A.3 Equation différentielle

A.3.1 Proposition

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $Y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}^n$ une fonction dérivable.

Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$, nous avons :

$$Y'(t) = AY'(t) \iff Y(t) = \exp(tA)Y(0)$$

Démonstration

Notons, tout d'abord, que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et tout $(X, Y) \in \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n$, nous avons, et puisque la matrice $\exp A$ est inversible

$$Y = \exp AX \iff X = \exp(-A)Y$$

Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}$, nous avons :

$$Y'(t) = AY'(t) \iff Y'(t) - AY'(t) = \mathcal{O}_{\mathbb{K}^n}$$

Soit $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\Phi(t) = \exp(-tA)$. D'après A.2.7, Φ est différentiable et $\Phi'(t) = -A \exp(-tA)$.

Puisque $\exp(-tA) \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$, nous pouvons composer à gauche par $\exp(-tA)$. Ainsi,

$$\begin{aligned} Y'(t) - AY'(t) = \mathcal{O}_{\mathbb{K}^n} &\iff \exp(-tA)[Y'(t) - AY'(t)] = \exp(-tA)\mathcal{O}_{\mathbb{K}^n} \\ &\iff \exp(-tA)Y'(t) - \exp(-tA)AY'(t) = \mathcal{O}_{\mathbb{K}^n} \end{aligned}$$

Or, il est facile de démontrer que $\exp(-tA)A = A \exp(-tA)$ et donc, nous avons :

$$\begin{aligned} \exp(-tA)Y'(t) - \exp(-tA)AY'(t) = \mathcal{O}_{\mathbb{K}^n} &\iff \Phi(t)Y'(t) - \Phi'(t)AY'(t) = \mathcal{O}_{\mathbb{K}^n} \\ &\iff [\Phi(t)Y(t)]' = \mathcal{O}_{\mathbb{K}^n} \\ &\iff \Phi(t)Y(t) = U \text{ où } U \in \mathbb{K}^n \end{aligned}$$

En faisant $t = 0$, il nous est possible de connaître U .

En effet, $U = \Phi(0)Y(0)$, et comme $\Phi(0) = 1$, nous obtenons $U = Y(0)$.

D'autre part, de $\Phi(t)Y(t) = Y(0)$, nous avons $Y(t) = \Phi(-t)Y(0) \iff Y(t) = \exp(tA)Y(0)$

Ce que nous voulions.

Exemple 5 :

Résolvons le système différentiel

$$\begin{cases} x' = x + z \\ y' = -y - z \\ z' = 2y + z \end{cases}$$

Nous allons utiliser ce que nous venons de démontrer.

Appelons $Y(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ qui est une fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}^3$ et $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ avec $A =$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et nous avons alors :

$$\begin{cases} x' = x + z \\ y' = -y - z \\ z' = 2y + z \end{cases} \iff Y'(t) = AY(t)$$

Recherchons le polynôme caractéristique de A

$$P_A(X) = \det(A - X\text{Id}_3) = \begin{vmatrix} 1-X & 0 & 1 \\ 0 & -1-X & -1 \\ 0 & 2 & 1-X \end{vmatrix} = (1-X) \begin{vmatrix} -1-X & -1 \\ 2 & 1-X \end{vmatrix} \\ = (1-X)[(1-X)(-1-X) + 2] = (1-X)(X^2 + 1) = (1-X)(X-i)(X+i)$$

La matrice A est donc diagonalisable et admet comme valeurs propres 1, i et $-i$

▷ Nous cherchons l'espace propre de valeur propre 1. La résolution du système

$$\begin{cases} x+z = x \\ -y-z = y \\ 2y+z = z \end{cases}$$

Montre que l'espace propre de valeur propre 1 est le sous-espace vectoriel $\mathbb{C}U$ où $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

▷ Nous cherchons l'espace propre de valeur propre i . La résolution du système

$$\begin{cases} x+z = ix \\ -y-z = iy \\ 2y+z = iz \end{cases} \iff \begin{cases} (1-i)x+z = 0 \\ (1+i)y+z = 0 \\ 2y+(1-i)z = 0 \end{cases}$$

Montre que l'espace propre de valeur propre i est le sous-espace vectoriel $\mathbb{C}V$ où $V = \begin{pmatrix} 1+i \\ 1-i \\ -2 \end{pmatrix}$

▷ Nous cherchons l'espace propre de valeur propre $-i$. La résolution du système

$$\begin{cases} x+z = -ix \\ -y-z = -iy \\ 2y+z = -iz \end{cases} \iff \begin{cases} (1+i)x+z = 0 \\ (1-i)y+z = 0 \\ 2y+(1+i)z = 0 \end{cases}$$

Montre que l'espace propre de valeur propre $-i$ est le sous-espace vectoriel $\mathbb{C}W$ où $W = \begin{pmatrix} 1-i \\ 1+i \\ -2 \end{pmatrix}$

La matrice de passage de $(\mathbb{C}^3, \{U, V, W\})$ dans $(\mathbb{C}^3, \text{Can})$ est $P = \begin{pmatrix} 1 & 1+i & 1-i \\ 0 & 1-i & 1+i \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ et si D est la

matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$, nous avons $D = P^{-1}AP \iff A = PDP^{-1}$, et pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\exp(tA) = P \exp(tD) P^{-1}$.

Par calcul, nous obtenons $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2i} & -\frac{1+i}{4i} \\ 0 & \frac{1}{2i} & \frac{1-i}{4i} \end{pmatrix}$ et $\exp(tD) = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{it} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-it} \end{pmatrix}$

En posant $Y(0) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ où $\alpha \in \mathbb{C}$, $\beta \in \mathbb{C}$ et $\gamma \in \mathbb{C}$, nous avons $Y(t) = \exp(tA)Y(0)$ et donc, tous calculs faits², nous avons :

$$Y(t) = (\alpha + \beta + \gamma) e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left(\frac{\beta i}{2} + \frac{\gamma(i-1)}{4} \right) e^{it} \begin{pmatrix} 1+i \\ 1-i \\ -2 \end{pmatrix} + \left(\frac{\beta}{2i} + \frac{\gamma(1-i)}{4i} \right) e^{-it} \begin{pmatrix} 1-i \\ 1+i \\ -2 \end{pmatrix} \\ \text{avec } \alpha \in \mathbb{C} \quad \beta \in \mathbb{C} \quad \gamma \in \mathbb{C}$$

2. Et péniblement!!

A.3.2 Proposition

Soit $V : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$ une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}^n$
 Soit $Y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$ une fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}^n$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$
 Nous considérons l'équation différentielle

$$Y'(t) = AY(t) + V(t) \quad (\text{A.1})$$

et son équation différentielle homogène associée

$$Y'(t) = AY(t) \quad (\text{A.2})$$

Alors, toute solution de A.1 est somme de la solution générale de A.2 et d'une solution particulière de A.1

Démonstration

Soit $X_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$ une fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}^n$ solution particulière de A.1.

Ceci signifie que nous avons $X_0'(t) = AX_0(t) + V(t)$.

Soit Y la solution générale de A.1 et considérons $Z = Y - X_0$.

Alors $Z'(t) = Y'(t) - X_0'(t) = (AY(t) + V(t)) - (AX_0(t) + V(t)) = A(Y(t) - X_0(t)) = AZ(t)$

Z apparaît donc comme la solution de A.2 et donc $Y = Z + X_0$.

Remarque 11 :

1. En utilisant A.3.1 nous pouvons écrire $Y(t) = \exp(tA)Z(0) + X_0(t)$
2. Recherche d'une solution par variations de la constante

On s'intéresse toujours à l'équation A.1 $Y'(t) = AY(t) + V(t)$ avec $t \in \mathbb{R}$

L'équation homogène associée A.2 a pour solution générale : $Y(t) = \exp(tA)Y_0$ pour un certain $Y_0 \in \mathbb{C}^n$.

Pour trouver une solution particulière de A.1 on va faire varier la constante Y_0 . Autrement dit, on cherche une solution Y de A.1 sous la forme $Y(t) = \exp(tA)Y_0(t)$ où Y_0 est une fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}^n$

Nous avons $Y'(t) = A \exp(tA)Y_0(t) + \exp(tA)Y_0'(t)$. Par conséquent

$$\begin{aligned} Y'(t) = AY(t) + V(t) &\iff A \exp(tA)Y_0(t) + \exp(tA)Y_0'(t) = A \exp(tA)Y_0(t) + V(t) \\ &\iff \exp(tA)Y_0'(t) = V(t) \\ &\iff Y_0'(t) = \exp(-tA)V(t) \end{aligned}$$

Nous devons donc trouver une primitive de $\exp(-tA)V(t)$ que nous noterons donc Y_0 . Une fois cette primitive calculée nous pourrons appliquer le théorème précédent