}) = \frac{4}{n}\mathbf{P}(\{X = n-1\})\right)$$
   Quelle est la loi de X ? Donner alors son espérance et sa variance.

2. Soit X, une variable aléatoire réelle à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. Déterminer la loi de X sachant que

$$(\exists p \in]0;+1[)\,(\forall n \in \mathbb{N}^*)\,(\mathbf{P}(\{X=n\}) = p\mathbf{P}(\{X \geqslant n\}))$$

Exercice 44 :

Soit X, une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ .
Utiliser l'inégalité de Bienaymé Tchebichev pour montrer que

$$\mathbf{P}\left(\left\{X \leqslant \frac{\lambda}{2}\right\}\right) \leqslant \frac{4}{\lambda} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{P}(\{X \geqslant 2\lambda\}) \leqslant \frac{1}{\lambda}$$

Exercice 45 :

Soit N, une variable aléatoire réelle qui suit une loi de Poisson de paramètre λ avec $\lambda > 0$. Calculer $\mathbb{E}\left(\dfrac{1}{N+1}\right)$

Exercice 46 :

Soit X une variable aléatoire réelle discrète définie sur un espace probabilisé $\{\Omega;\mathcal{F};\mathbf{P}\}$. On suppose que pour tout réel $t \geqslant 0$, la variable aléatoire réelle e^{-tX} possède une espérance. Démontrer que :

$$(\forall t \geqslant 0)\,\left(\mathbf{P}(\{X \leqslant 0\}) \leqslant \mathbb{E}\left(e^{-tX}\right)\right)$$

Exercice 47 :

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $\{\Omega;\mathcal{F};\mathbf{P}\}$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}(\{X > k\}) = \sum_{k=1}^{n} k\mathbf{P}(\{X = k\}) + (n+1)\,\mathbf{P}(\{X > n\})$
2. On suppose que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} \mathbf{P}(\{X > k\})$ converge.
   (a) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\mathbf{P}(\{X = k\}) \leqslant \sum_{k\geqslant 0} \mathbf{P}(\{X > k\})$
   (b) En déduire que la variable aléatoire réelle X admet une espérance.
3. On suppose, maintenant, que la variable aléatoire réelle X admet une espérance.
   (a) Montrer que pour tout $n \geqslant 1$ nous avons $\displaystyle(n+1)\,\mathbf{P}(\{X > n\}) \leqslant \sum_{k\geqslant n+1} k\mathbf{P}(\{X = k\})$
   (b) En déduire que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} \mathbf{P}(\{X > k\})$ est convergente et que $\displaystyle\mathbb{E}(X) = \sum_{k\geqslant 0} \mathbf{P}(\{X > k\})$

Exercice 48 :

1. Z est une variable aléatoire réelle qui suit une loi binômiale $\mathcal{B}(n,p)$. Rappeler la fonction génératrice G_Z de Z
2. Une variable aléatoire X à valeurs entières a pour fonction génératrice

$$\forall s \in [0;1] \qquad G_X(s) = k\,(3+2s)^3$$

   (a) Déterminer la constante k.
   (b) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
   (c) Calculer l'espérance mathématique et la variance de X
3. Reprendre les questions de 2, pour une variable aléatoire X_1 à valeurs entières dont la fonction génératrice est donnée par :

$$\forall s \in [0;1] \qquad G_{X_1}(s) = k\left(3+2s^2\right)^3$$

4. Questions de prolongement :
   (a) Soit X une variable aléatoire réelle à valeurs dans $\mathbb{N}$ qui admet comme fonction génératrice G_X. Soit $p \in \mathbb{N}$ et nous considérons $X_p = p \times X$. Démontrer que $G_{X_p}(z) = G_X(z^p)$
   (b) Soit X une variable aléatoire réelle à valeurs dans $\mathbb{N}$ qui admet comme fonction génératrice G_X. Soit $p \in \mathbb{N}$ et nous considérons $X_p = p + X$. Démontrer que $G_{X_p}(z) = z^p G_X(z)$

Exercice 49 :

1. Calculer la fonction génératrice d'une loi géométrique de paramètre $p \in]0;+1[$
2. Calculer la fonction génératrice d'une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$

Exercice 50 :

Une urne contient 4 boules indiscernables :
— 1 boule nouměrotée 0
— 2 boules numérotées 1
— 1 boule numérotée 2

On tire une boule de l'urne, et une boule numérotée i rapporte i points à la personne qui a tiré. Chaque personne effectue n tirages successifs *(les boules, après chaque tirage sont remises dans l'urne)* et l'on note S le score total obtenu. Déterminer la fonction génératrice de S et en déduire la loi de S.

17.11 Quelques corrections d'exercices

Exercice 1 :

Soient X et Y 2 variables aléatoires discrètes telles que $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}$
Montrer que $Z = \sup(X, Y)$ est une variable aléatoire réelle

$\Rightarrow$ Il est clair, qu'à priori, $Z(\Omega) = \mathbb{N}$

$\Rightarrow$ Soit $k \in \mathbb{N}$. Il faut démontrer que l'événement $\{Z = k\} \in \mathcal{F}$.
C'est quoi $\{Z = k\}$?.. Il suffit de l'écrire :

$$\{Z = k\} = (\{X = k\} \cap \{Y \leqslant k-1\}) \cup (\{X \leqslant k-1\} \cap \{Y = k\})$$

X et Y étant des variables aléatoires réelles , alors $\{X = k\} \in \mathcal{F}$, $\{Y = k\} \in \mathcal{F}$, $\{Y \leqslant k-1\} \in \mathcal{F}$ et $\{X \leqslant k-1\} \in \mathcal{F}$
$\mathcal{F}$ étant stable par réunion et intersections, $\{Z = k\} \in \mathcal{F}$.

Z est donc une variable aléatoire réelle

Exercice 3 :

Dans un jeu de 32 cartes, on tire au hasard 4 cartes, et simultanément. On appelle X l'application qui à chaque tirage associe le nombre de cœurs qu'il contient.
Définir un espace de probabilité tel que X soit une variable aléatoire réelle , et étudier la loi de probabilité de X

$\Rightarrow$ Il faut tout d'abord l'espace fondamental. Ici, c'est le classique Ω :

$$\Omega = \{\text{Les sous ensembles à 4 éléments pris parmi les 32}\}$$

Et donc Card $\Omega = \binom{32}{4} = \mathrm{C}_{32}^{4}$

$\Rightarrow$ Donnons, maintenant ; la loi de X

- $\star$ Tout d'abord $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$
- $\star$ Ensuite, étudions l'événement $\{X = k\}$.
  Ceci veut dire que si nous avons k coeurs dans notre main, il y en a $4-k$ qui ne sont pas des coeurs. Et donc Card $(\{X = k\}) = \binom{8}{k} \times \binom{24}{4-k} = \mathrm{C}_8^k \times \mathrm{C}_{24}^{4-k}$
  Et donc $\mathbf{P}(\{X = k\}) = \dfrac{\binom{8}{k} \times \binom{24}{4-k}}{\binom{32}{4}} = \dfrac{\mathrm{C}_8^k \times \mathrm{C}_{24}^{4-k}}{\mathrm{C}_{32}^4}$

Comme $\displaystyle\sum_{k=0}^{4} \mathbf{P}(\{X = k\}) = 1$, nous avons :

$$\sum_{k=0}^{4} \frac{\mathrm{C}_8^k \times \mathrm{C}_{24}^{4-k}}{\mathrm{C}_{32}^4} = 1 \iff \sum_{k=0}^{4} \mathrm{C}_8^k \times \mathrm{C}_{24}^{4-k} = \mathrm{C}_{32}^4$$

Exercice 4 :

Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n. On tire simultanément trois jetons de cette urne.
Soit X l'application qui à un tirage associe le plus grand des trois nombres figurant sur les jetons tirés.
Définir un espace de probabilité tel que X soit une variable aléatoire réelle , et étudier la loi de probabilité de X

Définir la loi de X, c'est donner $X(\Omega)$, et, pour $k \in X(\Omega)$ évaluer $\mathbf{P}(\{X = k\})$

$\Rightarrow$ Il faut tout d'abord l'espace fondamental. Ici, c'est le classique Ω :

$$\Omega = \{\text{Les sous ensembles à 3 éléments pris parmi } n\}$$

Et donc Card $\Omega = \binom{n}{3} = \mathrm{C}_n^3$

$\Rightarrow$ Clairement $X(\Omega) = \{3, 4, 5, \cdots, n\}$

$\Rightarrow$ Etudions l'événement $\{X = k\}$
Ceci veut dire que si nous avons k comme le plus grand numéro des 3 tirés, il y a 2 autres qui sont tirés parmi les $k-1$ jetons qui sont de numéro inférieur. Et donc Card $(\{X = k\}) = \binom{k-1}{2} = \mathrm{C}_{k-1}^2$
Et donc $\mathbf{P}(\{X = k\}) = \dfrac{\binom{k-1}{2}}{\binom{n}{3}} = \dfrac{\mathrm{C}_{k-1}^2}{\mathrm{C}_n^3}$

De l'égalité $\displaystyle\sum_{k=0}^{4} \mathbf{P}(\{X = k\}) = 1$, nous avons : $\displaystyle\sum_{k=3}^{n} \mathrm{C}_{k-1}^2 = \mathrm{C}_n^3$

Exercice 5 :

Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les réels $p_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$ peuvent être les coefficients d'une loi de probabilité.

Il suffit de montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} p_n$ converge et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} p_n = 1$.

Etudions alors les sommes partielles $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$

Nous démontrons facilement que $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$ de telle sorte que :

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} \\
&= 1 - \frac{1}{n+1}
\end{aligned}$$

Donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$; et donc la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} p_n$ converge et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} p_n = 1$

Exercice 6 :

Une urne contient 30 boules indiscernables au toucher. Il y a exactement 10 boules rouges.
On tire 6 boules, successivement, et avec remise dans cette urne (on tire une boule, on la regarde dans le blanc des yeux, on note sa couleur, et on la remet dans l'urne ; on itère cette opération 6 fois)
Déterminer la probabilité des événements suivants :

1. *Il y a au moins une boule rouge*
2. *Il y a exactement une boule rouge*

Dans quel type de problématique sommes-nous ?
A chaque tirage, il y a une probabilité de $\dfrac{1}{3}$ de tirer une boule rouge *(succès)* et donc de $\dfrac{2}{3}$ de tirer une boule d'une autre couleur que rouge *(échec)*
On tire donc 6 fois de rang, et la loi probabilité d'avoir k boules rouges dans ces 6 tirages est une loi binômiale $\mathcal{B}\left(6; \dfrac{1}{3}\right)$

1. L'événement « il y a au moins une boule rouge » est l'événement contraire de « n'avoir aucune boule rouge »

En posant $\{X=0\}$ l'événement « n'avoir aucune boule rouge », nous avons

$$\mathbf{P}\left(\{X=0\}\right)=\binom{6}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^6=\frac{64}{729}\approx 0,087$$

Donc, $\mathbf{P}\left(\overline{\{X=0\}}\right)=1-\frac{64}{729}=\frac{665}{729}\approx 0,912$

2. L'événement « il y a exactement une boule rouge » est donc donné par $\{X=1\}$ et

$$\mathbf{P}\left(\{X=1\}\right)=\binom{6}{1}\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^5=6\times\frac{192}{729}=\frac{64}{243}\approx 0,263$$

Exercice 7 :

Dans une première version de ces ***exercices corrigés****, je n'avais pas corrigé l'exercice qui suit. Finalement, voici, quand même, un corrigé succinct*

Une urne contient 10 boules, dont 4 blanches et 6 noires

1. *On en tire 5* **sans remise***. Trouver la loi de la variable aléatoire réelle égale au nombre de boules blanches tirées.* Soit Ω l'espace fondamental lié à cette épreuve. Alors,

$$\Omega=\{\text{Les sous ensembles à 5 éléments pris parmi 10}\}$$

Soit X la variable aléatoire réelle donnant le nombre de boules blanches tirées. Alors $X(\Omega)=\{0,1,2,3,4\}$.
D'autre part, si je tire k boules blanches, j'aurai donc tiré $5-k$ boules d'une autre couleur. et donc :

$$\mathbf{P}\left(\{X=k\}\right)=\frac{\binom{4}{k}\binom{6}{5-k}}{\binom{10}{5}}$$

Une fois de plus, comme $\sum_{k=0}^{4}\mathbf{P}\left(\{X=k\}\right)=1$, nous avons :

$$\sum_{k=0}^{4}\mathbf{P}\left(\{X=k\}\right)=1\iff\sum_{k=0}^{4}\frac{\binom{4}{k}\binom{6}{5-k}}{\binom{10}{5}}=1\iff\binom{4}{k}\binom{6}{5-k}=\binom{10}{5}$$

2. *On en tire 5* **avec remise***. Trouver la loi de la variable aléatoire réelle égale au nombre de boules blanches tirées.*

Ici, c'est, bien entendu, une loi binômiale $\mathcal{B}\left(5;\frac{2}{5}\right)$ et donc $\mathbf{P}\left(\{X=k\}\right)=\binom{5}{k}\left(\frac{2}{5}\right)^k\left(\frac{3}{5}\right)^{5-k}$

L'INTÉRÊT DE CET EXERCICE RÉSIDE AUSSI DANS LE FAIT QUE, SI NOUS AVONS LA MÊME URNE CONTENANT LES MÊMES BOULES, L'ÉPREUVE EST DIFFÉRENTE DANS CHAQUE CAS ET L'ESPACE FONDAMENTAL Ω EST DONC DIFFÉRENT DANS CHAQUE CAS.

Exercice 8 :

Une urne contient n boules dont a boules blanches et $n-a$ boules noires. On tire, de cette urne, une boule, **avec remise***, jusqu'à l'apparition d'une boule blanche.*
On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule blanche. Montrer que X est géométrique de paramètre $\frac{a}{n}$

- $\Rightarrow$ Premièrement, $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$
- $\Rightarrow$ Ensuite, l'événement $\{X = k\}$ signifie que lors des $k-1$ premiers tirages, il n'y a eu que des boules noires de tirées ; et donc, très simplement :

$$\mathbf{P}(\{X = k\}) = \left(\frac{n-a}{n}\right)^{k-1} \times \frac{a}{n} = \left(1 - \frac{a}{n}\right)^{k-1} \times \frac{a}{n}$$

X est donc bien une variable aléatoire réelle géométrique de paramètre $\dfrac{a}{n}$

Exercice 10 :

Soit $\{\Omega, \mathbb{F}, \mathbf{P}\}$ un espace probabilisé et $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle discrète de fonction de répartition F_X définie par :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } 0 \leqslant x < 1 \\ \dfrac{2}{3} & \text{si } 1 \leqslant x < 2 \\ \dfrac{11}{12} & \text{si } 2 \leqslant x < 3 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 3 \end{cases}$$

1. *Construction du graphe de F_X*

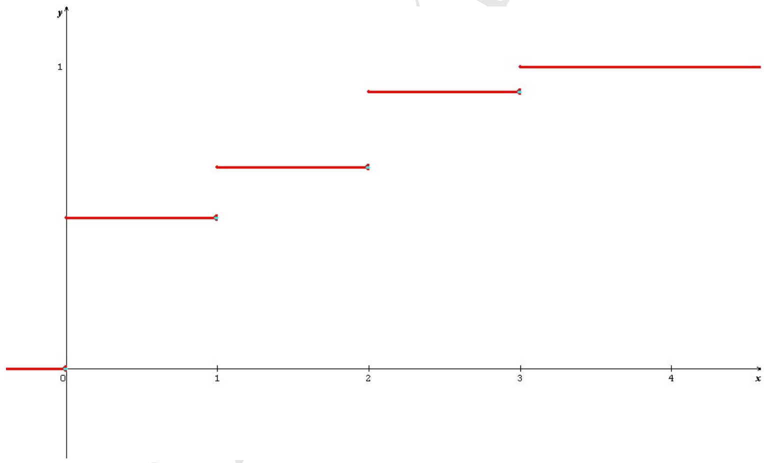

FIGURE 17.4 – Le graphe de la fonction de répartition

2. *Donner* $\mathbf{P}\left(\left\{X > \dfrac{1}{2}\right\}\right)$

   En passant à l'événement contraire, il est connu que : $\overline{\left\{X > \dfrac{1}{2}\right\}} = \left\{X \leqslant \dfrac{1}{2}\right\}$, et donc :

$$\mathbf{P}\left(\left\{X > \frac{1}{2}\right\}\right) = 1 - \mathbf{P}\left(\left\{X \leqslant \frac{1}{2}\right\}\right) = 1 - F_X\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

3. *Donner* $\mathbf{P}(\{2 < X \leqslant 4\})$

   En cours, il a été vu que : $\mathbf{P}(\{2 < X \leqslant 4\}) = F_X(4) - F_X(2)$; donc, ici,

$$\mathbf{P}(\{2 < X \leqslant 4\}) = 1 - \frac{11}{12} = \frac{1}{12}$$

4. *Donner $\mathbf{P}(\{X=1\})$*

   Nous avons toujours : $\{X \leqslant 1\} = \{X=1\} \cup \{X<1\}$, et donc $\mathbf{P}(\{X \leqslant 1\}) = \mathbf{P}(\{X=1\}) + \mathbf{P}(\{X<1\})$, d'où :
$$\mathbf{P}(\{X \leqslant 1\}) - \mathbf{P}(\{X<1\}) = \mathbf{P}(\{X=1\})$$
   Comme $\mathbf{P}(\{X \leqslant 1\}) = \dfrac{2}{3}$ et $\mathbf{P}(\{X<1\}) = \dfrac{1}{2}$, nous obtenons que $\boxed{\mathbf{P}(\{X=1\}) = \dfrac{1}{6}}$

Exercice 12 :

Soit Y une variable aléatoire réelle à valeurs dans $\mathbb{N}$, majorée par un réel $M>0$.
Montrer que $\mathbb{E}(Y) \leqslant M\mathbf{P}(\{Y \geqslant 1\})$

Premièrement, dire que Y est une variable aléatoire réelle à valeurs dans $\mathbb{N}$, majorée par un réel $M>0$, c'est dire $Y(\Omega)$ est un ensemble fini : nous avons $Y(\Omega) = \{0,1,2,\cdots,N\}$. Donc :
$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=0}^{N} k\mathbf{P}(\{Y=k\}) = \sum_{k=1}^{N} k\mathbf{P}(\{Y=k\}) \leqslant M\sum_{k=1}^{N}\mathbf{P}(\{Y=k\}) = M\mathbf{P}(\{Y \geqslant 1\})$$
Et donc, $\mathbb{E}(Y) \leqslant M\mathbf{P}(\{Y \geqslant 1\})$

Exercice 14 :

Soit $\{\Omega;\mathcal{F};\mathbf{P}\}$ un espace probabilisé, X et Y, 2 variables aléatoires réelles discrètes définies sur Ω telles que, pour tout $\omega \in \Omega$, $X(\omega) \geqslant Y(\omega)$. Démontrer que $\mathbb{E}(X) \geqslant \mathbb{E}(Y)$

On appelle $Z = X - Y$. Z est une variable aléatoire réelle et pour tout $\omega \in \Omega$, $Z(\omega) \geqslant 0$, et donc d'après 17.6.10, nous avons $\mathbb{E}(Z) \geqslant 0$, c'est à dire $\mathbb{E}(X-Y) \geqslant 0$.
D'où, $\mathbb{E}(X) \geqslant \mathbb{E}(Y)$

Exercice 15 :

Soit $\alpha > 1$, réel. On considère $\zeta(\alpha) = \displaystyle\sum_{n \geqslant 1}\frac{1}{n^\alpha}$ qui est une série de Riemann convergente.
Soit $\{\Omega;\mathcal{F};\mathbf{P}\}$ un espace probabilisé et $X_\alpha : \Omega \longrightarrow \mathbb{N}^*$ une variable aléatoire réelle telle que $\mathbf{P}(\{X_\alpha = n\}) = \dfrac{1}{\zeta(\alpha)} \times \dfrac{1}{n^\alpha}$

1. *Vérifier que $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1}\mathbf{P}(\{X_\alpha = n\}) = 1$*

   Voilà une question qui pose peu de difficultés :
$$\sum_{n \geqslant 1}\mathbf{P}(\{X_\alpha = n\}) = \sum_{n \geqslant 1}\frac{1}{\zeta(\alpha)} \times \frac{1}{n^\alpha} = \frac{1}{\zeta(\alpha)}\sum_{n \geqslant 1}\frac{1}{n^\alpha} = \frac{\zeta(\alpha)}{\zeta(\alpha)} = 1$$

2. *Démontrer que X_α admet des moments d'ordre $s \in \mathbb{N}$ si et seulement si $s < \alpha - 1$.*

   Nous avons $M_s(X_\alpha) = \displaystyle\sum_{n \geqslant 1} n^s\mathbf{P}(\{X_\alpha = n\}) = \frac{1}{\zeta(\alpha)}\sum_{n \geqslant 1} n^s \times \frac{1}{n^\alpha}$

   Etudions la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} n^s \times \frac{1}{n^\alpha}$. Or :
$$\sum_{n \geqslant 1} n^s \times \frac{1}{n^\alpha} = \sum_{n \geqslant 1}\frac{1}{n^{\alpha - s}} \text{ qui converge pour } \alpha - s > 1$$
   Comme $\alpha - s > 1 \Longleftrightarrow s < \alpha - 1$, X_α admet des moments d'ordre $s \in \mathbb{N}$ si et seulement si $s < \alpha - 1$ et nous avons alors $M_s(X_\alpha) = \dfrac{\zeta(\alpha - s)}{\zeta(\alpha)}$

Exercice 16 :

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, une fonction bornée. On appelle $M = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$. Montrer que

$$\sum_{x\in X(\Omega)} |f(x)|\, \mathbf{P}(\{X = x\}) \leqslant M$$

Pas très sorcier, puisque pour tout $x \in X(\Omega)$, nous avons $|f(x)| \leqslant M$ et donc

$$|f(x)|\, \mathbf{P}(\{X = x\}) \leqslant M\mathbf{P}(\{X = x\})$$

et, en passant aux sommations et en remarquant que $\sum_{x\in X(\Omega)} \mathbf{P}(\{X = x\}) = 1$:

$$\sum_{x\in X(\Omega)} |f(x)|\, \mathbf{P}(\{X = x\}) \leqslant \sum_{x\in X(\Omega)} M\mathbf{P}(\{X = x\}) = M \sum_{x\in X(\Omega)} \mathbf{P}(\{X = x\}) = M$$

Ce que nous voulions.

Exercice 17 :

Soit X une variable aléatoire réelle qui suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0;1[$, c'est à dire que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\mathbf{P}(\{X = n\}) = p(1-p)^{n-1}$
Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et on pose $Y = \min(X, m)$, c'est à dire que Y est du type $Y = \varphi \circ X$ où $\varphi(x) = \min(x, m)$

1. *Donner la loi de Y*

   La loi de la variable aléatoire réelle Y est toujours la donnée de $Y(\Omega)$ et des valeurs $\mathbf{P}(\{Y = y\})$ où $y \in Y(\Omega)$
   - ▷ Qu'est donc $Y(\Omega)$?
     Ici, Y ne pourra pas aller au-delà de m, et donc $Y(\Omega) = \{1, 2, 3, \cdots, m\}$
   - ▷ Recherchons, maintenent, $\mathbf{P}(\{Y = k\})$ pour $k \in \{1, 2, 3, \cdots, m\}$
     - ⋆ Pour $1 \leqslant k \leqslant m-1$, nous avons $\{Y = k\} = \{X = k\}$ et donc

     $$\mathbf{P}(\{Y = k\}) = \mathbf{P}(\{X = k\}) = p(1-p)^{k-1}$$

     - ⋆ Etudions, maintenant, l'événement $\{Y = m\}$. Alors :

     $$\{Y = m\} = \{X \geqslant m\} = \bigcup_{k\geqslant m} \{X = k\}$$

     Et donc : $\mathbf{P}(\{Y = m\}) = \sum_{k\geqslant m} \mathbf{P}(\{X = k\}) = \sum_{k\geqslant m} p(1-p)^{k-1}$
     Tentons de simplifier l'expression :

     $$\begin{aligned} \mathbf{P}(\{Y = m\}) &= \sum_{k\geqslant m} p(1-p)^{k-1} \\ &= p(1-p)^{m-1} \sum_{k\geqslant m} (1-p)^{k-1-m+1} \\ &= p(1-p)^{m-1} \sum_{k\geqslant 0} (1-p)^{k} \\ &= p(1-p)^{m-1} \times \frac{1}{1-(1-p)} \\ &= (1-p)^{m-1} \end{aligned}$$

   Et donc, nous avons $\mathbf{P}(\{Y = k\}) = p(1-p)^{k-1}$ si $1 \leqslant k \leqslant m-1$ et $\mathbf{P}(\{Y = m\}) = (1-p)^{m-1}$

2. *Calculer $\mathbb{E}(Y)$*

Bien entendu, nous avons $\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=1}^{m-1} kp(1-p)^{k-1} + m(1-p)^{m-1}$

Le plus difficile sera de calculer $\sum_{k=1}^{m-1} kp(1-p)^{k-1} = p\sum_{k=1}^{m-1} k(1-p)^{k-1}$

▷ Pour commencer, pour $x \in \mathbb{R}$ et $0 < x < 1$, nous avons $\theta(x) = \sum_{k=0}^{m-1} x^k = \dfrac{1-x^m}{1-x}$.

Considérons, maintenant, la dérivée de θ

$$\theta'(x) = \sum_{k=0}^{m-1} kx^{k-1} = \sum_{k=1}^{m-1} kx^{k-1} = \left(\frac{1-x^m}{1-x}\right)' = \frac{(m-1)x^m - mx^{m-1}+1}{(1-x)^2}$$

Et donc, pour conclure $\sum_{k=1}^{m-1} kx^{k-1} = \dfrac{(m-1)x^m - mx^{m-1}+1}{(1-x)^2}$

▷ En remplaçant x par $1-p$, nous avons :

$$\sum_{k=1}^{m-1} k(1-p)^{k-1} = \frac{(m-1)(1-p)^m - m(1-p)^{m-1}+1}{p^2}$$

De telle sorte que $\sum_{k=1}^{m-1} kp(1-p)^{k-1} = p\sum_{k=1}^{m-1} k(1-p)^{k-1} = \dfrac{(m-1)(1-p)^m - m(1-p)^{m-1}+1}{p}$

▷ Calculons, maintenant, $\mathbb{E}(Y)$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y) &= \sum_{k=1}^{m-1} kp(1-p)^{k-1} + m(1-p)^{m-1} \\
&= \frac{(m-1)(1-p)^m - m(1-p)^{m-1}+1}{p} + m(1-p)^{m-1} \\
&= \frac{(m-1)(1-p)^m - m(1-p)^{m-1}+1+mp(1-p)^{m-1}}{p} \\
&= \frac{(m-1)(1-p)^m - m(1-p)^{m-1}(1-p)+1}{p} \\
&= \frac{(m-1)(1-p)^m - m(1-p)^m+1}{p} \\
&= \frac{1-(1-p)^m}{p}
\end{aligned}$$

Nous avons donc $\mathbb{E}(Y) = \dfrac{1-(1-p)^m}{p}$

Exercice 18 :

1. *Quelle est la variance d'une variable aléatoire réelle certaine ? Réciproquement, soit X une variable aléatoire réelle discrète et finie dont la variance est nulle. Montrer que X est une variable aléatoire réelle constante.*

▷ La variance d'une variable aléatoire réelle certaine
Supposons que pour tout $\omega \in \Omega$, nous ayions $X(\omega) = \lambda$; donc $\mathbb{E}(X) = \lambda$ et $\mathbb{E}(X^2) = \lambda^2$.
D'où $\sigma^2(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = \lambda^2 - \lambda^2 = 0$

▷ Supposons que X soit une variable aléatoire réelle de variance nulle
Si $\sigma^2(X) = 0$, alors $\mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}(X))^2\right] = 0$.
Soit Z la variable aléatoire réelle définie par $Z = (X - \mathbb{E}(X))^2$; alors $Z \geqslant 0$ et $\mathbb{E}(Z) = 0$; donc, d'après 17.6.10, Z est la variable aléatoire réelle nulle, c'est à dire $Z = 0$, ce qui est équivalent à écrire que $X = \mathbb{E}(X)$.
X est donc une variable aléatoire réelle constante, pour X variable aléatoire réelle discrète :

Nous avons donc montré l'équivalence :

$$\sigma^2(X) = 0 \Longleftrightarrow X \text{ est une variable aléatoire réelle constante}$$

2. *Soit $\{\Omega; \mathcal{F}; \mathbf{P}\}$ un espace probabilisé et $A \in \mathcal{F}$. On considère $1_A : \Omega \longrightarrow \{0,1\}$, la fonction indicatrice de l'ensemble A. Donner la variance $\sigma^2(1_A)$ de 1_A*

   Question qui a peu d'intérêt, puisque la fonction indicatrice est une loi de Bernouilli de paramètre $\mathbf{P}(A)$. Nous avons donc :

$$\sigma^2(1_A) = \mathbf{P}(A)(1 - \mathbf{P}(A)) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(\overline{A})$$

3. *Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons l'inégalité $|x| \leqslant \dfrac{1+x^2}{2}$. Déduire de cette inégalité que si X est une variable aléatoire réelle telle que $\mathbb{E}(X^2)$ existe, alors $\mathbb{E}(X)$ existe.*

   Le seul intérêt de cette question est de redémontrer 17.6.14 dans un cas très particulier

   ▷ Montrons que $|x| \leqslant \dfrac{1+x^2}{2}$

   Nous avons déjà démontré, dans des cours antérieurs *(L_0 en particulier)* que, pour tout $y \in \mathbb{R}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons :

$$2|xy| \leqslant x^2 + y^2 \Longleftrightarrow |xy| \leqslant \frac{x^2+y^2}{2}$$

   L'inégalité demandée est réalisée pour $y = 1$

   ▷ Pour toute variable aléatoire réelle X, nous avons aussi $|X| \leqslant \dfrac{1+X^2}{2}$.

   Ainsi, si $\mathbb{E}(X^2)$ existe, alors $\mathbb{E}\left(\dfrac{1+X^2}{2}\right)$ aussi et donc $\mathbb{E}(|X|)$.

   En traduisant en termes de série, on dira alors que la série $\displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} |x| \mathbf{P}(\{X = x\})$ converge et que, donc, la série $\displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} x\mathbf{P}(\{X = x\})$ est absolument convergente, donc convergente et $\mathbb{E}(X)$ existe.

   Et nous concluons que si $\mathbb{E}(|X|)$ esixte, alors $\mathbb{E}(X)$ aussi

Exercice 19 :

Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \{-4,\ -3,\ 1,\ 2\}$ et dont la loi est donnée par le tableau :

x_i	-4	-3	1	2
$\mathbb{P}(X = x_i)$	$0,10$	$0,15$	$0,65$	$0,10$

1. *Calculez l'espérance et la variance de X*

   (a) Calcul de l'espérance

   Le calcul de l'espérance est très simple :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= -4\mathbb{P}(\{X = -4\}) + (-3)\mathbb{P}(\{X = -3\}) + 1\mathbb{P}(\{X = +1\}) + 2\mathbb{P}(\{X = +2\}) \\ &= -4 \times 0,10 - 3 \times 0,15 + 1 \times 0,65 + 2 \times 0,10 \\ &= 0 \end{aligned}$$

   Nous avons $\mathbb{E}(X) = 0$. C'est donc une variable aléatoire centrée.

   (b) Calcul de la variance

   Pour calculer la variance, nous allons utiliser la formule de Koënig (Voir 17.7.2) : $\sigma^2(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$. Calculons $\mathbb{E}(X^2)$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X^2) &= (-4)^2\mathbb{P}(\{X = -4\}) + (-3)^2\mathbb{P}(\{X = -3\}) + 1^2\mathbb{P}(\{X = +1\}) + 2^2\mathbb{P}(\{X = +2\}) \\ &= 16 \times 0,10 + 9 \times 0,15 + 1 \times 0,65 + 4 \times 0,10 \\ &= 4 \end{aligned}$$

Donc, $\sigma^2(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = 4 - 0 = 4$

2. *Définissez la fonction de répartition de X*

   On appelle F_X la fonction de répartition de X ; nous avons : $F_X(x) = \mathbb{P}(\{X \leqslant x\})$. Définissons maintenant F_X :

   Si $x < -4$, alors $F_X(x) = 0$
   Si $-4 \leqslant x < -3$, alors $F_X(x) = \mathbb{P}(\{X = -4\}) = 0,10$
   Si $-3 \leqslant x < 1$, alors $F_X(x) = \mathbb{P}(\{X = -4\}) + \mathbb{P}(\{X = -3\}) = 0,25$
   Si $1 \leqslant x < 2$, alors $F_X(x) = \mathbb{P}(\{X = -4\}) + \mathbb{P}(\{X = -3\}) + \mathbb{P}(\{X = 1\}) = 0,90$
   Si $2 \leqslant x$, alors $F_X(x) = \mathbb{P}(\{X = -4\}) + \mathbb{P}(\{X = -3\}) + \mathbb{P}(\{X = 1\}) + \mathbb{P}(\{X = 2\}) = 1$

3. *Soit $\varphi : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par :*

$$\begin{cases} \varphi : \mathbb{R}^+ & \longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ \qquad h & \overset{\varphi}{\longmapsto} \quad \varphi(h) = \mathbb{P}(\{|X| \leqslant h\}) \end{cases}$$

   Définissez la fonction φ

   Avant toute chose, on va définir ce qu'est l'ensemble $\{|X| \leqslant h\}$. Nous avons : $\{|X| \leqslant h\} = \{-h \leqslant X \leqslant h\}$. Ce qui va nous donner :

$$\begin{array}{rl} h \in [0\ 1[: & \{-h \leqslant X \leqslant h\} = \emptyset \\ h \in [1\ 2[: & \{-h \leqslant X \leqslant h\} = \{X = 1\} \\ h \in [2\ 3[: & \{-h \leqslant X \leqslant h\} = \{X = 1\} \cup \{X = 2\} \\ h \in [3\ 4[: & \{-h \leqslant X \leqslant h\} = \{X = 1\} \cup \{X = 2\} \cup \{X = -3\} \\ h \geqslant 4 : & \{-h \leqslant X \leqslant h\} = \{X = 1\} \cup \{X = 2\} \cup \{X = -3\} \cup \{X = -4\} \end{array}$$

   D'où, l'expression de φ

$$\begin{array}{rl} h \in [0\ 1[: & \varphi(h) = 0 \\ h \in [1\ 2[: & \varphi(h) = 0,65 \\ h \in [2\ 3[: & \varphi(h) = 0,75 \\ h \in [3\ 4[: & \varphi(h) = 0,90 \\ h \geqslant 4 : & \varphi(h) = 1 \end{array}$$

Exercice 21 :

Soit $\{\Omega; \mathcal{F}; \mathbf{P}\}$ un espace probabilisé et $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, une variable aléatoire réelle discrète

1. *On suppose que X suit une loi binômiale $\mathcal{B}\left(10, \frac{1}{2}\right)$. Trouver un majorant de la probabilité de l'événement $\{X \neq 5\} \cap \{X \neq 4\} \cap \{X \neq 6\}$*

   Nous allons utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchébichev $\mathbf{P}(\{|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant \varepsilon\}) \leqslant \dfrac{\sigma^2(X)}{\varepsilon^2}$.

   Ici, X est une variable aléatoire réelle binômiale $\mathcal{B}\left(10, \frac{1}{2}\right)$ de moyenne $\mathbb{E}(X) = 5$ et de variance $\sigma^2(X) = \dfrac{10}{4} = 2,5$

   L'événement $\{X \neq 5\} \cap \{X \neq 4\} \cap \{X \neq 6\}$ peut se traduire par $\{|X - 5| \geqslant 2\} \iff \{|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant 2\}$

   Nous avons donc $\mathbf{P}(\{|X - 5| \geqslant 2\}) \leqslant \dfrac{2,5}{4} = 0,625$

2. *Qu'en est-il si nous supposons, cette fois-ci que X suit une loi binômiale $\mathcal{B}\left(100, \frac{1}{2}\right)$ pour l'événement $\{X \neq 50\} \cap \{X \neq 51\} \cap \{X \neq 49\}$*

   Comme tout à l'heure, nous avons $\mathbb{E}(X) = 50$ et $\sigma^2(X) = \dfrac{100}{4} = 25$.

   L'événement $\{X \neq 50\} \cap \{X \neq 51\} \cap \{X \neq 49\}$ est l'événement $\{|X - 50| \geqslant 2\}$ et donc :

$$\mathbf{P}(\{|X - 50| \geqslant 2\}) \leqslant \frac{25}{4} = 6,25$$

   Il est évident que cette dernière inégalité n'apporte rien !!

Cet exercice est l'illustration du fait que les inégalités, en probabibilité, sont très larges et peu efficaces, finalement.

Exercice 22 :

On considère une variable aléatoire X de loi uniforme sur l'ensemble $\{1,2,3,4,5,6\}$

1. Calculer la fonction génératrice G_X de la variable aléatoire X.

   Par définition d'une fonction génératrice, nous avons $G_X(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{P}(\{X=n\})\, z^n$; ici, nous avons :
   $$G_X(z) = \sum_{n=1}^{6} \mathbf{P}(\{X=n\})\, z^n = \frac{1}{6}\left(z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6\right)$$

2. Calculer les dérivées première et seconde de G_X.

   C'est une vraie question ? ? ?
   — Dérivée premièreBen, c'est simplissime :$G'_X(z) = \dfrac{1}{6}\left(1+2z+3z^2+4z^3+5z^4+6z^5\right)$
   — Dérivée seconde Allons y :$G''_X(z) = \dfrac{1}{6}\left(2+6z+12z^2+20z^3+30z^4\right)$
   C'est tout ?

3. En déduire l'espérance et la variance de X

   C'est toujours une question de cours :
   — D'après le cours, $\mathbb{E}(X) = G'_X(1)$; or, $G'_X(1) = \dfrac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) = \dfrac{7}{2}$
   Donc, $\mathbb{E}(X) = \dfrac{7}{2}$
   — Toujours d'après le cours, $\sigma^2(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - \left(G'_X(1)\right)^2$
   D'après un calcul précédent, $G'_X(1) = \dfrac{7}{2}$, et d'après un calcul plus neuf $G''_X(1) = \dfrac{1}{6}(2+6+12+20+30) = \dfrac{35}{3}$
   Donc $\sigma^2(X) = \dfrac{35}{3} + \dfrac{7}{2} - \dfrac{49}{4} = \dfrac{140+42-147}{12} = \dfrac{35}{12}$

4. Prolongement :
   On dit que X_n suit une loi uniforme discrète sur $\{1,\cdots,n\}$ si et seulement si pour tout entier $k\in\{1,\cdots,n\}$ on a $\mathbf{P}(\{X=k\}) = \dfrac{1}{n}$
   Déterminer la fonction génératrice G_{X_n} des variables aléatoires réelles X_n

   Nous avons, $G_{X_n}(z) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(\{X=k\})\, z^k$. Ici,
   $$\begin{aligned} G_{X_n}(z) &= \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(\{X=k\})\, z^k \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} z^k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} z^k \\ &= \frac{z}{n}\sum_{k=1}^{n} z^{k-1} = \frac{z}{n}\sum_{k=0}^{n-1} z^k \\ &= \frac{z}{n}\left(\frac{1-z^n}{1-z}\right) \end{aligned}$$

   Donc, $G_{X_n}(z) = \dfrac{z}{n}\left(\dfrac{1-z^n}{1-z}\right)$

Exercice 23 :

On lance une fois un dé non pipé.

1. *X est la variable aléatoire égale au nombre de points du dé amené par le seul lancer.*

   (a) *Quelle est la loi de X ?*

   C'est très simple :
   — $X(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
   — $\mathbf{P}(\{X = k\}) = \dfrac{1}{6}$
   X suit une loi uniforme sur l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

   (b) *Quelle est la valeur moyenne de X ?*

   — La valeur moyenne de X est donnée par $\mathbb{E}(X)$ Comme X suit une loi uniforme sur $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, nous avons : $\mathbb{E}(X) = \dfrac{7}{2}$
   — Il est facile de retrouver ce résultat :

   $$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) = &\ 1 \times \mathbf{P}(\{X = 1\}) + 2 \times \mathbf{P}(\{X = 2\}) + 3 \times \mathbf{P}(\{X = 3\}) + 4 \times \mathbf{P}(\{X = 4\}) + 5 \times \mathbf{P}(\{X = 5\}) + \\ = &\ \frac{1}{6}(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) \\ = &\ \frac{21}{6} = \frac{7}{2}\end{aligned}$$

2. *On suppose qu'on reçoit 15 euros si on obtient 1, rien si on obient 2, 3 ou 4, et 6 euros si on obtient 5 ou 6. Soit G la variable aléatoire égale au gain de ce jeu.*

   (a) *Quelle est la loi de G ?*

   — Premièrement, nous avons $G(\Omega) = \{0, 6, 15\}$
   — Ensuite, nous avons $\{G = 0\} = \{2, 3, 4\}$, et donc $\mathbf{P}(\{G = 0\}) = \dfrac{1}{2}$, puis $\{G = 6\} = \{5, 6\}$ et donc $\mathbf{P}(\{G = 6\}) = \dfrac{1}{3}$; enfin, $\{G = 15\} = \{1\}$, et donc $\mathbf{P}(\{G = 15\}) = \dfrac{1}{6}$

   (b) *Que vaut le gain moyen ?*

   Le gain moyen est donné par l'espérance de G. Nous avons donc

   $$\mathbb{E}(G) = 0 \times \mathbf{P}(\{G = 0\}) + 6 \times \mathbf{P}(\{G = 6\}) + 15 \times \mathbf{P}(\{G = 15\}) = \frac{9}{2}$$

3. *On suppose maintenant qu'on reçoit 27 euros si on obtient un 1 et rien sinon. Préférez-vous jouer au jeu de la question 2 ou à celui-ci ? Pourquoi ?*

   Si nous appelons G' la variable aléatoire égale au gain dans le nouveau jeu, nous avons :
   — $G'(\Omega) = \{0, 27\}$
   — Et $\mathbf{P}(\{G' = 0\}) = \dfrac{5}{6}$, $\mathbf{P}(\{G' = 25\}) = \dfrac{1}{6}$
   — $\mathbb{E}(G) = \dfrac{25}{6}$
   Je préférerais jouer au jeu de la question 2, sans problème, parce que :
   — La probabilité de gagner quelque chose est plus grande : $\dfrac{1}{2}$ au lieu de $\dfrac{1}{6}$
   — Et l'espérance de gain est plus importante !

4. *On demande maintenant de miser 3 euros pour jouer au jeu de la question 2 dans lequel les gains ont été divisés par 2. Quel est l'espérance de votre gain net ?*

   On appelle G_1 la variable aléatoire correspondant au nouveau jeu. Alors, il faut tenir compte qu'on donne 3 Euros pour jouer, et que les gains ont été divisés par 2. On peut alors écrire que : $G_1 = \dfrac{1}{2}G - 3$. L'espérance du gain net est donc donnée par :

   $$\mathbb{E}(G_1) = \mathbb{E}\left(\frac{1}{2}G - 3\right)$$

La linéarité de l'espérance nous donne :

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{2}G-3\right)=\frac{1}{2}\mathbb{E}(G)-3=\frac{1}{2}\times\frac{9}{2}-3=-\frac{3}{4}$$

Donc,

$$\boxed{\mathbb{E}(G_1)=-\frac{3}{4}}$$

L'espérance de gain est donc plutôt une espérance de perte de 0,75 Euros!!

Exercice 24 :

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire, aléatoirement, k boules en une seule prise.

(a) *Quel est l'espace fondamental et en donner le cardinal.*

En appelant Ω l'espace fondamental, ici, clairement :

$$\Omega=\{\text{L'ensemble des sous-ensembles à } k \text{ éléments pris parmi } n\}$$

Et, clairement, $\boxed{\operatorname{card}(\Omega)=\mathrm{C}_n^k}$

(b) *On note X la variable aléatoire réelle donnant le numéro de la plus petite boule tirée.*

i. *Quelles sont les valeurs prises par X ?*

Si on prend k boules, le plus petit numéro tiré sera donc 1, et le plus grand sera celui donné par le tirage des k dernières boules juste avant n, c'est à dire $n-(k-1)$

Donc, $\boxed{X(\Omega)=\{1,\ldots,n-k+1\}}$

ii. *Pour $i\in X(\Omega)$, donner $\mathbf{P}(\{X=i\})$*

L'événement $\{X=i\}$ signifie que le plus petit numéro parmi les k boules tirées est i. Ce qui signifie que les autres $k-1$ boules sont tirées parmi les boules portant les numéros $i+1$ à n, c'est à dire parmi les $n-i$ boules portant des numéros plus grands que i. Il y a C_{n-i}^{k-1} façons de tirer $k-1$ boules parmi les $n-i$ boules.

Donc, $\boxed{\mathbf{P}(\{X=i\})=\dfrac{\mathrm{C}_{n-i}^{k-1}}{\mathrm{C}_n^k}}$

(c) *Donner $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-k+1}\mathrm{C}_{n-i}^{k-1}$.*

X étant une variable aléatoire, d'après le cours, nous avons : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-k+1}\mathbf{P}(\{X=i\})=1$, c'est à dire :

$$\sum_{i=1}^{n-k+1}\frac{\mathrm{C}_{n-i}^{k-1}}{\mathrm{C}_n^k}=1$$

Or,

$$\sum_{i=1}^{n-k+1}\frac{\mathrm{C}_{n-i}^{k-1}}{\mathrm{C}_n^k}=\frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n-k+1}\mathrm{C}_{n-i}^{k-1}}{\mathrm{C}_n^k}$$

Et donc,

$$\frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n-k+1}\mathrm{C}_{n-i}^{k-1}}{\mathrm{C}_n^k}=1\iff\sum_{i=1}^{n-k+1}\mathrm{C}_{n-i}^{k-1}=\mathrm{C}_n^k$$

Les 2 exercices suivants, s'ils sont simples, permettent de comprendre et détudier les variables aléatoires réelles du type $\varphi\circ X$ où X est une variable aléatoire réelle quelconque

Exercice 27 :

X est une variable aléatoire réelle discrète dont la loi est définie par le tableau suivant :

k	-1	0	1	2
$\mathbf{P}(\{X=k\})$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$

1. *Calculer $\mathbb{E}(X)$, la moyenne de X, ainsi que $\sigma^2(X)$, la variance de X*

   $\Rightarrow$ La moyenne de X est donc $\mathbb{E}(X) = -1 \times \dfrac{1}{4} + 0 \times \dfrac{1}{8} + 1 \times \dfrac{1}{8} + 2 \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{7}{8}$

   $\Rightarrow$ Nous utilisons la formule $\sigma^2(X) = \left(X^2\right) - ((X))^2$. Il reste donc à calculer $\left(X^2\right)$

   $$\mathbb{E}\left(X^2\right) = 1 \times \frac{1}{4} + 0 \times \frac{1}{8} + 1 \times \frac{1}{8} + 4 \times \frac{1}{2} = \frac{19}{8}$$

   D'où $\sigma^2(X) = \dfrac{19}{8} - \dfrac{49}{64} = \dfrac{103}{64}$

2. *Soit la variable aléatoire réelle $Y = X^2$ Quelle est la loi de probabilité de Y ?*

   Assez facile ; $Y(\Omega) = \{0, 1, 4\}$ et l'événement $\{Y = 1\} = \{X = 1\} \cup \{X = -1\}$. D'où :

   $$\begin{cases} \mathbf{P}(\{Y=0\}) = \mathbf{P}(\{X=0\}) = \dfrac{1}{8} \\ \mathbf{P}(\{Y=1\}) = \mathbf{P}(\{X=-1\}) + \mathbf{P}(\{X=1\}) = \dfrac{3}{8} \\ \mathbf{P}(\{Y=4\}) = \mathbf{P}(\{X=2\}) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

   Pour la petite histoire, $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}\left(X^2\right) = \dfrac{19}{8}$

Exercice 28 :

On considère un dé cubique truqué, de telle sorte que la probabilité d'obtenir la face numérotée k est proportionnelle à k (on suppose que les faces sont numérotées de 1 à 6).
Soit X la variable aléatoire associée au lancer de ce dé.

1. *Déterminer la loi de X et calculer son espérance.*

   $\Rightarrow$ La loi de X

   Nous devons avoir $\displaystyle\sum_{k=1}^{6} k\lambda = 1 \iff \lambda \sum_{k=1}^{6} k = 1 \iff \lambda = \frac{1}{21}$ Et donc :

   $$\begin{array}{lll} \mathbf{P}(\{X=1\}) = \dfrac{1}{21} & \mathbf{P}(\{X=2\}) = \dfrac{2}{21} & \mathbf{P}(\{X=3\}) = \dfrac{1}{7} \\ \mathbf{P}(\{X=4\}) = \dfrac{4}{21} & \mathbf{P}(\{X=5\}) = \dfrac{5}{21} & \mathbf{P}(\{X=6\}) = \dfrac{2}{7} \end{array}$$

   $\Rightarrow$ D'où le calcul de $\mathbb{E}(X)$

   $$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{21} + \frac{4}{21} + \frac{3}{7} + \frac{16}{21} + \frac{20}{21} + \frac{12}{7} = \frac{86}{21}$$

2. *On pose $Y = \dfrac{1}{X}$. Déterminer la loi de Y et son espérance.*

   $\Rightarrow$ La loi de Y

   - Tout d'abord $Y(\Omega) = \left\{1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{5}, \dfrac{1}{6}\right\}$
   -

$$\begin{array}{ll}
\mathbf{P}(\{Y=1\})=\mathbf{P}(\{X=1\})=\dfrac{1}{21} & \mathbf{P}\left(\left\{Y=\dfrac{1}{2}\right\}\right)=\mathbf{P}(\{X=2\})=\dfrac{2}{21}\\
\mathbf{P}\left(\left\{Y=\dfrac{1}{3}\right\}\right)=\mathbf{P}(\{X=3\})=\dfrac{1}{7} & \mathbf{P}\left(\left\{Y=\dfrac{1}{4}\right\}\right)=\mathbf{P}(\{X=4\})=\dfrac{4}{21}\\
\mathbf{P}\left(\left\{Y=\dfrac{1}{5}\right\}\right)=\mathbf{P}(\{X=5\})=\dfrac{5}{21} & \mathbf{P}\left(\left\{Y=\dfrac{1}{6}\right\}\right)=\mathbf{P}(\{X=6\})=\dfrac{2}{7}
\end{array}$$

⇒ D'où le calcul de $\mathbb{E}(Y)$

$$\mathbb{E}(Y)=\frac{1}{21}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{21}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{7}+\frac{1}{4}\times\frac{4}{21}+\frac{1}{5}\times\frac{5}{21}+\frac{1}{6}\times\frac{2}{7}=\frac{6}{21}=\frac{2}{7}$$

Ainsi, $\mathbb{E}(Y)=\mathbb{E}\left(\dfrac{1}{X}\right)=\dfrac{2}{7}$.

On remarquera que $\mathbb{E}(X)\neq\mathbb{E}\left(\dfrac{1}{X}\right)$

Exercice 29 :

On lance trois fois de suite un dé cubique à 6 faces.

1. *Quel est l'espace de probabilité $\{\Omega;\mathcal{F};\mathbf{P}\}$ lié à cette expérience ?*

   Pas de difficultés, ici :

   $$\Omega=\{(i,j,k)\ \text{ où } 1\leqslant i\leqslant 6;1\leqslant j\leqslant 6;1\leqslant k\leqslant 6\}=\{1,2,3,4,5,6\}^3$$

   Et donc Card $\Omega=6^3$

2. *Soit X le nombre de valeurs distinctes obtenues pour un lancer : par exemple $X(2;6;1)=3$ et $X(4;4;2)=2$. Quelle est la loi de X ?*

   ⇒ Ici, l'exercice est un peu plus difficile. Il tient plus du dénombrement que des probabilités.
   Il est clair que $X(\Omega)=\{1,2,3\}$

   ⇒ Etudions l'événement $\{X=1\}$.
   Les éléments de l'événement $\{X=1\}$ sont les tirages qui ne comportent qu'un seul numéro ; ils sont donc du type

   $$\{X=1\}=\{(a,a,a)\ \text{ avec } 1\leqslant a\leqslant 6\}$$

   Et donc Card $(\{X=1\})=6$ et nous avons $\mathbf{P}(\{X=1\})=\dfrac{6}{216}=\dfrac{1}{36}$

   ⇒ Etudions l'événement $\{X=2\}$.
   L'événement $\{X=2\}$ correspond aux tirages qui comportent 2 numéros ; ils sont donc du type

   $$\{X=2\}=\{(a,b,b)\ \text{ avec } 1\leqslant a\leqslant 6;1\leqslant b\leqslant 6\}$$

   Nous extrayons donc 2 numéros parmi les 6, et il y a $\binom{6}{2}=15$ façons de le faire ; une fois ces 2 numéros choisis, ils permutent comme ils le souhaitent dans le triplet. Il y a $3!=6$ permutations possibles.

   Et donc Card $(\{X=2\})=\binom{6}{2}\times 3!=15\times 6=90$ et nous avons $\mathbf{P}(\{X=2\})=\dfrac{90}{216}=\dfrac{5}{12}$

   ⇒ Etudions l'événement $\{X=3\}$.
   Le raisonnement est très semblable.
   L'événement $\{X=3\}$ rassemble les tirages qui comportent 3 numéros : ; ils sont donc du type

   $$\{X=2\}=\{(a,b,c)\ \text{ avec } 1\leqslant a\leqslant 6;1\leqslant b\leqslant 6;1\leqslant c\leqslant 6\}$$

   Nous extrayons donc 3 numéros parmi les 6, et il y a $\binom{6}{3}=20$ façons de le faire ; une fois ces 3 numéros choisis, ils permutent comme ils le souhaitent dans le triplet. Il y a $3!=6$ permutations possibles.

   Et donc Card $(\{X=3\})=\binom{6}{3}\times 3!=20\times 6=120$ et nous avons $\mathbf{P}(\{X=3\})=\dfrac{120}{216}=\dfrac{5}{9}$

Exercice 31 :

Soit U une urne contenant n boules numérotées de 1 à n . On en tire p successivement, avec remise à chaque tirage.
On appelle X la variable aléatoire réelle égale au plus grand des numéros des boules ainsi tirées.
Pour $k \in \{1, \dots, n\}$, donner $\mathbf{P}(\{X \leqslant k\})$, puis $\mathbf{P}(\{X = k\})$

⇒ Tout d'abord, il n'est pas totalement stupide de définir l'espace fondamental Ω
Revenons sur l'expérience :
- ⋆ On tire une première boule et on note son numéro; ce numéro est compris entre 1 et n; la boule est remise dans l'urne.
- ⋆ Lorsque nous tirons la seconde boule, le numéro est toujours compris entre 1 et n
- ⋆ Et ainsi de suite jusqu'au p-ième tirage

Chaque expérience représente donc une application de l'ensemble $\{1, 2, \cdots, p\}$ dans l'ensemble $\{1, 2, \cdots, n\}$. Et donc :

$$\Omega = \{\text{Application de l'ensemble } \{1, 2, \cdots, p\} \text{ dans l'ensemble } \{1, 2, \cdots, n\}\}$$

Et donc, Card $\Omega = n^p$

⇒ Maintenant, c'est quoi l'événement $\{X \leqslant k\}$; ce sont tous les tirages tels que le plusgrand numéro soit inférieur ou égal à k. C'est donc l'ensemble des applications de l'ensemble $\{1, 2, \cdots, p\}$ dans l'ensemble $\{1, 2, \cdots, k\}$ et donc Card $\{X \leqslant k\} = k^p$.
D'où, $\mathbf{P}(\{X \leqslant k\}) = \dfrac{k^p}{n^p} = \left(\dfrac{k}{n}\right)^p$

⇒ Ensuite $\{X \leqslant k\} = \{X \leqslant k-1\} \cup \{X = k\}$ et donc :

$$\mathbf{P}(\{X \leqslant k\}) = \mathbf{P}(\{X \leqslant k-1\}) + \mathbf{P}(\{X = k\}) \Longleftrightarrow \mathbf{P}(\{X = k\}) = \mathbf{P}(\{X \leqslant k\}) - \mathbf{P}(\{X \leqslant k-1\})$$

D'où, $\mathbf{P}(\{X = k\}) = \left(\dfrac{k}{n}\right)^p - \left(\dfrac{k-1}{n}\right)^p = \dfrac{k^p - (k-1)^p}{n^p}$

Exercice 32 :

Soit $\{\Omega, \mathbb{F}, \mathbf{P}\}$ un espace probabilisé. Soit $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle.
Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on considère la fonction numérique

$$\varphi(\lambda) = \mathbb{E}\left[(X-\lambda)^2\right]$$

Démontrer que le minimum de φ est atteint en $\lambda = \mathbb{E}(X)$ et en donner une interprétation.

⇒ Nous avons :

$$\mathbb{E}\left[(X-\lambda)^2\right] = \mathbb{E}\left[X^2 - 2\lambda X + \lambda^2\right]$$

Nous allons utiliser la linéarité de l'espérance vue en 17.6.17, nous avons :

$$\mathbb{E}\left[(X-\lambda)^2\right] = \mathbb{E}\left(X^2\right) - 2\lambda\mathbb{E}(X) + \lambda^2$$

⇒ Ainsi, $\varphi(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}\left(X^2\right)$ est un polynôme du second degré en λ. φ admet un minimum en $\lambda_0 = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-2\mathbb{E}(X)}{2} = \mathbb{E}(X)$

⇒ Le minimum est donc $\varphi(\lambda_0) = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}(X))^2\right] = \sigma^2(X)$

Interprétation : L'expression $\mathbb{E}\left[(X-\lambda)^2\right]$ représente la distance « *au sens des moindres carrés* » entre la variable aléatoire réelle X et une constante λ et la distance la plus petite est obtenue lorsque $\lambda = \mathbb{E}(X)$ et cette distance est $\sigma^2(X)$.
La variance $\sigma^2(X)$ représente donc la dispersion de X autour de $\mathbb{E}(X)$

Exercice 33 :

On place un hamster dans une cage. Il se trouve face à 5 portillons dont un seul lui permet de sortir de la cage. A chaque essai infructueux, il reçoit une décharge électrique et on le replace à l'endroit initial.

1. *On suppose que le hamster ne soit pas doué d'apprentissage et qu'il choisisse donc de façon équiprobable entre les 5 solutions à chaque nouvel essai, déterminer la probabilité des événements :*

   En fait, il a donc, à chaque essai, une probabilité de $\frac{1}{5}$ de réussir et de $\frac{4}{5}$ d'échouer.
   - *Le hamster sort au premier essai.*

     C'est simple, cette probabilité est de $\frac{1}{5}$
   - *Le hamster sort au troisième essai.*

     Ceci veut dire qu'il il y a eu un échec au premier essai, au second essai, et une réussite au troisième. Donc, cette probabilité est donnée par $\frac{1}{5} \times \left(\frac{4}{5}\right)^2$

   Très généralement, si X est la variable aléatoire réelle telle que $X = k$ si le hamster sort au k-ième essai. Nous avons donc $\mathbf{P}(\{X = k\}) = \frac{1}{5} \times \left(\frac{4}{5}\right)^{k-1}$.

   X suit donc une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{5}$ et donc d'espérance $\mathbb{E}(X) = 5$.

   S'il n'a pas de mémoire, le hamster sort *en moyenne* au 5° essai.

2. *Le hamster mémorise maintenant les essais infructueux et choisit de façon équiprobable entre les portillons qu'il n'a pas encore essayés. On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre d'essais effectués.*

   - *Quelles valeurs peut prendre X ?*

     Assez clairement $X(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
   - *Déterminer sa loi de probabilité, et tracer sa fonction de répartition.*

     ⇒ La loi de X
     - ⋆ Si $X = 1$, ceci veut dire qu'il a réussi dès le premier essai, et donc $\mathbf{P}(\{X = 1\}) = \frac{1}{5}$
     - ⋆ Pour $X = 2$, ceci signifie qu'il a raté son premier essai (il avait 4 chances sur 5 de le rater), qu'il n'avait plus qu'à choisire ntre 4 portes, et qu'il avait 1 chance sur 4 de trouver la bonne sortie.
       Donc, $\mathbf{P}(\{X = 2\}) = \frac{4}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{5}$
     - ⋆ Pour $X = 3$, nous avons $\mathbf{P}(\{X = 3\}) = \frac{4}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{5}$
     - ⋆ Et donc, nous retrouverons aussi $\mathbf{P}(\{X = 3\}) = \mathbf{P}(\{X = 3\}) = \frac{1}{5}$

     X suit donc une loi uniforme sur $X(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

     ⇒ La fonction de répartition de X
     - Si$x < 1$, alors $\mathbf{P}(\{X \leqslant x\}) = F_X(x) = 0$
     - Si $1 \leqslant x < 2$, alors $\mathbf{P}(\{X \leqslant x\}) = F_X(x) = \mathbf{P}(\{X = 1\}) = \frac{1}{5}$
     - Si $2 \leqslant x < 3$, alors $\mathbf{P}(\{X \leqslant x\}) = F_X(x) = \mathbf{P}(\{X = 1\}) + \mathbf{P}(\{X = 2\}) = \frac{2}{5}$
     - Si $3 \leqslant x < 4$, alors $\mathbf{P}(\{X \leqslant x\}) = F_X(x) = \mathbf{P}(\{X = 1\}) + \mathbf{P}(\{X = 2\}) + \mathbf{P}(\{X = 3\}) = \frac{3}{5}$
     - Si $4 \leqslant x < 5$, alors

       $$\mathbf{P}(\{X \leqslant x\}) = F_X(x) = \mathbf{P}(\{X = 1\}) + \mathbf{P}(\{X = 2\}) + \mathbf{P}(\{X = 3\}) + \mathbf{P}(\{X = 4\}) = \frac{4}{5}$$
     - Si $x \geqslant 5$, alors

       $$\mathbf{P}(\{X \leqslant x\}) = F_X(x) = \mathbf{P}(\{X = 1\}) + \mathbf{P}(\{X = 2\}) + \mathbf{P}(\{X = 3\}) + \mathbf{P}(\{X = 4\}) + \mathbf{P}(\{X = 5\}) = 1$$

     D'où le graphe :

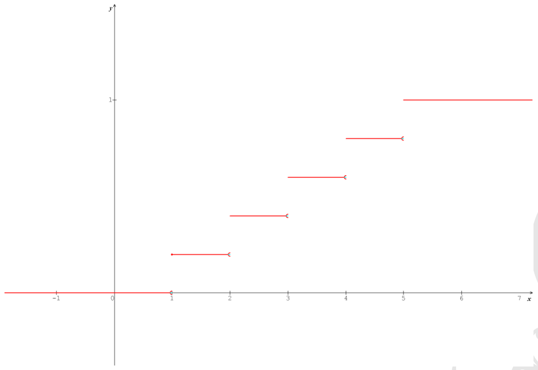

Figure 17.5 – Le graphe de la fonction de répartition

▷ *Déterminer $\mathbb{E}(X)$ et l'interpréter.*

Et de manière évidente $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{5} \times (1+2+3+4+5) = 3$
Ainsi, si le hamster sort « *en moyenne* » au bout de 3 essai, nous pourrons déclarer que notre hamster est doué de mémoire.

Exercice 34 :

Voilà un exercice qui n'a rien de difficile
Une roulette contient 36 cases numérotées de 1 à 36, dont 18 sont rouges, et 18 sont noires, plus une case numérotée 0 de couleur verte.
Un joueur qui mise sur la couleur rouge ou noire gagne 2 fois sa mise si la couleur sort.
Si ce joueur mise sur un numéro de 1 à 36 qui sort, il gagne 36 fois sa mise.
Toute mise sur le 0 est interdite.

1. *Le joueur mise au hasard a Euros sur une couleur ; soit X_1 son gain. Trouver la loi de X_1, puis calculer l'espérance et la variance de X_1*

   ⇒ La loi de X_1
   Si nous donnons a€ et que nous récupérons $2a$€, nous n'aurons gagné que a€. Et si nous donnons a€ nous aurons perdu a€. D'où : $X_1(\Omega) = \{-a; +a\}$
   Et nous avons $\mathbf{P}(\{X_1 = -a\}) = \frac{19}{37}$ et $\mathbf{P}(\{X_1 = a\}) = \frac{18}{37}$

   ⇒ Espérance et variance de X_1

   ⋆ D'où $\mathbb{E}(X_1) = -a \times \frac{19}{37} + a \times \frac{18}{37} = \frac{-a}{37}$
   Ainsi, nous perdons, « *en moyenne* », $\frac{a}{37}$€

   ⋆ Pour établir la variance, nous calculons $\mathbb{E}\left(X_1^2\right) = a^2 \times \frac{19}{37} + a^2 \times \frac{18}{37} = a^2$
   D'où $\sigma^2(X_1) = a^2 - \left(\frac{a}{37}\right)^2 = \frac{1369a^2 - a^2}{1369} = \frac{1368a^2}{1369}$

2. *Le joueur mise au hasard a Euros sur l'un des numéros de 1 à 36 ; soit X_2 son gain. Trouver la loi de X_2, puis calculer l'espérance et la variance de X_2*

   ⇒ La loi de X_2
   Si nous donnons a€ et que nous récupérons $36a$€, nous n'aurons gagné que $35a$€. Et si nous donnons a€ nous aurons perdu a€. D'où :

   $$X_2(\Omega) = \{-a; +35a\}$$

   Et nous avons $\mathbf{P}(\{X_21 = -a\}) = \frac{36}{37}$ et $\mathbf{P}(\{X_2 = 35a\}) = \frac{1}{37}$

   ⇒ Espérance et variance de X_2

- $\star$ D'où $\mathbb{E}\left(X_2\right) = -a \times \dfrac{36}{37} + 35a \times \dfrac{1}{37} = \dfrac{-a}{37}$
  Ainsi, nous perdons, « *en moyenne* », $\dfrac{a}{37}$€
- $\star$ Pour établir la variance, nous calculons $\mathbb{E}\left(X_2^2\right) = a^2 \times \dfrac{35}{37} + 1225a^2 \times \dfrac{1}{37} = \dfrac{1260a^2}{37}$
  D'où $\sigma^2\left(X_1\right) = \dfrac{1260a^2}{37} - \left(\dfrac{a}{37}\right)^2 = \dfrac{1369a^2 - a^2}{1369} = \dfrac{1\ 724\ 939a^2}{1369}$

3. *Si vous aviez a Euros à miser, le feriez vous sur un numéro ou une couleur ?*

   L'espérance de perdre est la même, mais la variance, c'est à dire la dispersion est très différente, et plus importante pour X_2.
   Donc, pour ma part, je jouerais sur les couleurs.

Exercice 38 :

Le groupe AB est présent chez 0,6% des individus.
Lors d'une collecte de sang, combien faudrait-il faire de prélèvements pour que la probabilité de trouver au moins un flacon AB soit supérieure à 0.99 ?

Supposons que nous ayions besoin de n individus pour que la probabilité d'avoir un prélèvement du groupe AB supérieure à $0,99$.
Si X est la variable aléatoire réelle qui compte le nombre d'individus du groupe AB dans le groupe des n personnes, X suit une loi binômiale $\mathcal{B}\left(n, 6\times 10^{-3}\right)$.
Nous cherchons donc $\mathbf{P}\left(\{X \geqslant 1\}\right)$, et nous souhaitons que $\mathbf{P}\left(\{X \geqslant 1\}\right) \geqslant 0,99$.
Or, $\{X \geqslant 1\} = \overline{\{X < 1\}} = \{X = 0\}$ et donc $\mathbf{P}\left(\{X \geqslant 1\}\right) = 1 - \mathbf{P}\left(\{X = 0\}\right)$.
Comme $\mathbf{P}\left(\{X \geqslant 1\}\right) \geqslant 0,99 \iff 1 - \mathbf{P}\left(\{X = 0\}\right) \geqslant 0,99 \iff \mathbf{P}\left(\{X = 0\}\right) \leqslant 0,01 = 10^{-2}$
Or, $\mathbf{P}\left(\{X = 0\}\right) = \mathrm{C}_n^0\left(6\times 10^{-3}\right)^0\left(1 - 6\times 10^{-3}\right)^n = \left(1 - 6\times 10^{-3}\right)^n$.
Nous avons :

$$\left(1 - 6\times 10^{-3}\right)^n \leqslant 10^{-2} \iff n\log\left(1 - 6\times 10^{-3}\right) \leqslant -2\log 10 = -2 \iff n \geqslant \frac{-2}{\log 0,994} = 765,22$$

Il faut donc au moins 766 prélèvements pour que la probabilité de trouver au moins un flacon AB soit supérieure à 0,99

Exercice 39 :

La société « Le Hasard » met à la disposition de ses clients internautes un jeu en ligne dont la page d'écran affiche une grille à 4 lignes et 4 colonnes.
Après une mise initiale de 2 Euros du joueur, une fonction aléatoire place au hasard, et successivement, quatre jetons $\diamondsuit$ dans 4 cases différentes.
La partie est gagnée si les quatre jetons sont alignés et le gagnant remporte 10 fois sa mise. Dans le cas contraire, la mise initiale est perdue pour le joueur.

	A	B	C	D
1	$\diamondsuit$			
2	$\diamondsuit$	$\diamondsuit$		
3				$\diamondsuit$
4				

On définit les événements H, V, D et N suivants :
- $H = \{$*Les quatre jetons sont alignés horizontalement*$\}$
- $V = \{$*Les quatre jetons sont alignés verticalement*$\}$
- $D = \{$*Les quatre jetons sont alignés en diagonale*$\}$
- $N = \{$*Les quatre jetons ne sont pas alignés*$\}$

1. *Justifiez qu'il y a 1820 positionnements possibles des 4 jetons*

   Cette question ne pose aucune difficulté. Poser les 4 jetons $\diamondsuit$ dans 4 cases différentes, c'est faire un sous-ensemble de 4 éléments dans un ensemble de 16 éléments.
   Il y a donc $C_{16}^4 = \binom{16}{4} = 1820$ tels sous-ensembles. Il y a donc 1820 positionnements possibles des jetons.

2. *Déterminez $\mathbf{P}(H)$, $\mathbf{P}(V)$ et $\mathbf{P}(D)$*

   Cette question n'est pas bien plus difficile!!
   - $\star$ **Horizontalement,** il n'y a que 4 possibilités, et donc $\mathbf{P}(H) = \dfrac{4}{1820} = \dfrac{1}{455}$
   - $\star$ **Verticalement,** il n'y a aussi que 4 possibilités, et donc $\mathbf{P}(V) = \dfrac{4}{1820} = \dfrac{1}{455}$
   - $\star$ **En diagonale,** il n'y a plus que 2 possibilités, et donc $\mathbf{P}(D) = \dfrac{2}{1820} = \dfrac{1}{910}$

3. *En déduire $\mathbf{P}(N)$*

   Les seules possibilités d'alignement sont en diagonale, horizontalement ou verticalement. Et donc :
   $$\mathbf{P}(N) = 1 - \mathbf{P}(H) - \mathbf{P}(V) - \mathbf{P}(D) = 1 - \frac{1}{182} = \frac{181}{182}$$

4. *On appelle Z la variable aléatoire égale au* **gain de la société** *lorsqu'une grille est jouée.*

   (a) *Quelle est la loi de Z ?*

   Les valeurs prises par Z sont donc $Z(\Omega) = \{+2; -18\}$.
   Si le joueur perd, alors la société encaisse 2€ et donc $\mathbf{P}(\{Z = 2\}) = \dfrac{181}{182}$.
   Si le joueur gagne, alors la société donne au joueur 10 fois sa mise, c'est à dire 20 €; en fait, elle ne débourse que 18 € puisqu'elle a encaissé auparavant 2 €. et donc $\mathbf{P}(\{Z = -18\}) = \dfrac{1}{182}$

   (b) *Quelle est l'espérance de gain de la société à chaque grille jouée ?*

   L'espérance de gain de la société est donnée par :
   $$\mathbb{E}(Z) = 2 \times \frac{181}{182} - 18 \times \frac{1}{182} = \frac{172}{91} \approx 1,89$$

   Heureuse société

Exercice 40 :

Soit X une variable aléatoire réelle . On suppose que X admet une espérance $\mathbb{E}(X) = m$ et une variance $\sigma^2(X) = \sigma^2$. On fixe $\alpha > 0$.

1. *Soit $\lambda \geqslant 0$. Démontrer que $\mathbf{P}(\{X - m \geqslant \alpha\}) = \mathbf{P}(\{X - m + \lambda \geqslant \alpha + \lambda\})$.*

   Pour commencer, nous considérons l'ensemble $\{X - m \geqslant \alpha\}$.
   Soit $\lambda \geqslant 0$; nous avons :
   $$\omega \in \{X - m \geqslant \alpha\} \Longleftrightarrow X(\omega) - m \geqslant \alpha \Longleftrightarrow X(\omega) - m + \lambda \geqslant \alpha + \lambda \Longleftrightarrow \omega \in \{X - m + \lambda \geqslant \alpha + \lambda\}$$
   Et nous avons donc $\{X - m \geqslant \alpha\} = \{X - m + \lambda \geqslant \alpha + \lambda\}$, d'où $\mathbf{P}(\{X - m \geqslant \alpha\}) = \mathbf{P}(\{X - m + \lambda \geqslant \alpha + \lambda\})$.

2. *Vérifier que $\mathbb{E}\left((X - m + \lambda)^2\right) = \sigma^2 + \lambda^2$.*

   Il suffit de passer aux calculs :
   $$\begin{aligned}\mathbb{E}\left((X - m + \lambda)^2\right) &= \mathbb{E}\left[(X - m)^2 + \lambda^2 + 2\lambda(X - m)\right] \\ &= \mathbb{E}\left[(X - m)^2\right] + \lambda^2 + 2\lambda\mathbb{E}(X - m)\end{aligned}$$
   Or, $\mathbb{E}\left[(X - m)^2\right] = \sigma^2$ et $\mathbb{E}(X - m) = 0$
   Donc, $\mathbb{E}\left((X - m + \lambda)^2\right) = \sigma^2 + \lambda^2$

3. *Montrer que, pour tout $\lambda > 0$, $\mathbf{P}(\{X-m \geqslant \alpha\}) \leqslant \dfrac{\sigma^2+\lambda^2}{\alpha^2+\lambda^2+2\lambda\alpha}$.*

   Soit donc $\lambda > 0$.
   Comme nous l'avons vu ci-dessus, $X(\omega) - m \geqslant \alpha \Longleftrightarrow X(\omega) - m + \lambda \geqslant \alpha + \lambda$.
   Comme $\alpha > 0$ et $\lambda > 0$, alors $\alpha + \lambda > 0$, et donc :

$$\left\{(X-m+\lambda)^2 \geqslant (\alpha+\lambda)^2\right\} = \{X-m+\lambda \geqslant \alpha+\lambda\} = \{X-m \geqslant \alpha\}$$

   Et donc, $\mathbf{P}(\{X-m \geqslant \alpha\}) = \mathbf{P}\left(\left\{(X-m+\lambda)^2 \geqslant (\alpha+\lambda)^2\right\}\right)$
   En utilisant l'inégalité de Markov vue en 17.8.1, nous avons :

$$\mathbf{P}\left(\left\{(X-m+\lambda)^2 \geqslant (\alpha+\lambda)^2\right\}\right) \leqslant \frac{\mathbb{E}\left((X-m+\lambda)^2\right)}{(\alpha+\lambda)^2}$$

   Or, d'après la question précédente, $\mathbb{E}\left((X-m+\lambda)^2\right) = \sigma^2+\lambda^2$ et donc

$$\mathbf{P}\left(\left\{(X-m+\lambda)^2 \geqslant (\alpha+\lambda)^2\right\}\right) \leqslant \frac{\sigma^2+\lambda^2}{(\alpha+\lambda)^2}$$

   De là, nous tirons $\mathbf{P}(\{X-m \geqslant \alpha\}) \leqslant \dfrac{\sigma^2+\lambda^2}{(\alpha+\lambda)^2} = \dfrac{\sigma^2+\lambda^2}{\alpha^2+\lambda^2+2\lambda\alpha}$

   Ce que nous voulions

4. *En déduire que $\mathbf{P}(\{X-m \geqslant \alpha\}) \leqslant \dfrac{\sigma^2}{\alpha^2+\sigma^2}$.*

   On considère la fonction $\varphi : \mathbb{R}^{*+} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} \varphi : \mathbb{R}^{*+} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \lambda & \longmapsto & \varphi(\lambda) = \dfrac{\sigma^2+\lambda^2}{(\alpha+\lambda)^2} \end{cases}$$

   Nous avons donc $\mathbf{P}(\{X-m \geqslant \alpha\}) \leqslant \varphi(\lambda)$
   Nous allons étudier les variations de φ

$$\begin{aligned} \varphi'(\lambda) &= \frac{2\lambda(\alpha+\lambda)^2 - 2(\alpha+\lambda)\left(\sigma^2+\lambda^2\right)}{(\alpha+\lambda)^4} \\ &= \frac{(\alpha+\lambda)\left[2\lambda(\alpha+\lambda) - 2\left(\sigma^2+\lambda^2\right)\right]}{(\alpha+\lambda)^4} \\ &= \frac{2\lambda(\alpha+\lambda) - 2\left(\sigma^2+\lambda^2\right)}{(\alpha+\lambda)^3} \\ &= \frac{2\lambda\alpha + 2\lambda^2 - 2\sigma^2 - 2\lambda^2}{(\alpha+\lambda)^3} \\ &= \frac{2\lambda\alpha - 2\sigma^2}{(\alpha+\lambda)^3} \\ &= \frac{2\left(\lambda\alpha - \sigma^2\right)}{(\alpha+\lambda)^3} \end{aligned}$$

   Donc,

$$\varphi'(\lambda) = 0 \Longleftrightarrow \lambda\alpha - \sigma^2 = 0 \Longleftrightarrow \lambda = \frac{\sigma^2}{\alpha}$$

   Ainsi, si $0 \leqslant \lambda \leqslant \dfrac{\sigma^2}{\alpha}$, alors $\varphi'(\lambda) \leqslant 0$ et si $\lambda \geqslant \dfrac{\sigma^2}{\alpha}$, alors $\varphi'(\lambda) \geqslant 0$, et donc φ admet un maximum en $\lambda_0 = \dfrac{\sigma^2}{\alpha}$ et donc, pour tout $\lambda \geqslant 0$, $\varphi(\lambda) \leqslant \varphi\left(\dfrac{\sigma^2}{\alpha}\right)$.

Il faut donc, maintenant, calculer $\varphi\left(\dfrac{\sigma^2}{\alpha}\right)$.

$$\begin{aligned}\varphi\left(\frac{\sigma^2}{\alpha}\right) &= \frac{\sigma^2+\frac{\sigma^4}{\alpha^2}}{\left(\alpha+\frac{\sigma^2}{\alpha}\right)^2}\\ &= \frac{\alpha^2\sigma^2+\sigma^4}{\left(\alpha^2+\sigma^2\right)^2}\\ &= \frac{\sigma^2\left(\alpha^2+\sigma^2\right)}{\left(\alpha^2+\sigma^2\right)^2}\\ &= \frac{\sigma^2}{\alpha^2+\sigma^2}\end{aligned}$$

Ainsi, nous avons $\mathbf{P}\left(\{X-m\geqslant\alpha\}\right)\leqslant\varphi(\lambda)\leqslant\dfrac{\sigma^2}{\alpha^2+\sigma^2}$

Nous avons bien $\mathbf{P}\left(\{X-m\geqslant\alpha\}\right)\leqslant\dfrac{\sigma^2}{\alpha^2+\sigma^2}$.

5. *Démontrer que $\mathbf{P}\left(\{|X-m|\geqslant\alpha\}\right)\leqslant\dfrac{2\sigma^2}{\alpha^2+\sigma^2}$. Quand obtient-on une meilleure inégalité que l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev ?*

   Nous avons $\{|X-m|\geqslant\alpha\}=\{X-m\geqslant\alpha\}\cup\{m-X\geqslant\alpha\}$ et donc

   $$\mathbf{P}\left(\{|X-m|\geqslant\alpha\}\right)=\mathbf{P}\left(\{X-m\geqslant\alpha\}\right)+\mathbf{P}\left(\{m-X\geqslant\alpha\}\right)$$

   Nous avons $\mathbf{P}\left(\{X-m\geqslant\alpha\}\right)\leqslant\dfrac{\sigma^2}{\alpha^2+\sigma^2}$ et $\mathbf{P}\left(\{m-X\geqslant\alpha\}\right)\leqslant\dfrac{\sigma^2}{\alpha^2+\sigma^2}$ et donc

   $$\mathbf{P}\left(\{|X-m|\geqslant\alpha\}\right)\leqslant\frac{2\sigma^2}{\alpha^2+\sigma^2}$$

   Quand obtient-on une meilleure inégalité que l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev ?

   Cette inégalité est meilleure que l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev si $\dfrac{2\sigma^2}{\alpha^2+\sigma^2}\leqslant\dfrac{\sigma^2}{\alpha^2}$. Or :

   $$\begin{aligned}\frac{2\sigma^2}{\alpha^2+\sigma^2}\leqslant\frac{\sigma^2}{\alpha^2} &\iff 2\sigma^2\alpha^2\leqslant\sigma^2\left(\alpha^2+\sigma^2\right)\\ &\iff 2\sigma^2\alpha^2\leqslant\sigma^2\alpha^2+\sigma^4\\ &\iff \sigma^2\alpha^2\leqslant\sigma^4\\ &\iff \alpha^2\leqslant\sigma^2\\ &\iff \alpha\leqslant\sigma\end{aligned}$$

   Nous obtenons donc une meilleure inégalité lorsque $\alpha\leqslant\sigma$

Exercice 41 :

1. *On lance une piece jusqu'à ce que « pile »* **apparaisse une seconde fois**. *p est la probabilité d'apparition de « pile ». On suppose l'indépendance de tous les lancers. Soit X le nombre de lancers nécessaires.*
   Démontrez que, pour $n\in\mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}\left(\{X=n\}\right)=(n-1)\,p^2\,(1-p)^{n-2}$

   Pour commencer, nous avons $X(\Omega)=\mathbb{N}\setminus\{0;1\}$.
   L'événement $\{X=n\}$ veut dire que la seconde apparition de « *pile* » se trouve au n-ième lancer, et donc que le premier lancer se trouve dans les $(n-1)$ premiers lancers ; il y a donc $(n-1)$ façons de placer le premier « *pile* » avant le second. Nous avons donc :

   $$\mathbf{P}\left(\{X=n\}\right)=(n-1)\,p\times(1-p)^{n-1}\times p=(n-1)\,p^2\,(1-p)^{n-1}$$

2. *On lance une piece jusqu'à ce que « pile »* **apparaisse** k **fois**. *p est la probabilité d'apparition de « pile ». On suppose l'indépendance de tous les lancers. Soit X le nombre de lancers nécessaires pour que « pile » apparaisse k fois.*
Démontrez que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}(\{X = n\}) = \mathrm{C}_{n-1}^{k-1} p^k (1-p)^{n-k}$

   Soit X, la variable aléatoire réelle qui donne le nombre de lancers nécessaires pour obtenir k « *pile* ».
   Le raisonnement est semblable à celui que nous venons de tenir. Il faut donc placer $(k-1)$ « *pile* » dans $(n-1)$ premiers tirages. Il y a donc $\mathrm{C}_{n-1}^{k-1} = \binom{n-1}{k-1}$ façons de placer ces $(k-1)$ « *pile* », et donc :

$$\mathbf{P}(\{X = n\}) = \mathrm{C}_{n-1}^{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-1-(k-1)} \times p = \mathrm{C}_{n-1}^{k-1} p^k (1-p)^{n-k} = \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k}$$

Exercice 42 :

1. *Soit X, une variable aléatoire réelle à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que*

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \left(\mathbf{P}(\{X = n\}) = \frac{4}{n} \mathbf{P}(\{X = n-1\})\right)$$

   Quelle est la loi de X ? Donner alors son espérance et sa variance.

   Nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(\{X = 1\}) &= 4\mathbf{P}(\{X = 0\}) \\
\mathbf{P}(\{X = 2\}) &= \frac{4}{2}\mathbf{P}(\{X = 1\}) \\
\mathbf{P}(\{X = 3\}) &= \frac{4}{3}\mathbf{P}(\{X = 2\}) \\
\mathbf{P}(\{X = 4\}) &= \frac{4}{4}\mathbf{P}(\{X = 3\}) \\
&\vdots \\
\mathbf{P}(\{X = n-1\}) &= \frac{4}{n-1}\mathbf{P}(\{X = n-2\}) \\
\mathbf{P}(\{X = n\}) &= \frac{4}{n}\mathbf{P}(\{X = n-1\})
\end{aligned}$$

   En multipliant termes à termes, et en simplifiant, nous obtenons :

$$\mathbf{P}(\{X = n\}) = \frac{4^n}{n!}\mathbf{P}(\{X = 0\})$$

   Maintenant, il faut que $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \mathbf{P}(\{X = n\}) = 1$. Or :

$$\sum_{n \geqslant 0} \mathbf{P}(\{X = n\}) = \sum_{n \geqslant 0} \frac{4^n}{n!}\mathbf{P}(\{X = 0\}) = \mathbf{P}(\{X = 0\}) \sum_{n \geqslant 0} \frac{4^n}{n!} = \mathbf{P}(\{X = 0\}) e^4$$

   Ainsi, $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \mathbf{P}(\{X = n\}) = 1 \Longleftrightarrow \mathbf{P}(\{X = 0\}) e^4 = 1 \Longleftrightarrow \mathbf{P}(\{X = 0\}) = e^{-4}$

   D'où $\mathbf{P}(\{X = n\}) = \dfrac{4^n e^{-4}}{n!}$.
   X suit donc une loi de Poisson de paramètre 4. Nous avons donc $\mathbb{E}(X) = \sigma^2(X) = 4$

2. *Soit X, une variable aléatoire réelle à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. Déterminer la loi de X sachant que*

$$(\exists p \in]0;+1[) (\forall n \in \mathbb{N}^*) (\mathbf{P}(\{X = n\}) = p\mathbf{P}(\{X \geqslant n\}))$$

   Nous allons résoudre cette question en tatonnant, pour terminer par un raisonnement par récurrence

⇒ Bien entendu que nous avons $\mathbf{P}(\{X \geqslant 0\}) = 1$ et que, comme $\mathbf{P}(\{X = 0\}) = p\mathbf{P}(\{X \geqslant 0\})$, nous avons $\mathbf{P}(\{X = 0\}) = p$

⇒ Regardons, maintenant $\mathbf{P}(\{X = 1\})$.
Nous avons $\mathbf{P}(\{X = 1\}) = p\mathbf{P}(\{X \geqslant 1\})$. Bon, une fois ceci posé, cela ne nous avance pas ! !...Cependant :

$$\{X \geqslant 0\} = \{X = 0\} \cup \{X \geqslant 1\}$$

Et donc $1 = \mathbf{P}(\{X = 0\}) + \mathbf{P}(\{X \geqslant 1\}) \Longleftrightarrow \mathbf{P}(\{X \geqslant 1\}) = 1 - p$, et donc

$$\mathbf{P}(\{X = 1\}) = p(1-p)$$

⇒ Allons plus loin, maintenant en nous intéressant à $\mathbf{P}(\{X = 2\})$
Nous avons $\{X \geqslant 0\} = \{X = 0\} \cup \{X = 1\} \cup \{X \geqslant 2\}$ et donc

$$\mathbf{P}(\{X \geqslant 0\}) = \mathbf{P}(\{X = 0\}) + \mathbf{P}(\{X = 1\}) + \mathbf{P}(\{X \geqslant 2\}) \Longleftrightarrow \mathbf{P}(\{X \geqslant 2\}) = 1 - p - p(1-p) = (1-p)^2$$

Et donc $\mathbf{P}(\{X = 2\}) = p(1-p)^2$

Nous allons donc démontrer, par récurrence, que $\mathbf{P}(\{X \geqslant n\}) = (1-p)^n$ et donc que $\mathbf{P}(\{X = n\}) = p(1-p)^n$

- ⋆ <u>C'est vrai pour $n = 0$</u>, puisque $\mathbf{P}(\{X \geqslant 0\}) = 1 = (1-p)^0$
- ⋆ <u>Supposons que $\mathbf{P}(\{X \geqslant n\}) = (1-p)^n$</u>
- ⋆ <u>Démontrons, à l'ordre $n+1$</u> que $\mathbf{P}(\{X \geqslant n+1\}) = (1-p)^{n+1}$
Nous avons $\{X \geqslant n\} = \{X = n\} \cup \{X \geqslant n+1\}$, et donc

$$\begin{gathered}\mathbf{P}(\{X \geqslant n\}) = \mathbf{P}(\{X = n\}) + \mathbf{P}(\{X \geqslant n+1\}) \\ \Longleftrightarrow \\ \mathbf{P}(\{X \geqslant n+1\}) = \mathbf{P}(\{X \geqslant n\}) - \mathbf{P}(\{X = n\}) \\ \Longleftrightarrow \\ \mathbf{P}(\{X \geqslant n+1\}) = (1-p)^n - p(1-p)^n \\ \Longleftrightarrow \\ \mathbf{P}(\{X \geqslant n+1\}) = (1-p)^{n+1}\end{gathered}$$

Nous avons donc $\mathbf{P}(\{X \geqslant n+1\}) = (1-p)^{n+1}$ et donc $\mathbf{P}(\{X = n+1\}) = p(1-p)^{n+1}$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons $\mathbf{P}(\{X = n\}) = p(1-p)^n$. X est donc une variable aléatoire réelle qui suit une loi géométrique de paramètre p

Exercice 43 :

Soit X, une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ.
Utiliser l'inégalité de Bienaymé Tchebichev pour montrer que

$$\mathbf{P}\left(\left\{X \leqslant \frac{\lambda}{2}\right\}\right) \leqslant \frac{4}{\lambda} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{P}(\{X \geqslant 2\lambda\}) \leqslant \frac{1}{\lambda}$$

Si nous y réfléchissons bien, ce n'est pas un exercice qui pose tant de difficultés.

⇒ **Faisons des considérations générales**
Retour à 17.8.3 ; l'inégalité de Bienaymé Tchebichev s'écrit :

$$\mathbf{P}(\{|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant \varepsilon\}) \leqslant \frac{\sigma^2(X)}{\varepsilon^2}$$

Regardons de plus près l'ensemble $\{|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant \varepsilon\}$. Nous avons :

$$\begin{aligned}\{|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant \varepsilon\} &= \{X - \mathbb{E}(X) \geqslant \varepsilon\} \cup \{X - \mathbb{E}(X) \leqslant -\varepsilon\} \\ &= \{X \geqslant \varepsilon + \mathbb{E}(X)\} \cup \{X \leqslant \mathbb{E}(X) - \varepsilon\}\end{aligned}$$

De là, nous tirons

$$\mathbf{P}(\{X \geqslant \varepsilon + \mathbb{E}(X)\}) \leqslant \mathbf{P}(\{|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant \varepsilon\}) \leqslant \frac{\sigma^2(X)}{\varepsilon^2}$$

et

$$\mathbf{P}\left(\{X \leqslant \mathbb{E}(X) - \varepsilon\}\right) \leqslant \mathbf{P}\left(\{|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant \varepsilon\}\right) \leqslant \frac{\sigma^2(X)}{\varepsilon^2}$$

$\Rightarrow$ **Revenons, maintenant, à l'énoncé initial**
X étant une variable aléatoire réelle de Poisson, nous avons $\mathbb{E}(X) = \sigma^2(X) = \lambda$ et l'inégalité de Bienaymé Tchebichev s'écrit alors :

$$\mathbf{P}\left(\{|X - \lambda| \geqslant \varepsilon\}\right) \leqslant \frac{\lambda^2}{\varepsilon^2}$$

Et en reprenant ce qui aété vu ci-dessus, nous avons

$$\mathbf{P}\left(\{|X - \lambda| \geqslant \lambda\}\right) \leqslant \frac{\lambda^2}{\varepsilon^2}$$

- $\star$ Pour $\varepsilon = \lambda$,

$$\mathbf{P}\left(\{X \geqslant \lambda + \lambda\}\right) \leqslant \frac{\lambda}{\lambda^2} \Longleftrightarrow \mathbf{P}\left(\{X \geqslant 2\lambda\}\right) \leqslant \frac{1}{\lambda}$$

Et une première inégalité de démontrée

- $\star$ Maintenant, pour $\varepsilon = \dfrac{\lambda}{2}$, nous avons :

$$\mathbf{P}\left(\left\{X \leqslant \lambda - \frac{\lambda}{2}\right\}\right) \leqslant \frac{4\lambda}{\lambda^2} \Longleftrightarrow \mathbf{P}\left(\left\{X \leqslant \frac{\lambda}{2}\right\}\right) \leqslant \frac{4}{\lambda}$$

Et la seconde inégalité est ainsi démontrée

Les 2 inégalités demandées sont donc démontrées.

Exercice 44 :

Soit N, une variable aléatoire réelle qui suit une loi de Poisson de paramètre λ avec $\lambda > 0$. Calculer $\mathbb{E}\left(\dfrac{1}{N+1}\right)$

Soit $\varphi : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ par $\varphi(x) = \dfrac{1}{x+1}$ et alors $\mathbb{E}\left(\dfrac{1}{N+1}\right) = \mathbb{E}(\varphi \circ N)$. Or :

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{N+1}\right) = \mathbb{E}(\varphi \circ N) = \sum_{n \geqslant 0} \varphi(n)\, \mathbf{P}\left(\{X = n\}\right)$$

Et maintenant, mettons nous aux calculs !!

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\varphi \circ N) = \sum_{n \geqslant 0} \varphi(n)\, \mathbf{P}\left(\{X = n\}\right) = & \sum_{n \geqslant 0} \frac{1}{n+1} \times \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} \\
= & \; e^{-\lambda} \sum_{n \geqslant 0} \frac{\lambda^n}{(n+1)!} \\
= & \; e^{-\lambda} \times \frac{1}{\lambda} \sum_{n \geqslant 0} \frac{\lambda^{n+1}}{(n+1)!} \\
= & \; \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} \sum_{n \geqslant 1} \frac{\lambda^n}{n!} \\
= & \; \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} \left(\sum_{n \geqslant 0} \frac{\lambda^n}{n!} - 1 \right) \\
= & \; \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} \left(e^{\lambda} - 1\right) \\
= & \; \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda}
\end{aligned}$$

D'où $\mathbb{E}\left(\dfrac{1}{N+1}\right) = \dfrac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda}$

Exercice 45 :

Soit X une variable aléatoire réelle discrète définie sur un espace probabilisé $\{\Omega; \mathcal{F}; \mathbf{P}\}$. On suppose que pour tout réel $t \geqslant 0$, la variable aléatoire réelle e^{-tX} possède une espérance. Démontrer que :

$$(\forall t \geqslant 0)\ \left(\mathbf{P}\left(\{X \leqslant 0\}\right) \leqslant \mathbb{E}\left(e^{-tX}\right)\right)$$

Exercice, certes un peu subtil, qui nécessite une certaine attention, mais, finalement, pas très difficile.
Si nous appelons $\varphi(x) = e^{-tx}$, où t est un paramètre positif ($t \geqslant 0$), nous avons $\mathbb{E}\left(e^{-tX}\right) = \mathbb{E}\left(\varphi \circ X\right)$.
Nous avons donc :

$$\mathbb{E}\left(e^{-tX}\right) = \sum_{x_n \in X(\Omega)} e^{-tx_n} \mathbf{P}\left(\{X = x_n\}\right)$$

Or :

$$\sum_{x_n \in X(\Omega)} e^{-tx_n} \mathbf{P}\left(\{X = x_n\}\right) = \sum_{\substack{x_n \in X(\Omega) \\ x_n \leqslant 0}} e^{-tx_n} \mathbf{P}\left(\{X = x_n\}\right) + \sum_{\substack{x_n \in X(\Omega) \\ x_n > 0}} e^{-tx_n} \mathbf{P}\left(\{X = x_n\}\right)$$

De là, nous tirons $\mathbb{E}\left(e^{-tX}\right) \geqslant \displaystyle\sum_{\substack{x_n \in X(\Omega) \\ x_n \leqslant 0}} e^{-tx_n} \mathbf{P}\left(\{X = x_n\}\right)$

Si $t \geqslant 0$ et $x_n \leqslant 0$, alors $-tx_n \geqslant 0$ et $e^{-tx_n} \geqslant 1$. D'où $e^{-tx_n} \mathbf{P}\left(\{X = x_n\}\right) \geqslant \mathbf{P}\left(\{X = x_n\}\right)$ et, donc

$$\mathbb{E}\left(e^{-tX}\right) \geqslant \sum_{\substack{x_n \in X(\Omega) \\ x_n \leqslant 0}} \mathbf{P}\left(\{X = x_n\}\right)$$

Pour terminer, $\displaystyle\sum_{\substack{x_n \in X(\Omega) \\ x_n \leqslant 0}} \mathbf{P}\left(\{X = x_n\}\right) = \mathbf{P}\left(\{X \leqslant 0\}\right)$

D'où nous obtenons l'inégalité $\mathbf{P}\left(\{X \leqslant 0\}\right) \leqslant \mathbb{E}\left(e^{-tX}\right)$.
Ce que nous voulions

Exercice 46 :

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $\{\Omega; \mathcal{F}; \mathbf{P}\}$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$

1. *Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}\left(\{X > k\}\right) = \sum_{k=1}^{n} k\mathbf{P}\left(\{X = k\}\right) + (n+1)\,\mathbf{P}\left(\{X > n\}\right)$*

   Alors, que dire ? ? De manière générale, pour $k \in \mathbb{N}$ avec $0 \leqslant k \leqslant n$, nous avons $\{X > k\} = \{X = k+1\} \cup \{X = k+2\} \cup \cdots \cup \{X = n\} \cup \{X \geqslant n+1\}$. De là, nous écrivons :

$$\left\{\begin{array}{rcccccc}
\mathbf{P}\left(\{X > 0\}\right) = & \mathbf{P}\left(\{X = 1\}\right) + & \mathbf{P}\left(\{X = 2\}\right) + & \cdots + & \mathbf{P}\left(\{X = n\}\right) + & \mathbf{P}\left(\{X \geqslant n+1\}\right) \\
\mathbf{P}\left(\{X > 1\}\right) = & & \mathbf{P}\left(\{X = 2\}\right) + & \cdots + & \mathbf{P}\left(\{X = n\}\right) + & \mathbf{P}\left(\{X \geqslant n+1\}\right) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\mathbf{P}\left(\{X > n-1\}\right) = & & & & \mathbf{P}\left(\{X = n\}\right) + & \mathbf{P}\left(\{X \geqslant n+1\}\right) \\
\mathbf{P}\left(\{X > n\}\right) = & & & & & \mathbf{P}\left(\{X \geqslant n+1\}\right)
\end{array}\right.$$

   Et donc, en additionnant, nous obtenons :

$$\sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}\left(\{X > k\}\right) = \mathbf{P}\left(\{X = 1\}\right) + 2\mathbf{P}\left(\{X = 2\}\right) + 3\mathbf{P}\left(\{X = 3\}\right) + \cdots + n\mathbf{P}\left(\{X = n\}\right) + (n+1)\,\mathbf{P}\left(\{X \geqslant n+1\}\right)$$

   C'est à dire $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}\left(\{X > k\}\right) = \sum_{k=1}^{n} k\mathbf{P}\left(\{X = k\}\right) + (n+1)\,\mathbf{P}\left(\{X > n\}\right)$

2. *On suppose que la série* $\sum_{k\geqslant 0} \mathbf{P}(\{X>k\})$ *converge.*

   (a) *Démontrer que, pour tout* $n\in\mathbb{N}$, $\sum_{k=1}^{n} k\mathbf{P}(\{X=k\}) \leqslant \sum_{k\geqslant 0} \mathbf{P}(\{X>k\})$

   Dans la question précédente, nous avons montré que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, nous avions

$$\sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}(\{X>k\}) = \sum_{k=1}^{n} k\mathbf{P}(\{X=k\}) + (n+1)\mathbf{P}(\{X>n\})$$

   d'où nous pouvons déduire que, pour tout $n\in\mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{n} k\mathbf{P}(\{X=k\}) \leqslant \sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}(\{X>k\})$$

   La série $\sum_{k\geqslant 0} \mathbf{P}(\{X>k\})$ est une série à termes positifs et convergente. Donc, pour tout $n\in\mathbb{N}$, nous avons :

$$\sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}(\{X>k\}) \leqslant \sum_{k\geqslant 0} \mathbf{P}(\{X>k\})$$

   Ainsi, nous avons l'inégalité, vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\sum_{k=1}^{n} k\mathbf{P}(\{X=k\}) \leqslant \sum_{k\geqslant 0} \mathbf{P}(\{X>k\})$

   (b) *En déduire que la variable aléatoire réelle X admet une espérance.*

   La variable aléatoire réelle X admet une espérance, si et seulement si la série $\sum_{k\geqslant 1} k\mathbf{P}(\{X=k\})$ est convergente.

   Or la suite des sommes partielles $\sum_{k=1}^{n} k\mathbf{P}(\{X=k\})$ est une suite à termes positifs, croissante et majorée par $\sum_{k\geqslant 0} \mathbf{P}(\{X>k\})$ donc convergente.

   Donc $\mathbb{E}(X)$ existe

3. *On suppose, maintenant, que la variable aléatoire réelle X admet une espérance.*

   (a) *Montrer que pour tout $n\geqslant 1$ nous avons* $(n+1)\mathbf{P}(\{X>n\}) \leqslant \sum_{k\geqslant n+1} k\mathbf{P}(\{X=k\})$

   Nous avons $\{X>n\} = \{X\geqslant n+1\} = \bigcup_{k\geqslant n+1} \{X=k\}$ et donc $\mathbf{P}(\{X>n\}) = \sum_{k\geqslant n+1} \mathbf{P}(\{X=k\})$

   Et donc, puisque $n+1\leqslant k$:

$$\begin{aligned}(n+1)\mathbf{P}(\{X>n\}) = {}& (n+1)\left(\sum_{k\geqslant n+1} \mathbf{P}(\{X=k\})\right)\\ ={}& \sum_{k\geqslant n+1} (n+1)\mathbf{P}(\{X=k\}) \leqslant \sum_{k\geqslant n+1} k\mathbf{P}(\{X=k\})\end{aligned}$$

   (b) *En déduire que la série* $\sum_{k\geqslant 0} \mathbf{P}(\{X>k\})$ *est convergente et que* $\mathbb{E}(X) = \sum_{k\geqslant 0} \mathbf{P}(\{X>k\})$

   Comme $\mathbb{E}(X)$ existe, la série $\sum_{k\geqslant 1} k\mathbf{P}(\{X=k\})$ est convergente et $\mathbb{E}(X) = \sum_{k\geqslant 1} k\mathbf{P}(\{X=k\})$

L'expression $\sum_{k\geqslant n+1} k\mathbf{P}(\{X=k\})$ apparaît comme le reste de la série $\sum_{k\geqslant 1} k\mathbf{P}(\{X=k\})$ et donc $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k\geqslant n+1} k\mathbf{P}(\{X=k\}) = 0$

Comme nous venons de montrer que $(n+1)\mathbf{P}(\{X>n\}) \leqslant \sum_{k\geqslant n+1} k\mathbf{P}(\{X=k\})$, nous avons aussi $\lim_{n\to+\infty} (n+1)\mathbf{P}(\{X>n\}) = 0$

Dans la question 1, nous avions :

$$\sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}(\{X>k\}) = \sum_{k=1}^{n} k\mathbf{P}(\{X=k\}) + (n+1)\mathbf{P}(\{X>n\})$$

Et en passant aux limites

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\mathbf{P}(\{X>k\})\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} k\mathbf{P}(\{X=k\})\right) + \lim_{n\to+\infty}\left((n+1)\mathbf{P}(\{X>n\})\right)$$

C'est à dire $\sum_{k\geqslant 0}\mathbf{P}(\{X>k\}) = \mathbb{E}(X)$

Ce que nous voulions

Exercice 47 :

1. *Z est une variable aléatoire réelle qui suit une loi binômiale $\mathcal{B}(n,p)$. Rappeler la fonction génératrice G_Z de Z*

   On repart toujours de la définition de fonction génératrice : $G_Z(s) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{P}(\{Z=n\})\, s^n$, et dans notre cas, $G_Z(s) = \sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}(\{Z=k\})\, s^k$ Donc :

$$\begin{aligned} G_Z(s) = & \sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}(\{Z=k\})\, s^k \\ = & \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k p^k (1-p)^{n-k} s^k \\ = & \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k (1-p)^{n-k} (ps)^k \\ = & (1-p+ps)^n \end{aligned}$$

   Donc, pour une loi $\mathcal{B}(n,p)$, la fonction génératrice est donnée par $G_Z(s) = (1-p+ps)^n$
   - La dérivée première est donnée par $G'_Z(s) = np(1-p+ps)^{n-1}$, et donc, nous retrouvons $\mathbb{E}(X) = G'_Z(1) = np$
   - La dérivée seconde est donnée par $G''_Z(s) = n(n-1)p^2(1-p+ps)^{n-2}$, et donc, nous retrouvons $G''_Z(1) = n(n-1)p^2$. D'où la variance :

$$\sigma^2(Z) = G''_Z(1) + G'_Z(1) - (G'_Z(1))^2 = n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 = np - np^2 = np(1-p)$$

2. *Une variable aléatoire X à valeurs entières a pour fonction génératrice*

$$\forall s \in [0;1] \qquad G_X(s) = k(3+2s)^3$$

(a) *Déterminer la constante k.*

Nous avons donc $G_X(s)=\sum_{n\in\mathbb{N}}\mathbf{P}(\{X=n\})s^n$, en particulier pour $s=1$ où nous avons alors :

$$G_X(1)=\sum_{n\in\mathbb{N}}\mathbf{P}(\{X=n\})=\mathbf{P}(X(\Omega))=1$$

Donc, ici, nous avons $G_X(1)=k(3+2)^3=k\times 5^3=1$ d'où $k=\frac{1}{5^3}$

D'où $G_X(s)=\frac{1}{5^3}(3+2s)^3=\left(\frac{3}{5}+\frac{2}{5}s\right)^3$

(b) *Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.*

D'après la question 1, il apparaît que X suit une loi binômiale $\mathcal{B}\left(3,\frac{2}{5}\right)$

(c) *Calculer l'espérance mathématique et la variance de X*

Donc :

— L'espérance de X est donnée par : $\mathbb{E}(X)=\frac{6}{5}$

— Et la variance par $\sigma^2(X)=3\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{18}{25}$

3. *Reprendre les questions de 2, pour une variable aléatoire X_1 à valeurs entières dont la fonction génératrice est donnée par :*

$$\forall s\in[0;1]\qquad G_{X_1}(s)=k\left(3+2s^2\right)^3$$

— Tout d'abord, nous avons toujours $k=\frac{1}{5^3}$, ce qui fait que $G_{X_1}(s)=\left(\frac{3}{5}+\frac{2}{5}s^2\right)^3$

— Nous en déduisons que $G_{X_1}(s)=\sum_{k=0}^{3}C_3^k\left(\frac{3}{5}\right)^{3-k}\left(\frac{2}{5}\right)^k s^{2k}=\sum_{k=0}^{3}\mathbf{P}(\{X_1=2k\})s^{2k}$

Donc, $X_1(\Omega)=\{0,2,4,6\}$ et pour $k=0,2,4,6$, nous avons : $\mathbf{P}(\{X_1=k\})=C_3^{\frac{k}{2}}\left(\frac{3}{5}\right)^{3-\frac{k}{2}}\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{k}{2}}$

— Recherche de la moyenne et de la variance

⊕ La dérivée première de G_{X_1} est donnée par :

$$G'_{X_1}(s)=3\left(\frac{3}{5}+\frac{2}{5}s^2\right)^2\times\frac{4}{5}s=\frac{12s}{5}\left(\frac{3}{5}+\frac{2}{5}s^2\right)^2=\frac{12s}{5^3}\left(3+2s^2\right)^2$$

D'où $\mathbb{E}(X_1)=G'_{X_1}(1)=\frac{12}{5}$

⊕ La dérivée seconde de G_{X_1} est donnée par : $G''_{X_1}(s)=\left(\frac{12s}{5^3}\left(3+2s^2\right)^2\right)'$

Tous calculs faits, nous obtenons $G''_{X_1}(s)=\frac{12}{5^3}\left(3+2s^2\right)\left(3+10s^2\right)$, de telle sorte que $G''_{X_1}(1)=\frac{13\times 12}{25}$

Nous en déduisons $\sigma^2(X_1)=\frac{13\times 12}{25}+\frac{12}{5}-\frac{12^2}{25}=\frac{72}{25}$

4. *Questions de prolongement :*

(a) *Soit X une variable aléatoire réelle à valeurs dans $\mathbb{N}$ qui admet comme fonction génératrice G_X. Soit $p\in\mathbb{N}$ et nous considérons $X_p=p\times X$. Démontrer que $G_{X_p}(z)=G_X(z^p)$* Cette question a été suggérée par la précédente où nous avons, en fait, $X_1=2X$. Nous allons présenter 2 méthodes de résolutions

i. Première méthode, proche de la définition

Classiquement, nous avons $G_{X_p}(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{P}(\{X_p = n\}) z^n$

Or, si n n'est pas un multiple de p, $\mathbf{P}(\{X_p = n\}) = 0$, et donc $G_{X_p}(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{P}(\{X_p = np\}) z^{np}$

Or, $\{X_p = np\} = \{pX = np\} = \{X = n\}$, et

$$G_{X_p}(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{P}(\{X = n\}) z^{np} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{P}(\{X = n\}) (z^p)^n = G_X(z^p)$$

Nous avons donc $\boxed{G_{X_p}(z) = G_X(z^p)}$

En utilisant les dérivées des fonctions composées, nous retrouverions les résultats : $\mathbb{E}(X_p) = p\mathbb{E}(X)$ et $\sigma^2(X_p) = p^2\sigma^2(X)$

ii. Seconde méthode

Nous avons $G_{X_p}(z) = \mathbb{E}\left(z^{X_p}\right) = \mathbb{E}\left(z^{pX}\right) = \mathbb{E}\left((z^p)^X\right) = G_X(z^p)$

(b) *Soit X une variable aléatoire réelle à valeurs dans $\mathbb{N}$ qui admet comme fonction génératrice G_X. Soit $p \in \mathbb{N}$ et nous considérons $X_p = p + X$. Démontrer que $G_{X_p}(z) = z^p G_X(z)$*

Nous élargissons cette fois-ci l'étude, comme ci-dessus nous allons présenter 2 méthodes de résolutions

i. Première méthode, proche de la définition

Classiquement, nous avons $G_{X_p}(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{P}(\{X_p = n\}) z^n = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{P}(\{X + p = n\}) z^n = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{P}(\{X = n - p\}) z^n$

Or, si $n < p$, alors $\mathbf{P}(\{X = n - p\}) = 0$, et donc

$$G_{X_p}(z) = \sum_{n\geqslant p} \mathbf{P}(\{X = n - p\}) z^n = \sum_{n\geqslant 0} \mathbf{P}(\{X = n\}) z^{n+p} = z^p \sum_{n\geqslant 0} \mathbf{P}(\{X = n\}) z^n$$

Nous avons donc $\boxed{G_{X_p}(z) = z^p G_X(z)}$

En utilisant les dérivées des fonctions composées, nous retrouverions les résultats : $\mathbb{E}(X_p) = \mathbb{E}(X) + p$ et $\sigma^2(X_p) = \sigma^2(X)$

ii. Seconde méthode

Nous avons $G_{X_p}(z) = \mathbb{E}\left(z^{X_p}\right) = \mathbb{E}\left(z^{p+X}\right) = \mathbb{E}\left(z^p \times z^X\right) = z^p\mathbb{E}\left(z^X\right) = z^p G_X(z)$

Exercice 48 :

1. *Calculer la fonction génératrice d'une loi géométrique de paramètre $p \in]0;+1[$*

Une variable aléatoire réelle suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0;+1[$ est telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et , pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}(\{X = n\}) = p(1-p)^{n-1}$

La fonction génératrice est donc donnée par : $G_X(z) = \sum_{n\geqslant 1} \mathbf{P}(\{X = n\}) z^n = \sum_{n\geqslant 1} p(1-p)^{n-1} z^n$

Or,

$$\sum_{n\geqslant 1} p(1-p)^{n-1} z^n = zp\sum_{n\geqslant 1} (1-p)^{n-1} z^{n-1} = zp\sum_{n\geqslant 1} ((1-p)z)^{n-1} = zp\sum_{n\geqslant 0} ((1-p)z)^n = \frac{zp}{1-(1-p)z}$$

Donc, $G_X(z) = \dfrac{zp}{1-(1-p)z}$, et en dérivant, nous avons $G'_X(z) = \dfrac{p}{(1-(1-p)z)^2}$, et on retrouve bien $\mathbb{E}(X) = G'_X(1) = \dfrac{1}{p}$

2. *Calculer la fonction génératrice d'une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$*

   Une variable aléatoire réelle suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ est telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et , pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(\{X = n\}) = \dfrac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}$

   La fonction génératrice est donc donnée par : $G_X(z) = \sum\limits_{n \geqslant 0} \mathbf{P}(\{X = n\}) z^n = \sum\limits_{n \geqslant 0} \dfrac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} z^n$

   Or, $\sum\limits_{n \geqslant 0} \dfrac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} z^n = e^{-\lambda} \sum\limits_{n \geqslant 0} \dfrac{\lambda^n}{n!} z^n = e^{-\lambda} \sum\limits_{n \geqslant 0} \dfrac{(\lambda z)^n}{n!} = e^{-\lambda} e^{\lambda z} = e^{\lambda(z-1)}$

   Donc, $G_X(z) = e^{\lambda(z-1)}$, et en dérivant, nous avons $G'_X(z) = \lambda e^{\lambda(z-1)}$, et on retrouve bien $\mathbb{E}(X) = G'_X(1) = \lambda$

Exercice 49 :

Une urne contient 4 boules indiscernables :

- *1 boule nouмérotée 0*
- *2 boules numérotées 1*
- *1 boule numérotée 2*

On tire une boule de l'urne, et une boule numérotée i rapporte i points à la personne qui a tiré. Chaque personne effectue n tirages successifs (les boules, après chaque tirage sont remises dans l'urne) *et l'on note S le score total obtenu. Déterminer la fonction génératrice de S et en déduire la loi de S.*

$\oplus$ Recherche de la fonction génératrice

Soit X la variable aléatoire réelle qui donne le nombre de point à un tirage particulier. La loi de X est donnée par :

- $X(\Omega) = \{0; 1; 2\}$
- $\mathbf{P}(\{X = 0\}) = \mathbf{P}(\{X = 2\}) = \dfrac{1}{4}$ et $\mathbf{P}(\{X = 2\}) = \dfrac{1}{2}$

A chaque tirage numéroté k, avec $k = 1, \cdots, n$, on associe une variable aléatoire réelle X_k, de même loi que X. On crée ainsi une suite finie $(X_k)_{k=1,\cdots,n}$ de variables aléatoires réelles indépendantes. Et nous avons ainsi $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, de telle sorte que :

$$G_S(z) = \prod_{k=1}^{n} G_{X_k}(z) = (G_X(z))^n$$

Il faut donc calculer $G_X(z)$.

Nous avons :

$$G_X(z) = \mathbf{P}(\{X = 0\}) z^0 + \mathbf{P}(\{X = 1\}) z + \mathbf{P}(\{X = 2\}) z^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} z + \frac{1}{4} z^2 = \left(\frac{z+1}{2}\right)^2$$

D'où $G_S(z) = \left(\dfrac{z+1}{2}\right)^{2n}$

$\oplus$ Recherche de la loi de S

Au vu de la fonction génératrice, S suit une loi binômiale $\mathcal{B}\left(2n, \dfrac{1}{2}\right)$, de paramètre $2n$ et $\dfrac{1}{2}$

Chapitre 18

Vecteurs aléatoires discrets

18.1 Définitions

18.1.1 Définition de vecteur aléatoire

1. **Notations**
   Soit $\mathbb{X} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une application quelconque ; alors, pour tout $\omega \in \Omega$, $\mathbb{X}(\omega) = (x_1, \ldots, x_n)$.
   On considère les applications composantes $X_i : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, telles que $\mathbb{X}(\omega) = (X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega))$.
   On notera souvent $\mathbb{X} = (X_1, \ldots, X_n)$
2. **Vecteur aléatoire**
   Soit $\{\Omega; \mathcal{F}; \mathbf{P}\}$ un espace probabilisé et $\mathbb{X} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$.
   On dit que $\mathbb{X}$ est un vecteur aléatoire si, pour tout $i = 1, \ldots, n$ $X_i = p_i \circ \mathbb{X}$ est une variable aléatoire réelle

Remarque 1 :

1. Qu'est donc p_i ? p_i est ce qu'on appelle la *i-ème* projection que l'on définit ainsi :
$$\left\{\begin{array}{rcl} p_i : \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) & \longmapsto & p_i(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) = x_i \end{array}\right.$$
2. Si $n = 2$, on parle alors de ***couple de variables aléatoires réelles*** qui est bien entendu noté : (X, Y)

18.1.2 Définition de couple de variables aléatoires réelles

Soit $\{\Omega; \mathcal{F}; \mathbf{P}\}$ un espace probabilisé, X et Y deux variables aléatoires réelles définies sur $\{\Omega; \mathcal{F}; \mathbf{P}\}$
On appelle couple de variables aléatoires une application :
$$\left\{\begin{array}{rcl} \mathbb{X} = (X, Y) : \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \omega & \longmapsto & \mathbb{X}(\omega) = (X(\omega), Y(\omega)) \end{array}\right.$$
telles que $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ et $Y : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ sont des variables aléatoires réelles sur Ω

Exemple 1 :

On reprend l'exemple classique du jet de deux dés, pour lequel l'espace fondamental est donné par $\Omega = \{(i, j) \text{ où } 1 \leqslant i \leqslant 6 \text{ et } 1 \leqslant j \leqslant 6\}$.
On considère le vecteur aléatoire $\mathbb{X} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tel que $\mathbb{X}((i, j)) = (i + j, i - j)$; on a $\mathbb{X} = (S, D)$ où S est la variable aléatoire réelle correspondant à la somme amenée et D est la variable aléatoire réelle correspondant à la différence amenée par le lancer.
On aurait pu construire d'autres vecteurs aléatoires : $\mathbb{Y}((i, j)) = (\max(i, j), \min(i, j))$

18.1.3 Notations des événements

1. Soit $\{\Omega;\mathcal{F};\mathbf{P}\}$ un espace probabilisé et $\mathbb{X}:\Omega\to\mathbb{R}^n$; soit $a\in\mathbb{R}^n$
Dans ce chapitre, **nous nous limiterons aux vecteurs aléatoires discrets,** c'est à dire que :
Si $\mathbb{X}=(X_1,\dots,X_n)$, chacune des variables aléatoires réelles $X_i:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$ est une variable aléatoire réelle discrète.
Pour $a=(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^n$, l'événement : $\{\mathbb{X}=a\}$ est déterminé par
$$\begin{aligned}\{\mathbb{X}=a\} &= \{(X_1,\dots,X_n)=(a_1,\dots a_n)\}\\ &= \{X_1=a_1\}\cap\{X_2=a_2\}\cap\cdots\cap\{X_n=a_n\}\\ &= \bigcap_{i=1}^{n}\{X_i=a_i\}\\ &= \{X_1=a_1;X_2=a_2;\cdots;X_n=a_n\}\end{aligned}$$
2. Soit $\{\Omega;\mathcal{F};\mathbf{P}\}$ un espace probabilisé et $X:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$ et $Y:\Omega\to\mathbb{R}$ 2 variables aléatoires réelles discrètes.
Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. L'événement : $\{(X,Y)=(a,b)\}$ est déterminé par
$$\{(X,Y)=(a,b)\}=\{X=a\}\cap\{Y=b\}=\{X=a;Y=b\}$$

18.1.4 Loi conjointe

1. Soit $\{\Omega;\mathcal{F};\mathbf{P}\}$ un espace probabilisé et $\mathbb{X}:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}^n$ un vecteur aléatoire discret
On appelle loi de probabilité de $\mathbb{X}$, ou loi conjointe des variables aléatoires réelles $(X_1,\dots,X_n)$, la probabilité image de $\mathbf{P}$ par l'application $\mathbb{X}:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}^n$
2. Soit $\{\Omega;\mathcal{F};\mathbf{P}\}$ un espace probabilisé et $(X,Y):\Omega\longrightarrow\mathbb{R}^2$ un couple de variables aléatoires discrètes
On appelle loi de probabilité de (X,Y), ou loi conjointe des variables aléatoires réelles (X,Y), la probabilité image de $\mathbf{P}$ par l'application $\mathbb{X}:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}^2$

Remarque 2 :

1. Pour définir la loi conjointe, il suffit de connaître, pour $a\in\mathbb{X}(\Omega)$, avec $a=(a_1,\dots a_n)\in\mathbb{R}^n$,
$$\mathbf{P}(\{\mathbb{X}=a\})=\mathbf{P}(\{X_1=a_1;X_2=a_2;\dots;X_n=a_n\})=\mathbf{P}\left(\bigcap_{i=n}^{n}\{X_i=a_i\}\right)$$
2. Dans le cas où $n=2$, pour définir la loi conjointe du couple (X,Y), il suffit de connaître, pour $(a,b)\in\mathbb{X}(\Omega)$,
$$\mathbf{P}(\{\mathbb{X}=(a,b)\})=\mathbf{P}(\{X=a;Y=b\})=\mathbf{P}(\{X=a\}\cap\{Y=b\})$$
3. La probabilité d'un ensemble tel que $\{X=a;Y=b\}$ ou $\{X<a;Y<b\}$ n'est hélas pas déterminée par les lois de X ou Y ou les fonctions de répartition F_X ou F_Y
4. **Important :** On doit toujours avoir $\displaystyle\sum_{a\in\mathbb{X}(\Omega)}\mathbf{P}(\{\mathbb{X}=a\})=1$
   (a) **Cas infini**
   Soit $\{\Omega;\mathcal{F};\mathbf{P}\}$ un espace probabilisé et $(X,Y):\Omega\longrightarrow\mathbb{R}^2$ un couple de variables aléatoires réelles discrètes.
   Supposons $(X,Y)(\Omega)$ infini.
   Posons $p_{i,j}=\mathbf{P}(X=x_i,Y=y_i)$, lorsque $x_i\in X(\Omega)$ et $y_i\in Y(\Omega)$; alors :
   i. Pour tout $i\geqslant 0$ et tout $j\geqslant 0$ nous avons $p_{i,j}\geqslant 0$
   ii. $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty}p_{i,j}=\sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{+\infty}p_{i,j}=1$

iii. $\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} p_{i,j}$ et $\sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{+\infty} p_{i,j}$ représentent des séries numériques dont il faut étudier la convergence.

(b) **Cas fini**

Soit $\{\Omega;\mathcal{F};\mathbf{P}\}$ un espace probabilisé et $(X,Y):\Omega \longrightarrow \mathbb{R}^2$ un couple de variables aléatoires réelles discrètes. Supposons cette fois-ci $(X,Y)(\Omega)$ fini, c'est à dire

$$X(\Omega)=\{x_1,x_2,\dots,x_n\} \qquad Y(\Omega)=\{y_1,y_2,\dots,y_m\}$$

Posons à nouveau $p_{i,j}=\mathbf{P}(X=x_i,Y=y_i)$ alors :

i. Pour tout $0\leqslant i\leqslant n$ et tout $0\leqslant j\leqslant m$ nous avons $p_{i,j}\geqslant 0$

ii. $\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} p_{i,j}=\sum_{j=0}^{m}\sum_{i=0}^{n} p_{i,j}=1$

Exemple 2 :

Nous reprenons l'exemple 18.1.2 d'introduction :

$$\begin{cases} (S,D):\Omega & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ (i,j) & \longmapsto & (S,D)(i,j)=(i+j,i-j) \end{cases}$$

Quelle est la loi de $\mathbb{X}=(S,D)$?

1. Point si facile que cela!! Il faut connaître $(S,D)(\Omega)$, et lorsque $(k,l)\in(S,D)(\Omega)$, évaluer $\mathbf{P}[(S,D)=(k,l)]$.
2. Premièrement, $(S,D)(\Omega)=\{(k,l)$ où $2\leqslant k\leqslant 12$ et $-5\leqslant l\leqslant +5\}$
3. Rechercher $\mathbb{X}^{-1}((k,l))$, c'est rechercher tous les couples (i,j) vérifiant le système $\begin{cases} i+j=k \\ i-j=l\end{cases}$
4. Le système $\begin{cases} i+j=k \\ i-j=l\end{cases}$ impose à k et l d'avoir au moins la même parité et, plus que cela, $|l|<k\leq 12-|l|$.
5. Une fois les conditions posées, on s'aperçoit que le système $\begin{cases} i+j=k \\ i-j=l\end{cases}$ n'a qu'une seule solution; on en conclue que (S,D) est une bijection de Ω dans $(S,D)(\Omega)$, et que donc, $\operatorname{card}((S,D)(\Omega))=36$
6. Ainsi, pour tout $(k,l)\in(S,D)(\Omega)$, nous avons $\mathbf{P}[(S,D)=(k,l)]=\dfrac{1}{36}$
7. D'après ce qui précède, donner $\mathbf{P}[(S,D)=(2,-5)]$ et $\mathbf{P}[(S,D)=(4,-2)]$

Exercice 1 :

On reprend l'exemple 18.1.2 du lancer de deux dés, pour lequel

$$\Omega=\{(i,j) \text{ où } 1\leqslant i\leqslant 6 \text{ et } 1\leqslant j\leqslant 6\}$$

Donnez la loi de $\mathbb{Y}((i,j))=(\max(i,j),\min(i,j))$
On trouvera

— $\mathbf{P}[\mathbb{Y}=(k,l)]=0$ si $k<l$

— $\mathbf{P}[\mathbb{Y}=(k,k)]=\dfrac{1}{36}$

— $\mathbf{P}[\mathbb{Y}=(k,l)]=\dfrac{1}{18}$ si $k\geq l$

18.2 Loi marginale

L'objet de ce paragraphe est de résoudre la question suivante :
Etant donné un vecteur aléatoire $\mathbb{X}:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}^n$, avec $\mathbb{X}=(X_1,\dots,X_n)$, est-il possible de connaître la loi de chacun des X_i ?

18.2.1 Théorème

Ce théorème est énoncé uniquement dans le cas $n = 2$; il est très facilement généralisable au cas n quelconque

Soit $\{\Omega ; \mathcal{F} ; \mathbf{P}\}$ un espace probabilisé et $\mathbb{X} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^2$ un vecteur aléatoire discret
On pose : $\mathbb{X} = (X, Y)$
Alors, pour tout $a \in \mathbb{R}$, nous avons :

$$\mathbf{P}(\{X = a\}) = \sum_{y_j \in Y(\Omega)} \mathbf{P}(\{X = a ; Y = y_j\})$$

Démonstration

La démonstration utilise les outils classiques des probabilités.
Nous avons, comme toujours :

$$\{X = a\} = \{X = a\} \cap \Omega = \{X = a\} \cap \left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} \{Y = y_j\} \right)$$

En utilisant l'outil de la distributivité de la réunion par rapport à l'intersection, nous avons :

$$\{X = a\} = \{X = a\} \cap \left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} \{Y = y_j\} \right) = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} (\{X = a\} \cap \{Y = y_j\})$$

Comme, si $i \neq j$, alors $(\{X = a\} \cap \{Y = y_j\}) \cap (\{X = a\} \cap \{Y = y_i\}) = \emptyset$, nous avons :

$$\mathbf{P}(\{X = a\}) = \sum_{y_j \in Y(\Omega)} \mathbf{P}(\{X = a ; Y = y_j\})$$

18.2.2 Définition de loi marginale

La loi de X obtenue à partir de la loi conjointe de $\mathbb{X} = (X, Y)$ est la loi marginale de X

Remarque 3 :

Ce théorème se généralise facilement au cas de n variables aléatoires réelles

Exemple 3 :

Soient a et b, deux réels. On considère les nombres $p_{i,j}$, donnés pour i et j dans l'ensemble $\{0, 1\}$ par le tableau suivant :

$i \backslash j$	*0*	*1*
0	$\frac{1}{2} - a$	$a + \frac{1}{3}$
1	b	$\frac{1}{6} - 2a$

1. *Quelle est la condition sur les réels a et b, pour que les nombres $p_{i,j}$ définissent la loi d'un couple de variables aléatoires réelles (X, Y), c'est à dire tels que $\mathbf{P}([X = i ; Y = j]) = p_{i,j}$?*

   C'est très simple, nous devons avoir :

$$\left(\frac{1}{2} - a\right) + \left(a + \frac{1}{3}\right) + b + \left(\frac{1}{6} - 2a\right) = 1 \iff \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + b + \frac{1}{6} - 2a = 1 \iff b = 2a$$

De plus, le réel a doit vérifier les inégalités :

$$\begin{cases} 0 \leqslant \frac{1}{2} - a \leqslant 1 & \iff & -\frac{1}{2} \leqslant a \leqslant \frac{1}{2} \\ 0 \leqslant a + \frac{1}{3} \leqslant 1 & \iff & -\frac{1}{3} \leqslant a \leqslant \frac{2}{3} \\ 0 \leqslant 2a \leqslant 1 & \iff & 0 \leqslant a \leqslant \frac{1}{2} \\ 0 \leqslant \frac{1}{6} - 2a \leqslant 1 & \iff & -\frac{5}{12} \leqslant a \leqslant \frac{1}{12} \end{cases}$$

De ce système d'inégalités, nous tirons $0 \leqslant a \leqslant \frac{1}{12}$, et nous obtenons le tableau :

$i \backslash j$	0	1
0	$\frac{1}{2} - a$	$a + \frac{1}{3}$
1	$2a$	$\frac{1}{6} - 2a$

2. *Ces conditions étant réalisées, donner les lois marginales de X et de Y*

   Nous avons :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\{X=0\}) &= \mathbf{P}(\{X=0;Y=0\}) + \mathbf{P}(\{X=0;Y=1\}) \\ &= p_{0,0} + p_{0,1} \\ &= \left(\frac{1}{2} - a\right) + \left(a + \frac{1}{3}\right) \\ &= \frac{5}{6} \end{aligned}$$

   En faisant les mêmes calculs, nous obtenons $\mathbf{P}(\{X=1\}) = \frac{1}{6}$. X est donc une loi de Bernouilli de paramètre $\frac{1}{6}$

   Par une même méthode, nous obtenons : $\mathbf{P}(\{Y=1\}) = \frac{1}{2} - a$ et $\mathbf{P}(\{Y=0\}) = \frac{1}{2} + a$. Y est donc une loi de Bernouilli de paramètre $\frac{1}{2} - a$

18.3 Variables aléatoires indépendantes

18.3.1 Définition

Soients (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles
On dit qu'elles sont indépendantes si, pour tout $a \in \mathbb{R}$ et pour tout $b \in \mathbb{R}$, les événements $(\{X = a\})$ et $(\{Y = b\})$ sont indépendants et nous avons alors,pour tout $a \in \mathbb{R}$ et pour tout $b \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{P}(\{X = a, Y = b\}) = \mathbf{P}(\{X = a\} \cap \{X = b\}) = \mathbf{P}(\{X = a\})\,\mathbf{P}(\{Y = b\})$$

Exemple 4 :

Dans l'exemple 18.2.2 précédent , les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Pour que les deux variables aléatoires réelles X et Y soient indépendantes, nous devons avoir, pour commencer, $\mathbf{P}(\{X=0;Y=0\}) = \mathbf{P}(\{X=0\}) \times \mathbf{P}(\{Y=0\})$, c'est à dire $\frac{5}{6}\left(\frac{1}{2} + a\right) = \frac{1}{2} - a$ qui est une équation du premier degré qui a pour solution $a = \frac{1}{22}$.
Donc, une condition nécessaire pour que les deux variables aléatoires réelles soient indépendantes est que $a = \frac{1}{22}$.
Nous avons alors le tableau suivant :

$X \backslash Y$	0	1
0	$\dfrac{5}{11}$	$\dfrac{25}{66}$
1	$\dfrac{1}{11}$	$\dfrac{5}{66}$

Il faut maintenant vérifier que, pour tous i et j, $\mathbf{P}(\{X=i,Y=j\}) = \mathbf{P}(\{X=i\})\,\mathbf{P}(\{Y=j\})$

→ $\mathbf{P}(\{X=0\})\,\mathbf{P}(\{Y=1\}) = \dfrac{5}{6} \times \dfrac{5}{11} = \dfrac{25}{66} = \mathbf{P}(\{X=0,Y=1\})$

→ $\mathbf{P}(\{X=1\})\,\mathbf{P}(\{Y=0\}) = \dfrac{1}{6} \times \dfrac{6}{11} = \dfrac{1}{11} = \mathbf{P}(\{X=1,Y=0\})$

→ $\mathbf{P}(\{X=1\})\,\mathbf{P}(\{Y=1\}) = \dfrac{1}{6} \times \dfrac{5}{11} = \dfrac{5}{66} = \mathbf{P}(\{X=1,Y=1\})$

Nous en déduisons que si $a = \dfrac{1}{22}$, les deux variables aléatoires réelles X et Y sont indépendantes.

Exercice 2 :

Soit $p \in \mathbb{R}$ tel que $0 < p < 1$. Soit X une variable aléatoire réelle qui suit une loi de Bernouilli de paramètre p et Y la variable aléatoire réelle définie par $Y = 1 - X$

1. Donner la loi conjointe de (X, Y)
2. Les variables aléatoires réelles X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 3 :

Deux systèmes (système I et système II) de contrôle électroniques opèrent indépendamment et sont sujets à plusieurs pannes par jour. Les lois de probabilité qui modélisent le nombre de pannes x_i par jour et par système sont données dans le tableau qui suit :

x_i	$\mathbf{P}[X_1 = x_i]$	$\mathbf{P}[X_2 = x_i]$
0	0.07	0.10
1	0.35	0.20
2	0.34	0.50
3	0.18	0.17
4	0.06	0.03

Calculer les probabilités suivantes :

1. Le système II présente au moins 2 pannes par jour.
2. Le système I présente moins de 2 pannes par jour et le système II plus de 3.
3. Il se produit une seule panne dans la journée.
4. Le système I présente le même nombre de pannes que le système II.

18.3.2 Suites de variables aléatoires réelles indépendantes

Lors des différentes épreuves, nous avons besoin de la notion de <u>*suite de variables aléatoires réelles*</u> *; par exemple lors que nous lançons indéfiniment un dé à 6 faces.* X_n *sera le résultat du lancer numéro* n *; on crée ainsi une suite* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de variables aléatoires réelles*

1. Soient $(X_1,\dots,X_n)$ n variables aléatoires réelles indépendantes réelles, alors
$$\mathbf{P}\left(\{X_1=x_1,\dots,X_n=x_n\}\right)=\prod_{k=1}^{n}\mathbf{P}\left(\{X_k=x_k\}\right)$$
2. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles .
   On dit qu'elles sont indépendantes si, pour toute partie finie $I\subset\mathbb{N}$, les variables aléatoires réelles $(X_i)_{i\in I}$ sont indépendantes.
3. On admet que, pour toute suite de variables aléatoires réelles indépendantes $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la variable aléatoire réelle $X_1+\cdots+X_n$ est indépendante de $X_{n+1},\dots,X_{n+k}$

18.3.3 Proposition

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $\{\Omega;\mathcal{F};\mathbf{P}\}$, qui suit une loi binômiale $\mathcal{B}(n,p)$ et Y une variable aléatoire réelle définie sur le même espace probabilisé qui suit une loi $\mathcal{B}(m,p)$.
On suppose X et Y indépendantes.
Alors, la variable aléatoire réelle $X+Y$ suit une loi $\mathcal{B}(n+m,p)$

Démonstration

Il est clair que $(X+Y)(\Omega)=\{0,1,\cdots,m+n\}$.
Soit $k\in\{0,1,\cdots,m+n\}$, alors
$$\{X+Y=k\}=\bigcup_{j=0}^{k}\{X=j;Y=k-j\}$$
Tout en sachant que si $k>n$, et $k-j>m+n$, $\{X=j\}=\emptyset$ et $\{Y=k-j\}=\emptyset$. Donc,
$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left(\{X+Y=k\}\right)=&\ \mathbf{P}\left(\bigcup_{j=0}^{k}\{X=j;Y=k-j\}\right)\\ =&\ \sum_{j=0}^{k}\mathbf{P}\left(\{X=j;Y=k-j\}\right)\end{aligned}$$
De l'indépendance de X et de Y, $\mathbf{P}\left(\{X=j;Y=k-j\}\right)=\mathbf{P}\left(\{X=j\}\right)\times\mathbf{P}\left(\{Y=k-j\}\right)$ et donc
$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left(\{X=j;Y=k-j\}\right)=&\ \mathrm{C}_n^jp^j(1-p)^{n-j}\,\mathrm{C}_m^{k-j}p^{k-j}(1-p)^{m-k+j}\\ =&\ \mathrm{C}_n^j\mathrm{C}_m^{k-j}p^k(1-p)^{m+n-k}\end{aligned}$$
Et donc, $\mathbf{P}\left(\{X+Y=k\}\right)=p^k(1-p)^{m+n-k}\displaystyle\sum_{j=0}^{k}\mathrm{C}_n^j\mathrm{C}_m^{k-j}$

De l'égalité $\displaystyle\sum_{j=0}^{k}\mathrm{C}_n^j\mathrm{C}_m^{k-j}=\mathrm{C}_{n+m}^k$, nous avons :
$$\mathbf{P}\left(\{X+Y=k\}\right)=\mathrm{C}_{n+m}^kp^k(1-p)^{m+n-k}$$
La variable aléatoire réelle $X+Y$ suit donc une loi $\mathcal{B}(n+m,p)$

18.3.4 Proposition

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $\{\Omega;\mathcal{F};\mathbf{P}\}$, qui suit une loi de Poisson de paramètre λ et Y une variable aléatoire réelle définie sur le même espace probabilisé qui suit une loi de Poisson de paramètre μ
On suppose X et Y indépendantes.
Alors, la variable aléatoire réelle $X+Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda+\mu$

Démonstration

Le raisonnement est le même, avec des domaines différents, cependant.
Il est clair que $(X+Y)(\Omega)=\mathbb{N}$. Soit $k\in\mathbb{N}$, alors, comme dans l'exemple précédent,

$$\{X+Y=k\}=\bigcup_{j=0}^{k}\{X=j;Y=k-j\}$$

Donc,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\{X+Y=k\}) &= \mathbf{P}\left(\bigcup_{j=0}^{k}\{X=j;Y=k-j\}\right)\\ &= \sum_{j=0}^{k}\mathbf{P}(\{X=j;Y=k-j\})\end{aligned}$$

De l'indépendance de X et de Y, $\mathbf{P}(\{X=j;Y=k-j\})=\mathbf{P}(\{X=j\})\times\mathbf{P}(\{Y=k-j\})$ et donc

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\{X=j;Y=k-j\}) &= e^{-\lambda}\frac{\lambda^j}{j\,!}\times e^{-\mu}\frac{\mu^{k-j}}{(k-j)\,!}\\ &= e^{-(\lambda+\mu)}\frac{\lambda^j\times\mu^{k-j}}{j\,!\,(k-j)\,!}\end{aligned}$$

Et donc, $\mathbf{P}(\{X+Y=k\})=e^{-(\lambda+\mu)}\displaystyle\sum_{j=0}^{k}\frac{\lambda^j\times\mu^{k-j}}{j\,!\,(k-j)\,!}$

Nous avons $\displaystyle\sum_{j=0}^{k}\frac{\lambda^j\times\mu^{k-j}}{j\,!\,(k-j)\,!}=\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}\frac{k!\lambda^j\times\mu^{k-j}}{j\,!\,(k-j)\,!}$.

Or, $\displaystyle\sum_{j=0}^{k}\frac{k!\lambda^j\times\mu^{k-j}}{j\,!\,(k-j)\,!}=\sum_{j=0}^{k}\mathrm{C}_k^j\lambda^j\times\mu^{k-j}$ est l'expression du binôme de Newton. Donc

$$\sum_{j=0}^{k}\mathrm{C}_k^j\lambda^j\times\mu^{k-j}=(\lambda+\mu)^k$$

Et donc,

$$\mathbf{P}(\{X+Y=k\})=e^{-(\lambda+\mu)}\frac{(\lambda+\mu)^k}{k!}$$

La variable aléatoire réelle $X+Y$ suit donc une loi de Poisson de paramètre $\lambda+\mu$

18.3.5 Proposition

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $\{\Omega;\mathcal{F};\mathbf{P}\}$, qui suit une loi géométrique de paramètre p et Y une variable aléatoire réelle définie sur le même espace probabilisé qui suit une loi géométrique de même paramètre p
On suppose X et Y indépendantes.
Alors, Alors $\mathbf{P}(\{X+Y=n\})=(n-1)\,p^2\,(1-p)^{n-2}$

Démonstration

On recommence le raisonnement précédent
Il est clair que $(X+Y)(\Omega)=\{n\in\mathbb{N}$ tels que $n\geqslant 2\}$.
Soit $n\in\mathbb{N}$ tel que $n\geqslant 2$ alors, comme dans les exemples précédents,

$$\{X+Y=n\}=\bigcup_{j=1}^{n-1}\{X=j;Y=n-j\}$$

Donc,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\{X+Y=n\}) &= \mathbf{P}\left(\bigcup_{j=1}^{n-1}\{X=j;Y=n-j\}\right)\\ &= \sum_{j=1}^{n-1}\mathbf{P}(\{X=j;Y=n-j\})\end{aligned}$$

De l'indépendance de X et de Y, nous avons $\mathbf{P}(\{X=j;Y=n-j\}) = \mathbf{P}(\{X=j\}) \times \mathbf{P}(\{Y=n-j\})$ et donc

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\{X=j;Y=n-j\}) &= p(1-p)^{j-1} \times p(1-p)^{n-j-1}\\ &= p^2(1-p)^{n-2}\end{aligned}$$

Et donc, $\mathbf{P}(\{X+Y=n\}) = \sum_{j=1}^{n-1} p^2(1-p)^{n-2} = (n-1)p^2(1-p)^{n-2}$

La variable aléatoire réelle $X+Y$ suit donc une loi définie par :

$$\mathbf{P}(\{X+Y=n\}) = (n-1)p^2(1-p)^{n-2}$$

Exercice 4 :

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes, suivant toutes la même loi de Bernouilli de paramètre p. Quelle est la loi de $S = X_1 + \cdots + X_n$?

Exemple 5 :

Exercice résolu

Soit X une variable aléatoire réelle qui suit une loi géométrique de paramètre p et Y une variable aléatoire réelle qui suit une loi géométrique de paramètre q. On suppose X et Y indépendantes.On cherche la loi de $Z = \min(X,Y)$

1. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, calculer $\mathbf{P}(\{X \geqslant k\})$

   C'est un calcul classique lié aux séries géométriques ; l'événement $\{X \geqslant k\}$ est donné par :

   $$\{X \geqslant k\} = \bigcup_{i=k}^{+\infty}\{X=i\}$$

   Et, en termes de probabilités,

   $$\begin{aligned}\mathbf{P}(\{X \geqslant k\}) &= \sum_{i=k}^{+\infty}\mathbf{P}(\{X=i\})\\ &= \sum_{i=k}^{+\infty}p(1-p)^{i-1}\\ &= p\sum_{i=0}^{+\infty}(1-p)^{k+i-1}\\ &= p(1-p)^{k-1}\sum_{i=0}^{+\infty}(1-p)^i\\ &= p(1-p)^{k-1} \times \frac{1}{1-(1-p)}\\ &= p(1-p)^{k-1} \times \frac{1}{p}\\ &= (1-p)^{k-1}\end{aligned}$$

   En conclusion, $\boxed{\mathbf{P}(\{X \geqslant k\}) = (1-p)^{k-1}}$

2. En déduire $\mathbf{P}(\{Z \geqslant k\})$

L'événement $\{Z \geqslant k\}$ est l'événement $\{\min(X,Y) \geqslant k\}$, c'est à dire $\{X \geqslant k\}$ et $\{Y \geqslant k\}$. Donc :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(\{Z \geqslant k\}) &= \mathbf{P}(\{X \geqslant k\} \cap \{Y \geqslant k\}) \\
&= \mathbf{P}(\{X \geqslant k; Y \geqslant k\}) \\
&= \mathbf{P}(\{X \geqslant k\}) \times \mathbf{P}(\{Y \geqslant k\}) \text{ indépendance de } X \text{ et } Y \\
&= (1-p)^{k-1}(1-q)^{k-1} \\
&= ((1-p)(1-q))^{k-1}
\end{aligned}$$

3. Quelle est la loi de Z ?

Il faut donc donner $\mathbf{P}(\{Z = k\})$; or, quel est l'événement $\{Z = k\}$? Très simplement,

$$\{Z = k\} = \{Z \geqslant k\} - \{Z \geqslant k+1\}$$

Comme $\{Z \geqslant k+1\} \subset \{Z \geqslant k\}$, nous avons :

$$\mathbf{P}(\{Z = k\}) = \mathbf{P}(\{Z \geqslant k\}) - \mathbf{P}(\{Z \geqslant k+1\})$$

Donc,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(\{Z = k\}) &= \mathbf{P}(\{Z \geqslant k\}) - \mathbf{P}(\{Z \geqslant k+1\}) \\
&= (1-p)^{k-1}(1-q)^{k-1} - (1-p)^k(1-q)^k \\
&= (1-p)^{k-1}(1-q)^{k-1}(1-(1-p)(1-q)) \\
&= (1-p)^{k-1}(1-q)^{k-1}(p+q-pq)
\end{aligned}$$

Exercice 5 :

Reprendre l'exemple précédent où X est une variable aléatoire réelle qui suit une loi géométrique de paramètre p, Y une variable aléatoire réelle qui suit une loi géométrique de paramètre q et où on suppose X et Y indépendantes. Donner la loi de $T = \max(X,Y)$

Exercice 6 :

Soient X et Y, 2 variables aléatoires réelles indépendantes qui suivent la même loi géométrique de paramètre $p \in]0;1[$. Quelle est la probabilité de l'événement $\{X = Y\}$

18.3.6 Proposition

Soient X et Y 2 variables aléatoires réelles indépendantes définies sur le même espace probabilisé $\{\Omega; \mathcal{F}; \mathbf{P}\}$
Alors : $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$

Démonstration

Nous avons, par définition de l'espérance,

$$\mathbb{E}(XY) = \sum_{i\in\mathbb{N}}\left(\sum_{j\in\mathbb{N}} x_i y_j \mathbf{P}(\{X = x_i; Y = y_j\})\right)$$

Les variables aléatoires réelles X et Y sont indépendantes, et donc, de l'indépendance, nous tirons

$$\mathbb{E}(XY) = \sum_{i\in\mathbb{N}}\left(\sum_{j\in\mathbb{N}} x_i y_j \mathbf{P}(\{X = x_i\})\mathbf{P}(\{Y = y_j\})\right)$$

Et donc, en regroupant les expressions ne dépendant que de i ou de j, nous avons :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(XY) &= \left(\sum_{i\in\mathbb{N}} x_i \mathbf{P}(\{X = x_i\})\right) \times \left(\sum_{j\in\mathbb{N}} y_j \mathbf{P}(\{Y = y_j\})\right) \\
&= \mathbb{E}(X) \times \mathbb{E}(Y)
\end{aligned}$$

Ainsi, si les variables X et Y sont indépendantes, alors $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X) \times \mathbb{E}(Y)$

Remarque 4 :

Bien entendu, **la réciproque est fausse**!!

Exercice 7 :

1. Soient X et Y 2 variables aléatoires indépendantes. Soient $h \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$. Montrer que
$$\mathbb{E}\left(X^h Y^k\right) = \mathbb{E}\left(X^h\right) \times \mathbb{E}\left(Y^k\right)$$
2. Plus généralement, montrer que si X et Y sont 2 variables aléatoires indépendantes et $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ 2 fonctions continues, alors
$$\mathbb{E}\left(f(X)\, g(Y)\right) = \mathbb{E}\left(f(X)\right) \times \mathbb{E}\left(g(Y)\right)$$

Exercice 8 :

Une banque a deux filiales A et B. Le bénéfice éventuel, compté négativement si c'est une perte, de chaque filiale *(exprimé en millions d'euros)* est une variable aléatoire réelle désignée par X_A pour A et X_B pour B.
X_A est la variable aléatoire telle que
$$X_A(\Omega) = \{0, 1, 2\} \text{ et } \mathbf{P}(\{X_A = 0\}) = \mathbf{P}(\{X_A = 1\}) = \mathbf{P}(\{X_A = 2\})$$
X_B est la variable aléatoire telle que
$$X_B(\Omega) = \{-1, 0, 1, 2\} \text{ et } \mathbf{P}(\{X_B = -1\}) = \mathbf{P}(\{X_B = 0\}) = \mathbf{P}(\{X_B = 1\}) = \mathbf{P}(\{X_B = 2\})$$
On suppose de plus X_A et X_B indépendantes

1. Calculer la loi de probabilité de la variable aléatoire réelle X égale au bénéfice total
2. Calculer $\mathbb{E}(X)$

18.3.7 Fonctions génératrices et variables aléatoires réelles indépendantes

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles définies sur un espace probabilisé $\{\Omega; \mathcal{F}; \mathbf{P}\}$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$. Alors,
$$(\forall s \in [-1; +1])\ (G_{X+Y}(s) = G_X(s) \times G_Y(s))$$
où G_X désigne la fonction génératrice de X et G_Y celle de Y

Démonstration

Par définition de la fonction génératrice, nous avons
$$G_{X+Y}(s) = \mathbb{E}\left(s^{X+Y}\right) = \mathbb{E}\left(s^X s^Y\right)$$
Les variables aléatoires réelles X et Y étant indépendantes, il en est de même de s^X et s^Y ; donc $\mathbb{E}\left(s^X s^Y\right) = \mathbb{E}\left(s^X\right) \mathbb{E}\left(s^Y\right)$, c'est à dire
$$\mathbb{E}\left(s^{X+Y}\right) = \mathbb{E}\left(s^X\right) \mathbb{E}\left(s^Y\right) \Longleftrightarrow G_{X+Y}(s) = G_X(s) \times G_Y(s)$$

Remarque 5 :

Bien entendu, cette propriété s'étend au cas où nous avons n variables aléatoires réelles indépendantes. Si $X_1, \ldots, X_n$ sont n variables aléatoires réelles indépendantes, alors
$$G_{X_1+X_2+\cdots+X_n}(s) = \prod_{i=1}^{n} G_{X_i}(s)$$

18.4 Conditionnement

18.4.1 Définition

Soit $\{\Omega;\mathcal{F};\mathbf{P}\}$ un espace probabilisé et $X:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle discrète.
Soit $A\in\mathbb{F}$ tel que $\mathbf{P}(A)>0$
On appelle loi de X, conditionnée par A, la probabilité

$$\mathbf{P}(\{X=x\}/A)=\frac{\mathbf{P}(\{X=x\}\cap A)}{\mathbf{P}(A)}$$

Remarque 6 :

1. La plupart du temps, nous aurons 2 variables aléatoires réelles X et Y, et pour $a\in\mathbb{R}$, et $b\in\mathbb{R}$, on étudie
$$\mathbf{P}(\{X=a\}/\{Y=b\})=\frac{\mathbf{P}(\{X=a\}\cap\{Y=b\})}{\mathbf{P}(\{Y=b\})}=\frac{\mathbf{P}(X=a;Y=b)}{\mathbf{P}(\{Y=b\})}$$
2. On peut alors faire un lien avec les lois conjointes ; en effet, de l'identité
$$\mathbf{P}(\{X=x\}/\{Y=y\})=\frac{\mathbf{P}(\{X=x;Y=y\})}{\mathbf{P}(\{Y=y\})}$$
Nous déduisons : $\mathbf{P}(\{X=x;Y=y\})=\mathbf{P}(\{X=x\}/\{Y=y\})\times\mathbf{P}(\{Y=y\})$

18.4.2 Proposition

Cette proposition nous donne la loi marginale, à partir de la loi conditionnelle.

Soit $\{\Omega;\mathcal{F};\mathbf{P}\}$ un espace probabilisé et $X:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$ et $Y:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$ deux variables aléatoires réelles discrètes.
Alors, pour tout $x\in X(\Omega)$ la probabilité

$$\mathbf{P}(\{X=x\})=\sum_{y\in Y(\Omega)}\mathbf{P}(\{X=x\}/\{Y=y\})\times\mathbf{P}(\{Y=y\})$$

Démonstration

En utilisant la méthode vue dans la formule des probabilités totales, nous avons

$$\{X=x\}=\{X=x\}\bigcap\Omega=\{X=x\}\bigcap\left(\bigcup_{y\in Y(\Omega)}\{Y=y\}\right)=\bigcup_{y\in Y(\Omega)}\big(\{X=x\}\bigcap\{Y=y\}\big)$$

En passant aux probabilités, nous avons :

$$\mathbf{P}(\{X=x\})=\sum_{y\in Y(\Omega)}\mathbf{P}(\{X=x\}\cap\{Y=y\})$$

D'où, en utilisant la formule de la remarque précédente nous avons le résultat :

$$\mathbf{P}(\{X=x\})=\sum_{y\in Y(\Omega)}\mathbf{P}(\{X=x\}/\{Y=y\})\times\mathbf{P}(\{Y=y\})$$

Exemple 6 :

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n.
On effectue un premier tirage et on note le numéro : p. On effectue un second tirage entre 1 et p. On obtient ainsi un couple de variables aléatoires réelles (X,Y) correspondant à chacun des tirages.
Evaluer $\mathbf{P}(\{Y=k\}/\{X=p\})$.
Est-il possible de connaître la loi conjointe ? La loi marginale ?

Résolution

1. Evaluation de $\mathbf{P}(\{Y=k\}/\{X=p\})$
   On sait que le premier tirage donne p ; le second tirage s'effectue alors dans une urne contenant p boules, de manière équiprobable. Donc,
$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\{Y=k\}/\{X=p\}) &= \frac{1}{p} \text{ si } 1 \leqslant k \leqslant p \\ &= 0 \text{ si } p<k\end{aligned}$$

2. Recherche de la loi conjointe
   Par définition de la loi conditionnelle,
$$\mathbf{P}(X=p;Y=k)=\mathbf{P}(\{X=p\})\,\mathbf{P}(\{Y=k\}/\{X=p\})$$
   On a donc, d'après la question précédente,
$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X=p;Y=k) &= \frac{1}{np} \quad \text{si } 1 \leqslant k \leqslant p \\ &= 0 \quad \text{si } k \geqslant p+1\end{aligned}$$

3. D'où les lois marginales :
$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X=p) &= \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(X=p;Y=k) \\ &= \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{np} = \frac{1}{n}\end{aligned}$$
   Ce résultat présente peu d'intérêt
$$\begin{aligned}\mathbf{P}(Y=k) &= \sum_{p=1}^{n} \mathbf{P}(X=p;Y=k) \\ &= \sum_{p=k}^{n} \mathbf{P}(X=p;Y=k) \\ &= \sum_{p=k}^{n} \frac{1}{np} \\ &= \frac{1}{n}\sum_{p=k}^{n}\frac{1}{p}\end{aligned}$$

Exercice 9 :

Une expérience aléatoire consiste à lancer deux dés équilibrés à 6 faces. La variable aléatoire X représente la somme des points obtenus tandis que la variable aléatoire Y donne **la différence** entre **le plus grand et le plus petit** score.

1. Quelle est la loi de la variable aléatoire Y ?
2. Quelle est la loi de la variable aléatoire X ?
3. Donnez $\mathbb{P}(\{Y=2\}/\{X=4\})$
4. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

18.5 Espérance conditionnelle

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $\{\Omega;\mathcal{F};\mathbf{P}\}$, et soit $A \in \mathcal{F}$ tel que $\mathbf{P}(A)>0$. On sait que la probabilité conditionnelle $\mathbf{P}^A$ définie par $\mathbf{P}^A(B)=\mathbf{P}(B/A)$ est une véritable probabilité. On peut donc définir l'espérance d'une variable aléatoire réelle X relativement à la probabilité $\mathbf{P}^A$.

18.5.1 Définition

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $\{\Omega;\mathcal{F};\mathbf{P}\}$, et soit $A \in \mathcal{F}$ tel que $\mathbf{P}(A) > 0$.
L'espérance conditionnelle de X sachant A est définie par :

$$\mathbb{E}(X/A) = \sum_{x\in X(\Omega)} x\mathbf{P}^A(\{X=x\}) = \sum_{x\in X(\Omega)} x\mathbf{P}(\{X=x\}/A)$$

Remarque 7 :

$\mathbb{E}(X/A)$ représente l'espérance de X dans la situation où l'événement A est réalisé.

18.5.2 Proposition

L'espérance conditionnelle est linéaire, c'est à dire :
Soient X et Y 2 variables aléatoires réelles définies sur un espace probabilisé $\{\Omega;\mathcal{F};\mathbf{P}\}$, et soit $A \in \mathcal{F}$ tel que $\mathbf{P}(A) > 0$

1. $\mathbb{E}(X+Y/A) = \mathbb{E}(X/A) + \mathbb{E}(Y/A)$
2. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}(\lambda X/A) = \lambda\mathbb{E}(X/A)$

Démonstration

Il suffit de penser que l'espérance, par rapport à n'importe quelle probabilité est linéaire.

18.5.3 Espérance conditionnelle par rapport à une autre variable aléatoire réelle

Soient X et Y 2 variables aléatoires réelles définies sur un espace probabilisé $\{\Omega;\mathcal{F};\mathbf{P}\}$.
Pour tout $y \in Y(\Omega)$ tel que $\mathbf{P}(\{Y=y\}) > 0$
L'espérance conditionnelle de X sachant $\{Y=y\}$ est définie par :

$$\mathbb{E}(X/\{Y=y\}) = \sum_{x\in X(\Omega)} x\mathbf{P}(\{X=x\}/\{Y=y\})$$

Remarque 8 :

1. Cette définition n'est qu'une redite de 18.5.1 où on remplace l'évenement $A \in \mathcal{F}$ par $\{Y=y\} \in \mathcal{F}$
2. Cette espérance conditionnelle dépend de y. Il est donc possible de construire une application $g : Y(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} g : Y(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \quad y & \longmapsto & g(y) = \mathbb{E}(X/\{Y=y\}) \end{cases}$$

3. Mieux que cela, il nous est possible de construire une variable aléatoire réelle de Ω dans $\mathbb{R}$ définie par $g\circ Y$ et telle que, pour tout $\omega \in \Omega$, $g\circ Y(\omega) = \mathbb{E}(X/\{Y=Y(\omega)\})$
4. Traditionnellement, la variable aléatoire réelle $g\circ Y$ est notée $\mathbb{E}(X/Y)$ [1]
5. Nous pouvons donc calculer l'espérance de $g\circ Y$ qui est donc $\mathbb{E}(g\circ Y) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X/Y))$

1. C'est une notation traditionnelle, très sujette à confusion. Elle n'a pas ma faveur. C'est contraint et forcé que je la présente

18.5.4 Proposition

Soient X et Y 2 variables aléatoires réelles définies sur un espace probabilisé $\{\Omega; \mathcal{F}; \mathbf{P}\}$. On suppose X et Y indépendantes.
Alors, pour tout $y \in Y(\Omega)$ tel que $\mathbf{P}(\{Y = y\}) > 0$

$$\mathbb{E}(X/\{Y = y\}) = \mathbb{E}(X)$$

Démonstration

Nous partons de la définition :

$$\mathbb{E}(X/\{Y = y\}) = \sum_{x \in X(\Omega)} x\mathbf{P}(\{X = x\}/\{Y = y\})$$

Or, comme X et Y sont indépendantes, $\mathbf{P}(\{X = x\}/\{Y = y\}) = \mathbf{P}(\{X = x\})$, donc

$$\mathbb{E}(X/\{Y = y\}) = \sum_{x \in X(\Omega)} x\mathbf{P}(\{X = x\}) = \mathbb{E}(X)$$

18.5.5 Calcul d'espérance par conditionnement

Soient X et Y 2 variables aléatoires réelles définies sur un espace probabilisé $\{\Omega; \mathcal{F}; \mathbf{P}\}$. Alors :

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}(X/Y)] = \mathbb{E}(X)$$

Démonstration

C'est une application du théorème de composition.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(g \circ Y) &= \sum_{y \in Y(\Omega)} g(y)\mathbf{P}(\{Y = y\}) \\
&= \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{E}(X/\{Y = y\})\mathbf{P}(\{Y = y\}) \\
&= \sum_{y \in Y(\Omega)} \left(\sum_{x \in X(\Omega)} x\mathbf{P}(\{X = x\}/\{Y = y\}) \right) \mathbf{P}(\{Y = y\}) \\
&= \sum_{y \in Y(\Omega)} \left(\sum_{x \in X(\Omega)} x\mathbf{P}(\{X = x\}/\{Y = y\})\mathbf{P}(\{Y = y\}) \right) \\
&= \sum_{y \in Y(\Omega)} \left(\sum_{x \in X(\Omega)} x\mathbf{P}(\{X = x; Y = y\}) \right) \\
&= \sum_{x \in X(\Omega)} \left(\sum_{y \in Y(\Omega)} x\mathbf{P}(\{X = x; Y = y\}) \right) \textit{(permutation des signes somme)} \\
&= \sum_{x \in X(\Omega)} x \left(\sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbf{P}(\{X = x; Y = y\}) \right) \\
&= \sum_{x \in X(\Omega)} x\mathbf{P}(\{X = x\}) \\
&= \mathbb{E}(X)
\end{aligned}$$

Remarque 9 :

L'intérêt de cette formule est que, dans certaines situations, le calcul de $\mathbb{E}(X/Y)$ est plus facile que celui de $\mathbb{E}(X)$

Index