Annexe A

L'exponentielle des matrices

Voici un exposé qui est à la limite des cours de L_2 et de L_3. C'est un titre de leçon d'agrégation. Voici donc un exposé qui pourraît être utile dans la préparation du concours de l'agrégation

A.1 Généralités

A.1.1 Introduction

1. Nous considérons connues les notions de norme dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel , d'espace normé, de distance et d'espace métrique, notions vues dans le chapitre 1
2. Un **espace de Banach** est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé et complet pour cette norme, c'est à dire que les suites de Cauchy y convergent

A.1.2 Définition

Soit E un espace de Banach et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E.
La série de terme général u_n est dite normalement convergente si la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|u_n\|$ est convergente.

Remarque 1 :

Il faut remarquer que $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|u_n\|$ est une série numérique à termes positifs

A.1.3 Théorème

Soit E un espace de Banach et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E telle que la série de terme général u_n soit normalement convergente.

Alors, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est convergente *(c'est à dire que* $\lim_{n\to+\infty} \sum_{p=0}^{n} u_n$ *existe)* et $\left\|\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n\right\| \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} \|u_n\|$.

Démonstration

Nous admettons ce théorème

Exemple 1 :

Nous considérons $\mathcal{C}^0([0;1],\mathbb{C})$ l'espace des fonctions continues sur le fermé borné $[0;1]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. Etant continues sur le compact $[0;1]$, elles y sont bornées, c'est à dire qu'il existe $M_f > 0$ tel que, pour tout $x \in [0;1]$, nous avons $|f(x)| \leqslant M_f$

$\Rightarrow$ Il est très facile de montrer que $\mathcal{C}^0([0;1],\mathbb{C})$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel

⇒ Nous définissons, sur $\mathcal{C}^0([0;1],\mathbb{C})$ une norme : $\|f\| = \sup\limits_{x\in[0;1]} |f(x)|$
Il est très facile de démontrer que ce que nous venons de définir est une norme souvent appelée norme de la convergence uniforme

⇒ Enfin, l'espace $\mathcal{C}^0([0;1],\mathbb{C})$ est un espace complet : cela tient à ce que la limite d'une suite uniformément convergente de fonctions continues est continue *(Revoir le cours de L_1)*

⇒ Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{C}^0([0;1],\mathbb{C})$. Dire que la série $\sum\limits_{n_i n\mathbb{N}} u_n$ est normalement convergente, c'est dire qu'il existe une série numérique à termes positifs $\sum\limits_{n_i n\mathbb{N}} \varepsilon_n$ *(avec donc $\varepsilon_n \geqslant 0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$)* telle que pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $x\in[0;1]$ nous ayions :

$$|u_n(x)| \leqslant \varepsilon_n$$

Dans notre cas, il suffit de prendre $\varepsilon_n = \|u_n\| = \sup\limits_{x\in[0;1]} |u_n(x)|$

A.1.4 Applications linéaires continues

Soient $(E, \|\bullet\|_E)$ et $(F, \|\bullet\|_F)$, 2 $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés, tous deux sur le même corps $\mathbb{K}$
Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire .
Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :

1. f est continue en tout point $x\in E$
2. f est continue à l'origine 0_E
3. $\|f(x)\|_F$ est bornée sur la boule unité de E : $\{x\in E \text{ tel que } \|x\|_E \leqslant 1\}$

Démonstration

Avant de commencer la démonstration, il faut faire remarquer que, f étant linéaire, $f(0_E) = 0_F$

1. Il est complètement évident que si f est continue en tout point $x\in E$, alors f est, en particulier, continue à l'origine 0_E
2. Supposons, maintenant que f est continue à l'origine 0_E
   f étant continue à l'origine 0_E, alors pour $\varepsilon = 1$, il existe $r > 0$ tel que si $\|x\|_E \leqslant r$, alors $\|f(x)\|_F \leqslant \varepsilon = 1$
   Soit $y\in E$ tel que $\|y\|_E \leqslant 1$.
   Alors $\|ry\|_E = r\|y\|_E \leqslant r$ et donc $\|f(ry)\|_F \leqslant 1$. Or, $f(ry) = rf(y)$ et donc
   $$\|f(ry)\|_F = r\|f(y)\|_F \leqslant 1 \iff \|f(y)\|_F \leqslant \frac{1}{r}$$
   f est donc bornée sur la boule unité de E
3. Supposons que $\|f(x)\|_F$ soit bornée sur la boule unité de E
   Nous allons démontrer que f est continue en tout point de E
   Si $\|f(x)\|_F$ est bornée sur la boule unité de E, il existe $M > 0$ tel que, pour tout $x\in E$, $\|x\|_E \leqslant 1 \Longrightarrow \|f(x)\|_F \leqslant M$.
   ⇒ **Démontrons que, pour tout $x\in E$, $\|f(x)\|_F \leqslant M\|x\|_E$**
   Soit $x\in E$
   ▷ C'est vrai pour $x = 0_E$ puisque $f(0_E) = 0_F$
   ▷ Si $x \neq 0_E$, alors $\|x\|_E > 0$.
   Posons $y = \dfrac{x}{\|x\|_E}$; alors $\|y\|_E = 1$ et donc $\|f(y)\|_F \leqslant M$. Or,
   $$\|f(y)\|_F \leqslant M \iff \left\|f\left(\frac{x}{\|x\|_E}\right)\right\|_F \leqslant M \iff \frac{1}{\|x\|_E}\|f(x)\|_F \leqslant M \iff \|f(x)\|_F \leqslant M\|x\|_E$$

Ce que nous voulions

$\Rightarrow$ **Démontrons que f est continue en tout point de E**

Soit $a \in E$; montrons que f est continue en a.

▷ Remarquons, tout d'abord, que $f(x) - f(a) = f(x-a)$ et que donc :

$$\|f(x) - f(a)\|_F = \|f(x-a)\|_F \leqslant M\|x-a\|_E$$

▷ Soit $\varepsilon > 0$.

Il existe donc $r = \dfrac{\varepsilon}{M}$ tel que, pour tout $x \in E$, si $\|x-a\|_E \leqslant \dfrac{\varepsilon}{M}$ alors $\|f(x) - f(a)\|_F \leqslant M \times \dfrac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$

f est donc continue en a

Nous venons donc de démontrer l'équivalence des 3 propositions

Remarque 2 :

1. Nous venons aussi de démontrer que, f est une application linéaire continue, si et seulement si, pour tout $x \in E$ et tout $y \in E$, $\|f(x) - f(y)\|_F \leqslant M\|x-y\|_E$; ceci montre qu'une application linéaire continue est uniformément continue et lipschizienne.
2. Nous venons aussi de démontrer que, f est une application linéaire continue, si et seulement si, il existe $K > 0$ tel que pour tout $x \in E$ $\|f(x)\|_F \leqslant M\|x\|_E$

A.1.5 Norme d'une application linéaire continue

Soient $(E, \|\bullet\|_E)$ et $(F, \|\bullet\|_F)$, 2 $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés, tous deux sur le même corps $\mathbb{K}$

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire continue

Nous considérons les nombres suivants :

1. $a_1(f) = \sup\limits_{x \neq 0_E} \dfrac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E}$
2. $a_2(f) = \sup\limits_{\|x\|_E = 1} \|f(x)\|_F$
3. $a_3(f) = \sup\limits_{\|x\|_E \leqslant 1} \|f(x)\|_F$
4. $a_4(f) = \inf A$ où $A = \{c > 0 \text{ tel que pour tout } x \in E, \|f(x)\|_F \leqslant c\|x\|_E\}$

Ces 4 nombres sont égaux *(nous avons $a_1(f) = a_2(f) = a_3(f) = a_4(f)$)*. Leur valeur commune est la norme de f notée $\|f\|$

Démonstration

1. Soit $x \in E$ tel que $x \neq 0_E$ alors $\left\|\dfrac{x}{\|x\|_E}\right\|_E = 1$ et donc
$$\frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} = \left\|\frac{1}{\|x\|_E} f(x)\right\|_F = \left\|f\left(\frac{x}{\|\|_E}\right)\right\|_F$$
Ainsi, $\left\|f\left(\dfrac{x}{\|\|_E}\right)\right\|_F \leqslant a_2(f)$ et en particulier en passant à la borne supérieure,
$$a_1(f) \leqslant a_2(f)$$
2. Il est évident que $a_2(f) \leqslant a_3(f)$
3. Démontrons que $a_3(f) = a_4(f)$
C'est à dire que $a_3(f)$ est le plus petit $c > 0$ tel que $\|f(x)\|_F \leqslant c\|x\|_E$

- $\Rightarrow$ **Montrons que, pour tout $x \in E$, $\|f(x)\|_F \leqslant a_3(f)\|x\|_E$**
  Tout d'abord, et par définition, si $\|x\|_E \leqslant 1$ alors $\|f(x)\|_F \leqslant a_3(f)$.
  Soit $x \in E$ avec $x \neq 0_E$, alors $\left\|\dfrac{x}{\|x\|_E}\right\|_E = 1$ et donc
  $$\left\|f\left(\frac{x}{\|x\|_E}\right)\right\|_F \leqslant a_3(f) \iff \frac{1}{\|x\|_E}\|f(x)\|_F \leqslant a_3(f) \iff \|f(x)\|_F \leqslant a_3(f)\|x\|_E$$
  Comme $f(0_E) = 0_F$, l'inégalité $\|f(x)\|_F \leqslant a_3(f)\|x\|_E$ est donc vraie pour tout $x \in E$
- $\Rightarrow$ **Montrons, maintenant que $a_3(f)$ est le plus petit élément $c > 0$ tel que $\|f(x)\|_F \leqslant c\|x\|_E$, c'est à dire que $a_3(f) = a_4(f)$**
  Soit $c > 0$ tel que, pour tout $x \in E$, $\|f(x)\|_F \leqslant c\|x\|_E$.
  Alors, pour tout $x \in E$ tel que $\|x\|_E \leqslant 1$, $\|f(x)\|_F \leqslant c\|x\|_E \leqslant c$
  En particulier pour la borne supérieure nous avons $\sup\limits_{\|x\|_E \leqslant 1}\|f(x)\|_F \leqslant c$, ce qui veut dire que $\sup\limits_{\|x\|_E \leqslant 1}\|f(x)\|_F = a_4(f)$ et que donc $a_3(f) = a_4(f)$

4. Comme $a_1(f) = \sup\limits_{x \neq 0_E}\dfrac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E}$, pour tout $x \in E$ avec $x \neq 0_E$, nous avons
$$\frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} \leqslant a_1(f) \iff \|f(x)\|_F \leqslant a_1(f)\|x\|_E$$
Comme $f(0_E) = 0_F$, nous avons donc, pour tout $x \in E$, $\|f(x)\|_F \leqslant a_1(f)\|x\|_E$, ce qui montre que $a_1(f) \in A$ et que donc $a_4(f) \leqslant a_1(f)$

Nous avons donc obtenu $a_1(f) \leqslant a_2(f) \leqslant a_3(f) = a_4(f) \leqslant a_1(f)$; d'où
$$a_1(f) = a_2(f) = a_3(f) = a_4(f)$$
Ce que nous voulions

Remarque 3 :

1. Remarquons donc que $\|f\|$ est le plus petit élément de A et que donc, il faut retenir que :

   Pour toute application linéaire continue $f : E \longrightarrow F$ et tout $x \in E$, nous avons :
   $$\|f(x)\|_F \leqslant \|f\| \times \|x\|_E$$
2. Il ne faut pas s'empêcher de démontrer que ce sont des normes ! ! *(cf l'exercice qui suit la remarque)*
3. Soient $(E, \|\bullet\|_E)$ et $(F, \|\bullet\|_F)$, 2 $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés, tous deux sur le même corps $\mathbb{K}$ Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire continue.
   La norme $\|f\| = \sup\limits_{\|x\|_E \leqslant 1}\|f(x)\|_F$ s'appelle <u>norme induite</u> de f par $\|\bullet\|_E$ et $\|\bullet\|_F$

Exercice 1 :

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés et $\mathcal{L}_c(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires continues sur E vers F. Pour $f \in \mathcal{L}_c(E, F)$, on pose $\|f\| = \sup\limits_{\|x\|_E \leqslant 1}\|f(x)\|_F$.
Démontrer que ceci définit une norme sur $\mathcal{L}_c(E, F)$

A.1.6 Proposition

Soient $(E, \|\bullet\|_E)$, $(F, \|\bullet\|_F)$ et $(G, \|\bullet\|_G)$ 3 $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés, tous trois sur le même corps $\mathbb{K}$
Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ 2 applications linéaires continues
Alors, $g \circ f$ est continue *(c'est à dire $g \circ f \in \mathcal{L}_c(E, G)$)* et $\|g \circ f\| \leqslant \|g\| \times \|f\|$

Démonstration

- $\Rightarrow$ Tout d'abord, la composée de 2 applications linéaires est une application linéaire et donc $g\circ f$ est une application linéaire .
  De même, la composée de 2 applications continues est aussi continue et donc $g\circ f$ est aussi continue.
  Donc, $g\circ f\in\mathcal{L}_c\left(E,G\right)$
- $\Rightarrow$ Maintenant, soit $x\in E$. Alors :

$$\left\|g\circ f\left(x\right)\right\|_G=\left\|g\left[f\left(x\right)\right]\right\|_G\leqslant\left\|g\right\|\times\left\|f\left(x\right)\right\|_F\leqslant\left\|g\right\|\times\left\|f\right\|\times\left\|x\right\|_E$$

  Ainsi, pour tout $x\in E$, $\left\|g\circ f\left(x\right)\right\|_G\leqslant\left\|g\right\|\times\left\|f\right\|\times\left\|x\right\|_E$.
  Or, $\left\|g\circ f\right\|$ est le plus petit nombre $k>0$ tel que $\left\|g\circ f\left(x\right)\right\|_G\leqslant k\times\left\|x\right\|_E$. D'où :

$$\left\|g\circ f\right\|\leqslant\left\|g\right\|\times\left\|f\right\|$$

Remarque 4 :

Si $\left(E,\left\|\bullet\right\|_E\right)$ est un espace de Banach, $\left\|\bullet\right\|_E$ est appelée norme d'Algèbre si, pour tout $u\in E$ et tout $v\in E$, $\left\|\bullet\right\|_E uv\left\|u\right\|_E\times\left\|v\right\|_E$

A.1.7 Théorème

Dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

Démonstration

Nous admettons ce théorème

Remarque 5 :

1. L'équivalence des normes a déjà été définie en 1.2.6
2. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel , $\mathcal{N}_1$ et $\mathcal{N}_2$ deux normes sur E.
   $\mathcal{N}_1$ et $\mathcal{N}_2$ sont équivalentes si et seulement si $\mathrm{Id}_E:\left(E,\mathcal{N}_1\right)\longrightarrow\left(E,\mathcal{N}_2\right)$ et $\mathrm{Id}_E:\left(E,\mathcal{N}_2\right)\longrightarrow\left(E,\mathcal{N}_1\right)$ sont continues.
   Rappelons que Id_E est une application linéaire .
   - $\Rightarrow$ Supposons que $\mathrm{Id}_E:\left(E,\mathcal{N}_1\right)\longrightarrow\left(E,\mathcal{N}_2\right)$ et $\mathrm{Id}_E:\left(E,\mathcal{N}_2\right)\longrightarrow\left(E,\mathcal{N}_1\right)$ sont continues.
     - $\triangleright$ Si $\mathrm{Id}_E:\left(E,\mathcal{N}_1\right)\longrightarrow\left(E,\mathcal{N}_2\right)$ est une application continue.
       Alors, pour tout $x\in E$, il existe $k>0$ tel que
       $$\mathcal{N}_1\left(\mathrm{Id}_E\left(x\right)\right)\leqslant k\mathcal{N}_2\left(x\right)\Longleftrightarrow\mathcal{N}_1\left(x\right)\leqslant k\mathcal{N}_2\left(x\right)$$
     - $\triangleright$ De la même manière, si $\mathrm{Id}_E:\left(E,\mathcal{N}_2\right)\longrightarrow\left(E,\mathcal{N}_1\right)$ est continue, il existe $k'>0$ tel que
       $$\mathcal{N}_2\left(\mathrm{Id}_E\left(x\right)\right)\leqslant k'\mathcal{N}_1\left(x\right)\Longleftrightarrow\mathcal{N}_2\left(x\right)\leqslant k\mathcal{N}_1\left(x\right)$$

     Ce qui est donc la définition de normes équivalentes.
   - $\Rightarrow$ Réciproquement, il est facile de démontrer que si $\mathcal{N}_1$ et $\mathcal{N}_2$ sont équivalentes alors $\mathrm{Id}_E:\left(E,\mathcal{N}_1\right)\longrightarrow\left(E,\mathcal{N}_2\right)$ et $\mathrm{Id}_E:\left(E,\mathcal{N}_2\right)\longrightarrow\left(E,\mathcal{N}_1\right)$ sont continues.

A.1.8 Théorème

Soient E et F, 2 $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés, tous deux sur le même corps $\mathbb{K}$, le $\mathbb{K}$-espace vectoriel E étant de dimension finie
Alors, toute application linéaire $f:E\longrightarrow F$ est continue

Démonstration

E étant de dimension finie admet donc une base $\{e_1, \cdots, e_n\}$.

Alors, pour tout $x \in E$, $f(x) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(e_i)$ et donc :

$$\|f(x)\|_F \leqslant \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \, \|f(e_i)\|_F$$

Appelons $M = \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} \|f(e_i)\|_F$, alors :

$$\|f(x)\|_F \leqslant M \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|$$

Or, l'expression $\mathcal{N}(x) = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|$ est une norme sur E, et de l'équivalence des normes dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, nous pouvons écrire

$$\|f(x)\|_F \leqslant M \|x\|_E$$

Ce qui montre que f est une application linéaire continue.

Remarque 6 :

Si E et F sont 2 $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, admettons $\dim E = m$ et $\dim F = n$, alors, l'espace $\mathcal{L}_c(E, F)$ des applications linéaires continues de E dans F est isomorphe à l'espace des matrices $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et nous avons donc $\dim \mathcal{L}_c(E, F) = m \times n$

A.1.9 Théorème

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé et $f \in \mathcal{L}_c(E)$

Alors, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{f^n}{n!}$ est normalement convergente

On note $\exp f$ sa somme *(qui est un endomorphisme de E)*

Démonstration

1. D'après A.1.6, nous avons $\left\|f^2\right\| = \|f \circ f\| \leqslant \|f\|^2$, et donc, plus généralement, en faisant une récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, $\|f^n\| \leqslant \|f\|^n$
2. Nous avons alors $\left\|\frac{f^n}{n!}\right\| \leqslant \frac{\|f\|^n}{n!}$

   La série numérique à termes positifs $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\|f\|^n}{n!}$ est convergente et donc la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{f^n}{n!}$ est normalement convergente

Exemple 2 :

En particulier, si $\mathcal{O} \in \mathcal{L}_c(E)$ est l'endomorphisme nul, nous avons $\exp \mathcal{O} = \mathrm{Id}_E$

A.1.10 Proposition

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé, $f \in \mathcal{L}_c(E)$ et $g \in \mathcal{L}_c(E)$ 2 endomorphismes continus qui commutent, c'est à dire que $f \circ g = g \circ f$

Alors $\exp(f + g) = (\exp f) \circ (\exp g) = (\exp g) \circ (\exp f)$

Démonstration

Nous avons $\exp(f+g) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(f+g)^n}{n!}$.

f et g commutant, on peut utiliser le binôme de Newton : $(f+g)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{n-k} g^k$ et donc

$$\frac{(f+g)^n}{n!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{n-k} g^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{n-k}}{(n-k)!} \times \frac{g^k}{k!}$$

Et, en présentant sous forme de tableau, nous avons une présentation de $\exp(f+g)$

$n=0$	Id_E
$n=1$	$f+g$
$n=2$	$\frac{f^2}{2} + f \circ g + \frac{g^2}{2}$
$n=3$	$\frac{f^3}{3!} + \frac{f^2}{2!} \circ g + f \circ \frac{g^2}{2!} + \frac{g^3}{3!}$
$n=4$	$\frac{f^4}{4!} + \frac{f^3}{3!} \circ g + \frac{f^2}{2!} \circ \frac{g^2}{2!} + f \circ \frac{g^3}{3!} + \frac{g^4}{4!}$
$\vdots$	$\vdots$
n	$\frac{f^n}{n!} + \frac{f^{n-1}}{(n-1)!} \circ g + \frac{f^{n-2}}{(n-2)!} \circ \frac{g^2}{2!} + \frac{f^{n-3}}{(n-3)!} \circ \frac{g^3}{3!} + \cdots + f \circ \frac{g^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{g^n}{n!}$
$\vdots$	$\vdots$

Et donc $\exp(f+g) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{g^n}{n!} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^k}{k!} \right) = \exp f \times \exp g$

A.1.11 Corollaire

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé, $f \in \mathcal{L}_c(E)$ un endomorphisme continu.
Alors $\exp f$ est un élément inversible de $\mathcal{L}_c(E)$

Démonstration

Soit $f \in \mathcal{L}_c(E)$
Alors, nous avons $f - f = \mathcal{O}_E$ et donc $\exp(f-f) = \exp(\mathcal{O}_E) = \mathrm{Id}_E$ et donc, d'après la proposition précédente, $\exp(f-f) = \exp(f) \circ \exp(-f) = \mathrm{Id}_E$.
Ce qui montre que $\exp f$ est inversible et d'inverse $\exp(-f)$

A.1.12 Quelques questions

Exercice 2 :

Il existe des applications linéaires qui ne sont pas continues
On appelle $l^1(\mathbb{N})$ l'espace des suites sommables, c'est à dire :

$$l^1(\mathbb{N}) = \left\{ A = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ où } a_n \in \mathbb{R} \text{ et } \sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n| < +\infty \right\}$$

On définit dans $l^1(\mathbb{N})$ la norme suivante : $\|A\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$.

On construit l'application $\Phi : \left(l^1(\mathbb{N}), \|\bullet\|_\infty\right) \longrightarrow (\mathbb{R}, |\bullet|)$ par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \Phi : \left(l^1(\mathbb{N}), \|\bullet\|_\infty\right) & \longrightarrow & (\mathbb{R}, |\bullet|) \\ A = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & \Phi(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \end{array}\right.$$

1. Il faut montrer que Φ est une application linéaire
2. Soit $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $l^1(\mathbb{N})$ définie par $S_n = (x_{n,p})_{p\in\mathbb{N}}$ où :

$$x_{n,p} = \frac{1}{n} \text{ si } p < n \text{ et } x_{n,p} = 0 \text{ si } p \geqslant n$$

(a) Calculer $\|S_n\|_\infty$

(b) Calculer $\Phi(S_n)$

Qu'en déduire ?

Exercice 3 :

1. $\mathcal{C}([0;1], \mathbb{R})$ est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues définies sur l'intervalle $[0;1]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Nous y définissons les normes

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t \text{ et } \|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 |f(t)|^2\,\mathrm{d}t}$$

(a) L'application linéaire $T : \left(\mathcal{C}([0;1], \mathbb{R}); \|\bullet\|_1\right) \longrightarrow \left(\mathcal{C}([0;1], \mathbb{R}); \|\bullet\|_1\right)$ définie pour tout $f \in \mathcal{C}([0;1], \mathbb{R})$ par $T(f) = f \times g$ où $g \in \mathcal{C}([0;1], \mathbb{R})$ est une fonction définie une fois pour toutes est-elle continue ?

(b) L'application linéaire $T : \left(\mathcal{C}([0;1], \mathbb{R}); \|\bullet\|_2\right) \longrightarrow \left(\mathcal{C}([0;1], \mathbb{R}); \|\bullet\|_1\right)$ définie pour tout $f \in \mathcal{C}([0;1], \mathbb{R})$ par $T(f) = f \times g$ où $g \in \mathcal{C}([0;1], \mathbb{R})$ est une fonction définie une fois pour toutes est-elle continue ?

2. Dans $\mathbb{R}[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, pour $P \in \mathbb{R}[X]$ où $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, avec $n = \deg P$, nous définissons les normes

$$\|P\|_A = \sum_{k=0}^{n} |a_k| \text{ et } \|P\|_B = \sum_{k=0}^{n} k!\,|a_k|$$

(a) L'application linéaire $T : \left(\mathbb{R}[X]; \|\bullet\|_A\right) \longrightarrow \left(\mathbb{R}[X]; \|\bullet\|_A\right)$ définie pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ par $T(P) = P'$ est-elle continue ?

(b) L'application linéaire $T : \left(\mathbb{R}[X]; \|\bullet\|_B\right) \longrightarrow \left(\mathbb{R}[X]; \|\bullet\|_B\right)$ définie pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ par $T(P) = P'$ est-elle continue ?

Exercice 4 :

$\mathcal{C}^\infty([0;1], \mathbb{R})$ est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions indéfiniment continuement dérivables définies sur l'intervalle $[0;1]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Nous considérons l'application linéaire D définie pour tout $f \in \mathcal{C}^\infty([0;1], \mathbb{R})$ par $D(f) = f'$ où f' est la dérivée première de f.
Démontrer que, quelle soit la norme $\mathcal{N}$ définie sur $\mathcal{C}^\infty([0;1], \mathbb{R})$, l'application linéaire D n'est jamais continue.

Exercice 5 :

Dans $\mathbb{R}[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, que nous munissons de la norme $\|P\|_\infty = \sup_{1\leqslant k\leqslant n} |a_k|$ avec $n = \deg P$, nous définissons $T : \left(\mathbb{R}[X]; \|\bullet\|_\infty\right) \longrightarrow \left(\mathbb{R}[X]; \|\bullet\|_\infty\right)$ définie pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ par $T(P) = XP$.
Démontrer que T est continue et calculer $|||T|||$ la norme de T

Exercice 6 :

$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{R}$

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme $\mathcal{N}$ définie pour tout $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ par $\mathcal{N}(A) = \sup_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|$ *(on admet qu'il s'agit d'une norme).*

Démontrer que l'application trace $\mathrm{Tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue, et calculer sa norme.
On rappelle que la trace d'une matrice est la somme de ses éléments diagonaux

Exercice 7 :

$\mathcal{C}^0([0;1], \mathbb{R})$ est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues définies sur l'intervalle $[0;1]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ muni de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0;1]} |f(x)|$

$\mathcal{C}^1([0;1], \mathbb{R})$ est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continuement dérivables définies sur l'intervalle $[0;1]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ muni de la norme $\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$

Soit $T : \mathcal{C}^0([0;1], \mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}^1([0;1], \mathbb{R})$ définie pour tout $f \in \mathcal{C}^0([0;1], \mathbb{R})$ par $T(f)(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\, dt$.

Il faut montrer que T est continue et trouver sa norme

Exercice 8 :

(Cet exercice a de grosses similarités avec le précédent)
Soit $\mathcal{C}^0([0;1], \mathbb{R})$ est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues définies sur l'intervalle $[0;1]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ muni de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0;1]} |f(x)|$

Pour $f \in \mathcal{C}^0([0;1], \mathbb{R})$, on définit $L(f) : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ par $L(f)(t) = \displaystyle\int_0^1 (t+u) f(u)\, du$

Il faut démontrer que L est un endomorphisme continu de $\mathcal{C}^0([0;1], \mathbb{R})$ et calculer $|||L|||$, la norme de L

Exercice 9 :

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé. Soient $\|\bullet\|_1$ et $\|\bullet\|_2$ deux normes sur E.
On note $\|\bullet\|_{op,1}$ et $\|\bullet\|_{op,2}$ les normes subordonnées sur $\mathcal{L}_c(E)$ associées à ces deux normes.
Démontrer que si $\|\bullet\|_1$ et $\|\bullet\|_2$ sont 2 normes équivalentes, alors $\|\bullet\|_{op,1}$ et $\|\bullet\|_{op,2}$ sont équivalentes.

Exercice 10 :

Soit $l^\infty(\mathbb{N})$ est le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des suites bornées $U = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ muni de la norme $\|U\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$.

1. Nous définissons $T : (l^\infty(\mathbb{N}), \|\bullet\|_\infty) \longrightarrow (l^\infty(\mathbb{N}), \|\bullet\|_\infty)$ par $T(U) = V$ où, si $V = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{n+1} - u_n$
   Justifier que T est continue et calculer sa norme subordonnée.
2. **Moyenne de Césaro**
   Nous définissons $C : (l^\infty(\mathbb{N}), \|\bullet\|_\infty) \longrightarrow (l^\infty(\mathbb{N}), \|\bullet\|_\infty)$ par $C(U) = V$ où, si $V = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{1}{n+1} \displaystyle\sum_0^n u_k$
   Justifier que C est continue et calculer sa norme subordonnée.

Exercice 11 :

On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^n$.
$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n

1. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$. Nous munissons $\mathbb{R}^n$ de la norme $\|X\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|$.

   Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, où $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ montrer qu'alors $|||A||| = \sup_{1 \leqslant j \leqslant n} \sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}|$

2. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$. Nous munissons $\mathbb{R}^n$ de la norme $\|X\|_\infty = \sup_{1 \leqslant k \leqslant n} |x_k|$.

   Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, où $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ montrer qu'alors $|||A||| = \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|$

Exercice 12 :

Nous nous plaçons dans $\mathcal{C}^0([0;1], \mathbb{R})$, le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues définies sur l'intervalle $[0;1]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ que l'on munit de la norme

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| \, \mathrm{d}t$$

Soit Φ l'endomorphisme de $\mathcal{C}^0([0;1], \mathbb{R})$ défini par $\Phi(f)(x) = \int_0^x f(t) \, \mathrm{d}t$

1. Démontrer que Φ est continue
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{C}^0([0;1], \mathbb{R})$ définie pour tout $n_i n\mathbb{N}$ et tout $x \in [0;1]$ par $f_n(x) = ne^{-nx}$. Calculer $\|f_n\|_1$ et $\|\Phi(f_n)\|_1$
3. Quelle est $|||\Phi|||$, la norme de l'opérateur Φ ?

Exercice 13 :

Dans $\mathcal{C}^0([0;1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0;1]} |f(x)|$.

On pose $A = \left\{ f \in \mathcal{C}^0([0;1], \mathbb{R}) \text{ telles que } f(0) = 0 \text{ et } \int_0^1 f(t) \, \mathrm{d}t \geqslant 0 \right\}$. Démontrer que A est une partie fermée de $\mathcal{C}^0([0;1], \mathbb{R})$.

Exercice 14 :

(Cet exercice a quelques similarités avec le précédent)
Soit $l^1(\mathbb{N})$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres complexes telle que $\sum_{n \geqslant 0} |a_n|$ converge.

On pose, pour $A = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ élément de $l^1(\mathbb{N})$ $\|A\| = \sum_{n \geqslant 0} |a_n|$

1. Démontrer que $\|A\|$ définit une norme sur $l^1(\mathbb{N})$
2. Soit $F \subset l^1(\mathbb{N})$ tel que $F = \left\{ A = (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l^1(\mathbb{N}) \text{ tel que } \sum_{n \geqslant 0} a_n = 1 \right\}$. F est-il ouvert ? fermé ? borné ?

Exercice 15 :

Soit $(E, \|\bullet\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé et $u \in \mathcal{L}(E)$. Démontrer que u est continue si et seulement si $\{x \in E \text{ tel que } \|u(x)\| = 1\}$ est fermé.

Exercice 16 :

Soit $(E, \|\bullet\|)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé et soit $\Phi : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire non identiquement nulle.

1. Démontrer que si Φ est continue, alors le noyau de Φ est fermé dans E
2. Réciproquement, on suppose que le noyau de Φ, noté H, est fermé. On fixe $y \in E$ tel que $\Phi(y) = 1$.
   (a) Démontrer que $\Phi^{-1}(\{1\})$ est un ensemble fermé dans E
   (b) En déduire qu'il existe $\rho > 0$ tel que $\overline{B(0,\rho)} \cap \Phi^{-1}(\{1\}) = \emptyset$
   (c) Démontrer que si $x \in \overline{B(0,\rho)}$, alors $|\Phi(x)| \leqslant 1$
   (d) Conclure

Exercice 17 :

Nous nous plaçons, dans cet exercice dans le $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $\mathbb{C}_n[X]$.
Nous considérons, dans cet ensemble, 2 endomorphismes :
- ⇒ L'endomorphisme de dérivation : $D : \mathbb{C}_n[X] \longrightarrow \mathbb{C}_n[X]$ où si $P \in \mathbb{C}_n[X]$, $D(P) = P'$ où P' est le polynôme dérivé de P
- ⇒ L'endomorphisme $T : \mathbb{C}_n[X] \longrightarrow \mathbb{C}_n[X]$ où si $P \in \mathbb{C}_n[X]$, $T(P)(X) = P(X+1)$

Il faut montrer que $\exp D = T$

Exercice 18 :

Soit u un endomorphisme nilpotent d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie. Etablir que :

$$\ker u = \ker(\exp u - \mathrm{Id}_E) \text{ et } \mathrm{Im} u = \mathrm{Im}(\exp u - \mathrm{Id}_E)$$