

A.3 Etude géométrique

Nous allons beaucoup utiliser la notion de Groupe opérant dans un ensemble. Il faudra donc, souvent, se référer à 12.12

A.3.1 Définition de demi-plan de Poincaré (*rappel*)

Le demi-plan de Poincaré \mathbb{H} est l'ensemble des points du plan d'ordonnée strictement positive, c'est à dire, d'un point de vue complexe :

$$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \text{ tels que } \text{Im } z > 0\}$$

A.3.2 Proposition

Nous faisons agir $SL_2(\mathbb{Z})$ sur \mathbb{H} par l'action notée Φ définie par :

$$\begin{cases} \Phi : SL_2(\mathbb{Z}) & \longrightarrow & \sigma_{\mathbb{H}} \\ M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \longmapsto & \Phi(M)(z) = \frac{az+b}{cz+d} \end{cases}$$

Alors :

1. Pour tout $z \in \mathbb{H}$, $\Phi(M)(z) \in \mathbb{H}$
2. Pour tout $M \in SL_2(\mathbb{Z})$, $\Phi(M)$ est une bijection
3. Φ est un homomorphisme de groupe, c'est à dire que pour tout $M \in SL_2(\mathbb{Z})$ et tout $M_1 \in SL_2(\mathbb{Z})$,

$$\Phi(M \times M_1) = \Phi(M) \circ \Phi(M_1)$$

Démonstration

$\sigma_{\mathbb{H}}$ désigne l'ensemble des permutations de \mathbb{H} . L'énoncé de la proposition est donc bien prétentieux en écrivant d'emblée $\Phi : SL_2(\mathbb{Z}) \longrightarrow \sigma_{\mathbb{H}}$.

Cette erreur est réparée dans la démonstration des points 1 et 2. C'est, en quelques sortes, une « avance sur recettes »

La démonstration de cette proposition a déjà été plus ou moins faite en exercice à partir de la page 859. Nous l'adaptions à notre question

1. **Démontrons que, pour tout** $z \in \mathbb{H}$, $\Phi(M)(z) \in \mathbb{H}$

Il faut donc démontrer que si $\text{Im } z > 0$, alors $\text{Im}(\Phi(M)(z)) > 0$.

Soit donc $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ un élément de $SL_2(\mathbb{Z})$

Pour commencer, nous avons

$$\Phi(M)(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{(az+b)\overline{(cz+d)}}{(cz+d)\overline{(cz+d)}} = \frac{(az+b)(c\bar{z}+d)}{(cz+d)(c\bar{z}+d)} = \frac{ac|z|^2 + adz + bc\bar{z} + bd}{|cz+d|^2}$$

En posant $z = x + iy$, avec $y > 0$, nous avons :

$$\Phi(M)(z) = \frac{ac|z|^2 + ad(x+iy) + bc(x-iy) + bd}{|cz+d|^2} = \frac{ac|z|^2 + (ad+bc)x + bd}{|cz+d|^2} + i \frac{y(ad-bc)}{|cz+d|^2}$$

Et donc $\text{Im}(\Phi(M)(z)) = \frac{y(ad-bc)}{|cz+d|^2} = \frac{\text{Im}(z)}{|cz+d|^2}$ puisque $ad-bc = 1$

Ainsi, si $z \in \mathbb{H}$, c'est à dire si $y = \text{Im}(z) > 0$, alors nous avons $\text{Im}(\Phi(M)(z)) > 0$, et donc $\Phi(M)(z) \in \mathbb{H}$

2. Montrons que pour tout $M \in SL_2(\mathbb{Z})$, $\Phi(M)$ est une bijection

Soit donc $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ un élément de $SL_2(\mathbb{Z})$ et démontrons que $\Phi(M)$ est une bijection

▷ $\Phi(M)$ est injective

Soient $z \in \mathbb{H}$ et $z_1 \in \mathbb{H}$ tels que $\Phi(M)(z) = \Phi(M)(z_1)$; alors :

$$\begin{aligned} \Phi(M)(z) = \Phi(M)(z_1) &\iff \frac{az+b}{cz+d} = \frac{az_1+b}{cz_1+d} \\ &\iff (az+b)(cz_1+d) = (az_1+b)(cz+d) \\ &\iff acz z_1 + adz + bc z_1 + bd = acz z_1 + adz_1 + bc z + bd \\ &\iff adz + bc z_1 = adz_1 + bc z \\ &\iff (ad-bc)z = (ad-bc)z_1 \\ &\iff z = z_1 \text{ puisque } ad-bc = 1 \end{aligned}$$

$\Phi(M)$ est donc injective

▷ $\Phi(M)$ est surjective

Soit $Z \in \mathbb{H}$. Existe-t-il $z \in \mathbb{H}$ tel que $\Phi(M)(z) = Z$?

$$\begin{aligned} \Phi(M)(z) = Z &\iff Z = \frac{az+b}{cz+d} \\ &\iff Z(cz+d) = az+b \iff Zcz + dZ = az+b \\ &\iff Zcz - az = b - dZ \iff z(cZ - a) = -dZ + b \\ &\iff z = \frac{dZ - b}{-cZ + a} \end{aligned}$$

Evidemment, $Z \neq \frac{a}{c}$ puisque $\text{Im}(Z) > 0$ et donc $Z \notin \mathbb{R}$.

$\Phi(M)$ est donc surjective.

$\Phi(M)$ est donc bijective et $\Phi(M)^{-1}(z) = \frac{dz-b}{-cz+a}$.

On peut remarquer que si $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ un élément de $SL_2(\mathbb{Z})$ alors $M^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ et nous avons $\Phi(M)^{-1} = \Phi(M^{-1})$

3. Montrons que Φ est un homomorphisme de groupe

Pour $M \in SL_2(\mathbb{Z})$ et $M_1 \in SL_2(\mathbb{Z})$, il faut donc montrer

$$\Phi(M \times M_1) = \Phi(M) \circ \Phi(M_1)$$

Posons, pour les calculs, $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $M_1 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ et donc $M \times M_1 = \begin{pmatrix} a\alpha + b\gamma & a\beta + b\delta \\ c\alpha + d\gamma & c\beta + d\delta \end{pmatrix}$

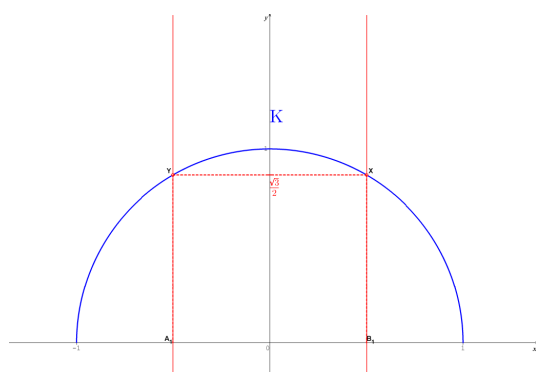
Ainsi, pour $z \in \mathbb{H}$, $\Phi(M \times M_1)(z) = \frac{(a\alpha + b\gamma)z + (a\beta + b\delta)}{(c\alpha + d\gamma)z + (c\beta + d\delta)}$

Or, nous pouvons démontrer que $\Phi(M)[\Phi(M_1)(z)] = \frac{(a\alpha + b\gamma)z + (a\beta + b\delta)}{(c\alpha + d\gamma)z + (c\beta + d\delta)}$.

Nous avons bien $\Phi(M \times M_1) = \Phi(M) \circ \Phi(M_1)$ et Φ est bien un homomorphisme de groupe

Remarque 5 :

1. D'après ce que nous venons d'étudier, $SL_2(\mathbb{Z})$ agit sur \mathbb{H} par l'action Φ
2. Soient $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 2 matrices de $SL_2(\mathbb{Z})$. Nous notons $\Gamma(S, T) = \langle S, T \rangle$ le sous-groupe de $SL_2(\mathbb{Z})$ engendré par S et T
3. Soit $K = \left\{ z \in \mathbb{H} \text{ tels que } |z| \geq 1 \text{ et } |\text{Re}(z)| \leq \frac{1}{2} \right\}$
4. Nous souhaitons démontrer que $\Gamma(S, T) = SL_2(\mathbb{Z})$

FIGURE A.1 – Un schéma de l'ensemble K

A.3.3 Proposition

Pour tout $z \in \mathbb{H}$, il existe $A \in \Gamma(S, T)$ telle que $\Phi(A)(z) \in K$
 Autrement dit, toute orbite de l'action Φ , restreinte à $\Gamma(S, T)$ rencontre l'ensemble K

Démonstration

Soit donc $z \in \mathbb{H}$

1. **Nous allons démontrer que les couples d'entiers $(c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tels que $|cz + d| \leq 1$ sont en nombre fini**

Pour démontrer le résultat demandé, nous allons procéder en 2 étapes.

- ▷ Dans un premier temps, pour tout $z \in \mathbb{C}$, nous avons $|\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$, et comme $z \in \mathbb{H}$, nous avons $\operatorname{Im}(z) > 0$, et donc, pour tout $z \in \mathbb{H}$, nous avons $0 < \operatorname{Im}(z) \leq |z|$
- ▷ Maintenant, pour tout $z \in \mathbb{C}$, tout $c \in \mathbb{Z}$ et tout $d \in \mathbb{Z}$, nous avons :

$$cz + d = c(\operatorname{Re}(z) + i \operatorname{Im}(z)) + d = (c \operatorname{Re}(z) + d) + ic \operatorname{Im}(z)$$

Et donc $\operatorname{Im}(cz + d) = c \operatorname{Im}(z)$

- ▷ Ainsi, pour tout $z \in \mathbb{H}$,

$$\bullet \quad |cz + d| \geq |\operatorname{Im}(cz + d)| = |c \operatorname{Im}(z)| = |c| \operatorname{Im}(z)$$

Et donc, si $|cz + d| \leq 1$, alors $|c| \operatorname{Im}(z) \leq 1$, c'est à dire $|c| \leq \frac{1}{\operatorname{Im}(z)}$

- ▷ Donc, à $z \in \mathbb{H}$ fixé, l'ensemble des entiers $c \in \mathbb{Z}$ tels que $|c| \leq \frac{1}{\operatorname{Im}(z)}$ est bien un ensemble fini.
- ▷ Soit $c \in \mathbb{Z}$, fixé, et montrons maintenant qu'il n'y a qu'un nombre fini de $d \in \mathbb{Z}$ tels que $|cz + d| \leq 1$
- ▷ Comme ci-dessus, pour tout $z \in \mathbb{C}$, nous avons $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$ et aussi, à l'image de l'étape ci-dessus, $\operatorname{Re}(cz + d) = c \operatorname{Re}(z) + d$
- ▷ Nous avons donc $|\operatorname{Re}(cz + d)| = |c \operatorname{Re}(z) + d| \leq |cz + d| \leq 1$ et nous avons donc $|c \operatorname{Re}(z) + d| \leq 1$
- ▷ De là, nous tirons :

$$|c \operatorname{Re}(z) + d| \leq 1 \iff -1 \leq c \operatorname{Re}(z) + d \leq 1 \iff -1 - c \operatorname{Re}(z) \leq d \leq 1 - c \operatorname{Re}(z)$$

- ▷ Or

$$\begin{aligned} -|c \operatorname{Re}(z)| &\leq c \operatorname{Re}(z) \leq |c \operatorname{Re}(z)| \\ &\iff \\ -|c| |\operatorname{Re}(z)| &\leq c \operatorname{Re}(z) \leq |c| |\operatorname{Re}(z)| \\ &\iff \\ -|c| |\operatorname{Re}(z)| &\leq -c \operatorname{Re}(z) \leq |c| |\operatorname{Re}(z)| \end{aligned}$$

Et donc

$$-1 - |c| |\operatorname{Re}(z)| \leq -1 - c \operatorname{Re}(z) \leq d \leq 1 - c \operatorname{Re}(z) \leq 1 + |c| |\operatorname{Re}(z)|$$

▷ En synthèse, nous avons donc $-1 - |c| |\operatorname{Re}(z)| \leq d \leq 1 + |c| |\operatorname{Re}(z)|$, ce qui montre qu'il n'existe aussi qu'un nombre fini d'entiers $d \in \mathbb{Z}$

En conclusion, pour tout $z \in H$, le nombre de couples $(c, d) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $|cz + d| \leq 1$ est fini.

2. Nous allons montrer qu'il existe une matrice $A_1 \in \Gamma(S, T)$ telle que $\operatorname{Im}(\Phi(A_1)(z))$ soit maximal

Notre problème n'est pas de trouver une matrice précise $A_1 \in \Gamma(S, T)$ telle que $\operatorname{Im}(\Phi(A_1)(z))$ soit maximal, mais d'en prouver seulement l'existence.

⇒ Pour $M \in SL_2(\mathbb{Z})$, nous avons démontré que $\operatorname{Im}(\Phi(M)(z)) = \frac{\operatorname{Im}(z)}{|cz + d|^2}$

Comme $\Gamma(S, T) \subset SL_2(\mathbb{Z})$ l'ensemble $\Gamma(S, T)$ hérite des propriétés de $SL_2(\mathbb{Z})$ et donc, pour tout $M \in \Gamma(S, T)$, nous avons $\operatorname{Im}(\Phi(M)(z)) = \frac{\operatorname{Im}(z)}{|cz + d|^2}$

Alors $\operatorname{Im}(\Phi(M)(z))$ sera maximale lorsque $|cz + d|^2$ sera minimal.

⇒ Nous venons de montrer qu'il n'y a qu'un nombre fini de couples d'entiers $c \in \mathbb{Z}$ et $d \in \mathbb{Z}$ tels que $|cz + d| \leq 1 \iff |cz + d|^2 \leq 1$

⇒ Soit \mathcal{U} le sous-ensemble de $\Gamma(S, T)$ formé des matrices $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telles que $|cz + d|^2 \leq 1$, c'est à dire :

$$\mathcal{U} = \left\{ g \in \Gamma(S, T) \text{ où } g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ telle que } |cz + d|^2 \leq 1 \right\}$$

▷ Tout d'abord $\mathcal{U} \neq \emptyset$ puisque si $c = 0$ et $d = 1$, alors $|cz + d|^2 = 1$ et une matrice de \mathcal{U} pourrait être, par exemple, $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

▷ D'autre part, les couples $(c, d) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $|cz + d|^2 \leq 1$ sont en nombre fini et il existe au moins un couple $(c_0, d_0) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $|c_0 z + d_0|^2$ soit minimal

▷ Il existe donc au moins une matrice $A_1 \in \Gamma(S, T)$, soit $A_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ c_0 & d_0 \end{pmatrix}$ telle que $\operatorname{Im}(\Phi(A_1)(z))$ soit maximale

3. Nous notons $z_1 = \Phi(A_1)(z)$; nous souhaitons translater le point z_1 , de telle sorte que ce translaté soit dans K

▷ Revenons à $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Nous avons démontré que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $T^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, c'est à dire que, pour tout $z \in \mathbb{H}$,

$$\Phi(T^n)(z) = z + n$$

$$\text{En particulier } \Phi(T^n A_1)(z) = \Phi(T^n) \circ \Phi(A_1)(z) = \Phi(A_1)(z) + n = z_1 + n$$

▷ Remarquons, une fois de plus, que :

$$\operatorname{Re}(\Phi(T^n A_1)(z)) = \operatorname{Re}(z_1) + n$$

▷ Nous souhaitons trouver $n_0 \in \mathbb{Z}$ tel que

$$-\frac{1}{2} \leq \operatorname{Re}(\Phi(T^{n_0} A_1)(z)) \leq \frac{1}{2} \iff -\frac{1}{2} \leq \operatorname{Re}(z_1) + n_0 \leq \frac{1}{2}$$

Or :

$$-\frac{1}{2} \leq \operatorname{Re}(z_1) + n_0 \leq \frac{1}{2} \iff -\frac{1}{2} - n_0 \leq \operatorname{Re}(z_1) \leq \frac{1}{2} - n_0 \iff -n_0 \leq \operatorname{Re}(z_1) + \frac{1}{2} \leq -n_0 + 1$$

Et donc $n_0 = -\left[\operatorname{Re}(z_1) + \frac{1}{2} \right]$ où $[\bullet]$ désigne la partie entière

4. Nous appelons $z_2 = \Phi(T^{n_0})(z_1)$

▷ Alors, $z_2 = \Phi(T^{n_0})(z_1) = z_1 + n_0$.

Sortons quelques remarques :

- ★ De l'étude précédente, nous avons $|\operatorname{Re}(\Phi(T^{n_0})(z_1))| = |z_2| \leq \frac{1}{2}$
- ★ D'autre part,

$$\operatorname{Im}(z_2) = \operatorname{Im}(\Phi(T^{n_0})(z_1)) = \operatorname{Im}(z_1 + n_0) = \operatorname{Im}(z_1) = \operatorname{Im}(\Phi(A_1)(z)) = \frac{\operatorname{Im}(z)}{|cz + d|^2} > 0$$

▷ Nous allons montrer que $|z_2| \geq 1$
Supposons, au contraire, que $|z_2| < 1$.

Alors, $\Phi(S)(z_2) = \frac{-1}{z_2} = -\frac{\bar{z}_2}{|z_2|^2}$ et donc

$$\operatorname{Im}(\Phi(S)(z_2)) = \operatorname{Im}\left(-\frac{\bar{z}_2}{|z_2|^2}\right) = \frac{\operatorname{Im}(z_2)}{|z_2|^2}$$

Comme $|z_2| < 1$, alors $\frac{1}{|z_2|^2} > 1$ et donc $\operatorname{Im}(\Phi(S)(z_2)) > \operatorname{Im}(z_2)$.

Or, comme $\operatorname{Im}(z_2) = \operatorname{Im}(z_1)$ et que $\operatorname{Im}(z_1) = \operatorname{Im}(\Phi(A_1)(z))$ qui est maximale, il est impossible que $|z_2| < 1$.

Donc $|z_2| \geq 1$ et $z_2 \in K$

▷ Ainsi, nous avons $z_2 = \Phi(T^{n_0})(z_1) = \Phi(T^{n_0})(\Phi(A_1)(z)) = \Phi(T^{n_0}A_1)(z)$.

Nous avons donc obtenu $z_2 \in K$, à partir de $z \in \mathbb{H}$ en faisant agir des matrices de $\Gamma(S, T)$, ce qui prouve la proposition.

A.3.4 Proposition

Soient $z \in K$ et $A \in SL_2(\mathbb{Z})$ tels que $\Phi(A)(z) \in K$.
Alors, $A \in \Gamma(S, T)$

Démonstration

Soient $z \in K$ et $A \in SL_2(\mathbb{Z})$ tels que $\Phi(A)(z) \in K$.

Nous posons $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $ad - bc = 1$ et donc $\Phi(A)(z) = \frac{az + b}{cz + d}$

1. Si $z \in K$, alors $\operatorname{Im}(z) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$

C'est facile à démontrer ; la figure A.2 ci-après l'illustre bien

Il suffit de voir que si $z \in K$, alors l'argument de z , noté $\arg z$ est compris entre $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{2\pi}{3}$ et

qu'alors $\arg z \geq \sin \frac{\pi}{3} = \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

2. Nous pouvons nous restreindre aux cas où $|cz + d| \leq 1$

▷ Nous avons démontré que $\operatorname{Im}(\Phi(A)(z)) = \frac{\operatorname{Im}(z)}{|cz + d|^2}$.

Si $|cz + d| \leq 1$, alors $|cz + d|^2 \leq 1$ et $\frac{1}{|cz + d|^2} \geq 1$ et comme $\operatorname{Im}(z) > 0$, nous avons

$\frac{\operatorname{Im}(z)}{|cz + d|^2} \geq \operatorname{Im}(z)$. Et, en définitive, $\operatorname{Im}(\Phi(A)(z)) \geq \operatorname{Im}(z)$

Ainsi, si $|cz + d| \leq 1$, alors $\operatorname{Im}(\Phi(A)(z)) \geq \operatorname{Im}(z)$

▷ Supposons au contraire que $\operatorname{Im}(z) < \operatorname{Im}(\Phi(A)(z))$.

Nous avons $z = \Phi(A)^{-1} \circ \Phi(A)(z) = \Phi(A^{-1}) \circ \Phi(A)(z)$, c'est à dire, suivant notre supposition, $\operatorname{Im}(\Phi(A)(z)) < \operatorname{Im}(\Phi(A^{-1})(\Phi(A)(z)))$

Il est donc équivalent de faire l'étude sur A^{-1} et si nous démontrons que $A^{-1} \in \Gamma(S, T)$, comme $\Gamma(S, T)$ est un groupe, nous aurons aussi $A \in \Gamma(S, T)$

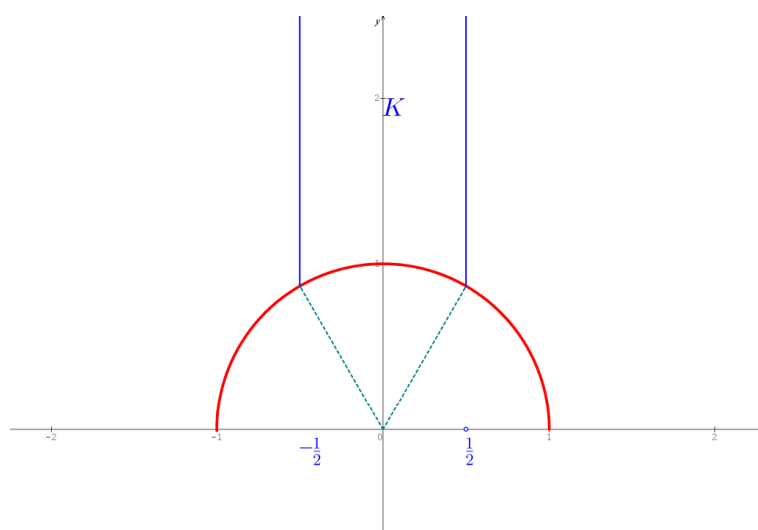


FIGURE A.2 –

3. **Supposons donc que $|cz + d| \leq 1$; montrons qu'alors $c \in \{-1, 0, +1\}$**

▷ Rappelons tout d'abord que, pour tout $Z \in \mathbb{C}$, nous avons $|\operatorname{Im}(Z)| \leq |Z|$.

D'autre part, $cz + d = c(\operatorname{Re}(z) + i \operatorname{Im}(z)) + d = (c \operatorname{Re}(z) + d) + ic \operatorname{Im}(z)$ et donc

$$\operatorname{Im}(cz + d) = c \operatorname{Im}(z)$$

Donc $|\operatorname{Im}(cz + d)| = |c| |\operatorname{Im}(z)| \leq |cz + d| \leq 1$, ce qui nous permet d'écrire :

$$|c| |\operatorname{Im}(z)| \leq 1 \iff |c| \leq \frac{1}{|\operatorname{Im}(z)|}$$

Comme nous avons $|\operatorname{Im}(z)| \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$, alors $|c| \leq \frac{1}{|\operatorname{Im}(z)|} \leq \frac{2}{\sqrt{3}} < 2$

▷ Comme $c \in \mathbb{Z}$, de $|c| < 2$, nous déduisons que $c \in \{-1, 0, +1\}$

4. **Supposons $c = 0$**

Alors, de $ad - bc = 1$ nous tirons $ad = 1$ et donc $a = d = 1$ ou $a = d = -1$

(a) **Supposons $a = d = 1$** Alors $A = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $A = T^b$.

Donc $\Phi(A)(z) = z + b$, c'est à dire que $\Phi(A)$ est une translation de vecteur d'affixe b

▷ On sait que $z \in K$ et donc que nous avons $|\operatorname{Re}(z)| \leq \frac{1}{2}$ et on sait aussi que $\Phi(A)(z) \in K$,

donc, de même, $|\operatorname{Re}(\Phi(A)(z))| \leq \frac{1}{2}$.

▷ Nous avons $\Phi(A)(z) = (\operatorname{Re}(z) + b) + i \operatorname{Im}(z)$ et donc $|\operatorname{Re}(\Phi(A)(z))| = |\operatorname{Re}(z) + b|$

▷ Comme $|\operatorname{Re}(z)| \leq \frac{1}{2}$, nous avons $-\frac{1}{2} \leq \operatorname{Re}(z) \leq \frac{1}{2}$, et donc, toujours,

$$-\frac{1}{2} + b \leq \operatorname{Re}(z) + b \leq \frac{1}{2} + b$$

▷ Nous allons étudier 3 cas : $|\operatorname{Re}(z)| < \frac{1}{2}$, $\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}$ et $\operatorname{Re}(z) = -\frac{1}{2}$

→ Supposons, pour commencer, que $|\operatorname{Re}(z)| < \frac{1}{2} \iff -\frac{1}{2} < \operatorname{Re}(z) < \frac{1}{2}$

Alors, pour tout $b \in \mathbb{Z}$, reprenant le point ci-dessus, nous avons

$$-\frac{1}{2} + b < \operatorname{Re}(z) + b < \frac{1}{2} + b$$

C'est à dire

$$-\frac{1}{2} + b < \operatorname{Re}(\Phi(A)(z)) < \frac{1}{2} + b$$

◇ Si $b \geq +1$, alors $-\frac{1}{2} + b \geq -\frac{1}{2} + 1$, c'est à dire $-\frac{1}{2} + b \geq \frac{1}{2}$.

Comme $\operatorname{Re}(\Phi(A)(z)) > -\frac{1}{2} + b$, nous avons $\operatorname{Re}(\Phi(A)(z)) > \frac{1}{2}$

◇ Si $b \leq -1$, alors $\frac{1}{2} + b \leq \frac{1}{2} - 1$, c'est à dire $\frac{1}{2} + b \leq -\frac{1}{2}$

Comme $\operatorname{Re}(\Phi(A)(z)) < -\frac{1}{2} + b$, nous avons $\operatorname{Re}(\Phi(A)(z)) < -\frac{1}{2}$

Dans les 2 cas, nous avons $|\operatorname{Re}(\Phi(A)(z))| > \frac{1}{2}$, ce qui est impossible.

Donc $b = 0$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{Id}_2$

→ Si $\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}$, alors $|\operatorname{Re}(\Phi(A)(z))| = \left| \frac{1}{2} + b \right|$

◇ Si $b \geq +1$, alors $|\operatorname{Re}(\Phi(A)(z))| = \frac{1}{2} + b \geq \frac{3}{2}$, et c'est impossible

◇ Si $b = -1$, alors $|\operatorname{Re}(\Phi(A)(z))| = \left| \frac{1}{2} - 1 \right| = \frac{1}{2}$, et c'est possible!!

◇ Si $b = 0$, alors nous avons aussi $|\operatorname{Re}(\Phi(A)(z))| = \left| \frac{1}{2} - 1 \right| = \frac{1}{2}$

◇ Si $b \leq -2$ alors $\frac{1}{2} + b \leq \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2}$ et $\left| \frac{1}{2} + b \right| \geq \frac{3}{2}$, ce qui est impossible

Les seules matrices A possibles sont donc :

$$A = T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A = \operatorname{Id}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

→ Si $\operatorname{Re}(z) = -\frac{1}{2}$, alors $|\operatorname{Re}(\Phi(A)(z))| = \left| -\frac{1}{2} + b \right|$

◇ Si $b \geq +2$, alors $|\operatorname{Re}(\Phi(A)(z))| = -\frac{1}{2} + b \geq \frac{3}{2}$, et c'est impossible

◇ Si $b = 1$, alors $|\operatorname{Re}(\Phi(A)(z))| = \left| -\frac{1}{2} + 1 \right| = \frac{1}{2}$, et c'est possible!!

◇ Si $b = 0$, alors nous avons aussi $|\operatorname{Re}(\Phi(A)(z))| = \left| -\frac{1}{2} + 0 \right| = \frac{1}{2}$

◇ Si $b \leq -1$ alors $\frac{1}{2} + b \leq -\frac{1}{2} - - = -\frac{3}{2}$ et $\left| \frac{1}{2} + b \right| \geq \frac{3}{2}$, ce qui est impossible

Les seules matrices A possibles sont donc :

$$A = T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A = \operatorname{Id}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) **Supposons** $a = d = -1$

Alors $A = \begin{pmatrix} -1 & b \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et nous allons étudier $-A = \begin{pmatrix} 1 & -b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = T^{-b}$ de la même manière que ci-dessus.

Nous obtenons alors $A = -\operatorname{Id}_2$, $A = -T^{-1}$ et $A = -T$

Dans chaque cas, si $c = 0$, nous avons $A \in \Gamma(S, T)$

5. **Supposons** $c = 1$

Alors, nous avons $|z + d| \leq 1$

▷ Il n'y a que 3 choix possibles : $d = 0$, $d = 1$ ou $d = -1$

◇ Si $d = 0$

Alors $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\det A = -b = 1$ ce qui donne $b = -1$ et $A = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ de telle sorte

que $\Phi(A)(z) = \frac{az - 1}{z} = a - \frac{1}{z}$.

→ Avec $d = 0$, l'hypothèse $|z + d| \leq 1$ se traduit par $|z| \leq 1$. Comme $z \in K$, alors $|z| \geq 1$

et donc $|z| = 1 \iff \frac{1}{z} = \bar{z}$ et donc $\Phi(A)(z) = a - \bar{z}$

→ De là, nous déduisons que $|\operatorname{Re}(\Phi(A)(z))| = |a - \operatorname{Re}(z)|$

Reprenant les données précédentes, comme $z \in K$ et $\Phi(A)(z) \in K$, nous avons $|\operatorname{Re}(z)| \leq \frac{1}{2}$ et $|\operatorname{Re}(\Phi(A)(z))| \leq \frac{1}{2}$.

→ Comme $|\operatorname{Re}(z)| \leq \frac{1}{2}$, nous avons

$$a - \frac{1}{2} \leq \operatorname{Re}(z) \leq a + \frac{1}{2} \iff a - \frac{1}{2} \leq \operatorname{Re}(\Phi(A)(z)) \leq a + \frac{1}{2}$$

★ Si $a = 0$, alors $-\frac{1}{2} \leq \operatorname{Re}(\Phi(A)(z)) \leq \frac{1}{2}$ et alors $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = S$ et donc $A \in \Gamma(S, T)$

★ Si $a > 1$, alors $a - \frac{1}{2} > \frac{1}{2}$ et donc $\operatorname{Re}(\Phi(A)(z)) > \frac{1}{2}$, ce qui est impossible

★ De même, si $a < -1$, alors $a + \frac{1}{2} < -\frac{1}{2}$ et donc $\operatorname{Re}(\Phi(A)(z)) < -\frac{1}{2}$, ce qui est toujours impossible

★ Si $a = 1$, alors nous avons $\frac{1}{2} \leq \operatorname{Re}(z) \leq \frac{3}{2}$, la seule possibilité devenant $\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}$.

Comme $|z| = 1$, nous avons alors $\operatorname{Im}(z) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $\operatorname{Im}(z) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Comme nous

devons avoir $\operatorname{Im}(z) > 0$, le choix est vite fait et nous avons $\operatorname{Im}(z) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, c'est à dire que $z = 1 + j$

Alors $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $A = TS \in \Gamma(S, T)$

★ Si $a = -1$, alors nous avons $-\frac{3}{2} \leq \operatorname{Re}(z) \leq -\frac{1}{2}$, la seule possibilité devenant

$\operatorname{Re}(z) = -\frac{1}{2}$. Comme $|z| = 1$, nous avons alors $\operatorname{Im}(z) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = j$

Alors $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $A = (ST)^2 \in \Gamma(S, T)$

◇ Si $d = 1$

Alors, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\det A = a - b = 1$ d'où nous tirons $b = a - 1$.

Ainsi, $A = \begin{pmatrix} a & a - 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

★ De $d = 1$, nous tirons toujours $|z + 1| \leq 1$ avec toujours $-\frac{1}{2} \leq \operatorname{Re}(z) \leq \frac{1}{2}$

Or, $\operatorname{Re}(z + 1) = \operatorname{Re}(z) + 1$ et donc, comme précédemment :

$$-\frac{1}{2} + 1 \leq \operatorname{Re}(z) + 1 \leq \frac{1}{2} + 1 \iff \frac{1}{2} \leq \operatorname{Re}(z) + 1 \leq \frac{3}{2}$$

La seule possibilité que nous ayons est $\frac{1}{2} \leq \operatorname{Re}(z) + 1 \iff \operatorname{Re}(z) = -\frac{1}{2}$

Nous avons $|z + 1|^2 = \left| \frac{-1}{2} + 1 + i \operatorname{Im}(z) \right|^2 = \left| \frac{1}{2} + i \operatorname{Im}(z) \right|^2 = \frac{1}{4} + \operatorname{Im}(z)^2$

De $|z + 1| \leq 1$, nous déduisons que

$$\frac{1}{4} + \operatorname{Im}(z)^2 \leq 1 \iff \operatorname{Im}(z)^2 \leq \frac{3}{4} \iff -\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \operatorname{Im}(z) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Nous avons déjà démontré que $\operatorname{Im}(z) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$ et donc la seule possibilité qui nous reste

est $\operatorname{Im}(z) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Donc $z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = j$