A.2 Exponentielle d'une matrice

Préliminaires

Avant de commencer, faisons un état des lieux.

1. $\mathbb{K}$ est toujours mis pour $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices carrées à coefficients dans $\mathbb{K}$
2. $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n^2 dans lequel toutes les normes sont équivalentes, mais toutes ne sont pas des normes d'Algèbre (voir A.1.6, page 1226)

A.2.1 Rappel sur les $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie

Rappelons que sur le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, qui est de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes

1. Ainsi pour une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(a_{i,j}^n\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}}$ de matrices et une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ où $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}}$ nous avons, au sens d'une norme quelconque sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ notée $\|\bullet\|$:
$$\lim_{n\to+\infty} A_n = A \iff \lim_{n\to+\infty} \|A_n - A\| = 0 \iff (\forall i)(\forall j)(1\leqslant i\leqslant n)(1\leqslant j\leqslant n)\left(\lim_{n\to+\infty} a_{i,j}^n = a_{i,j}\right)$$
2. Si $\lim_{n\to+\infty} A_n = A$ et $\lim_{n\to+\infty} B_n = B$, alors :
   - $\lim_{n\to+\infty}(A_n + B_n) = A + B$
   - $\lim_{n\to+\infty}(A_n B_n) = AB$

   Si, de plus, A_n et A sont inversibles, alors $\lim_{n\to+\infty} A_n^{-1} = A^{-1}$

Exemple 3 :

On considère le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}^n$. $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, où $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}}$

1. Si nous munissons $\mathbb{K}^n$ de la norme $\|X\|_1 = \sum_{k=1}^{n}|x_k|$, la norme subordonnée de A est $|||A||| = \sup_{1\leqslant j\leqslant n}\sum_{i=1}^{n}|a_{i,j}|$; c'est une norme d'algèbre.
2. De même, si nous munissons $\mathbb{K}^n$ de la norme $\|X\|_\infty = \sup_{1\leqslant k\leqslant n}|x_k|$, la norme associée de $|||A|||$ est $|||A||| = \sup_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}|$; c'est aussi une norme d'Algèbre *(Pour une démonstration, voir exercice 11 page 1253)*

Exercice 19 :

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}}$, on pose $\|A\|_\infty = \sup_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}}|a_{i,j}|$

Il faut montrer que $\|A\|_\infty$ **n'est pas une norme d'algèbre**

A.2.2 Porisme

$\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices carrées à coefficients dans $\mathbb{K}$ muni d'une norme d'algèbre
Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui converge vers une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Alors,

1. La suite $(A_n^\intercal)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $A^\intercal$
2. Pour toutes matrices $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la suite $(XA_nY)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers XAY

Démonstration

1. **Démontrons que la suite $(A_n^\intercal)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $A^\intercal$**
   Pour simplifier, nous notons $A = (a_{i,j})$ et $A_n = \left(a_{i,j}^n\right)$. En posant, pour simplifier, $A_n^\intercal = \left(b_{i,j}^n\right)$, nous avons $b_{i,j}^n = a_{j,i}^n$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} a_{j,i}^n = a_{j,i}$, et, en retraduisant, $\lim\limits_{x\to+\infty} b_{i,j}^n = a_{j,i}$.
   C'est à dire $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n^\intercal = A^\intercal$
2. **Démontrons que la suite $(XA_nY)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers XAY**
   Tout d'abord, nous avons $XA_nY - XAY = X(A_n - A)Y$, et en passant à la norme :
   $$\|XA_nY - XAY\| = \|X(A_n - A)Y\| \leqslant \|X\|\,\|A_n - A\|\,\|Y\|$$
   Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \|A_n - A\| = 0$, nous avons aussi $\lim\limits_{n\to+\infty} \|XA_nY - XAY\| = 0$, c'est à dire
   $$\lim_{n\to+\infty} XA_nY = XAY$$

Remarque 7 :

1. Pour le premier point, nous pourrions écrire $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n^\intercal = \left(\lim\limits_{n\to+\infty} A_n\right)^\intercal$
2. Si nous nous considérons les 2 applications :
   $$\left\{\begin{array}{rcl} \Phi_1 : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ A & \longmapsto & \Phi_1(A) = XAY \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{rcl} \Phi_2 : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ A & \longmapsto & \Phi_2(A) = A^\intercal \end{array}\right.$$
   le résultat A.2.2 exprime que Φ_1 et Φ_2 sont des applications continues.
   La multiplication des matrices et le passage à la transposée sont donc des applications continues de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

A.2.3 Définition de l'exponentielle de matrice

L'algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est munie d'une norme d'algèbre $\|X\|$, c'est à dire d'une norme telle que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et tout $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\|AB\| \leqslant \|A\|\,\|B\|$
Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, nous définissons la série $\exp A = \sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{A^n}{n!}$
Elle converge normalement et est appelée **exponentielle de matrices**.

Démonstration

Cette démonstration est en tout point semblable à celle de A.1.9
Comme nous avons choisi une norme d'algèbre, alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\left\|\dfrac{A^k}{k!}\right\| \leqslant \dfrac{\|A\|^k}{k!}$
$\dfrac{\|A\|^k}{k!}$ est le terme général de la série convergente $\exp\|A\|$. On a donc bien la convergence normale et le reste en découle (en particulier, $\|\exp A\| \leqslant \exp\|A\|$).

Exemple 4 :

1. Pour $\mathcal{O}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la matrice nulle, nous avons $\exp(\mathcal{O}_n) = \mathrm{Id}_n$
2. Considérons la matrice diagonale d'ordre 2 $D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$.

   De manière très classique, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $D^k = \begin{pmatrix} a^k & 0 \\ 0 & b^k \end{pmatrix}$, et donc $\dfrac{D^k}{k!} = \begin{pmatrix} \dfrac{a^k}{k!} & 0 \\ 0 & \dfrac{b^k}{k!} \end{pmatrix}$ et

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{D^k}{k!} = \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!} & 0 \\ 0 & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{b^k}{k!} \end{pmatrix}$$

   Nous en déduisons que $\exp D = \begin{pmatrix} e^a & 0 \\ 0 & e^b \end{pmatrix}$.

3. En généralisant aux matrices $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, diagonales, c'est à dire $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$,

   alors $\exp D = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$

4. On peut remarquer, et la démonstration est évidente, que $\det(\exp D) = e^{\mathrm{Tr}(D)}$ où $\mathrm{Tr}(D)$ désigne la trace de la matrice D

A.2.4 Proposition

1. Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\exp(A^\intercal) = (\exp A)^\intercal$
2. Si $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice diagonale, alors $\exp D$ est aussi une matrice diagonale
3. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est nilpotente, alors $\exp A = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} \frac{A^k}{k!}$

Démonstration

Nous ne démontrons que les points 1 et 3. Pour le point 2, il suffit de se référer à la remarque

1. **Démontrons que pour toute matrice** $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$**,** $\exp(A^\intercal) = (\exp A)^\intercal$

   Soit $S_N = \displaystyle\sum_{k=0}^{N} \frac{A^k}{k!}$ et $\displaystyle\lim_{N \to +\infty} S_N = \exp A$.

   Ensuite, $(S_N)^\intercal = \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{N} \frac{A^k}{k!}\right)^\intercal = \displaystyle\sum_{k=0}^{N} \frac{(A^\intercal)^k}{k!}$.

   Or, d'après A.2.2, $\displaystyle\lim_{N \to +\infty} (S_N)^\intercal = \left(\lim_{N \to +\infty} S_N\right)^\intercal = (\exp A)^\intercal$

Et $\lim\limits_{N\to+\infty}(S_N)^\intercal = \lim\limits_{N\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{N}\dfrac{(A^\intercal)^k}{k!} = \exp(A^\intercal)$
Et donc $\exp(A^\intercal) = (\exp A)^\intercal$

2. **Démontrons que si** $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ **est nilpotente, alors** $\exp A = \sum\limits_{k=1}^{N}\dfrac{A^k}{k!}$

   Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice nilpotente.
   Il existe alors $N \in \mathbb{N}$ telle que $A^{N+1} = \mathcal{O}_n$ et donc pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $A^{N+k} = \mathcal{O}_n$ et donc $\exp A = \sum\limits_{n\geqslant 0}\dfrac{A^n}{n!} = \sum\limits_{n=0}^{N}\dfrac{A^n}{n!}$.
   Ce que nous voulions

Exercice 20 :

$\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est muni d'une norme d'algèbre, c'est à dire que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et tout $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\|AB\| \leqslant \|A\|\,\|B\|$.

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

1. Calculer $\exp A$, $\exp B$, puis $\exp(A+B)$. Vérifier aussi que $\exp(A^\intercal) = (\exp A)^\intercal$. Vérifier que $\det(\exp A) = e^{\mathrm{Tr}(A)}$
2. Calculer $\exp(-A)$ et vérifier que $\exp(-A) = (\exp A)^{-1}$
3. Démontrer que, pour tout $s \in \mathbb{K}$ et tout $t \in \mathbb{K}$, $\exp(sA)\exp(tA) = \exp((s+t)A)$

A.2.5 Proposition

$\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices carrées à coefficients dans $\mathbb{K}$
Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ 2 matrices qui commutent (c'est à dire que $AB = BA$).
Alors $\exp(A+B) = (\exp A)\times(\exp B) = (\exp B)\times(\exp A)$

Démonstration

La démonstration est semblable à celle de A.1.10. Elle est donc laissée au lecteur.

A.2.6 Proposition

$\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices carrées à coefficients dans $\mathbb{K}$
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors

1. $\exp(A)$ est inversible et $(\exp A)^{-1} = \exp(-A)$
   En particulier, l'exponentielle des matrices est à valeurs dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, c'est à dire que, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, nous avons $\exp(A) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$
2. Pour tout $p \in \mathbb{Z}$, nous avons $(\exp(A))^p = \exp(pA)$

Démonstration

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Alors A et $-A$ commutent et $A + (-A) = \mathcal{O}_n$.
   - ▷ De la commutativité, nous tirons $\exp(A+(-A)) = (\exp A)\times(\exp -A)$
   - ▷ De $A+(-A) = \mathcal{O}_n$, nous tirons $\exp(A+(-A)) = (\mathcal{O}_n) = \mathrm{Id}_n$
   - ▷ Donc $(\exp A)\times(\exp -A) = \mathrm{Id}_n$

   $\exp(A)$ est donc inversible et $(\exp A)^{-1} = \exp(-A)$

2. Démonstration très classique
   - ▷ Si $p \in \mathbb{N}$, alors :

$$\exp(pA) = \exp\left(\underbrace{A + A + \cdots + A}_{p \text{ fois}}\right) = (\exp A)^p$$

   - ▷ Si $p \in \mathbb{Z}^-$, alors :

$$\exp(pA) = \exp - (-pA) = (\exp(-pA))^{-1} \exp\left(\underbrace{A + A + \cdots + A}_{-p \text{ fois}}\right) = \left[(\exp A)^{-p}\right]^{-1} = (\exp(A))^p$$

   Donc, dans tous les cas, pour tout $p \in \mathbb{Z}$, nous avons $(\exp(A))^p = \exp(pA)$

A.2.7 Proposition

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Considérons la fonction $g_A : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} g_A : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ t & \longmapsto & g_A(t) = \exp(tA) \end{array}\right.$$

Alors, cette fonction est différentiable sur $\mathbb{R}$ et $g'_A(t) = A\exp(tA)$

Démonstration

Soit $t_0 \in \mathbb{R}$ fixé.

⇒ Il faut évaluer $g_A(t_0 + h) - g_A(t_0)$ et en tirer la partie linéaire $L_{t_0}(h)$.

- ⋆ Tout d'abord :

$$\begin{aligned} g_A(t_0 + h) - g_A(t_0) &= \exp((t_0 + h)A) - \exp(t_0 A) \\ &= \exp(t_0 A)\exp(hA) - \exp(t_0 A) = \exp(t_0 A)(\exp(hA) - \mathrm{Id}_n) \end{aligned}$$

- ⋆ Maintenant, qu'est $\exp(hA) - \mathrm{Id}_n$?

$$\exp(hA) - \mathrm{Id}_n = \sum_{n\geqslant 0} \frac{(hA)^n}{n!} - \mathrm{Id}_n = \sum_{n\geqslant 1} \frac{(hA)^n}{n!} = hA + \sum_{n\geqslant 2} \frac{(hA)^n}{n!} = hA + h^2 \sum_{n\geqslant 2} \frac{h^{n-2}A^n}{n!}$$

- ⋆ De telle sorte que $g_A(t_0 + h) - g_A(t_0) = hA\exp(t_0 A) + \exp(t_0 A)\, h^2 \sum_{n\geqslant 2} \frac{h^{n-2}A^n}{n!}$
- ⋆ En posant $L_{t_0}(h) = hA\exp(t_0 A)$, nous voyons bien que nous obtenons, là, la partie linéaire.
- ⋆ Et en posant $\varepsilon_{t_0}(h) = h\exp(t_0 A) \sum_{n\geqslant 2} \frac{h^{n-2}A^n}{n!}$, nous pouvons écrire :

$$g_A(t_0 + h) - g_A(t_0) = L_{t_0}(h) + h\varepsilon_{t_0}(h)$$

⇒ Il faut, maintenant, montrer que $\lim\limits_{h\to 0} \varepsilon_{t_0}(h) = \lim\limits_{h\to 0} h\exp(t_0 A) \sum_{n\geqslant 2} \frac{h^{n-2}A^n}{n!} = 0$

Sachant que t_0 est un nombre fixé, nous avons :

$$\left\| h\exp(t_0 A) \sum_{n\geqslant 2} \frac{h^{n-2}A^n}{n!} \right\| \leqslant |h|\, e^{|t_0|\|A\|} \sum_{n\geqslant 2} \frac{\left|h^{n-2}\right| \|A\|^n}{n!}$$

Comme nous recherchons la limite lorsque h tend vers 0, nous pouvons supposer $|h| < 1$ et alors :

$$\left\| h\exp(t_0 A) \sum_{n\geqslant 2} \frac{h^{n-2}A^n}{n!} \right\| \leqslant |h|\, e^{|t_0|\|A\|} \sum_{n\geqslant 2} \frac{\|A\|^n}{n!}$$

De l'égalité $e^{\|A\|} = \sum_{n\geqslant 0} \frac{\|A\|^n}{n!} = 1 + \|A\| + \sum_{n\geqslant 2} \frac{\|A\|^n}{n!}$, nous déduisons que $\sum_{n\geqslant 2} \frac{\|A\|^n}{n!} \leqslant e^{\|A\|}$ et donc :

$$\left\| h\exp(t_0 A) \sum_{n\geqslant 2} \frac{h^{n-2}A^n}{n!} \right\| \leqslant |h|\, e^{(|t_0|+1)\|A\|}$$

Comme t_0 et A sont des données fixées une fois pour toutes, le nombre réel $e^{(|t_0|+1)\|A\|}$ est un nombre dépendant des hypothèses, fixé une fois pour toutes et donc

$$\lim_{h\to 0} |h|\, e^{(|t_0|+1)\|A\|} = 0$$

C'est à dire $\lim_{h\to 0} \varepsilon_{t_0}(h) = 0$

Nous en déduisons donc que g_A est une fonction différentiable sur $\mathbb{R}$ et que $g_A'(t) = A\exp(tA)$

Exercice 21 :

Nous nous plaçons dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

1. Considérons une application $A : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$\begin{cases} A : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ t & \longmapsto & A(t) = \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

   (a) Calculer $\exp A(t)$, puis $(\exp A(t))'$

   (b) Calculer ensuite $A'(t)\exp A(t)$ et $\exp A(t)\, A'(t)$

2. Considérons, cette fois-ci l'application $A : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$\begin{cases} A : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ t & \longmapsto & A(t) = \begin{pmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

   Calculer $\exp A(t)$

A.2.8 Proposition

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, nous avons $\exp\left(Q^{-1}AQ\right) = Q^{-1}\exp(A)\,Q$

Démonstration

Soit $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{\left(Q^{-1}AQ\right)^k}{k!}$; classiquement, $\lim_{n\to+\infty} S_n = \exp\left(Q^{-1}AQ\right)$.

D'après le cours et les résultats sur les matrices semblables, pour tout $k \in \mathbb{N}$, nous avons

$$\left(Q^{-1}AQ\right)^k = Q^{-1}A^kQ$$

Et donc : $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{\left(Q^{-1}AQ\right)^k}{k!} = Q^{-1}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!}\right) Q$

En posant $T_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!}$, nous avons $\lim_{n\to+\infty} T_n = \exp(A)$ et $S_n = Q^{-1}T_nQ$.

D'après le porisme A.2.2, nous avons :

$$\exp\left(Q^{-1}AQ\right) = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} Q^{-1}T_nQ = Q^{-1}\left(\lim_{n\to+\infty} T_n\right) Q = Q^{-1}\exp(A)\,Q$$

Ainsi $\exp\left(Q^{-1}AQ\right) = Q^{-1}\exp(A)\,Q$

Ce que nous voulions.

A.2.9 Corollaire

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonalisable
Il existe donc une matrice $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, diagonale, et une matrice $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $M = Q^{-1}DQ$.
Alors :

1. $\exp(M) = Q^{-1}\exp(D)\,Q$
2. $\det\exp(M) = e^{\mathrm{Tr}(M)}$ où $\mathrm{Tr}(M)$ est la trace de la matrice M.
3. Donc, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\det\exp(M) \neq 0$
4. En particulier, si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors $\det\exp(M) > 0$

Démonstration

1. Le premier point est la simple application de la proposition A.2.8 précédente.
2. Soient $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ les valeurs propres de M.

$$\text{Alors } D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}, \text{ et } \exp D = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

Donc, $\det\exp(M) = \det\left(Q^{-1}\exp(D)\,Q\right) = \det\exp(D) = e^{\lambda_1+\cdots+\lambda_n}$.
Or, d'après les propriétés des traces des matrices :

$$\mathrm{Tr}(M) = \mathrm{Tr}\left(Q^{-1}DQ\right) = \mathrm{Tr}\left[Q^{-1}(DQ)\right] = \mathrm{Tr}\left[(DQ)\,Q^{-1}\right] = \mathrm{Tr}\left[D\left(QQ^{-1}\right)\right] = \mathrm{Tr}(D) = \lambda_1+\cdots+\lambda_n$$

Et nous avons donc bien $\det\exp(M) = e^{\mathrm{Tr}(M)}$

Remarque 8 :

Le corollaire précédent qui montre que si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable, alors $\exp M$ est diagonalisable et nous avons même $\exp(M) = Q^{-1}\exp(D)\,Q$

Remarque 9 :

Quelques rappels

1. Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est trigonalisable sur $\mathbb{K}$ s'il existe une matrice inversible $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que la matrice $P^{-1}MP$ soit triangulaire supérieure. Une matrice diagonalisable est en particulier trigonalisable.
2. Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est trigonalisable sur $\mathbb{K}$ si et seulement si son polynôme caractéristique χ_M est scindé sur $\mathbb{K}$.
   $\Rightarrow$ Un polynôme est scindé sur $\mathbb{K}$ s'il se décompose en produit de facteurs linéaires dans $\mathbb{K}[X]$
   $\Rightarrow$ D'après le théorème de d'Alembert, toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable.
   $\Rightarrow$ Ce qui n'est pas le cas si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
   Par exemple, soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Alors

$$\chi_A(X) = \det(A - X\mathrm{Id}_2) = \begin{vmatrix} -X & -1 \\ 1 & -X \end{vmatrix} = X^2 + 1$$

   Le polynôme $\chi_A(X) = X^2 + 1$ n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$, donc A n'est pas trigonalisable sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   Par contre, si on considère cette même matrice A comme élément de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, alors elle est trigonalisable *(et ici, elle est même diagonalisable)* sur $\mathbb{C}$: il existe $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ inversible telle que $P^{-1}AP$ soit triangulaire supérieure.

3. **Décomposition de Dunford**

   Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ayant un polynôme caractéristique scindé sur $\mathbb{K}$, il existe une unique matrice $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ nilpotente et une unique matrice $\Delta \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisable telles que
   $$A = N + \Delta \text{ et } N\Delta = \Delta N$$

   Attention ! Δ est une matrice diagonalisable, pas nécessairement une matrice diagonale.
4. **Conséquence :**

   Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice avec une décomposition de Dunford $A = N + \Delta$. Alors :
   - A diagonalisable $\iff A = \Delta \iff N = \mathcal{O}_n$
   - A nilpotente $\iff A = N \iff \Delta = \mathcal{O}_n$
5. Comme Δ est diagonalisable, alors il existe une matrice inversible $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$ et une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $D = P^{-1}1\Delta P$. Si on note $N' = P^{-1}1NP$ alors N' est encore nilpotente, du même ordre que N [1] et $N'D = DN'$.
   Une autre façon d'écrire la décomposition de Dunford est alors $P^{-1}1AP = D + N'$.
   C'est dire que A est semblable à la somme d'une matrice diagonale avec une matrice nilpotente.

A.2.10 Proposition

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice qui admet comme décomposition de Dunford $A = N+\Delta$, alors la décomposition de Dunford de $\exp A$ est $\exp A = \exp\Delta + \exp\Delta \times (\exp N - \mathrm{Id}_n)$

Démonstration

1. Tout d'abord, comme A admet comme décomposition de Dunford $A = N + \Delta$, comme N et Δ commutent, nous avons $\exp A = \exp N \times \exp\Delta$
2. Ensuite, $\exp A = \exp N \times \exp\Delta + \exp\Delta - \exp\Delta = \exp\Delta + \exp\Delta(\exp N - \mathrm{Id}_n)$.
   (a) Δ étant diagonalisable, alors $\exp\Delta$ est aussi diagonalisable.
   (b) N étant une matrice nilpotente, $\exp N = \mathrm{Id}_n + A + \dfrac{A^2}{2} + \cdots + \dfrac{A^{n-1}}{(n-1)!}$ et donc :
   $$\exp N - \mathrm{Id}_n = A + \frac{A^2}{2} + \cdots + \frac{A^{n-1}}{(n-1)!} = A\left(\mathrm{Id}_n + \frac{A}{2} + \cdots + \frac{A^{n-2}}{(n-1)!}\right)$$
   De telle sorte que
   $$\left(A\left(\mathrm{Id}_n + \frac{A}{2} + \cdots + \frac{A^{n-2}}{(n-1)!}\right)\right)^n = A^n\left(\mathrm{Id}_n + \frac{A}{2} + \cdots + \frac{A^{n-2}}{(n-1)!}\right)^n = \mathcal{O}_n$$
   Ainsi, la matrice $\mathcal{N} = \exp N - \mathrm{Id}_n$ est, elle aussi, nilpotente.
   (c) D'autre part, $\exp\Delta$ et $\mathcal{N} = \exp N - \mathrm{Id}_n$ commutent.
   En effet :
   $$\exp\Delta \times \mathcal{N} = \exp\Delta(\exp N - \mathrm{Id}_n) = \exp\Delta \times \exp N - \exp\Delta = \exp N \times \exp\Delta = (\exp N - \mathrm{Id}_n)\exp\Delta$$

   Nous avons donc bien la décomposition de Dunford de $\exp A$, par unicité.

A.2.11 Proposition

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\det(\exp A) = e^{\mathrm{Tr}(A)}$

1. Le démontrer !!

Démonstration

1. Soit $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice triangulaire supérieure.
   Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, T^n est aussi triangulaire supérieure et les éléments diagonaux de T^n sont tous des puissances n-ième des éléments diagonaux de T, c'est à dire que si $T = (t_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant}}$ et $T^n = (t_{i,j,n})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant}}$, alors $t_{i,i,n} = (t_{i,i})^n$
2. Dès lors, les coefficients diagonaux de $\exp T$ sont donc $(e^{t_{i,i}})_{1\leqslant i\leqslant n}$ et ainsi :
   $$\det(\exp T) = \prod_{i=1}^{n} e^{t_{i,i}} = e^{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} t_{i,i}\right)} = e^{\mathrm{Tr}(T)}$$
3. Si M est une matrice quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ elle est alors trigonalisable.
   Il existe alors une matrice $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et une matrice triangulaire $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $T = QMQ^{-1}$ et donc $\exp T = \exp\left(QMQ^{-1}\right) = Q\exp(M)\,Q^{-1}$.
   De là, nous tirons que $\det(\exp T) = \det(\exp M)$, c'est à dire $e^{\mathrm{Tr}(T)} = \det(\exp M)$.
   De l'égalité $T = QMQ^{-1}$ et des propriétés de la trace des matrices, nous tirons $\mathrm{Tr}(T) = \mathrm{Tr}(M)$
   Et donc $\det(\exp M) = e^{\mathrm{Tr}(M)}$

Ce que nous voulions

Remarque 10 :

Ce résultat vaut aussi pour les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui sont trigonalisables

A.2.12 Proposition

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ trigonalisable sur $\mathbb{K}$ (automatique si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Alors :

1. A est diagonalisable sur $\mathbb{K}$ si et seulement si $\exp A$ l'est.
2. $\exp A = \mathrm{Id}_n$ si et seulement si A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ et l'ensemble des valeurs propres de A est inclus dans $2i\pi\mathbb{Z}$.

Démonstration

1. **Montrons que A est diagonalisable sur $\mathbb{K}$ si et seulement si $\exp A$ l'est**
   - ▷ Supposons A diagonalisable
     Alors, d'après le corollaire A.2.9, $\exp A$ est diagonalisable
   - ▷ Réciproquement, supposons que $\exp A$ soit diagonalisable.
     - ⋆ Nous avons comme hypothèse que A est trigonalisable.
       Le polynôme caractéristique de A est donc scindé ; on peut donc lui appliquer la décomposition de Dunford $A = \Delta + N$ et $N\Delta = \Delta N$ où Δ est diagonalisable et N nilpotente.
       Il faut donc montrer que $N = \mathcal{O}_n$
     - ⋆ Par hypothèse, $\exp A$ est diagonalisable et la décomposition de Dunford est :
       $$\exp A = \exp\Delta + \exp\Delta \times (\exp N - \mathrm{Id}_n)$$
       Et donc, comme $\exp\Delta$ est inversible d'inverse $\exp(-\Delta)$, nous avons :
       $$\exp\Delta \times (\exp N - \mathrm{Id}_n) = \mathcal{O}_n \iff \exp N = \mathrm{Id}_n$$

⋆ Nous avons :

$$\begin{aligned}\exp N - \mathrm{Id}_n &= \sum_{k\geqslant 0}\frac{N^k}{k!} - \mathrm{Id}_n = \sum_{k\geqslant 1}\frac{N^k}{k!}\\ &= N\times\left(\sum_{k\geqslant 1}\frac{N^{k-1}}{k!}\right) = N\times\left(\mathrm{Id}_n + \sum_{k\geqslant 2}\frac{N^{k-1}}{k!}\right)\\ &= N\times\left(\mathrm{Id}_n + \sum_{k\geqslant 1}\frac{N^k}{(k+1)!}\right)\end{aligned}$$

Nous appelons $N_1 = \sum_{k\geqslant 1}\frac{N^k}{(k+1)!}$

⋆ N étant nilpotente, il existe $p\in\mathbb{N}$ tel que $N^p = \mathcal{O}_n$ et donc

$$N_1 = \sum_{k=1}^{p-1}\frac{N^k}{(k+1)!} = N\times\left(\sum_{k=1}^{p-1}\frac{N^{k-1}}{(k+1)!}\right)$$

Et donc $N_1^p = N^p\times\left(\sum_{k=1}^{p-1}\frac{N^{k-1}}{(k+1)!}\right)^p = \mathcal{O}_n$ et donc N_1 est aussi nilpotente d'ordre p.

⋆ En posant $N' = -N_1$, N' est aussi une matrice nilpotente d'ordre p et

$$\exp N - \mathrm{Id}_n = N\times(\mathrm{Id}_n - N')$$

⋆ La matrice $\mathrm{Id}_n - N'1$ est inversible ; En effet :

$$\begin{aligned}(\mathrm{Id}_n - N')\left(\sum_{k=0}^{p-1}N'^k\right) &= \sum_{k=0}^{p-1}N'^k - \sum_{k=0}^{p-1}N'^{k+1}\\ &= \sum_{k=0}^{p-1}N'^k - \sum_{k=1}^{p}N'^k = \left(\mathrm{Id}_2 + N' + \cdots + N'^{p-1}\right) - \left(N' + \cdots + N'^{p-1}\right)\\ &= \mathrm{Id}_2\end{aligned}$$

L'inverse de $\mathrm{Id}_n - N'$ est donc $\sum_{k=0}^{p-1}N'^k$

⋆ Comme $\exp N = \mathrm{Id}_n \iff \exp N - \mathrm{Id}_n = \mathcal{O}_n$, que $\exp N - \mathrm{Id}_n = N\times(\mathrm{Id}_n - N') = \mathcal{O}_n$ et du fait que $(\mathrm{Id}_n - N')$ est inversible, nous pouvons déduire que $N = \mathcal{O}_n$

Nous en déduisons que $A = \Delta$ et que, donc, A est diagonalisable.

2. **Montrons que $\exp A = \mathrm{Id}_n$ si et seulement si A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ et l'ensemble des valeurs propres de A est inclus dans $2i\pi\mathbb{Z}$**

Première remarque : c'est que Id_n est une matrice diagonale et que si $\exp A = \mathrm{Id}_n$, $\exp A$ est diagonale et, d'après la question précédente, elle l'est si A l'est aussi.

Si $A = PDP^{-1}$ où D est diagonale, alors $\exp A = P\exp DP^{-1}$ et comme $\exp A = \mathrm{Id}_n$, nous avons aussi $P\exp DP^{-1} = \mathrm{Id}_n$ et donc $\exp D = \mathrm{Id}_n$.

Ainsi, si $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ sont les valeurs propres de A, alors $\exp D = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \ddots & 0 & \vdots\\ 0 & & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & e^{\lambda_n}\end{pmatrix}$, et

donc, pour tout $j\in\mathbb{N}$ tel que $1\leqslant j\leqslant n$, $e^{\lambda_j} = 1$ et donc, $\lambda_j = 2ik\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

Ce que nous voulions

A.2.13 Exercices

Exercice 22 :

Soit la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par : $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -2 & -2 & -2 \\ 11 & 17 & -1 \end{pmatrix}$

Vérifier que A est nilpotente et calculer $\exp A$

Exercice 23 :

Soit la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer $\exp A$

Exercice 24 :

Soit la matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par : $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, calculer $\exp(tB)$

Exercice 25 :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A^4 = \mathrm{Id}_n$. Déterminer $\exp(A)$.

Exercice 26 :

Calculer $\exp A$ dans les cas suivants :

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & j & j^2 \\ j & j^2 & 1 \\ j^2 & 1 & j \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$
3. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

Exercice 27 :

On considère T le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices triangulaires supérieures.
T^+ est le sous-ensemble de T dont les coefficients diagonaux sont strictement positifs.

1. Pour $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in T$, calculer $\exp M$
2. L'application $\exp : T \longrightarrow T^+$ est-elle bijective ?

Exercice 28 :

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice réelle carrée d'ordre n antisymétrique. Etablir que la matrice $\exp(M)$ est orthogonale.